



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-15047-PUD/188**

## **TEORIA DAS ONDAS EQUATORIAIS**

Vadlamudi Brahmananda Rao  
Virgínia Piccinini Silveira

INPE  
São José dos Campos  
2007

Publicado por:

**esta página é responsabilidade do SID**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

Gabinete do Diretor – (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 – CEP 12.245-970

São José dos Campos – SP – Brasil

Tel.: (012) 3945-6911

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

**Solicita-se intercâmbio  
We ask for exchange**

**Publicação Externa – É permitida sua reprodução para interessados.**



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-15047-PUD/188**

## **TEORIA DAS ONDAS EQUATORIAIS**

Vadlamudi Brahmananda Rao  
Virgínia Piccinini Silveira

INPE  
São José dos Campos  
2007

## SUMÁRIO

	Pág.
<b>CAPÍTULO 1 – ONDAS BAROTRÓPICAS</b>	
1. Introdução.....	5
1. 2. Modelo e Equações básicas.....	5
1.3. Equação da frequência.....	8
1.4. Condições de contorno.....	10
1.5. Tratamento espectral para $n=0$ .....	15
1.6. Solução especial não incluída na equação (8) .....	17
1.7. Resumo.....	18
<b>CAPÍTULO 2 – ONDAS BAROCLÍNICAS</b>	
2.1. Introdução.....	21
2. 2. Casos Especiais .....	23
a) <i>Onda de Kelvin</i> ( $v'=0$ ) .....	23
b) <i>Modo misto Rossby-Gravidade</i> .....	27
<b>APENDICE 1 - ALGUMAS DEFINIÇÕES.....</b>	<b>36</b>
<b>APENDICE 2 - EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER.....</b>	<b>38</b>

## **CAPÍTULO 1 ONDAS BAROTRÓPICAS**

### **1.1 INTRODUÇÃO**

Os movimentos ondulatórios na atmosfera tropical são de uma grande complexidade para se obter apenas uma solução analítica exata tornando-se possível suas soluções somente com simulações computacionais. O fato das ondas estarem presentes em toda parte (mas as condições de instabilidade não) sugere que a teoria das ondas neutras forçadas seja aplicada. O cisalhamento é importante, porém, não fundamental para a teoria básica (ele altera a frequência pelo Efeito Doppler, porém as propriedades dispersivas são determinadas sem cisalhamento). Desta maneira, é conveniente usar uma geometria peculiar nos trópicos (Plano-Beta Equatorial) visto que muitas ondas parecem estar restritas nos trópicos.

Todavia, uma percepção valiosa pode ser dada usando a Teoria da Perturbação Linearizada. Aqui, será discutido primeiramente o modo barotrópico de oscilação em um 'plano- $\beta$ ' equatorial como é visto em Matsuno (1996).

### **1.2 Modelo e equações básicas**

Para este estudo foi usado o Modelo Barotrópico Divergente. Este modelo consiste de uma camada de fluido incompressível de densidade homogeneia com uma superfície livre e em balanço hidrostático. Sabendo disso, tratar-se tal modelo e aplica-se a aproximação do plano- $\beta$ . As características do movimento de grande escala também serão inferidas.

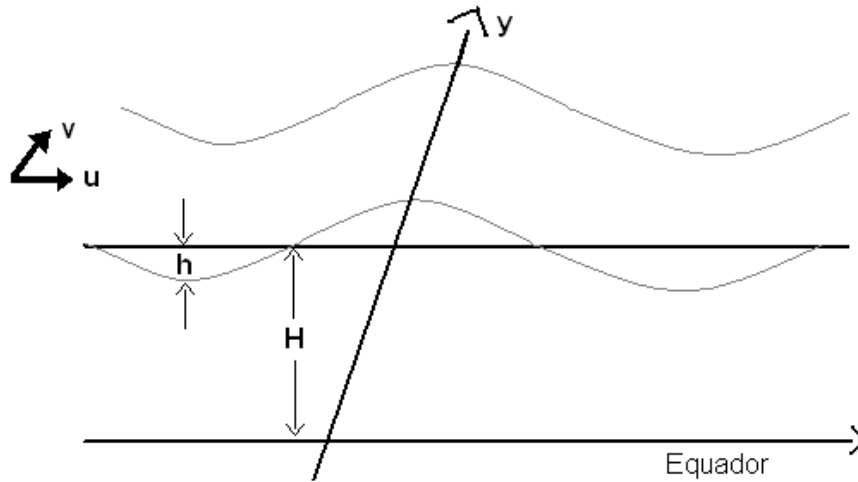


FIGURA 1: Modelo e coordenadas

Em um sistema de coordenada cartesiana local (Figura 1) as equações do movimento e de conservação de massa são escritas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

onde:  $u$  e  $v$  são velocidade do vento zonal e meridional,  $x$  e  $y$  as respectivas direções;  $h$  a menor variação da altura do topo da superfície e  $H$  o valor médio;  $f$  o parâmetro de Coriolis e  $g$  a aceleração da gravidade. Como é mostrado na FIG1 o eixo  $x$  coincide com o Equador (direção para leste) e o eixo  $y$  com a direção para norte.

*Teoria das ondas equatoriais*

Neste estudo foi assumido que o Parâmetro de Coriolis ( $f$ ) é linearmente proporcional a latitude,  $f = f_0 + \beta y \rightarrow f_0 = 0 \rightarrow f = \beta y$  (onde  $\beta$  é constante e chamado parâmetro de Rossby).

Substituindo  $h$  pela altura geopotencial ( $\phi$ ) no conjunto de equações (1) temos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v + \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u + \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

Na terceira equação  $c^2 = gH$  é o quadrado da velocidade da Onda de Gravidade Pura.

Os limites de tempo e altura são dados como:

$$[T] = \left( \frac{1}{c\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [L] = \left( \frac{c}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

onde:  $u = cu'$ ,  $v = cv'$ ,  $\phi = c^2 \phi'$ ,  $x = Lx'$ ,  $y = Ly'$ ,  $t = Tt'$  (as quantidades a direita são adimensionais).

Transformando o conjunto de equações (1a) na forma adimensional usando as identidades (2):

$$(c\beta)^{\frac{1}{2}} c \frac{\partial u'}{\partial t} - \left( \frac{c}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} c \beta y' v' + c^2 \left( \frac{\beta}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi}{\partial x'} = 0$$

Dividindo a equação acima por  $(c\beta)^{\frac{1}{2}}$ , temos:

Teoria das ondas equatoriais

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} - y'v' + \frac{\partial \phi'}{\partial x'} = 0 \quad (3)$$

Similarmente para a segunda e terceira equações (1a):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t'} + y'u' + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} &= 0 \\ \frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

### 1.3 Equação da frequência

Considerando a propagação da onda na direção leste-oeste:

$$\left. \begin{aligned} u' &= ue^{i(\omega t + kx)} \\ v' &= ve^{i(\omega t + kx)} \\ \phi' &= \phi e^{i(\omega t + kx)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Substituindo o conjunto de equações (4) no conjunto de equações (3) e desconsiderando o sobrescrito da perturbação:

$$\begin{aligned} i\omega u - yv + ik\phi &= 0 \\ i\omega v + yu + \frac{d\phi}{dy} &= 0 \\ i\omega\phi + iku + \frac{dv}{dy} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Multiplicando por  $\left(\frac{d}{dy}\right)$  a primeira equação do conjunto de equações (5) e  $(ik)$  a segunda equação:

$$i\omega \frac{du}{dy} - v - y \frac{dv}{dy} + ik \frac{d\phi}{dy} = 0 \quad (5a)$$

$$-k\omega v + ikyu + ik \frac{d\phi}{dy} = 0 \quad (5b)$$



*Teoria das ondas equatoriais*

e subtraindo a equação (5a) pela equação (5b):

$$iw \frac{du}{dy} - ikyu - v(1 - kw) - y \frac{dv}{dy} = 0 \quad (5c)$$

Agora multiplicando a segunda equação do conjunto de equações (5) por  $(iw)$  e derivando a terceira por  $\left(\frac{d}{dy}\right)$  temos:

$$-w^2v + iwyu + iw \frac{d\phi}{dy} = 0 \quad (5d)$$

$$iw \frac{d\phi}{dy} + ik \frac{du}{dy} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0 \quad (5e)$$

e subtraindo a equação (5e) pela equação (5d):

$$\frac{d^2v}{dy^2} + ik \frac{du}{dy} + w^2v - iwyu = 0 \quad (5f)$$

Pondo a expressão  $\frac{du}{dy}$  da Equação (5c) na Equação (5f):

$$\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{ik^2}{w}yu + \frac{k}{w}v(1 - kw) + \frac{k}{w}y \frac{dv}{dy} + w^2v - iwyu = 0 \quad (5g)$$

