1.Classificação *INPE-COM.10/PE*
CDU. 519.72

2.Período

4. Critério de Distribuição:
interna [ ]
externa [X]

3.Palavras Chaves (selecionadas pelo autor)
Estimativa de Matrizes
Normas Matemáticas
Matriz Insumo-Produto
Pesquisa OPeracional

5. Relatório nº
INPE-1086-PE/071

6.Data
Julho 1977

7. Revisado por
Mohamed A. Noweihi
MOHAMAD ALI EL NOWEIHI

8. Título e Sub-Título
ESTIMATIVA DE MATRIZES SEGUNDO CERTAS FUNÇÕES OBJETIVO

9. Autorizado por
Parada
Nelson de Jesus Parada
Diretor

10. Setor *CES* Código *450*

11. Nº de cópias *05*

12. Autoria *Marcos José de Aquino Pinto Pacca*
Joanilio Rodolpho Teixeira

14. Nº de páginas *36*

13. Assinatura Responsável Pacca

15. Preço
$ 28,00

16. Sumário/Notas

Este trabalho versa sobre o problema de estimar uma matriz não negativa A a partir de uma matriz não negativa e conhecida B. Restrições de certos tipos nos elementos de A são introduzidas. Funções Objetivo como Norma Retilínea, Quadrado da Norma Euclidiana e Norma de Tchebycheff, com desvios absolutos e relativos, são utilizadas. Uma discussão sobre métodos de solução para as duas primeiras funções objetivo, com comentários a respeito de críticas feitas a cada uma delas na literatura, é apresentada. A Norma de Tchebycheff, como uma possível função objetivo, é introduzida. Um método direto para resolver o problema com esta função objetivo é apresentado. A motivação (prática) deste trabalho está na tarefa de "atualização" ou "modernização" de matrizes de coeficientes tecnológicos de produção (Insumo-produto) que caracterizam relações técnicas entre setores de uma economia.

17. Observações *Submetido para apresentação ao X Simpósio Brasileiro da Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional - SOBRAPO, Rio de Janeiro, 21 a 23/09/77.*

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1 - INTRODUÇÃO

Em diversos tipos de problemas práticos tem-se a situação em que é necessário estimar uma dada matriz a partir de outra levando em consideração algumas formas de restrições. Esse assunto é de grande relevância no caso da chamada "atualização" ou "modernização" de matrizes dos coeficientes tecnológicos de produção, que caracterizam relações técnicas entre setores de uma economia. Contudo, o problema de atualização de dados, exigindo certa relação entre matrizes, é mais geral e tem aplicação em estudos de tráfico, modelos demográficos e, de modo geral, em problemas de alocação, onde existe dificuldade de informação atualizada e confiável.

Assim, fica claro que o problema de "atualizar" ou "modernizar" uma matriz de coeficientes tecnológicos é um caso importante, mas particular, do problema em que, dada uma matriz quadrada, não-negativa, de ordem n, deseja-se estimar uma outra, também não-negativa e de mesma ordem, sujeita a um conjunto de restrições lineares. Essa forma de apresentar o problema é mais geral e, no caso de utilizar-se uma função objetivo, tem-se claramente um problema de otimização.

Em essência, necessita-se estimar uma matriz onde os totais das linhas e colunas são prescritos, o que levou Bacharach (1970) a adotar o "constrained matrix problem" para esse tipo de problema. Se a formulação também exige a não-negatividade das estimativas e a função objetivo é trocada por certa proporcionalidade a uma dada matriz não-negativa, tem-se o chamado "biproportional constrained matrix problem" que corresponde, no caso da atualização de matrizes de insumo-produto, ao que Stone (1962) chamou de "Método RAS".

Esse método de atualização, no qual não se necessita de uma função objetivo, teve grande aceitação na década de 60 por oferecer resultados pragmaticamente aceitáveis e exigir, menos elaboração, em termos de programação em computador, do que uma abordagem otimizadora. Além disso deve-se levar em consideração que os problemas de atualização de matrizes de grande porte (número de setores $\geq$ 15) exigem técnicas especiais de computação, para contornar a limitação de memória dos computadores existentes e ter-se um tempo de computação aceitável.

A situação moderna é claramente mais animadora, para aqueles preocupados com métodos de otimização. Experiências de Nijkamp e Pealinck (1974), Teixeira e Silva (1977) mostram que é difícil distinguir vantagem comparativa confrontando os resultados utilizando "Método RAS" e "Programação Quadrática". Também é citado, nos mesmos trabalhos que o uso de Programação Linear para resolver o problema, quando a norma retilínea é utilizada como função objetivo, e leva a resultados menos aceitáveis do que os decorrentes da "Programação Quadrática". Contudo essa conclusão necessita de uma justificativa analítica mais adequada, daí a motivação inicial deste trabalho. Diversos tipos alternativos de função objetivo são utilizados sujeitos ao mesmo conjunto de restrições lineares, e um estudo comparativo é realizado entre estes tipos.Funções objetivos onde os desvios estão na forma das Normas Retilínea e Tchebycheff e do quadrado da Norma Euclidiana são utilizadas. Transformações e particularidades de alguns dos problemas, além de técnicas computacionais e rotinas para sua solução em computador são analisados. Lemas são introduzidos tendo em vista fortalecer pontos do argumento, assim como corolários relevantes. Um dos aspectos mais interessantes do trabalho parece ser o estudo do "pacote" relacionando aspectos teóricos com pragmáticos, para contribuir na delimitação e solução de um problema de interesse imediato.

2 - DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Dada a matriz quadrada B, cujos elementos $b_{ij} \geq 0$, $i = 1,\dots,n$; $j = 1,\dots,n$, deseja-se estimar uma matriz quadrada $A(n \times n)$ sujeita a um conjuntos de restrições de certo tipo, segundo certas funções objetivo.

O problema geral pode ser descrito formalmente como

Note que se $y_j < x_j$, $j = 1,\ldots,n$ então por (P1.2) e (P1.3), $0 \leq a^*_{ij} < 1$.

Duas espécies de função objetivo (soma e max) e dois tipos de desvios serão discutidos.

A Tabela 1 descreve as funções objetivo a serem minimizadas. Todas as funções são (estritamente) convexas.

TABELA 1

TIPOS DE FUNÇÕES OBJETIVO CONSIDERADOS: f(A,B)

ESPÉCIE DE f(A,B) \ TIPO DE DESVIO		QUADRÁTICO	EM VALOR ABSOLUTO
$\sum_{i,j}$	(.)	$\sum_{i,j} (a_{ij} - b_{ij})^2$ Quadrado da Norma Euclidiana	$\sum_{i,j} \lvert a_{ij} - b_{ij} \rvert$ Norma Retilínea (ℓ_1)
	(%)	$\sum_{i,j} \left(\frac{a_{ij} - b_{ij}}{b_{ij}} \right)^2$ Quadrado da Norma Euclidiana	$\sum_{i,j} \left\lvert \frac{a_{ij} - b_{ij}}{b_{ij}} \right\rvert$ Norma Retilínea (ℓ_1)
$\max_{i,j}$	(.)	$\max_{i,j} (a_{ij} - b_{ij})^2$	$\max_{i,j} \lvert a_{ij} - b_{ij} \rvert$ Norma Tchebycheff (ℓ_∞)
	(%)	$\max_{i,j} \left(\frac{a_{ij} - b_{ij}}{b_{ij}} \right)^2$	$\max_{i,j} \left\lvert \frac{a_{ij} - b_{ij}}{b_{ij}} \right\rvert$ Norma Tchebycheff (ℓ_∞)

Serão descritas aqui $\sum$ (%) e max (%) para os dois tipos de desvios. As outras 4 situações serão omitidas por seguirem raciocínios semelhantes. As restrições do problema P1, S', podem ser reescritas fazendo-se as seguintes mudanças de variáveis, $a_{ij} = \theta_{ij}/x_j$, $\forall_{ij}$, obtendo-se

$$S = \left\{ \theta \;/\; \sum_j \theta_{ij} = u_i, \sum \theta_{ij} = y_j, \theta_{ij} \geq 0, \forall_{i,j} \right\},$$

onde $\theta' = (\theta_{11}, \ldots, \theta_{1n}, \ldots, \theta_{21}, \ldots, \theta_{2n}, \ldots, \theta_{n1}, \ldots, \theta_{nn})$.

