MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

CÁLCULO DA FORMA NORMAL PARA SISTEMAS BIDIMENSIONAIS

RELATÓRIO FINAL DO PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC/CNPq/INPE)

Guilherme dos Santos Soares (UFRJ, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: guilherme77fisicaufrj@gmail.com

Dr. Antonio Fernando Bertachini A. Prado (ETE/DMC, Orientador)
E-mail: prado@dem.inpe.br

Alexandre L. Machuy Francisco (Bolsista de Doutorado, ETE, Colaborador)
E-mail: machuy@dem.inpe.br

Julho de 2007.

1 0 Introdução.

A primeira parte deste texto é feita uma revisão de alguns conceitos básicos de álgebra linear, na segunda parte é descrito um pouco da teoria das equações diferenciais. Na terceira é ultima parte é comentado como são elaborados os algoritmos para o cálculo da forma normal para pontos de equilibrio de ssitemas bidimensionais.

2.0 Espaços Vetoriais.

Definição: Seja K um corpo e seja V um conjunto não-vazio com regras de adição e multiplicação por escalar, que a cada u, $v \in V$ associam uma soma $u + v \in V$ e a cada $u \in V$, $k \in K$ associam um produto $ku \in V$. Então V é chamado um *espaço vetorial* sobre K(e os elementos de V são chamados *vetores*)se prevalecem os seguintes axiomas:

[A1] Para qualquer vetores u, v, $w \in V$, $(u + v) + w = u + (v + w)$.

[A2] Existe um vetor em V, chamado 0 ou *vetor zero*, tal que $u + 0 = u$, para qualquer vetor $u \in V$.

[A3] Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em V, denotado por-u,tal que $u + (-u) = 0$.

[A4] Para quaisquer vetores u, $v \in V$, $u + v = v + u$.

[M1] Para qualquer escalar $k \in K$ e quaisquer vetores u, $v \in$ V, $k(u + v) = ku + kv$.

[M2] Para quaisquer escalares a, $b \in K$ e qualquer vetor $u \in V$,$(a+b)u = au + bu$.

[M3] Para quaisquer escalares a, $b \in K$ qualquer vetor $u \in V$, $(ab)u = a(bu)$.

[M4] Para o escalar unitário $1 \in K$, $1u = u$ para qualquer vetor $u \in V$.

2.1.Resultados Imediatos:

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K.

(i) Para qualquer escalar $k \in K$ e $0 \in V$, $k0 = 0$.

(ii) Para $0 \in K$ e qualquer vetor $u \in V$, $0u = 0$.

(iii) Se $ku = 0$, para $k \in K$ e $u \in V$, então $k = 0$ ou $u = 0$.

(iv) Para qualquer $k \in K$ e qualquer $u \in V$,$(-k)u = k(-u) = -ku$.

2.3 Exemplos de Espaços Vetoriais :

Espaço K^n.

Espaço de Matrizes $M_{m,n.}$

Espaço de Polinômios P(t).

Espaço de Funções F(x).

2.4 Subespaços.

Seja W um subconjunto de um espaço vetorial V sobre um corpo K. W é um subespaço de V se W é ele próprio um espaço vetorial sobre K em relação à adição de vetores e à multiplicação por escalar em V. Seguem –se critérios simples para identificar subespaços.

Seja W um subconjunto de um espaço vetorial V. Então W é um subespaço de V se e somente se:

(i) $0 \in W$ (ou $W \neq 0$)

(ii) W é *fechado sob a adição vetorial*, isto é, para todos u, $v \in W$, a soma $u + v \in W$.

(iii) W é fechado sob a multiplicação por escalar, isto é, para todos $u \in W$, $k \in K$, então $ku \in W$.

2.5.Combinações Lineares, Geradores de um Espaço Vetorial

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo e v_1, v_2,...,v_m.Qualquer vetor em V da forma

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m$$

Onde $a_i \in K$ é chamado de uma *combinação linear* de $v_1, v_2, \ldots, v_m$. O conjunto de todas essas combinações lineares, denotado por

$< v_1, v_2, \ldots, v_m >$ ou ger($v_1, v_2, \ldots, v_m$) é chamado de *espaço gerado* por $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

Para qualquer subconjunto S de V, ger(S) ou <S> consiste de todas as combinações lineares de vetores em S.

Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V.
Então <S>é um subespaço de V que contém S.
Se W é um subespaço de V que contém S, então $<S> \subset W$.

2.6 Dependência e Independência Linear

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Os vetores $v_1, \ldots, v_m \in V$ dizem –se linearmente dependentes sobre K, ou simplesmente dependentes , se existem escalares $a_1, \ldots, a_m \in K$ não simultaneamente nulos tais que

$$a1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots a_m v_m = 0.$$

Caso contrário, os vetores se dizem linearmente independentes sobre K, ou simplesmente independentes.

(i) Se 0 é um dos vetores $v_1, \ldots, v_m$,digamos $v_1 = 0$, então os vetores devem ser linearmente dependentes, pois $1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_m = 1.0 + 0 + \ldots + 0 = 0$ e o coeficiente de v_1 não é zero.

(ii) Qualquer vetor não nulo v,é, por si mesmo, linearmente independente; pois $Kv = 0$, $v \neq 0$ acarreta $k = 0$

(iii) Se dois dos vetores $v_1, v_2, ... v_m$ são iguais, ou se um é múltiplo escalar do outro,digamos se $v_1 = kv_2$, então os vetores são linearmente dependentes, pois $v_1 - kv_2 + 0v_3 + ... + 0v_m = 0$. E o coeficiente de v_1 não é zero.

(iv) Dois vetores v_1 e v_2 são linearmente dependentes se e somente se um é múltiplo escalar do outro.

(v) Se o conjunto $\{v_1, ..., v_m\}$é linearmente independente, então também o será qualquer reagrupamento dos vetores $\{vi_1, ..., vi_m\}$.

(vi) Se um conjunto S de vetores é linearmente independente, então qualquer subconjunto de S também o é. Alternativamente, se S contém um subconjunto linearmente dependente, então S é linearmente dependente.

2.7 Base

Definição. Sejam V um espaço vetorial e $S=\{v_1, v_2, \quad , v_n\}$ contido em V. o conjunto S é uma base de V se, somente se,:

(i) S é um conjunto linearmente independente.
(ii) S gera V.

3.0 Transformações Lineares.

Definição. Sejam V e W espaços vetoriais, uma transformação $T:V \rightarrow W$ é chamada de linear, se satisfaz as seguints propriedades:

(i) $T(x+y)=T(x)+T(y)$.
(ii) $T(cx)=cT(x)$.

Para quaisquer que sejam os vetores x e y de V, e qualquer que seja o escalar c.

Exemplo 1. A transformação identidade. T:V→V, donde T(x)=x para todo x de V.

Exemplo 2. a transformação nula T:V→V que aplica cada vetor de V em O, isto é , T(x)=O, para qualquer x de V.

4.0.Autovalores e autovetores.

A equação:

$$\mathbf{Ax=y} \qquad (3)$$

Pode ser considerada uma transformação linear que aplica (ou transforma) um dado vetor **x** em um novo vetor **y**. Os vetores que são transformados em múltiplos de si mesmos têm um papel importante em muitas aplicações. A fim de achar estes vetores, fazemos $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, onde λ é um fator de proporcionalidade escalar, e procuramos soluções das equações

$$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x} \qquad (4)$$

Ou

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (5)$$

esta última equação tem soluções não- nulas se e somente se λ for escolhido de modo que $\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ (6)
Os valores de λ que obedecem à Eq.(6) são **autovalores** da matriz **A** e as soluções da Eq.(4) ou (5), que obtêm com estes valores de λ, são os **autovetores** correspondentes aos respectivos autovalores.Os autovetores são determinados a menos de uma constante multiplicativa arbitraria.

Se um certo autovalor aparecer m vezes, como raiz da Eq.(6), se diz que este autovalor tem a **multiplicidade** m. Cada autovalor tem pelo menos um autovetor que lhe é associado, e um autovalor de multiplicidade m pode ter q autovetores linearmente associados, com: $1 \leq q \leq m$.