Multiplicando por  $w$  a primeira equação (5) e por  $k$  a terceira, subtraindo-as e multiplicando por  $(y/w)$ , temos:

$$yu \left( iw - i \frac{k^2}{w} \right) = \frac{yk}{w} \frac{dv}{dy} + y^2v \quad (5h)$$

Substituindo a equação (5g) na equação (5h):

$$\frac{d^2v}{dy^2} + v\left(w^2 + \frac{k}{w} - k^2 - y^2\right) = 0 \quad (6)$$

#### 1.4 Condições de contorno

Como já estudamos, se considerarmos o movimento da onda próxima ao Equador ( $y=0$ ), a condição de contorno é dada por  $v \rightarrow 0$ , quando  $y \rightarrow \pm\alpha$  (7) pode ser suficiente.

A equação (6) com a condição de contorno da equação (7) forma um problema de autovalor e resolvida pela equação de Shrodinger para um oscilador harmônico simples. A condição de contorno da equação (7) é satisfatória somente quando a constante  $\left(w^2 - k^2 + \frac{k}{w}\right)$  da equação (6) for igual a um número inteiro ímpar. (ver apêndice)

$$w^2 - k^2 + \frac{k}{w} = 2n + 1 (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

Então a solução da equação (6) é dada por:

$$v(y) = ce^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) \quad (9)$$

onde  $H_n(y)$  é o "Polinômio de Hermite" na  $n$ ésima ordem e  $c$  uma constante.

A equação (8) mostra a relação entre a frequência e o número de onda longitudinal para algum modo meridional  $n$  definido. Como a equação (8) é uma equação cúbica em  $w$ , temos três raízes quando  $n$  e  $w$  são especificados.

Espera-se que o resultado de duas das três raízes corresponde a Ondas de Gravidade Inercial, uma propagando para leste e a outra para oeste. A última raiz é uma Onda de Rossby.

*Teoria das ondas equatoriais*

A raiz cúbica (aproximadas) pode ser encontrada primeiramente assumindo que  $k/w$  pode ser negligenciado na equação (8). Isto significa que uma das raízes (Onda de Rossby) é consideravelmente menor que as duas outras raízes (Onda de Gravidade).

Então a equação (8) torna-se:

$$w^2 - k^2 \cong 2n + 1, \text{ isto é, } w_{12} \cong \pm \sqrt{2n + 1 + k^2} \quad (10a)$$

A terceira raiz pode ser obtida negligenciando  $w^2$  quando comparada com  $(k^2 + 2n + 1)$ . Então:

$$w_3 \cong \frac{k}{k^2 + 2n + 1} \quad (10b)$$

As duas equações (10a) e (10b) podem ser dimensionadas empregando:

$$w_n^2 = w_d^2 \frac{1}{c_g \beta} \text{ e } k_n^2 = k_d^2 \frac{c_g}{\beta}$$

Onde  $c_g$  é a velocidade de grupo da Onda de Gravidade  $(\sqrt{gH})$ .

Então a equação (10a) torna-se:

$$\frac{1}{c_g \beta} w_{12}^2 \cong 2n + 1 + k^2 \frac{c_g}{\beta}$$

$$\text{ou } \frac{w_{12}^2}{k^2} = c^2 \approx c_g^2 \left[ 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\beta}{c_g} (2n + 1) \right] \Rightarrow c_{12} \approx \pm \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\beta}{c_g} (2n + 1)} \quad (10c)$$

Similarmente a equação (10b) torna-se:

*Teoria das ondas equatoriais*

$$w_3 \approx \sqrt{c_{g\beta}} \frac{k\sqrt{c_g/\beta}}{k^2 \frac{c_g}{\beta} + (2n+1)}, \text{ isto é, } \frac{w_3}{k} \approx \frac{\beta}{k^2 + \frac{\beta}{c_g}(2n+1)}$$

ou  $c_3 \approx \frac{\beta}{k^2 + \frac{\beta}{c_g}(2n+1)}$  (10d)

Note que na equação (10d) o sinal negativo habitual não é usado. Isto por que assumimos  $e^{i(kx+wt)}$  e não  $e^{i(kx-wt)}$ .

Também é importante observar que os efeitos de rotação e modo meridional são embutidos em um único termo  $\frac{\beta}{c_g}(2n+1)$ .

Para valores arbitrários de  $k$ , podem-se ter aproximadamente três freqüências (devido à solução cúbica da equação (8)) e estas soluções são mostradas na figura 2. Para  $n \geq 1$  estas três freqüências, em geral, são completamente separadas da escala de  $k$ . Sendo assim, cada um delas identificadas pela freqüência das ondas nos três tipos seguintes:

1. Onda de gravidade-inercial que propaga para leste.
2. Onda de gravidade-inercial que propaga para oeste.
3. Onda de Rossby que propaga para oeste em alta velocidade.

Convencionalmente os subscritos: 1, 2 e 3 serão usados para indicar os três tipos de ondas, na mesma ordem.