A Tabela 2, abaixo, é gerada da Tabela 1, substituindo-se o valor de a_{ij} em

$$\frac{a_{ij} - b_{ij}}{b_{ij}} \text{ e chamando-se } C_{ij} = \frac{1}{x_j \, b_{ij}}, \; \forall \; i,j \quad (1)$$

TABELA 2

TIPOS DE FUNÇÕES OBJETIVO ANALISADAS: f(A,B).

TIPO DE DESVIO / ESPÉCIE DE f(A,B)	QUADRÁTICO	EM VALOR ABSOLUTO
$\sum$ (%)	$\sum_{i,j} (C_{ij}\,\theta_{ij} - 1)^2$	$\sum_{i,j} \lvert C_{ij}\,\theta_{ij} - 1\rvert$
max (%)	$\max_{i,j} (C_{ij}\,\theta_{ij} - 1)^2$	$\max_{i,j} \lvert C_{ij}\,\theta_{ij} - 1\rvert$

---

(1) Quando $b_{ij} = 0$, considera-se $b_{ij} = \epsilon > 0$, suficientemente pequeno.

Note que o conjunto S é um conjunto viável de um problema de transporte, onde Θ_{ij} representa a quantidade "remetida" da origem i para o destino j. Os u_i' s são as quantidades "produzidas" nas origens i e os y_j's são as quantidades "requeridas" nos destinos j.

3 - DESENVOLVIMENTO E COMENTÁRIOS

3.1 - FUNÇÃO OBJETIVO

$$\sum_{i,j} |C_{ij}\,\Theta_{ij} - 1| \qquad \text{(Norma Retilínea)}$$

O problema pode ser escrito como:

$$\text{P2:} \quad \min_{\Theta \in S} \sum_{i,j} |C_{ij}\,\Theta_{ij} - 1|$$

Para resolver-se P2 por programação linear, sua função objetivo pode ser transformada em uma função objetivo linear, acompanhada de um conjunto adicional de restrições de igualdade (Francis e White (1974)).

Tome-se, para um certo (ij) o elemento no somatório em P2, isto é,

$$|C_{ij}\,\Theta_{ij} - 1| = p_{ij} \geq 0$$

Isto significa que se $C_{ij}\,\Theta_{ij} > 1$ deseja-se que p_{ij} contenha o valor de $C_{ij}\,\Theta_{ij} - 1$ e, em caso contrário, $C_{ij}\,\Theta_{ij} < 1$, que $p_{ij} = 1 - C_{ij}\,\Theta_{ij}$. Em outras palavras sempre $p_{ij} \geq 0$.

Uma maneira de se contornar este problema é substituir-se $p_{ij} = r_{ij} + s_{ij}$ na função objetivo (s_{ij}, $r_{ij} \geq 0$) onde $s_{ij} = C_{ij}\,\Theta_{ij} - 1$ e $r_{ij} = 1 - C_{ij}\,\Theta_{ij}$.

Obviamente, a condição de s_{ij} e r_{ij} serem excludentes, i.e, pelo menos um deles, s_{ij} ou r_{ij}, é nulo de modo que $p_{ij} = |C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1|$ significa adicionar-se as seguintes restrições

$$C_{ij}\, \Theta_{ij} - s_{ij} + r_{ij} = 1 \qquad \forall\, ij$$

$$s_{ij},\, r_{ij} \geq 0$$

Desde que os vetores colunas de s_{ij} e r_{ij} não são linearmente independentes, eles não podem fazer parte da mesma base ao mesmo tempo. Então, na solução ótima,

$$\text{ou} \quad s_{ij} > 0 \text{ e } r_{ij} = 0 \quad \rightarrow \quad C_{ij}\, \Theta_{ij} > 1$$

$$\text{ou} \quad s_{ij} = 0 \text{ e } r_{ij} > 0 \quad \rightarrow \quad C_{ij}\, \Theta_{ij} < 1$$

$$\text{ou} \quad s_{ij} = r_{ij} = 0 \quad \rightarrow \quad C_{ij}\, \Theta_{ij} = 1,$$

o que reflete o desejado.

O problema P2 é transformado no problema:

$$\text{P3:} \quad \min \sum_{i,j} (s_{ij} + r_{ij})$$

$$\text{t.q.;}\ C_{ij}\, \Theta_{ij} - s_{ij} + r_{ij} = 1 \qquad \forall\, ij \qquad \text{(P3.1)}$$

$$\sum_j \Theta_{ij} = u_i \qquad \text{(P3.2)}$$

$$\sum_i \Theta_{ij} = y_j \qquad \text{(P3.3)}$$

$$\Theta_{ij} \geq 0 \quad \forall\ ij \qquad \text{(P3.4)}$$

$$s_{ij},\, r_{ij} \geq 0,\ \forall\, ij \qquad \text{(P3.5)}$$

A solução do problema P2 é obtida ao resolver-se o pro blema P3. Note-se que, ao se remover as restrições P3.2-P3.4, a solução ótima passa a ser $\theta^*_{ij} = 1/C_{ij}$, $\forall$ i,j, $s^*_{ij} = r^*_{ij} = 0$, $\forall_{ij}$, e consequentemente, o valor da função objetivo é nulo, como esperado, desde que o problema original é então irrestrito.

Uma crítica feita ao uso da norma retilínea é que existem grandes chances de se obter uma matriz estimada A com alguns elementos nulos, quando a matriz original B era positiva. Sob o ponto de vista matemático, não existe qualquer problema. Mas, quando as matrizes A e B são matrizes, por exemplo, de Coeficientes Tecnológicos(Insumo-Produto) é altamente indesejável que isto ocorra (2).

O Lema 1, abaixo, vem a reforçar o argumento que será descrito adiante.

LEMA 1: Seja S um conjunto convexo e compacto em E^n.
Seja f(X) uma função contínua e côncava em S.
Então, $\min_{X \in S} f(X)$ se dá num ponto extremo de S

PROVA: Se S é compacto e f é contínua então, por consequência do Teorema de Weierstrass, existe um $X^* \in S$ tal que $f(X^*) \leq f(X)$, $\forall X \in S$.

Se S é convexo, então qualquer ponto $X \in S$ pode ser representado pela combinação linear convexa de todos pontos extremos de S.

Seja X^i, $i \in E$, os pontos extremos, onde E é o conjunto dos índices de todos os pontos extremos de S.