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ calcularemos:

(i) Sua matriz característica.

(ii) Seu polinômio característico.

(iii) Sua equação característica.

Usando a definição de matiz característica da matriz A obtemos

$$C = \lambda I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix}.$$

Pela definição de polinômio característico temos:

$$p(\lambda) = \det(C) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - traço(C)\lambda + \det(C) .$$

Equação característica é $\lambda^2 - traço(C)\lambda + \det(C) = 0$.

5.0 Sistemas Dinâmicos:

Consideremos um sistema bidimensional linear homogêneo com coeficientes reais:

x'=ax+by

y’=cx+dy

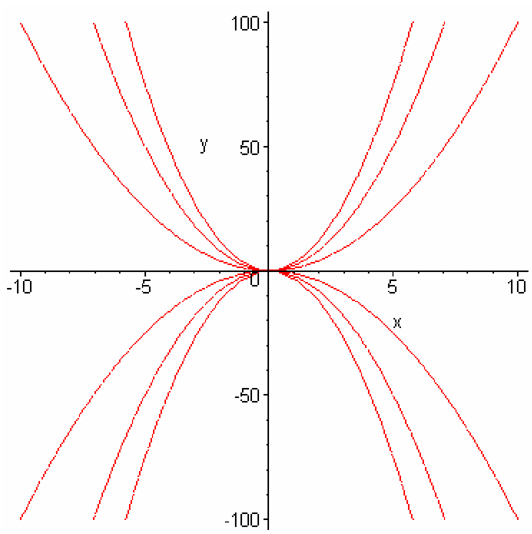
onde a matriz do sistema tem determinante não nulo.

Obsevamos que o único ponto de equilíbrio do sistema acima é a origem

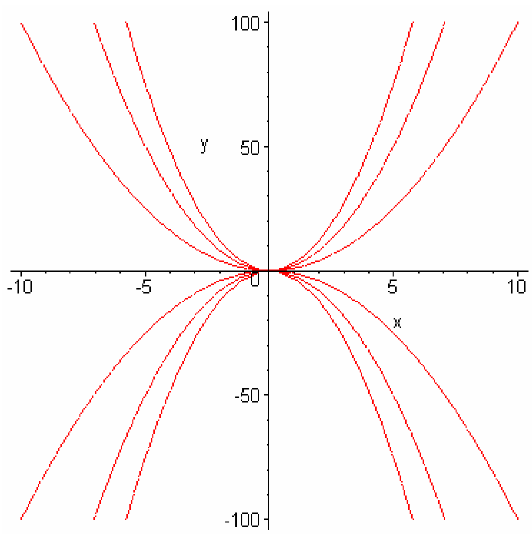
Caso 1.Os autovalores são números reais com mesmo sinal.

O ponto de equilíbrio é chamado de Nó estável caso tenha sinal negativos autovalores e Nó instável caso tenham sinais negativos os autovalors.