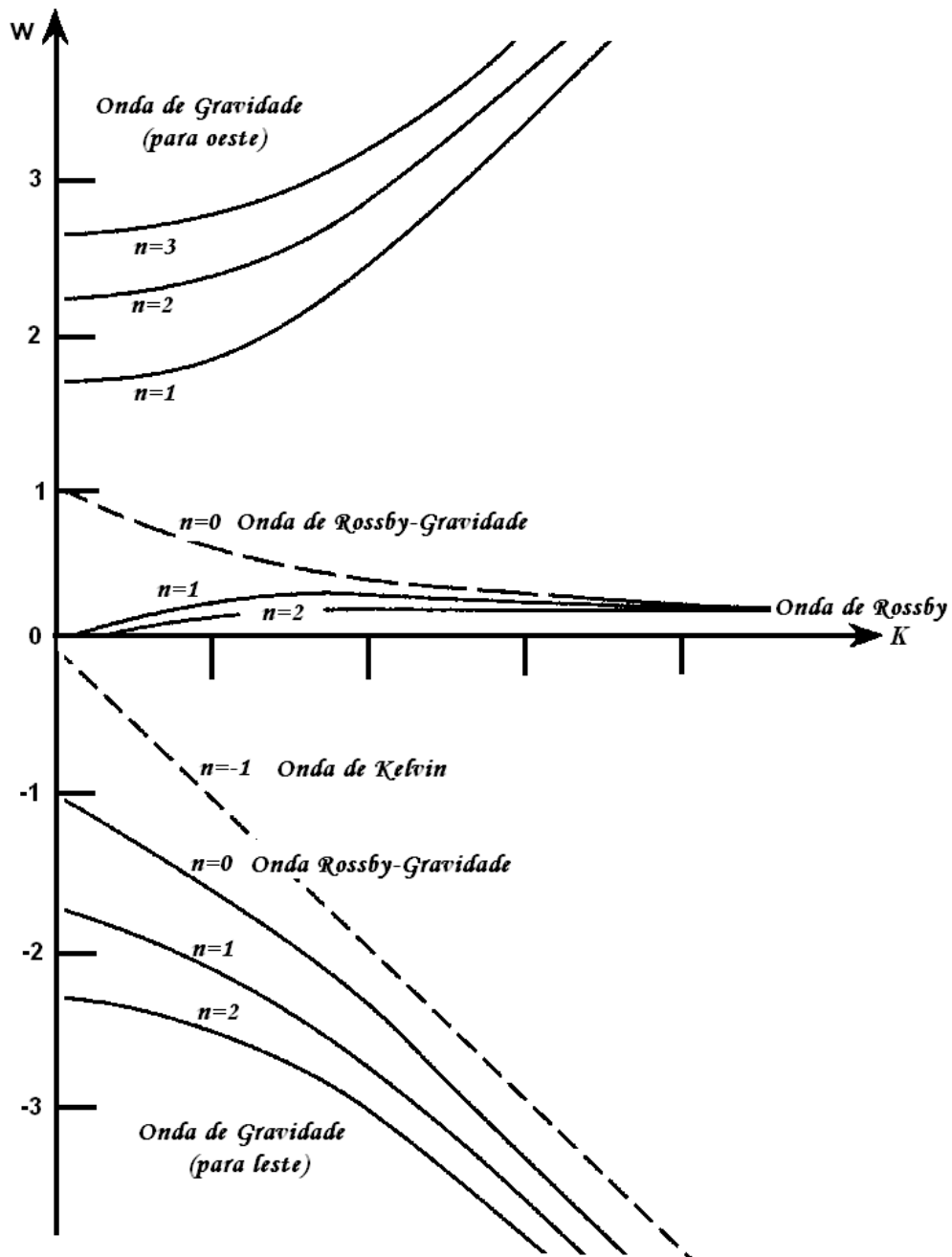


FIGURA 2: Frequência como função do número de onda.

### 1.5 Tratamento espectral para $n=0$

Considerando  $n=0$  na equação (8) pode ter novamente três raízes. Neste caso a equação (8) é dada como:

$$(w-k)(w^2 - kw - 1) = 0 \quad (11)$$

A equação (11) é uma expressão simples para três raízes de  $w$ , porém não corresponde a frequência de três ondas diferentes. Assim, a classificação das raízes é feita a partir de seu comportamento em função de  $n$ . Isto é, se considerarmos “ $n$ ” como um parâmetro contínuo, a frequência das três diferentes ondas, para  $n=0$ , é obtida por:

$$w_l(k,0) = \lim_{n \rightarrow 0} w_l(k,n) \quad (12)$$

onde o subscrite  $l$  é os três tipos de ondas.

Da consideração acima, para a equação (11), que foi considerada a partir da equação (8), foram mostradas três raízes (uma onda que propaga para leste e duas ondas para oeste). Com isso, a equação (11) é dada:

$$w = k \quad (12a)$$

$$w = -\frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} \quad (12b)$$

$$w = -\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} \quad (12c)$$

A onda da equação (12b) propaga para leste e as outras duas ondas propagam para oeste. Na equação (12b)  $w$  é negativo porque  $\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} > \frac{k}{2}$ .

Assim, podem-se distinguir as ondas como segui:

*Teoria das ondas equatoriais*

$$w_1 = -\frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} \quad (\text{Onda de Gravidade para leste})$$

$$w_{2\text{ou}3} = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} - \frac{k}{2} \text{ e } w_{2\text{ou}3} = k \quad (\text{Onda de Gravidade para oeste ou Rossby--(12d)})$$

Nas equações (12d) a distinção entre as Ondas de Rossby e de Gravidade é dada pela magnitude de  $k$ , ou seja, a velocidade da Onda de Rossby é menos que a Onda de Gravidade. Então a solução da equação (12):

$$\text{Onda de Gravidade para oeste - } w_2 \left\{ \begin{array}{l} = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} - \frac{k}{2} \quad (\text{para } k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ = k \quad (\text{para } k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\text{Onda de Rossby para oeste - } w_3 \left\{ \begin{array}{l} = k \quad (\text{para } k \leq \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} - \frac{k}{2} \quad (\text{para } k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{array} \right.$$

A equação (13) mostra que quando  $k_1 > k_2$  as freqüências correspondentes são tal que  $w_1 < w_2$ .

No caso de  $n=0$ , a freqüência da Onda de Gravidade que propaga para oeste não é separada da Onda de Rossby, porém elas coincidem entre si em  $\left(k = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

Exceto no ponto de encontro,  $w_3$  é sempre menor em magnitude que  $w_2$ .

*Teoria das ondas equatoriais*

$$w_2\left(k = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = w_3\left(k = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Também se deve observar que em uma das três raízes da equação (11),  $w$  não pode ser ajustado como um autovalor do conjunto de equações (5) pelas seguintes razões. No processo de derivação da equação (6) na equação de frequência (8) assume-se implicitamente a seguinte relação:

$$u = \frac{wyv + k \frac{dv}{dy}}{i(w-k)(w+k)}$$

Conseqüentemente, é exigido que o denominador  $(w-k)(w+k)$  não fique nulo, a menos que o numerador é identicamente igual a zero. A solução obtida na equação, quando o numerador é igual a zero, não satisfaz as condições de contorno se for resolvido para zero.

Devido aos argumentos acima para uma das raízes com  $n=0$ ,  $w=k$  deve ser rejeitado. Desta maneira a equação (13) mostra que a Onda de Gravidade que propaga para oeste (para  $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) e a Onda de Rossby (para  $k < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) não existem.

Em outras palavras, no caso do modo mais baixo  $n=0$  têm-se somente duas ondas, a considerada Onda de Gravidade Inercial que propaga para leste e outra onda que propaga para oeste. A segunda onda não pode ser identificada como Onda de Rossby nem de gravidade inercial, na verdade ela possui algumas características misturadas. A faixa de frequência desta onda tem valores comparáveis a Onda de Gravidade Inercial bem próxima da Onda de Rossby.

Como observada na Figura 2 esta onda conecta a duas famílias de ondas e devido à sua existência o espaço vazio no diagrama de frequência é preenchido.



### 1.6 Solução especial não incluída na equação (8)

Também será considerada uma solução no qual não foi incluída na forma geral da equação (8), obter a frequência da equação (8) reduzindo o conjunto de as equações (5) para  $v$ .

Pode existir uma solução para velocidade meridional ( $v$ ) nulo [ $v(x,y)=0$ ] o conjunto de equações (5) é resolvida:

$$\begin{aligned} iwu + ik\phi &= 0 \\ yv + \frac{d\phi}{dy} &= 0 \\ iw\phi + iku &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Desde que  $u$  e  $\phi$  apareçam na primeira e na terceira, o conjunto de equações são consideradas equações algébricas; a equação acima tem soluções somente quando a matriz formada pelo coeficiente é singular:

$$(w - k)(w + k) = 0$$

Então a solução é obtida como segue:

$$\left. \begin{aligned} \phi = u = ce^{\frac{1}{2}y^2} \text{ para } w = -k \\ \phi = -u = ce^{\frac{1}{2}y^2} \text{ para } w = k \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

Claramente a segunda solução não satisfaz as condições de contorno e deve ser rejeitada. É interessante que a primeira solução ( $w=-k$ ) seja obtida se colocamos  $n=-1$  na equação (8).

Deste modo, será mostrada a solução para  $n=-1$ . A frequência deste número de onda torna-se zero quando, a frequência das outras ondas que propagam para leste tem limite inferior em magnitude (aproximadamente  $\sqrt{2n+1}$ ).

De qualquer maneira, parece ser bem importante para soluções de frequência menor do que as de Onda de Rossby continuar até frequências de Ondas de Gravidade Inercial e não ter espaço vazio no espectro.

### **1.7 Resumo**

É proveitoso resumir a existência de modos barotrópicos livres de oscilação no plano- $\beta$  equatorial. Estes modos são ondas que propagam zonalmente como soluções das equações do movimento linearizadas no plano horizontal. O parâmetro de Coriolis é aproximado por  $f=\beta y$  onde  $\beta=2\Omega/a$  ( $\Omega$  é a velocidade angular da Terra e  $a$  é o raio da Terra).

A estrutura latitudinal desses modos pode ser discutida em termos de funções oscilantes que decaem com a distância do Equador, chamadas de Função de Hermite. A ordem da Função de Hermite é dada por um incremento  $n=0, 1, 2, \dots$  cujo valor indica o número de modos da velocidade meridional no domínio latitudinal. Há um modo adicional designado por  $n=-1$  para a velocidade meridional igual a zero.