Então, qualquer $X \in S$, pode ser escrito como:

---

(2) *A menos que reflita realmente um fato econômico, como por exemplo, a completa substituição de um certo produto por outro, no intervalo de tempo considerado (Teixeira e Silva (1977)).*

P1: min f(A, B)

$$\left.\begin{aligned} \text{t.q.: } & A\,\underline{x} = \underline{u} \\ & \underline{\overline{X}}\; A'\,\underline{e} = \underline{y} \\ & a_{ij} \geq 0 \quad i = 1,\ldots, n \end{aligned}\right\} \quad S'$$

onde $f : E^{2n^2} \to R$;

$\underline{x}' = (x_1\ \ldots,\ x_n)$, é um vetor conhecido de elementos positivos;

$\underline{e}' = (1,\ldots,1)$;

$$\underline{\overline{X}} = \begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & x_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & x_n \end{bmatrix}$$

$\underline{u}$ e $\underline{y}$ são dois vetores conhecidos tal que (para que o problema P1 seja viável) $\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{j=1}^{n} y_j$, onde $u_i,\ y_j > 0$, $i,\ j = 1,\ldots,n$.

Equivalentemente, P1 pode ser reescrito como:

P1: min f(A, B)

$$\text{t.q.: } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = u_i,\ i = 1,\ldots, n \qquad \text{(P1.1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_j = y_j,\ j = 1,\ldots, n \qquad \text{(P1.2)}$$

$$a_{ij} \geq 0,\ \begin{aligned} i &= 1,\ldots,n \\ j &= 1,\ldots,n \end{aligned} \qquad \text{(P1.3)}$$

$$X = \sum_{i \in E} \alpha_i X^i \qquad (1)$$

onde

$$\sum_{i \in E} \alpha_i = 1 \qquad \alpha_i \geq 0, \forall i \in E. \qquad (2)$$

No máximo (n+1) dos α_i's serão maiores do que zero, ou seja, no máximo (n+1) pontos extremos de S serão necessários para representar um ponto S, onde n é a dimensão do espaço (E^n).

Desde que f é côncava em S e usando (2) tem-se:

$$f(X) = f\left(\sum_{i \in E} \alpha_i X^i\right) \geq \sum_{i \in E} \alpha_i f(X^i) \geq f(X^{\underline{i}}), \forall X \in S,$$

onde

$$f(X^{\underline{i}}) \leq f(X^i), \forall i \in E \text{ e } \alpha_{\underline{i}} = 1, \alpha_i = 0, \forall i \neq \underline{i} \in E.$$

Em particular, desde que $X^* \in S$ então $f(X^*) \geq f(X^{\underline{i}})$.

Mas $f(X^*) \leq f(X)$ $\forall X \in S$. Em particular para $X^{\underline{i}}$ tem-se $f(X^*) \leq f(X^{\underline{i}})$, o que implica que $f(X^*) = f(X^{\underline{i}})$. Em adição $\alpha_i^* = \alpha_{\underline{i}} = 0$, $i \neq \underline{i}$. Então, de (1), tem-se que $X^* = X^{\underline{i}}$. CQD.

Prova alternativa do Lema 1 pode ser encontrada em Luenberger (1973).

Corolário 1: Se f(X) é convexa e contínua num conjunto compacto $S \subset E^n$ então $\min_{X \in S} f(X)$ não necessariamente está num ponto extremo de S.

A razão porque existem grandes chances de obtenção de elementos nulos em A é que a função objetivo de P3 é linear e, como qualquer função côncava, pelo Lema 1, tem o mínimo num ponto extremo do conjunto formado por P3.1-P3.5. Isto é também conhecido por "corner solutions".

A cada ponto extremo deste conjunto está associada uma base viável. Uma base para o problema P3 tem dimensões $n(n + 2)$, o número de variáveis é $3n^2$ o que implica que pelo menos $2n(n - 1)$ variáveis do problema são nulas em cada ponto extremo e na solução ótima, como consequência.

Pode-se mostrar, e é intuitivo, que a probabilidade de se obter pelo menos um zero na matriz A, dado que a matriz original B não possuia qualquer zero, tende para 1 rapidamente, para valores de n superiores a três quando o problema P3 é resolvido pelo método Simplex. Portanto, a crítica, sob o ponto de vista econômico, é procedente e lança dúvidas sobre a validade de se usar, na prática, estas técnicas de estimativa.

3.2 - FUNÇÃO OBJETIVO

$$\sum_{i,j} (C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1)^2 \qquad \text{(Quadrado da Norma Euclidiana)}$$

O problema pode ser escrito como:

$$\text{P4:} \quad \min_{\Theta \in S} \sum_{i,j} (C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1)^2$$

Como a função objetivo de P4 é (estritamente) convexa, não existe qualquer razão para que o mínimo dela em S esteja num ponto extremo (Colorário 1). Portanto, a possibilidade de se obter elementos nulos em A, é esperada ser menor do que usando-se a norma retilínea. Por isso esta função objetivo tem sido mais usada na estimativa da Matriz de Coeficientes Tecnológicos (Insumo-Produto).

Sob o aspecto computacional, trata-se de um problema con vexo de programação quadrática. Portanto, desde que as condições necessárias de Kuhn-Tucker, para um mínimo local, são necessárias e suficientes para um mínimo global, pode-se obter este mínimo utilizando método de solução de problemas de Programação Quadrática, como os de Dantzig (1961), Van de Panne (1962), Barankin-Dorfman (1968), Frank-Wolfe (1956) e Wolfe (1959)[3], que são baseados diretamente nestas condições de Kuhn-Tucker e usam técnicas Computacionais do Simplex. O algoritmo de Beale (1959) mostra-se, em geral, superior ao de Wolfe particularmente quando a função objetivo é (próxima da) linear, ou seja, o método Simplex é executado duas vezes no método do Wolfe enquanto no de Beale, somente uma vez em cada passo.

Lemke (1965) elaborou um algoritmo, baseado na teoria do pivot complementar, para resolver o problema complementar da forma: Achar $\underline{w}$, $\underline{z} \geq 0$, tal que $\underline{w} = M\underline{z} + \underline{q}$, $\underline{w}^T\underline{z} = 0$, onde M é uma matriz quadrada (N x N); $\underline{w}$, $\underline{z}$ e $\underline{q}$ são (N x 1) vetores colunas. O algoritmo resolve o sistema somente se M é totalmente positiva, ou se M é uma matriz positiva semi-definida, ou se M tem seus menores principais positivos.

Cottle e Dantzig (1968) mostram uma aplicação do algoritmo de Lemke ao problema de Programação Linear e Quadrática. Ravindran (1972) apresenta uma rotina para solução em computador.

Para problemas de grande porte ($n \geq 15$) a experiência tem recomendado o uso de algoritmos de minimização restrita ou de minimização irrestrita, como de Fletcher-Reeves, aplicado à Função de Penalidade para o problema. Este último se mostrou bem superior aos específicos para programação quadrática, principalmente sobre o aspecto tempo de computação. Costa e Ramos (1977) mostram uma aplicação deste método na estimativa de uma matriz de Coeficientes Tecnológicos (Insumo-Produto). Uma comparação com o método de Beale (1959) é feita.

---

(3) Kunzi e Keller (1962) e Boot (1964) apresentam uma discussão sobre os métodos acima.