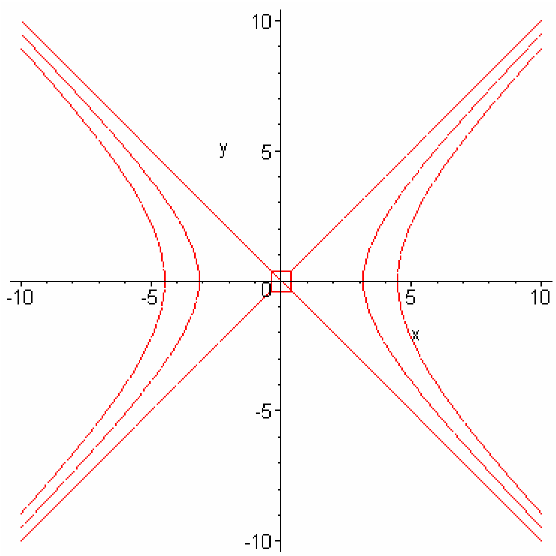
(A) Nó estável



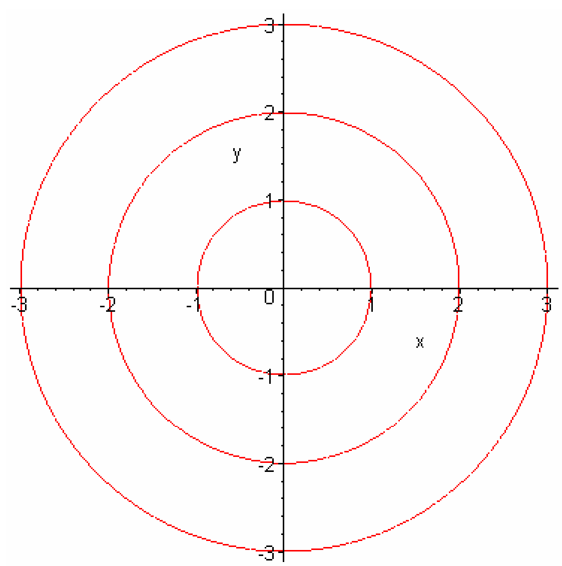
(B) Nó instável



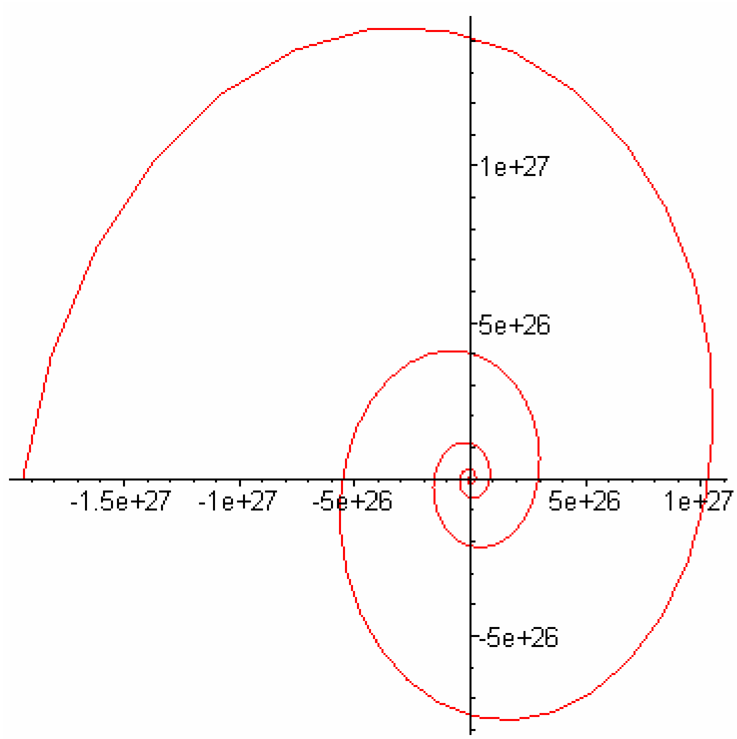
Caso 2 Os autovalores são números reais com sinais diferentes.
O ponto de equilíbrio é chamado de sela



Caso 3 autovalores são números complexos com parte real nula.
O ponto de equilíbrio é chamado de centro.



Caso 4 autovalores são números complexos com parte real não nula.
O ponto de equilíbrio é chamado de foco estável caso a parte real seja negativa e foco instável caso a parte real seja positiva.



6.0.Forma Normal

Temos como objetivo linearizar formalmente o seguinte tipo de sistema: $x' = Ax + P_2(x) + P_3(x) + P_4(x) + \ldots$, chamado de sistema perturbado,onde $P_k(x)$(k = 2,3,...)é uma função polinomial homogênea de grau k, ou seja, obter um novo sistema da forma y'=Ay, através de uma mudança formal de variáveis.
A partir do Teorema de Poincaré que é o principal resultado da teoria de formas normais, calculamos a forma normal para perturbações de grau 2,3 e 4 através de uma rotina trabalhada em um programa de computador(MAPLE) para os seguinte pontos de equilíbrio:
Sela , Nó atrator, ,Nó instável, Nó impróprio e Centro.