Para  $n \geq 1$ , há três soluções de ondas correspondentes a cada valor de  $n$ ; a Onda de Rossby que propaga para oeste e um par de Ondas de Gravidade Inercial que propagam para leste e oeste. Para o modo  $n=0$ , há somente duas soluções, a Onda de Gravidade que propaga para leste e um modo misto de Rossby-Gravidade que propaga para oeste. Esta última onda se comporta tanto como uma Onda de Rossby com um número de onda zonal alto, como uma Onda de Gravidade com um número de onda zonal baixo. Matsumo (1966) deduziu a estrutura horizontal da onda (Figura 3).

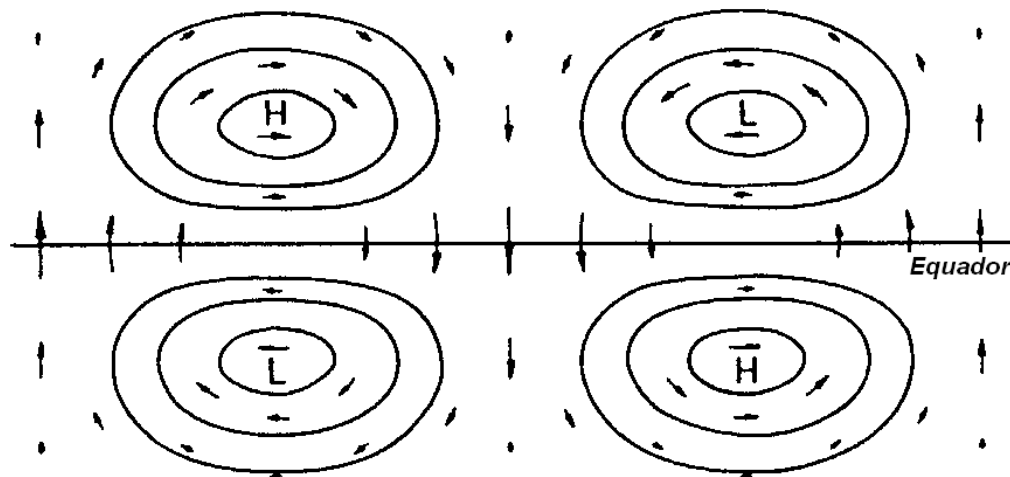


FIGURA 3: Velocidade Horizontal e Perturbações da Altura Geopotencial associado com uma Onda de Rossby-Gravidade  
Fonte: Matsuno (1966).

Há somente uma solução para  $n=1$  (Onda de Gravidade) que veio ser chamada de “Onda de Kelvin” por sua semelhança com a Onda de Kelvin oceânica (uma Onda de Gravidade de água rasa que propaga ao longo do limite da costa e não tem velocidade normal a linha de costa. A velocidade paralela a linha de costa está em balanço geostrófico com o campo de pressão. Em ambas as ondas, a velocidade e a pressão decaem exponencialmente com o aumento da distância da linha de costa). Aqui, o Equador (onde o parâmetro de Coriolis muda de sinal) representa o mesmo papel do limite da costa no caso do oceano e a velocidade zonal está em equilíbrio geostrófico no campo de pressão. Com a amplitude da onda decai com o aumento da distância do Equador, a Onda de Kelvin deve propagar para leste relativo ao escoamento zonal médio. A estrutura horizontal da Onda de Kelvin Equatorial é mostrada na Figura 4.

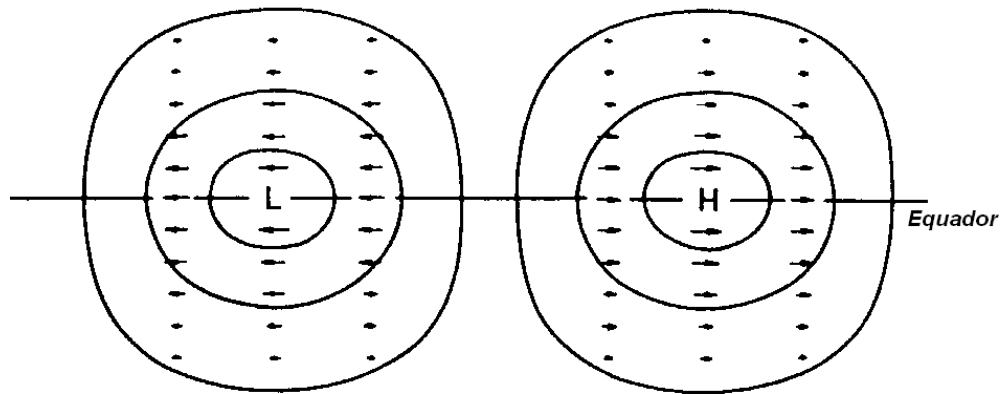


FIGURA 3: Velocidade Horizontal e Perturbações da Altura Geopotencial associado com uma Onda Kelvin  
Fonte: Matsuno (1966).

A teoria da onda barotrópica oferece somente uma posição parcial da natureza das ondas equatoriais estratosférica, isso se deve ao fato das ondas não serem barotrópicas, e propagarem verticalmente.

## CAPÍTULO 2 ONDAS BAROCLÍNICAS

### 2.1 INTRODUÇÃO

No capítulo 1 foi discutido os modos barotrópicos de oscilação em um plano- $\beta$  equatorial. Agora iremos discutir as ondas baroclínicas que propagam verticalmente.

As ondas de escala planetária geralmente são “presas” (ou seja, não podem propagar energia verticalmente), ao menos que, a frequência dessas ondas seja maior que a frequência de Coriolis. Deste modo, em latitudes médias ondas com período de vários dias geralmente não são significativamente abeis para propagar até a estratosfera. Contudo, quando estas ondas de período longo se aproximam do Equador, a frequência de Coriolis diminui permitindo que se tornem livres e propagem verticalmente.

Há dois importantes tipos de ondas que propagam verticalmente e cujo comprimento de onda vertical é suficientemente longo permitindo a fácil detecção pelos dados de radiosondagem convencional. Estas ondas são as de *Kelvin* atmosféricas, que propagam para leste, e as mistas de *Rossby-Gravidade*, que propagam para oeste. A estrutura horizontal e outras características dessas ondas foram vistas na última seção.

Para este estudo é conveniente usar as equações governantes no sistema de pressão recorrente ao plano- $\beta$  equatorial ( $f=\beta y$ ). As equações do momento (1), da hidrostática (2), da continuidade (3) e da energia termodinâmica (4) podem ser escritas como:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + f\vec{k} \times \vec{V} = -\nabla\phi \quad (1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z^*} = \frac{RT}{H} \quad (2)$$

*Teoria das ondas equatoriais*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{w^*}{H} = 0 \quad (3)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) T + w^* \Gamma = \frac{1}{C_p} \dot{H} \quad (4)$$

onde:  $\dot{H}$  é o aquecimento diabático por unidade de massa e

$\Gamma \left( = \frac{\partial T}{\partial z^*} + \frac{RT}{C_p H} = \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z^*} \right)$  é o parâmetro da estabilidade estática. Foi assumido

como estado básico a atmosfera em repouso e sem aquecimento diabático.