Gill e Murray (1974 a,b,c) apresentam métodos Tipo Newtonianos, Quasi Newtonianos e uma discussão sobre métodos para problemas de grande porte, respectivamente, para solução de problemas com conjunto de restrições lineares.

Murray (1969) fornece um algoritmo, que relaciona a idéia de uma Função Penalidade, àquela de tentar resolver problemas linearmente restritos, que se aproximam, de certa forma, do problema original.

3.3 - FUNÇÃO OBJETIVO

$$\max_{i,j} |C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1| \quad \text{(Norma de Tchebycheff-}\ell_\infty\text{)}$$

O problema pode ser escrito como:

$$\text{P5:} \quad \min_{\Theta \in S} \; \max_{i,j} |C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1|$$

Como o problema P3, o problema P5 pode ser transformado num problema de programação linear.

Seja $t = \max_{i,j} |C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1|$. Equivalentemente, $t \geq |C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1| \; \forall\, i,j$, por consequência, $t \geq C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1 \geq -t$, onde $\forall\, i,j$, $t \geq 0$, onde t vai ser minimizado.

O problema P5 pode ser reescrito como:

$$\text{P6:} \quad \min t$$

$$\text{t.q.:} \left.\begin{aligned} C_{ij}\, \Theta_{ij} + t &\geq 1 \\ C_{ij}\, \Theta_{ij} - t &\leq 1 \end{aligned}\right\} \forall\, i,j$$

$$\Theta \in S$$

Resolvendo-se o problema P6 resolve-se o problema P5.

Quando t é minimizado, o intervalo dado por $- t \leq C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1 \leq t$ encolherá até o ponto em que as restrições do conjunto S o limitem.

Se a restrição $\Theta \in S$ fosse excluida, a solução $t^* = 0$ e $\Theta^*_{ij} = \frac{1}{C_{ij}}$, $\forall\ i,j$ seria obtida, que é esperado, pois o problema P5 se torna irrestrito.

O problema P6 pode ser resolvido diretamente aplicando-se o método Simplex, onde uma das restrições de igualdade de S (uma é redundante) é removida, ou da maneira que se segue.

Tomando-se as restrições:

$$- t \leq (C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1) \leq t, \quad \forall\ i,j$$

Obtém-se,

$$(1 - t)\, x_j\, b_{ij} \leq \Theta_{ij} \leq (1 + t)\, x_j\, b_{ij}, \quad \forall\ i,j \tag{3}$$

Usando o conjunto S tem-se:

$$(1 - t) \sum_j x_j\, b_{ij} \leq \sum_j \Theta_{ij} = u_i \leq (1 + t) \sum_j x_j\, b_{ij}\ , \quad \forall\ i,j \tag{4}$$

e $$(1 - t) \sum_i x_j\, b_{ij} \leq \sum_i \Theta_{ij} = y_j \leq (1 + t) \sum_i x_j\, b_{ij}, \quad \forall\ i,j \tag{5}$$

Tirando-se o valor de t em (4) e (5) tem-se que:

$$t^* = \max \left\{ \max_i \left[1 - \frac{u_i}{\sum_j x_j b_{ij}} \, , \, \frac{u_i}{\sum_j x_j b_{ij}} - 1 \right], \right.$$

$$\left. \max_j \left[1 - \frac{y_j}{\sum_i x_j b_{ij}} \, , \, \frac{y_j}{\sum_i x_j b_{ij}} - 1 \right] \right\} \qquad (6)$$

onde t^* é o mínimo valor de t procurado.

Claramente, $t^* \geq 0$ desde que $\max_i \left[1 - \frac{u_i}{\sum_j x_j b_{ij}} \, , \, \frac{u_i}{\sum_j x_j b_{ij}} - 1 \right] \geq 0$

e $\max_j \left[1 - \frac{y_j}{\sum_i x_j b_{ij}} , \, \frac{y_j}{\sum_i x_j b_{ij}} - 1 \right] \geq 0.$

Achado t^*, os limites inferior e superior para θ_{ij} $\forall$ ij são:

$$\max \{ x_j b_{ij} (1 - t^*), 0 \} \leq \theta_{ij} \leq x_j b_{ij} (1 + t^*). \qquad (7)$$

Observe que se $0 < t^* < 1$ então

$$0 < x_j b_{ij} (1 - t^*) \leq \theta_{ij} \leq x_j b_{ij} (1 + t^*), \quad \forall \, ij \qquad (8)$$

ou seja, a matriz estimada A será toda positiva; se $t^* \geq 1$, então

$$0 \leq \theta_{ij} \leq x_j b_{ij} (1 + t^*), \quad \forall \, i,j \qquad (9)$$

ou seja zeros poderão ocorrer na matriz A.

No cálculo de t^*, entre os índices $i = 1,\ldots,n$ e $j = 1,\ldots,n$, existe pelo menos um índice que em (6) fornece o valor de t^*. Seja este índice $i = \bar{i}$, por exemplo. Então:

$$t^* = \max \left\{ \left(1 - \frac{u_{\bar{i}}}{\sum_j x_j\, b_{\bar{i}j}} \right) , \left(\frac{u_{\bar{i}}}{\sum_j x_j b_{\bar{i}j}} - 1 \right) \right\} \tag{10}$$

Desde que $\dfrac{u_{\bar{i}}}{\sum_j x_j\, b_{\bar{i}j}} > 0$ tem-se:

a) t^* estará entre 0 e 1 se $0 < \dfrac{u_{\bar{i}}}{\sum_j x_j b_{\bar{i}j}} < 1$, o que implica que na solução ótima

$$\Theta^*_{\bar{i}j} = (1 - t^*)\, b_{\bar{i}j} \;, \qquad j = 1,\ldots,n \tag{11}$$

e $x_j b_{ij}\,(1 - t^*) \leq \Theta^*_{ij} \leq x_j b_{ij}\,(1 + t^*)$, $i = 1,\ldots,n$; $i \neq \bar{i}$ e $j = 1,\ldots,n$.

b) $t^* \geq 1$ se $\dfrac{u_{\bar{i}}}{\sum_j x_j b_{\bar{i}j}} \geq 1$, o que implica que na solução ótima:

$$\Theta^*_{\bar{i}j} = x_j b_{\bar{i}j}\,(1 + t^*), \quad j = 1,\ldots,n \tag{12}$$

e os Θ^*_{ij} restantes serão tais que

$$x_j b_{ij}\,(1 - t^*) \leq \Theta^*_{ij} \leq x_j b_{ij}\,(1 + t^*).$$

O tableau de tipo transporte pode ser usado no preenchimento de cada Θ_{ij}, como se segue:

Θ_{11}	Θ_{12}				u_1
Θ_{21}					u_2
					u_n
y_1	y_2			y_n	$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{j=1}^{n} y_i$

Dependendo de se estar em presença do caso (a) ou caso (b), preenche-se primeiramente o tableau satisfazendo(11) ou(12) ,respectivamente. O restante do tableau pode ser preenchido usando-se qualquer critério conhecido sem necessariamente se levar em conta os limites de cada Θ_{ij}. Para volocar-se os Θ_{ij} dentro dos limites usa-se um processo de ciclos ("loops") para manter-se os requisitos de u_i,i = 1,...n e y_j, j = 1,...,n sempre satisfeito. O número de soluções possíveis é ilimitado. O exemplo 1, ilustra este processo de cálculo como, também, 2 soluções possíveis entre um número infinito delas.