6.1 Ressonância.

Seja A uma matriz de ordem n, e sejam c_1, ..., c_n seus autovalores. O autovalor é chamado de ressonante, caso

$$c_s=m_1c_1+....+m_nc_n$$

onde m_i são números inteiros positivos ou nulo e $|m|=m_1+.....+m_n$ é a ordem de ressonância que tem que ser maior ou igual a dois.

Teorema de Poincaré.
Se os autovalores da matriz diagonal A são não resonantes, então o sistema $x`=Ax+P_k(x)+P_{k+1}(x)+.....$pode ser transformado no sistema linear $y`=Ay$ por uma mudança formal de variáveis.

Teorema de Poincaré-Dulac.
Se existir ressonância entre os autovaloes da matriz diagonal A, então o sistema $x`=Ax+P_k(x)+P_{k+1}(x)+.....$pode ser transformado no sistema $y`=Ay+W_s(y)+W_{s+1}(y)+....$por uma mudança formal de variáveis. Onde $W_s(y),W_{s+1}(y)+….$ Só contêm monomios resonantes.
Prova. As demosntrações desses dois teoremas se encontra na deisertação de mestrado de Machuy.

7.0 Rotinas computacionais.

O cálculo da forma normal foi feita para os pontos de equilíbrio dos sistemas bidimensionais, as perturbações usadas são de grau 2, 3 e 4. As Rotina computacionais foram feitas na linguaguem de computação algebrica MAPLE.

7.1 Etapas da rotina computacional.

Faremos o exemplo para o ponto de equilíbrio centro. Lembrando que para qualquer que seja o tipo de ponto de equilíbrio o procedimento é o mesmo.

Primeira etapa. Entrada de dados.
(i) Matriz da parte linear
Entrada da matriz da parte Linear.
“A:=array(1..2,1..2);” este comando no Maple é uma matriz de 2 linhas e duas colunas.

Entrada dos elementos da matriz da parte linear.
“A[1,1]:=nI;” elemento localizado na linha 1 e coluna 1.
“A[1,2]:=0;” elemento localizado na linha 1 e coluna 2.
“A[2,1]:=0”; elemento localizado na linha 2 e coluna 1.
“A[2,2]:=-nI”; elemento localizado na linha 2 e coluna 2.

Como os autovalores são nI e –nI temos um ponto de equilíbrio centro e a matriz esta diagonalizada.

(ii) Matriz relacionada a perturbação de ordem 2
“B: :=array(1..2,1..1);” uma matriz com 2 linhas e uma coluna.
Essa matriz e fornecida, para efeito do cálculo da forma normal.

Abaixo estão
“B[2,1]:=a1*x**2+a2*x*y+a3*y**2;”
“B[2,2]:=a4*x**2+a5*x*y+a6*y**2;”

(iii) Matriz mudança de variáveis de ordem 2
“G: :=array(1..2,1..1);” uma matriz com 2 linhas e uma coluna.
Essa matriz e fornecida, para efeito do cálculo da forma normal.

Abaixo estão
“G[2,1]:=g1*x**2+g2*x*y+g3*y**2;”
“G[2,2]:=g4*x**2+g5*x*y+g6*y**2;”

(iii) Matriz jacobiana.

Para o cálculo da equação homológica temos que calcular matriz jacobiana de G.
Usamos no Maple o a pacote de álgebra linear , para ativar esse pacote no Maple usamos o comando “with(linalg);”.
A matriz Jacobiana de G é dada por “DG:=jacobian(G);”.

Agora temos como resolver a equação homológica.

$$AG(y)-DG(y)A(y)+B=0.$$

Segunda etapa etapa. Eliminar os monômios ressonantes.

O comando usado para resolver equações polinomiais no Maple é dado por “solve(f,x);”. Onde f é um polinômio na variável x.
Para podermos eliminarmos os monômios não ressonantes da perturbações de grau 2 temos que coletar cada monômio na equação homológica. O comando utilizado para coletar os monômios é “coeef(f,x,i);”, onde f é um polinômio na variável “x” é “i” é o grau do monômio em x.

Assim obtemos um novo sistema da forma $y`=Ay+P_3(y)+P_4(y)+\ldots$.

Repetimos o mesmo processo para eliminar as perturbações de grau superiores.