Neste estudo a perturbação é a onda que propagam zonalmente, então podemos escrever:

$$\left. \begin{aligned} u &= u'(y, z^*) e^{i(kx + \eta t)} \\ v &= v'(y, z^*) e^{i(kx + \eta t)} \\ w^* &= w^*(y, z^*) e^{i(kx + \eta t)} \\ \phi &= \phi'(y, z^*) e^{i(kx + \eta t)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Usando a equação (2) podemos escrever a equação (4) como:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) \frac{\partial \phi}{\partial z^*} + \frac{R}{H} w^* \Gamma = \frac{R}{H} \frac{\dot{H}}{C_p} \quad (6)$$

Para o caso adiabático:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) \frac{\partial \phi}{\partial z^*} + \frac{R}{H} w^* \Gamma = 0 \quad (7)$$

Assim, após a linearização as equações do movimento (em u e v), da continuidade e da energia termodinâmica (negligenciando os termos não lineares) tornam-se:

*Teoria das ondas equatoriais*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{w^*}{H} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right) + \frac{R}{H} w^* \Gamma = 0 \quad (11)$$

Substituindo o conjunto de equações (5) nas equações (8), (9), (10) e (11) temos:

$$i\gamma u' - \beta y v' = -ik\phi' \quad (12)$$

$$i\gamma v' + \beta y u' = -\frac{\partial \phi'}{\partial y} \quad (13)$$

$$iku' + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{w^*}{H} = 0 \quad (14)$$

$$i\gamma \frac{\partial \phi'}{\partial z^*} + \frac{R}{H} \Gamma w^* = 0 \quad (15)$$

**2.2 Casos especiais:**

**a) Onda de Kelvin ( $v'=0$ )**

No caso ( $v'=0$ ) a equação do movimento torna-se:

$$i\gamma u' = -ik\phi' \quad (16)$$

$$\beta y u' = -\frac{\partial \phi'}{\partial y} \quad (17)$$

Da equação (15)  $w^*$  é igual:

*Teoria das ondas equatoriais*

$$w^{*'} = -\frac{Hi\gamma \frac{\partial \phi'}{\partial z^*}}{R\Gamma} \quad (18)$$

Substituindo  $w^{*'}$  da equação (18) na equação (14):

$$\left( \frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{1}{H} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial z^*} - \frac{Sk}{\gamma} u' = 0 \quad (19), \text{ onde: } S = \frac{R\Gamma}{H}.$$

Da equação (16)  $\phi'$  é igual:

$$\phi' = -\frac{\gamma u'}{k} \quad (20)$$

Substituindo  $\phi'$  da equação (20) nas equações (17) e (19) temos:

$$\beta \gamma u' = \frac{\gamma}{k} \frac{\partial u'}{\partial y} \quad (21)$$

e

$$\left( \frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{1}{H} \right) \frac{\partial u'}{\partial z^*} + \frac{k^2}{\gamma^2} S u' = 0 \quad (22)$$

A equação (21) determina a distribuição meridional de  $u'$  e a equação (22) a distribuição vertical. Pode-se ver facilmente que a equação (21) tem uma solução do tipo:

$$u' = u_0(z^*) \exp(\beta y^2 k / 2\gamma) \quad (23)$$



*Teoria das ondas equatoriais*

Assumindo  $k > 0$ , então  $\gamma < 0$  que corresponde a uma onda que propaga para leste. O caso da equação (23) indica que o campo de  $u'$  tem uma distribuição gaussiana perto do Equador com uma diminuição exponencial (e-folding).

$$Y_L = \left| \frac{2\gamma}{\beta k} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

Para uma onda que propaga para oeste ( $\gamma < 0$ ) a solução da equação (23) aumenta exponencialmente longe do Equador. Esta solução não satisfaz as condições de contorno perto dos Pólos e deve ser rejeitada. Neste caso existe somente uma Onda de Kelvin que propaga para oeste.

A equação (22) tem solução do tipo:

$$u_0(z^*) = e^{-z^*/2H} (C_1 e^{i\lambda z^*} + C_2 e^{-i\lambda z^*}) \quad (25),$$

$$\text{onde: } \lambda^2 \equiv \frac{Sk^2}{\gamma^2} - \frac{1}{4H^2}$$

Obs.: A equação característica para a equação (22) é,  $r^2 - \frac{r}{H} + \frac{k^2}{\gamma^2} S = 0$ , e

as soluções da raiz são:  $r = \frac{1}{2H} \pm \sqrt{\frac{1}{4H^2} - \frac{Sk^2}{\gamma^2}}$  ou  $r = \frac{1}{2H} \pm i \sqrt{\frac{Sk^2}{\gamma^2} - \frac{1}{4H^2}}$ , assim a solução pode ser escrita usando a equação (25).

A equação (25) é determinada pela condição de contorno apropriada. Para  $\lambda^2 > 0$  a solução da equação (25) é na forma de uma onda que propaga verticalmente. Para ondas na estratosfera equatorial, onde são forçadas por distúrbios na troposfera, a energia propagada (velocidade de grupo) deve ter uma componente para cima. Porém, podemos mostrar a componente vertical da velocidade de grupo é  $\frac{\partial \gamma}{\partial \lambda}$ .

*Teoria das ondas equatoriais*

$$\lambda^2 = \frac{Sk^2}{\gamma^2} - \frac{1}{4H^2}, \text{ isto é, } \gamma^2 = \frac{Sk^2}{\lambda^2} - \frac{\gamma^2}{4H^2\lambda^2} \quad (26)$$

Como  $\lambda H \gg 1$ , o segundo termo é negligenciado assim  $\gamma^2 = \frac{Sk^2}{\lambda^2}$ . Deste modo:

$$2\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} = -\frac{2Sk^2}{\lambda^3} = -\frac{2}{\lambda} \left( \frac{Sk^2}{\lambda^2} \right) = -\frac{2\gamma^2}{\lambda} \text{ e } \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} = -\frac{\gamma}{\lambda} \quad (27)$$

Como  $\frac{\gamma}{\lambda}$  é a velocidade de fase vertical, a componente vertical da velocidade de grupo é igual e oposta à velocidade de fase vertical. Como mencionado anteriormente, a Onda de Kelvin tem uma velocidade de grupo para cima, então a velocidade de fase deve ter uma componente para baixo. Conseqüentemente a constante  $C_1=0$  na equação (25) e a Onda de Kelvin têm uma estrutura no plano x-z como mostra na figura abaixo (Figura 4).

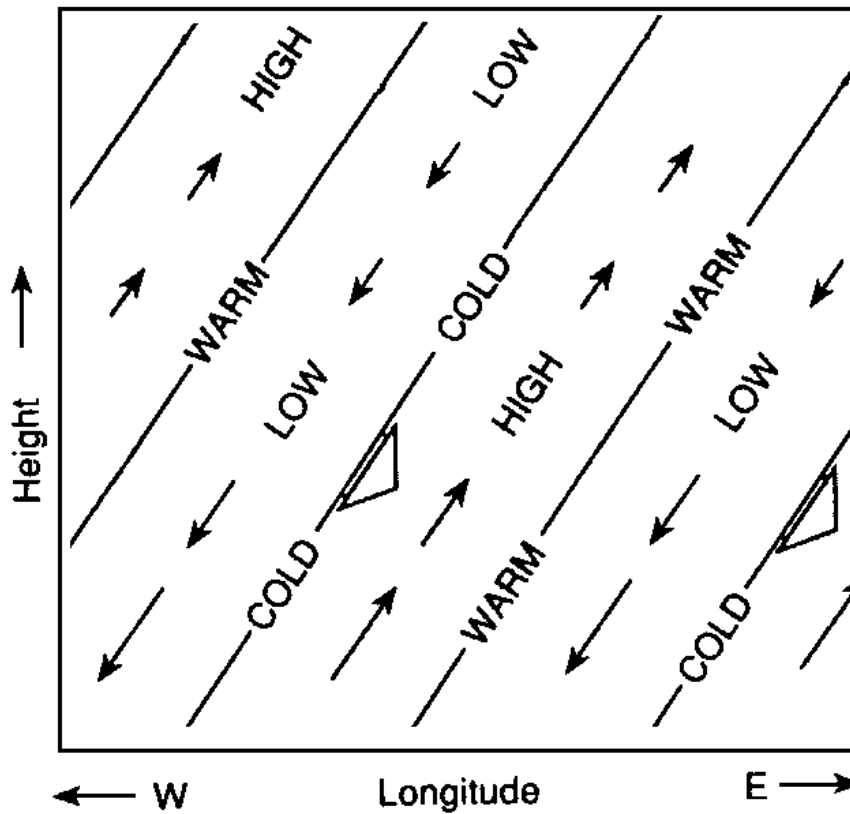


Figura 4: Idealização da seção cruzada ao longo de uma latitude que mostra as fases do vento zonal (componente horizontal de flechas menores), da temperatura, da pressão e do movimento horizontal (componente vertical das flechas menores) associada com a Onda de Kelvin. As flechas maiores indicam a direção da propagação da fase.