<u>Exemplo 1</u>:

Seja a matriz B dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

e x_1 = 4927650, x_2 = 19446020, x_3 = 55321480;

$y_1 = 2544740,\ y_2 = 6628080,\ y_3 = 25825390$

$u_1 = 2007640,\ u_2 = 7189860,\ u_3 = 25800710.$

$$B\underline{\overline{X}} = \begin{bmatrix} 1971060 & 3889204 & 16596444 \\ 985530 & 7778408 & 16596444 \\ 1478295 & 3889204 & 16596444 \end{bmatrix}$$

$$\sum_j x_j b_{ij} = \begin{bmatrix} 22456708, & 25360382, & 21963943 \end{bmatrix}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \text{ e}$$

$$\sum_i x_j b_{ij} = \begin{bmatrix} 4434885, & 15556816, & 49789332 \end{bmatrix}, \text{ para } j = 1, 2, 3.$$

Usando-se (6) tem-se:

$$t^* = \max\{\underset{i=1}{0.9106^-},\ \underset{i=2}{0.72^-},\ \underset{i=3}{0.17^+},\ \underset{j=1}{0.43^-},\ \underset{j=2}{0.57^-},\ \underset{j=3}{0.48^-}\} = 0.9106$$

que corresponde a $\bar{i} = 1$ e está no limite inferior (-).

Os limites gerados são então:

$176213.67 \leq \theta_{11} \leq 3765906.33;\ 347696.62 \leq \theta_{12} \leq 7430711.38;$
$1483729.71 \leq \theta_{13} \leq 31709158.29;\ 88106.83 \leq \theta_{21} \leq 1882953.17;$
$695393.24 \leq \theta_{22} \leq 14861422.75;\ 1483729.71 \leq \theta_{23} \leq 31709158.29;$
$132160.25 \leq \theta_{31} \leq 2824429.75;\ 347696.62 \leq \theta_{32} \leq 7430711.38;$
$1483729.71 \leq \theta_{33} \leq 31709158.29.$

O tableau abaixo, mostra uma possível maneira de preenchimento,

TABLEAU I

				u
$\bar{i} = 1$ →	176213.67	347696.62	1483729.71	2007640
	88106.83	6280383.38 +	- 821369.79	7189860
	2280419.50	0 +	- 23520290.50	25800710
y	2544740	6628080	25825390	

Os limites não estão satisfeitos para Θ_{23} e Θ_{32}.

Fazendo um ciclo involvendo Θ_{22}, Θ_{23}, Θ_{32} e Θ_{33} obtem-se o Tableau abaixo:

TABLEAU II

176213.67	347696.62	1483729.71
88106.83 +	- 5618023.46	1483729.71
2280419.50 -	+ 662359.92	22857930.58

Este Tableau satisfaz os limites e é tal que t* = 0.9106.

Usando-se o processo de ciclo, aplicado as duas últimas linhas do Tableau acima, obtém-se um número infinito de soluções ótimas. Uma outra solução ótima é:

TABLEAU III

176213.67	347696.62	1483729.71
1882953.17	3823177.12	1483729.71
485573.16	2457206.26	228577930.58

Para obter-se A, divide-se cada coluna do Tableau II (ou Tableau III) por x_j, $j = 1,2,3,$ respectivamente.

3.4 - FUNÇÃO OBJETIVO

$$\max_{ij} \; (C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1)^2. \quad \text{(Max-quad Desvio)}$$

O problema pode ser escrito como:

$$P7: \quad \min_{\Theta \in S} \; \max_{i,j} \; (C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1)^2.$$

Parece claro (ver 4.e), que a solução do problema com esta função objetivo é exatamente a mesma que a da seção 3.3. Isto é, os Θ_{ij} seriam os mesmos e o valor da atual função objetivo seria o quadrado do valor da função objetivo 3.3. Senão, observe que $(C_{ij}\Theta_{ij} - 1)^2 = |C_{ij}\Theta_{ij} - 1|^2$, $\forall$ ij. Portanto, $\max\limits_{ij} (C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1)^2 = \max\limits_{ij}|C_{ij}\Theta_{ij} - 1|^2 = \{\max\limits_{i,j} |C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1|\}^2$ e $\min\limits_{\Theta \in S} \max\limits_{i,j} (C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1)^2 = \{\min\limits_{\Theta \in S} \max\limits_{i,S} |C_{ij}\Theta_{ij} - 1|\}^2$, desde que se tem valores absolutos de $(C_{ij}\Theta_{ij} - 1)$.

Sob o ponto de vista prático não haveria qualquer dúvida em utilizar-se o problema P6, de programação linear, para solucionar este problema. Sob o ponto de vista teórico, um possível desenvolvimento é apresentado no Apêndice, onde é evidente o grau de dificuldade da atual função objetivo, comparada com a de 3.3.

4 - CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES

a) Dentre as funções objetivo apresentadas, a possibilidade de obtenção de zeros, na matriz estimada A, é menor quando se utiliza o quadrado da norma Euclidiana (QNE). Portanto, esta função parece ser a mais recomendada, dentre as discutidas, para uso da estimativa de uma matriz de Coeficientes Tecnológicos (Insumo-Produto). Entretanto, neste assunto, em particular, existe o método RAS, que é discutido em Teixeira e Silva (1977), que tem sido muito utilizado na prática, por exigir menos esforço para sua programação em computador, e tem oferecido resultados julgados, de alguma forma, competitivos com os da QNE, quando as respectivas matrizes estimadas são confrontadas com a real;

b) Pela experiência dos autores, a ocorrência de zeros na matriz estimada A partindo-se de uma matriz B > 0 é menor (indiferente), quando nas funções objetivo da espécie "$\sum$" ("max") utiliza-se $(\frac{a_{ij}-b_{ij}}{b_{ij}})$ ao invés de $(a_{ij} - b_{ij})$ (ver Tabela 1). Além do mais, a ocorrência de pelo menos um zero na matriz estimada A é certa para valores n > 3, se a F.O. (3.1) ou F.O. (3.3), com $t^* \geq 1$, e o método Simplex for utilizado.

c) O tipo de "desvio quadrático" parece fornecer, em geral, menos zeros em A do que o correspondente "em valor absoluto";

d) A abordagem utilizada para a Norma Tchebycheff parece promissora. Devido ao fato de possuir infinitas soluções, um estudo para selecionamento de uma "melhor" é de interesse, principalmente se $0<t^*<1$ no problema P6, que garante a não ocorrência de zeros em A. Neste caso a aplicação do método simples a P6 pode ser usada. No caso de $t^* \geq 1$, a aplicação do método simplex a P6 conduziria a zeros em A. Entretanto estes zeros podem ser eliminados fazendo-se uso dos "ciclos" mencionados em (3.3).

e) A Figura 1 mostra as soluções ótimas, utilizando-se como funções objetivo a norma retilinea ($\underline{X}_1$), o quadrado da norma euclidiana ($\underline{X}_2$) e a norma de Tchebycheff ($\underline{X}_\infty$), para um exemplo hipotético plano. O conjunto viável é dado por: $T = \{x_1, x_2) / x_1, x_2 \geq 0, 2x_1 + x_2 \leq 8\}$ e $K' = (8,7)$.