Resumindo, a Onda de Kelvin atmosférica é uma onda que propaga para leste como uma Onda de Gravidade Interna ordinária de duas dimensões nos planos  $x$  e  $z^*$  e os campos de velocidade do vento zonal e pressão meridional estão em balanço geostrófico de forma que no plano- $\beta$  equatorial a velocidade do vento meridional é zero e a onda propaga.

**b) Modo misto Rossby-Gravidade**

*Teoria das ondas equatoriais*

Para a Onda de Rossby-Gravidade mista será usado o modo completo das equações (12) à (15).

$$u' = \frac{\beta y v'}{i\gamma} - \frac{ik\phi'}{i\gamma} \quad (28)$$

$$i\gamma v' + \beta y u' = -\frac{\partial \phi'}{\partial y} \quad (29)$$

$$iku' + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{w^*}{H} = 0 \quad (30)$$

$$w^* = -\frac{i\gamma}{S} \frac{\partial \phi'}{\partial z^*} \quad (31)$$

Eliminando  $u'$  da equação (29) utilizando a equação (28):

$$i\gamma v' + \beta y \left( \frac{\beta y v' - ik\phi'}{i\gamma} \right) = -\frac{\partial \phi'}{\partial y}, \text{ ou seja, } v' = \frac{ik\beta y \phi' - i\gamma \frac{\partial \phi'}{\partial y}}{(\beta^2 y^2 - \gamma^2)} \quad (32)$$

Derivando a equação (28) por  $\frac{\partial}{\partial y}$ :  $i\gamma \frac{\partial u'}{\partial y} - \beta v' - \beta y \frac{\partial v'}{\partial y} = -ik \frac{\partial \phi'}{\partial y}$ .

Substituindo  $\frac{\partial \phi'}{\partial y}$  da equação (29):  $i\gamma \frac{\partial u'}{\partial y} - \beta v' - \beta y \frac{\partial v'}{\partial y} = -ik(i\gamma v' + \beta y u')$ , isto é,

$$i\gamma \frac{\partial u'}{\partial y} - ik\beta y u' = \beta v' + \beta y \frac{\partial v'}{\partial y} - \gamma \kappa v' \quad (33)$$

Eliminado  $w^*$  da equação (30) utilizando a equação (31):

$$iku' + \frac{\partial v'}{\partial y} + \left( \frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{1}{H} \right) \left( -\frac{i\gamma}{S} \frac{\partial \phi'}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (34)$$

Teoria das ondas equatoriais

Derivando a equação acima por  $\left(\frac{\gamma}{k} \frac{\partial}{\partial y}\right)$

$$ik \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\gamma}{k} \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} - \frac{i\gamma^2}{kS} \left( \frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{1}{H} \right) \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{\partial \phi'}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (35)$$

Multiplicando a equação (34) por  $\beta y$  temos:

$$ik\beta y u' + \beta y \frac{\partial v'}{\partial y} - \frac{i\gamma\beta y}{S} \left( \frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{1}{H} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial z^*} = 0 \quad (36)$$

Subtraindo a equação (35) e (36):

$$i\gamma \frac{\partial u'}{\partial y} - ik\beta y u' + \frac{\gamma}{k} \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} - \beta y \frac{\partial v'}{\partial y} - \frac{\gamma}{S} \left( \frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{1}{H} \right) \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{i\gamma}{k} \frac{\partial \phi'}{\partial y} - \beta y i \phi \right) = 0 \quad (37)$$

Colocando as equações (32) e (33) na equação (37)

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{k}{\gamma} (\beta - \gamma k) v' + \frac{1}{S} (\beta^2 y^2 - \gamma^2) \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial z^{*2}} - \frac{1}{H} \frac{\partial v'}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (38)$$

A equação (38) permite solução com a separação das variáveis.

$$v' = V(z)\psi(y) \quad (39)$$

Substituindo a equação (39) na equação (38) e considerando H a constante de separação então, a equação da estrutura vertical é dada por:

$$\frac{d^2 V}{dz^{*2}} - \frac{1}{H} \frac{dV}{dz^*} = -hSV \quad (40)$$

*Teoria das ondas equatoriais*

A estrutura horizontal da equação é:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + \left( \frac{k\beta}{\gamma} - k^2 + \gamma^2 h - \beta^2 y^2 h \right) \psi = 0 \quad (41)$$

Obs.:  $h$  tem dimensões de  $L^{-2}T^2$ , podendo ser escrito como  $1/gh'$  sendo  $h'$  chamado de profundidade equivalente.

Para resolver a equação (41) serão feitas as seguintes mudanças nas variáveis:

$$C_1 = \beta^2 h, \quad C_2 = \left( \frac{k\beta}{\gamma} - k^2 + \gamma^2 h \right) \quad \text{e} \quad \xi = C_1^{\frac{1}{4}} y$$

Podendo ser escrita a equação (41) na forma canônica:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + \psi(C_2 - C_1 y^2) = 0$$

Dividindo a equação inteira por  $C_1^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} \left( \frac{1}{C_1^{\frac{1}{2}}} \right) + \left( \frac{C_2 - C_1 y^2}{C_1^{\frac{1}{2}}} \right) \psi = 0, \quad \text{então:} \quad \frac{d^2\psi}{dy^2} + \left( C_2 C_1^{\frac{1}{2}} - \xi^2 \right) \psi = 0 \quad (42)$$

Assim a equação (42) tem solução na forma:

$$\psi_n = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi) \quad (43)$$

*Teoria das ondas equatoriais*

Satisfazendo as condições de contorno  $\psi \rightarrow 0$  quando  $\xi^2 \rightarrow \infty$  e  $H_n$  o Polinômio de Hermite de ordem  $n$ , onde  $C_2 C_1^{-\frac{1}{2}} = 2n + 1$ ,  $n=0,1,2,\dots$ . Para Onda de Rossby-Gravidade com  $n=0$ .

De modo que:  $C_2 C_1^{-\frac{1}{2}} = 1$ , que é:

$$\left( \frac{k\beta}{\gamma} - k^2 + \gamma^2 h \right) \frac{1}{\beta\sqrt{h}} = 1 \rightarrow \gamma^2 h - \sqrt{h}\beta + \left( \frac{k\beta}{\gamma} - k^2 \right) = 0 \rightarrow$$

$$\sqrt{h} = \frac{\beta}{2\gamma^2} \pm \frac{\beta}{2\gamma^2} \left[ 1 - \frac{4\gamma^2}{\beta^2} \left( \frac{k\beta}{\gamma} - k^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\beta}{2\gamma^2} \pm \frac{\beta}{2\gamma^2} \left( 1 - \frac{2\gamma k}{\beta} \right)$$

Lindzen (1967) encontrou que, em regra geral, a solução que corresponde a raiz positiva é uma aproximação válida, enquanto que, a solução da raiz negativa não decai rapidamente para ser válida na região equatorial. Pegando apenas o sinal positivo:

$$\sqrt{h} = \left( \frac{\beta}{\gamma^2} - \frac{k}{\gamma} \right) = \frac{k}{\gamma} \left( \frac{\beta}{\gamma k} - 1 \right) \rightarrow h = \frac{k^2}{\gamma^2} \left( \frac{\beta}{\gamma k} - 1 \right)^2 \quad (44)$$

Assim,  $C_1 = \beta^2 \frac{k^2}{\gamma^2} \left( \frac{\beta}{\gamma k} - 1 \right)^2$  e  $\xi^2 = C_1^{-\frac{1}{2}} y^2 = \beta \frac{k}{\gamma} \left( \frac{\beta}{\gamma k} - 1 \right) y^2$ , (Valores positivos são

aceitos desde que o valor negativo de  $C_1^{-\frac{1}{2}}$  não seja limitado em  $\xi^2 \rightarrow \infty$ )

Portanto a solução é:  $\psi_{n=0} = e^{-\frac{1}{2}\beta \frac{k}{\gamma} \left( \frac{\beta}{\gamma k} - 1 \right) y^2} H_{n=0}(\xi)$ , mas  $H_{n=0} = 1$ , então:

$$\psi_{n=0} = e^{-\frac{1}{2}\beta \frac{k}{\gamma} \left( \frac{\beta}{\gamma k} - 1 \right) y^2} \text{ e:}$$

$$v' = V(z^*) e^{-\frac{1}{2\gamma^2} \left( 1 - \frac{\gamma k}{\beta} \right) \beta^2 y^2} \quad (45)$$