As funções objetivo são: Norma Retilínea: $d_1\ (\underline{X},\underline{K}) = |x_1 - k_1| + |x_2 - k_2|$; Quadrado da Norma Euclidiana: $d_2^2\ (\underline{X},\underline{K}) = (x_1 - k_1)^2 + (x_2 - k_2)^2$; Norma Tchebycheff: $d_\infty\ (\underline{X},\underline{k}) = \max\ \{|x_1 - k_1|,\ |x_2 - k_2|\}$, para todo $\underline{X} \in T$. As soluções ótimas estão, respectivamente, $\underline{X}_1' = (0.5,7)$; $X_2' = (2,4)$ e $\underline{X}_\infty' = (3,2)$, cujos valores das funções objetivo são $d_1(\underline{X}_1,\underline{K}) = 7.5$, $d_2^2\ (\underline{X}_2,\ \underline{K}) = 45$ (ou $d_2(\underline{X}_2,\ \underline{K}) = 3\sqrt{5}$) e $d_\infty\ (\underline{X}_\infty,\ \underline{K}) = 5$, respectivamente.

Observe-se que, se a função objetivo de (3.4) fosse utilizada, a solução ótima também estaria em $\underline{X}_\infty$.

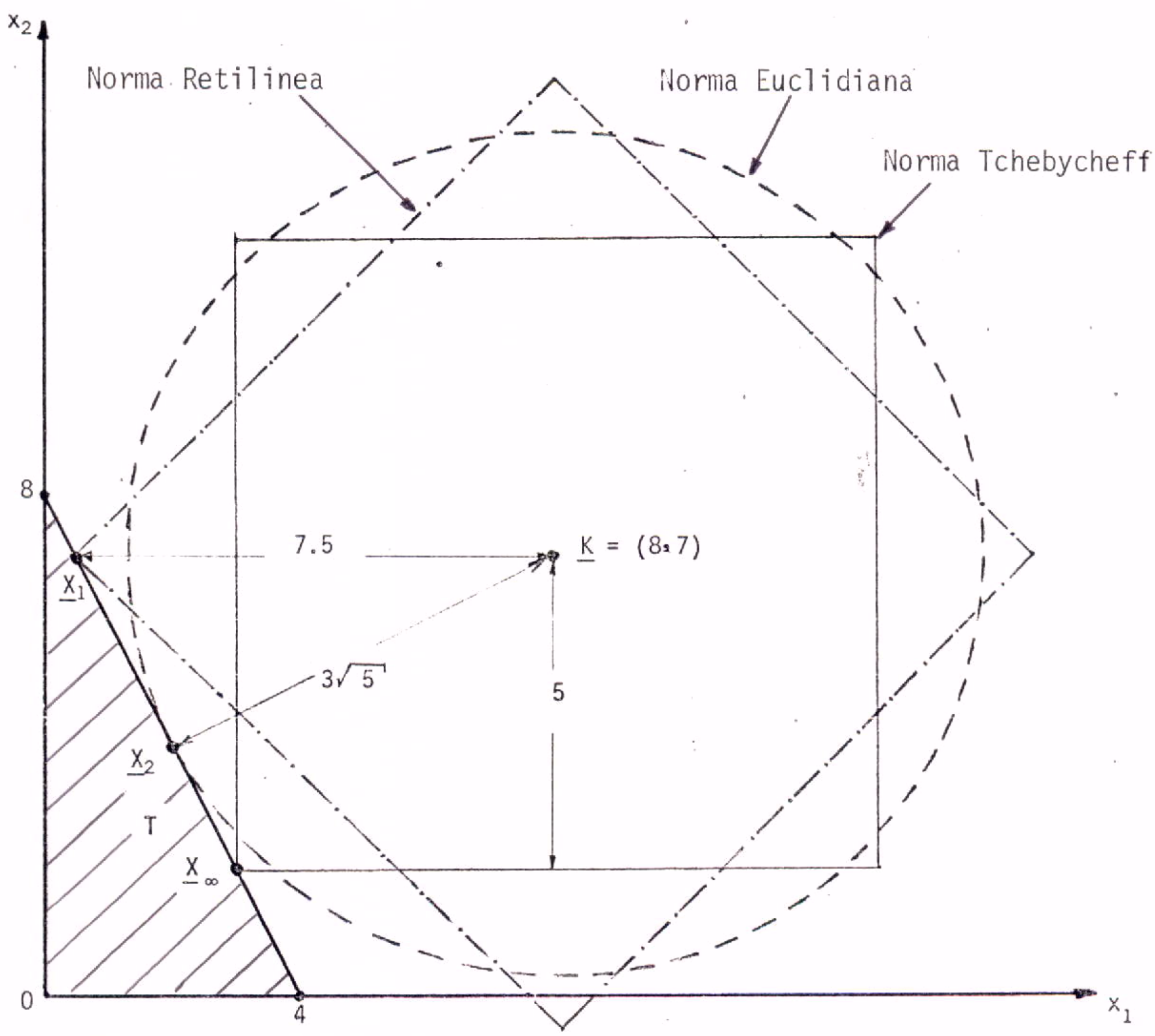

Fig. 1 - Exemplo das Diversas Normas

f) Se $y_j < x_j$, $j = 1, \ldots, n$, pela equação (P1.2) do problema P1, $0 \leq a_{ij} < 1$, $i,j = 1, \ldots, n$. Esta é, exatamente, a situação do problema de estimar a matriz de Coeficientes Tecnológicos (por consequência, a matriz Insumo-Produto). Portanto, qualquer que seja a função objetivo definida em S', $a_{ij} \in [0,1)$, $i,j = 1, \ldots, n$. Todo cuidado deve ser tomado na escolha desta função objetivo, pois os resultados obtidos podem não ter qualquer significado prático.

g) Baseado em (f), talvez fosse de interesse fazer-se um estudo de qual o tipo de função objetivo, além das apresentadas aqui, forneceria melhor estimativa da matriz A utilizando-se matrizes reais conhecidas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Engenheiro Artur Costa Steiner, MSc./INPE, por sua importante ajuda na parte computacional deste trabalho, e a todos elementos do Grupo de Pesquisa Operacional/INPE que direta ou indiretamente colaboraram neste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

BACHARACH; M. *Biproportional Matrices and Input-Output Change.* Cambridge, Cambridge University Press, 1970.

BARANKIN, E.W. e DORFMAN, R. On Quadratic Programming. *University of California Publications in Statistics, vol.* 2, pp. 285-318, 1968.

BEALE, E.M.L. On Quadratic Programming. *Naval Research Logistics Quartely, vol.* 6, pp. 227-243, 1959.

BOOT, J.C.G. *Quadratic Programming.* Amsterdam, North Holland Publishing Co., 1964.

COSTA, J.C.P.M. e RAMOS, W.C. *Utilização de Técnicas de Programação Não-Linear em Problemas de Grande Dimensão.* Projeto Coletivo de Mestrado em Análise de Sistema e Aplicações, INPE, 1977.

COTTLE, R.W. e DANTZIG, G.B. Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming. In: G.B. FANTZIG e A. F. VEINOTT, Jr. (Editores). *Mathematics of the Decision Sciences.* Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1968, pp. 115-136.

DANTZIG, G.B. Quadratic Programming, a Variant of the Wolfe-Markowitz Algorithms. Research Report 2 of the Operations Research Center of the University of California, Berkeley, 1961.

EVERETT, H. Generalized Lagrangean Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation of Resources. *Operations Research, Vol.* 11, pp. 399-417, 1963.

FISHER, M.L. Optimal Solution of Scheduling Problems Using Lagrange Multipliers: Part I. *Operations Research, Vol.* 21(5), pp. 1114-1127, Set./Out. 1973.

FLETCHER, R. A General Quadratic Programming Algorithm. *J. Inst. Maths. Applics., Vol.* 7, pp. 76-91, 1971.

———. An Algorithm for Solving Linearly Constrained Problem. *Mathematical Programming, Vol.* 2, pp. 133-165, 1972.

FRANCIS, R.L. e WHITE, J.A. *Facility Layout and Location: an Analytical Approach.* Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1974.

FRANK, M. e WOLFE, P. An Algorithm for Quadratic Programming. *Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 3,* pp. 95-110, 1956.

GILL, P.E. e MURRAY, W. Newton-type Methods for Linearly Constrained Optimization. In: P.E. GILL e W. MURRAY. *Numerical Methods for Constrained Optimization.* Academic Press, 1974.a. Cap. II, pp. 29-66.

———. Quasi-Newton Methods for Linearly Constrained Optimization. In: P.E. GILL e W. MURRAY. *Numerical Methods for Constrained Optimization.* Academic Press, 1974.b. Cap. III, pp. 67-92.

———. Methods for Large-Scale Linearly Constrained Problems. In: P.E. GILL e W. MURRAY. *Numerical Methods for Constrained Optimization.* Academic Press, 1974.c. Cap. IV, pp. 93-147.

KUNZI, H.P. e KRELLE, W. *Nichtlineare Programmierung.* Berlin, Springer-Werlag, 1962.

LASDON, L.S.; FOX, R.L. e RATNER, M.W. Nonlinear Optimization Using the Generalized Reduced Gradient Methods. *Technical Memorandum nº 325,* Department of Operations Research, CWRU, Cleveland, Ohio, 1973.

LEMKE, C.E. Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming. *Management Science, Vol.* 11, pp. 681-689, 1965.

———. On Complementary Pivot Theory. In: G.B. DANTZIG e A.F. VEINOTT, Jr. (Editores). *Mathematics of the Decision Sciences.* Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1968. pp. 95-114.

LUENBERGER, D.G. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming.* Addison Wesley Publishing Co., Reading, Ma., 1973.

MIELE, A. et al. On the Method of Multipliers for Mathematical Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 10,* pp. 1-33, 1972.

MURRAY, W. An Algorithm for Constrained Minimization. In: R. FLETCHER (Ed.). *Optimization.* Londres, Academic Press, 1969.

NIJKAMP, P. e PAELINK, J.H.P. *Some Methods for Updating Input-Output Tables.* Netherlands Economics Institute, Série: Foundations of Empirical Economic Research, 1974.

PANNE, C. van de. A Nonartificial Simplex Method for Quadratic Programming. Report nº 22 of the International Center for Management Science, Rotterdam, 1962.

RAVINDRA, A. A Computer Routine for Quadratic and Linear Programming Problems. *Communications of ACM, Vol. 15*, pp. 818-820, Setembro, 1972.

STONE, R. *Input-Output, 1954-1966*. Londres, Chapman and Hall, Serie: A Programme for Growth, 1963.

TEIXEIRA, J.R. e SILVA, D.C.M. *Modernização da Matriz de "Input-Output" Utilizando Modelos Matemáticos*. Relatório: INPE-1055-PE/062, Instituto de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Julho 1977.

WOLFE, P. The Simplex Method for Quadratic Programming. *Econometrica, Vol. 27*, pp. 382-398, 1959.

APÊNDICE A

FUNÇÃO OBJETIVO: $\max_{ij} (C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1)^2$ (Max-quad DEsvio)

$$P7: \quad \min_{\Theta \in S} \; \max_{i,j} \; (C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1)^2$$

Seja $s = \max_{i,j} (C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1)^2$. Equivalentemente,

$$s \geq (C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1)^2 \quad \forall\, i,j$$

O objetivo é achar o mínimo valor de s, sujeito às restrições de $\Theta \in S$.

Então o problema P7 pode ser reescrito como:

$$I: \min s$$

$$\text{t.q.: } s \geq (C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1)^2 \qquad (I.1)$$

$$\Theta \in S \qquad (I.2)$$

Este problema pode ser resolvido por qualquer método de otimização restrita (GRG, por exemplo, Lasdon, Fox e Ratner (1973)) ou irrestrita, aplicado a uma função de penalidades. Entretanto o desenvolvimento a seguir parece recomendável especialmente em casos de problemas de grande porte.

O problema é um problema convexo.

Pode-se resolver este problema incorporando-se as restrições I.1 na função objetivo, formando o problema de Lagrange que se segue:

$$\min_{\Theta \in S} \left[s + \sum_{i,j} \lambda_{ij} \left\{ (C_{ij}\, \Theta_{ij} - 1)^2 - s \right\} \right]$$

onde $\lambda_{ij} \geq 0, \; \forall \; i,j$ (Everett (1963)).

Seja $\underline{\lambda}' = \left| \lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1n}, \lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2n}, \ldots, \lambda_{n1}, \ldots, \lambda_{nn} \right|$ e defina

$$G(\underline{\lambda}) = \min_{\Theta \in S} \left\{ (1 - \sum_{ij} \lambda_{ij})s + \sum_{ij} \lambda_{ij} \; (C_{ij} \, \Theta_{ij} - 1)^2 \right\}$$

O lema 2 mostra que na solução ótima, $\sum_{ij} \lambda^*_{ij} = 1$ e $\lambda^*_{ij} \geq 0, \; \forall \; ij$. Isto indica que é suficiente fazer-se uma procura do ótimo para λ'_{ij} s satisfazendo estas restrições.

Lema 2: $\sum_{ij} \lambda^*_{ij} = 1, \qquad \underline{\lambda} \geq \underline{0}$

Prova:

a) $\lambda^*_{ij} \geq 0$, porque cada λ_{ij} está associado a uma restrição de desigualdade;

b) Se $1 > \sum_{ij} \lambda^*_{ij}$ implica que na solução ótima do problema, para este conjunto de λ_{ij}'s, ter-se-á $s^* = 0$ desde que $s^* = \max \, (C_{ij}\Theta^*_{ij}-1)^2 \geq 0$ e s^* não se tem mais nenhuma restrição adicional. Desde que neste trabalho é admitido que a solução trivial $\Theta^*_{ij} = \frac{1}{C_{ij}} \; \forall \; ij$ não está contida em S (caso contrário não haveria estimativa alguma), $\max_{ij} \, (C_{ij} \, \Theta^*_{ij} - 1)^2 > 0$, o que contrariaria o fato que $s^* = 0$. Então $\sum_{ij} \lambda^*_{ij}$ não pode ser inferior a 1.

c) Se $1 < \sum_{ij} \lambda^*_{ij}$ implica que, na solução ótima do problema, para este conjunto de λ_{ij}'s, ter-se-á $s^* = +\infty$ desde que $s^* \geq 0$ e s^* não tem qualquer restrição adicional. Isto implicaria que $s^* = \max \, (C_{ij}\Theta_{ij}-1)^2 = +\infty$, ou seja algum $\Theta^*_{ij} \to +\infty$ o que é um absurdo desde que u_i, $\forall_i$ e y_j, $\forall_j$, são finitos e S é um conjunto de restrições de um problema de transporte, como mencionado anteriormente.

d) Conclusão: $\sum \lambda^*_{ij} = 1$, CQD.