*Teoria das ondas equatoriais*

A variável  $V(z^*)$  é determinada pela equação:

$$\frac{d^2V}{dz^{*2}} - \frac{1}{H} \frac{dV}{dz^*} + \frac{Sk^2}{\gamma^2} \left( \frac{\beta}{\gamma k} - 1 \right)^2 V = 0 \quad (46)$$

Assim,

$$V(z^*) = e^{\frac{z^*}{2H}} \left( C_1 e^{i\lambda_0 z^*} + C_2 e^{-i\lambda_0 z^*} \right) \quad (47)$$

onde:  $\lambda_0^2 = \frac{Sk^2}{\gamma^2} \left( \frac{\beta}{\gamma k} - 1 \right) - \frac{1}{4H^2}$

Da equação (45) podemos ver que  $v'$  no modo misto de Rossby-Gravidade, tem uma distribuição Gaussiana próxima do equador. A diminuição exponencial da oscilação neste caso é:

$$Y_l = \left| \frac{2\gamma}{\beta(\beta/\gamma - k)} \right|^{\frac{1}{2}}$$

Esta solução é válida para ondas que propagam para oeste ( $\gamma > 0$ ), contanto que  $\left[ 1 - \frac{k\gamma}{\beta} \right] > 0$  ou que  $S=ka$ , onde  $S$  é o número de comprimento de onda ao longo de um círculo de latitude. Desta maneira a condição pode ser escrita como  $\left( \gamma < \frac{2\Omega}{S} \right)$ .

Para frequências que não satisfazem esta condição a amplitude da onda não decai longe do Equador e, deste modo, não satisfazem as condições de contorno perto dos Pólos.

A Onda de Kelvin e o Modo misto Rossby-Gravidade foram identificados nos dados observacionais da estratosfera equatorial. Um resumo das propriedades destes dois tipos de ondas é dado abaixo.



*Teoria das ondas equatoriais*

<b>CARACTERÍSTICAS OBSERVADAS</b>	<b>ROSSBY- GRAVIDADE</b>	<b>KELVIN</b>
Freqüência (com relação ao solo)	$2\pi/4 - 5 \text{ dias}$	$2\pi/15 \text{ dias}$
Comprimento de onda horizontal	$\sim 10.000 \text{ km}$	$\sim 30.000 \text{ km}$
Número de onda zonal (sobre o Equador)	$\sim 4$	1-2
Comprimento de onda vertical	4-8km	6-10km
Velocidade de fase média relativo ao solo	$-25 \text{ ms}^{-1}$	$+25 \text{ ms}^{-1}$
Velocidade de fase média relativo ao vento zonal	$-30 \text{ ms}^{-1}$	$+50 \text{ ms}^{-1}$
<b><u>AMPLITUDES</u></b>		
Vento Zonal	$2-3 \text{ ms}^{-1}$	$\sim 8 \text{ ms}^{-1}$
Vento Meridional	$2-3 \text{ ms}^{-1}$	0
Temperatura	$\sim 1^\circ \text{ C}$	2-3°C
Altura Geopotencial	$\sim 30 \text{ m}$	$\sim 4 \text{ m}$
Velocidade Vertical	$\sim 0.15 \text{ cms}^{-1}$	$\sim 0.15 \text{ cms}^{-1}$

Uma sessão cruzada longitude-altura através de uma Onda Mista Rossby-Gravidade é mostrada na figura abaixo.

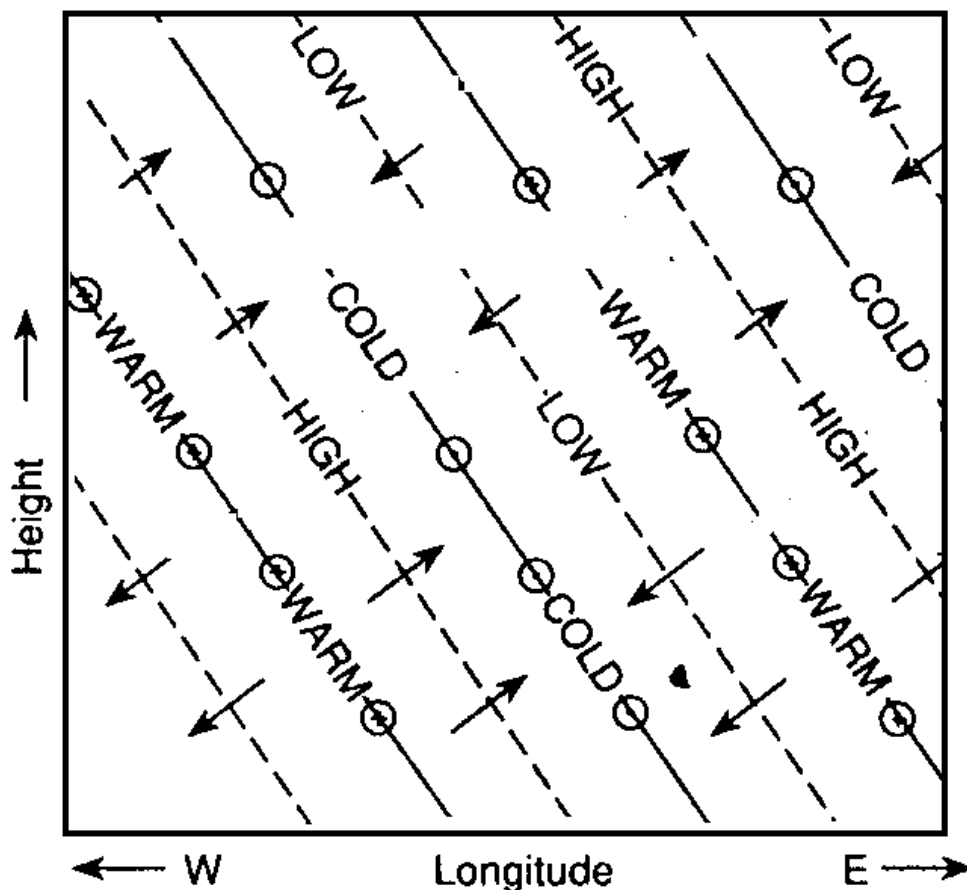


FIGURA 5: Idealização da sessão cruzada através de uma Onda Mista Rossby-Gravidade em uma latitude ao norte do Equador mostra máximas e mínimas de pressão, temperatura, movimento vertical (indicado pela componente vertical das flechas pequenas), vento zonal (indicado pela componente horizontal das flechas pequenas) e vento meridional (indicado pelas flechas apontadas para dentro da página o escoamento para norte e para fora da página escoamento para sul). As flechas grossas indicam a direção de propagação da fase.

As características observadas dos dois modos acima mencionados concordam bem com os valores derivados teoricamente. No momento, parece que ambas as ondas são excitadas pelas oscilações devido ao aquecimento convectivo de grande escala na troposfera equatorial.



**APENDICE 1**  
**ALGUMAS DEFINIÇÕES**

1. **Função Analítica:** Uma função é analítica em um ponto  $Z$  quando ela tem uma derivação neste ponto, isto é:

$$f'(Z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(Z+h) - f(Z)}{h}$$

Esta função existe e é independente da trajetória quando  $h$  aproxima-se de zero. Se uma função é analítica e com valor único ao longo de uma região  $R$ , ela é chamada de regular em  $R$ .

2. **Ponto Ordinário:** Se uma função  $f(x)$  é regular em um ponto  $x=x_0$ , então  $x_0$  é dito como um ponto ordinário.

Considerando a equação diferencial:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + f_0(x) y = 0$$

Se  $f_0(x), \dots, f_{n-1}(x)$  são regulares em  $x=x_0$ ,  $x_0$  é dito como um ponto ordinário da equação diferencial.