Então, $G(\underline{\lambda})$ pode ser reescrito como

$$G(\underline{\lambda}) = \min_{\Theta \in S} \sum_{ij} \lambda_{ij} \quad (C_{ij}\ \Theta_{ij} - 1)^2.$$

Este problema tem n(n+2) restrições, ao contrário do problema original, que tinha 2n(n+1), incluindo as de não negatividade de Θ_{ij}.

O objetivo, então, é resolver o problema de achar $\underline{\lambda}^*$ tal que:

$$G(\underline{\lambda}^*) = \max \left\{ G(\underline{\lambda}) / \underline{e}'\underline{\lambda} = 1,\ \lambda \geq \underline{0} \right\} \qquad \text{(II)}$$

onde e' = (1,1,...,1).

Os Θ^*_{ij}'s correspondentes a este $\underline{\lambda}^*$ são os desejados, pois o problema original é convexo. O s* pode ser calculado fazendo-se $s^* = \max_{ij} (C_{ij}\ \Theta^*_{ij} - 1)^2$.

Os Lemas 3 e 4, a seguir, serão de utilidade.

Lema 3:

$G(\underline{\lambda})$ é uma função côncava em $E^{(n^2)}$.

Prova: Será fornecida adiante

Lema 4: Seja $G(\underline{\lambda}) = G_1(\underline{\lambda}) + G_2(\underline{\lambda})$. Então

$$\min_{\underline{\lambda}} G(\underline{\lambda}) \geq \min_{\underline{\lambda}} G_1\ (\underline{\lambda}) + \min_{\underline{\lambda}} G_2(\underline{\lambda}).$$

Prova Trivial. Seja $\underline{\lambda}^*$ tal que

$$G(\underline{\lambda}^*) \leqslant G(\underline{\lambda}), \qquad \forall\ \underline{\lambda},\ (\text{i.ē., } G(\underline{\lambda}^*) = \min G(\underline{\lambda})).$$

Seja $\underline{\lambda}_1^*$ tal que: $G_1\ (\underline{\lambda}_1^*) \leqslant G_1\ (\underline{\lambda})$, $\forall\ \underline{\lambda}$, e $\underline{\lambda}_2^*$ tal que $G_2\ (\underline{\lambda}_2^*) \leqslant G_2(\underline{\lambda})$, $\forall\ \underline{\lambda}$, (i.ē., $G_i\ (\underline{\lambda}_i^*) = \min\limits_{\underline{\lambda}} G_i\ (\underline{\lambda})$, $i = 1,2$).

Somando, $G_1\ (\underline{\lambda}_1^*) + G_2(\underline{\lambda}_2^*) \leqslant G_1(\underline{\lambda}) + G_2(\underline{\lambda})$, $\forall\ \underline{\lambda}$.

Em particular, para $\underline{\lambda}^*$ tem-se:

$$G_1(\underline{\lambda}_1^*) + G_2(\underline{\lambda}_2^*) \leqslant G_1\ (\underline{\lambda}^*) + G_2(\underline{\lambda}^*) = G(\underline{\lambda}^*).$$

Portanto:

$$\min_{\underline{\lambda}} G_1\ (\underline{\lambda}) + \min_{\underline{\lambda}} G_2\ (\underline{\lambda}) \leqslant \min_{\underline{\lambda}} G\ (\underline{\lambda}).$$

CQD.

Prova Lema 3:

Seja α tal que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Então,

$$G(\alpha\underline{\lambda}_1 + (1-\alpha)\ \underline{\lambda}_2) = \min_{\Theta \in S} \left\{ \sum_{ij} (\alpha\lambda_{ij}^1 + (1-\alpha)\lambda_{ij}^2)(C_{ij}\Theta_{ij}-1)^2 \right\}$$

$$= \min_{\Theta \in S} \left\{ \alpha \sum_{ij} \lambda_{ij}^1 (C_{ij}\Theta_{ij} - 1)^2 + (1-\alpha) \sum_{ij} \lambda_{ij}^2\ (C_{ij}\Theta_{ij} - 1)^2 \right\}$$

Então, pelo Lema 3,

$$G(\alpha\underline{\lambda}_1+(1-\alpha)\underline{\lambda}_2 \geq \min_{\theta \in S} \left\{ \alpha \sum_{ij} \lambda_{ij}^1 (C_{ij}\theta_{ij}-1)^2 \right\} + \min_{\theta \in S} (1-\alpha) \sum_{ij} \lambda_{ij}^2 (C_{ij}\theta_{ij}-1)^2$$

donde

$$G(\alpha\underline{\lambda}_1+(1-\alpha)\underline{\lambda}_2) \geq \alpha \min_{\theta \in S} \left\{ \sum_{ij} \lambda_{ij}^1 (C_{ij}\theta_{ij}-1)^2 \right\} + (1-\alpha)\min_{\theta \in S} \left\{ \sum_{ij} \lambda_{ij}^2 (C_{ij}\theta_{ij}-1)^2 \right\}$$

$$= \alpha\ G(\underline{\lambda}_1) + (1-\alpha)\ G(\underline{\lambda}_2) \qquad \text{CQD.}$$

Se um procedimento eficiente de procura dos $\lambda_{ij}^{!}$ s no hiperplano definido por $\underline{e}'\underline{\lambda} = 1(\underline{\lambda} \geq 0)$ é disponível, a solução pode ser rapidamente encontrada. O fato adicional de que $G(\underline{\lambda})$ é côncava em $\underline{\lambda}$ (Lema 3) também pode ser utilizado.

O método da projeção do gradiente aplicado ao problema (II) pode ser utilizado. Desde que, em geral, $G(\underline{\lambda})$ não tem a primeira derivada contínua, uma estimativa do gradiente é usada (Luenberger (1973), pg. 163). Processo semelhante aplicado a um problema de localização, será discutido em outro trabalho.

Segundo Everett (1963), uma forma de se resolver o problema acima é determinar $\underline{\lambda}^*$ simplesmente avaliado $G(\underline{\lambda})$, através da solução de um problema de programação quadrática com igualdade (Gill e Murray (1974 a,b), Fletcher (1971), (1972), Miele et al. (1972)), em cada ponto de uma malha fina de pontos no espaço $\underline{\lambda}$. Desde que o espaço de $\underline{\lambda}$ é $E^{(n^2)}$ e admitindo-se que para cada λ_{ij} tem-se N abcissas na malha, isto corresponderia a $N^{(n^2)}$ pontos em que algum tipo de avaliação existiria. Primeiramente, se $\underline{e}'\underline{\lambda} = 1$, $\underline{\lambda} \geq \underline{0}$ e, a seguir, o cálculo do $G(\underline{\lambda})$ correspondente. Esta abordagem parece inapropriada aqui devido à grande dimensão (n^2) do espaço de $\underline{\lambda}$.

Outra forma de resolver o problema é aplicar algoritmos de programação generalizada ao problema (I) pois é um problema convexo.

Entretanto, resolver um problema não-linear convexo, por programação linear generalizada, é, usualmente, um procedimento infinito mas convergente. Isto acarreta, em geral, um tempo muito longo para convergir (Fisher (1973)).

Sob o aspecto teórico, parece interessante um maior aprofundamento no assunto referente a esta função objetivo.