3. **Ponto Singular:** Um ponto que não é ordinário é chamado de ponto singular. Também é dito que a equação diferencial tem uma singularidade neste ponto. Perto de um ponto ordinário a solução geral de uma equação diferencial pode ser escrita como uma série de Taylor, cujo raio de convergência é a distância da próxima singularidade da equação diferencial.

*Teoria das ondas equatoriais*

A série de Taylor é uma série de potência ordinária:  $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m$

Cujo coeficiente  $c_m$  pode ser convenientemente achado substituindo na equação diferencial.

Se  $x_0$  não é um ponto ordinário, mas  $(x - x_0)f_n(x)$ ,  $(x - x_0)^2 f_{n-1}(x)$ , ...,  $(x - x_0)^n f_0(x)$  são regulares em  $x_0$ , então  $x_0$  é dito ser PONTO SINGULAR REGULAR da equação diferencial. Perto de um ponto singular regular podemos sempre encontrar pelo menos uma solução para a equação diferencial. Se nenhum ponto é ordinário nem singularmente regular, então é um PONTO SINGULAR IRREGULAR.

## APENDICE 2 EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

A equação de Schrödinger para um oscilador quântico é dada por:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - x^2)\psi = 0 \quad (1)$$

Se tentarmos uma solução para a série de potência da equação (1) quando  $x = 0$  obteremos uma relação recursiva (recursion) de três termos. Esta solução é pouco conveniente, o aspecto mais vantajoso é transformar as variáveis conduzindo para uma equação simples.

Um truque que frequentemente ajuda em tal situação é ‘fatorizar’ o comportamento próximo de alguma singularidade. Onde estão as singularidades desta equação? Não tem nenhum no plano finito  $Z(=1/x)$ , então devemos desviar (digress) para a “singularidade no infinito”.

Considerando uma equação diferencial:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (2)$$

Recordando que  $x=0$ : 1) É um ponto ordinário se P e Q são regulares neste ponto e 2) É uma singularidade regular se  $xP$  e  $x^2Q$  são regulares neste ponto.

Permitindo que:  $z = \frac{1}{x} \Rightarrow dz = -\frac{1}{x^2} dx$ ,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz} \text{ e}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3} \frac{dy}{dz} - \frac{1}{x^2} \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{2}{x^3} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^4} \frac{d^2y}{dz^2}.$$

Colocando estas derivações na equação (2) temos:

*Teoria das ondas equatoriais*

$$\frac{2}{x^3} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^4} \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{P(z)}{x^2} \frac{dy}{dz} + Q(z)y = 0$$

Ou

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left( \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} P(z) \right) \frac{dy}{dz} + \frac{1}{z^4} Q(z)y = 0 \quad (3)$$

Onde  $P(z)=P(x)$  e  $Q(z)=Q(x)$ .

Então,  $x = \alpha$  é um ponto ordinário ou uma singularidade da equação (2) que depende de  $z=0$  ser um ponto ordinário ou uma singularidade da equação (3). Assim,  $x = \alpha$  é um ponto ordinário se  $(2x-x^2)P(x)$  e  $x^4P(x)$  é regular neste ponto; e  $x = \alpha$  é um ponto singular regular se  $xP(x)$  e  $x^2Q(x)$  é regular neste ponto. Isto conclui a divagação.

Usando estes critérios, vemos que nossa equação diferencial (1) é altamente singular quando  $x = \alpha$ . Para valores altos de  $x$  a equação é aproximadamente:

$$\frac{d\psi^2}{dx^2} - x^2\psi = 0$$

E as soluções são aproximadamente:

$$\psi \approx e^{\pm \frac{x^2}{2}}$$

Nisso, se substituíssemos uma ou outra função na equação diferencial os termos que são dominantes no cancelo da infinidade.

As soluções são fisicamente aceitáveis, mas não se torna infinita quando  $|x| \rightarrow \alpha$ , portanto:

*Teoria das ondas equatoriais*

$$\psi = ye^{-\frac{x^2}{2}} \quad (4)$$

Esta mudança de variável não se assegura o comportamento desejado no infinito e mostramos que temos de selecionar soluções de  $y(x)$  que dá este comportamento. Com isto, a equação (1) pode ser escrita através da equação (4):

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (E-1)y = 0 \quad (5)$$

Se escrevermos  $(E-1)=2n$  a equação (5) fica conhecida como Equação Diferencial de Hermite.

Podemos obter a solução geral da equação na forma de uma série de potência o qual convergirá para todo lugar e a relação recursiva para os coeficientes conterá somente dois termos.

$$\left. \begin{aligned} \text{Assim, } y &= C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots = \sum_{m=0}^{\alpha} C_m x^m \\ y' &= C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \dots = \sum_{m=1}^{\alpha} mC_m x^{m-1} \\ y'' &= 2C_2 + 3 \cdot 2C_3x + \dots = \sum_{m=2}^{\alpha} m(m-1)C_m x^{m-2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Colocando a equação (6) na (5):

$$2C_2 + 3 \cdot 2C_3x + \dots = 2x(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \dots) - (E-1)(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots)$$

Igualando os coeficientes de  $x$  de igual potência temos:

$$C_2 = -\frac{1}{2}(E-1)C_0$$



*Teoria das ondas equatoriais*

$$C_3 = [-(E-1)C_1 + 2C_1] \frac{1}{3 \cdot 2} \quad \text{ou} \quad C_3 = \frac{C_1}{3 \cdot 2} [2 - (E-1)]$$

$$\text{Em geral } (m+2)(m+1)C_{m+2} - 2mC_m + (E-1)C_m = 0$$

$$C_{m+2} = \frac{C_m [2m - (E-1)]}{(m+2)(m+1)} \quad \text{ou} \quad \frac{C_{m+2}}{C_m} = \frac{(2m+1) - E}{(m+2)(m+1)}$$

$$y = C_0 \left[ 1 + (1-E) \frac{x^2}{2!} + (1-E)(5-E) \frac{x^4}{4!} + \dots \right] + C_1 \left[ x + (3-E) \frac{x^3}{3!} + (3-E)(7-E) \frac{x^5}{5!} + \dots \right] \quad (7)$$

Se  $E=(2n+1)$  onde  $n$  é um inteiro numa série que termina após o termo em  $x^n$  (as séries pares ou ímpares que dependem de  $n$ ). O resultado normalizado adequadamente para o polinômio é chamado de um Polinômio de Hermite de ordem  $n$  ( $H_n(x)$ ). As outras séries podem ser eliminadas ajustando seus coeficientes,  $C_0$  e  $C_1$ , igual a zero e a solução resultante da equação (4) irá a zero no infinito.

Se ambas as séries da equação (7) não terminam, seu comportamento em  $x$  com altos valores são determinados pelos termos mais longe onde a relação recursiva é aproximadamente:

$$\frac{C_{m+2}}{C_m} = \frac{(2m+1) - E}{(m+1)(m+2)} = \frac{\left(2 + \frac{1}{m}\right) - \frac{E}{m}}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)(m+2)} \cong \frac{2}{m} \quad \text{para } m \text{ grande.}$$

Então ambas as séries ( $e^{x^2}$  e  $\psi \rightarrow e^{\frac{x^2}{2}}$ ) se comporta para  $x$  grande. A solução de  $\psi$ , que permanece limitado em  $x \rightarrow \pm\alpha$  é somente possível quando  $E=2n+1$  com integral em  $n$ . Que é:

$$\psi = \psi_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{para } E=E_n=2n+1, n=0,1,2,3,\dots$$

*Teoria das ondas equatoriais*

$\psi_n$  é chamada de autofunções do operador diferencial  $-\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) + x^2$  pertencente aos autovalores  $E_n$ .

## **PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE**

### **Teses e Dissertações (TDI)**

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

### **Manuais Técnicos (MAN)**

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

### **Notas Técnico-Científicas (NTC)**

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programa de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

### **Relatórios de Pesquisa (RPQ)**

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

### **Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)**

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

### **Publicações Didáticas (PUD)**

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

### **Publicações Seriadas**

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

### **Programas de Computador (PDC)**

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. São aceitos tanto programas fonte quanto executáveis.

### **Pré-publicações (PRE)**

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.