



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14600-TDI/1182**

**ESTUDO DOS EFEITOS PERTURBATIVOS DO TERCEIRO  
CORPO E DO ACHATAMENTO DE UM PLANETA NA  
DINÂMICA DE UM VEÍCULO ESPACIAL:  
CASO NETUNO-TRITÃO**

Carlos Renato Huaura Solórzano

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Tadashi Yokoyama e Alexander Alexandrovich Sukhanov, aprovada em 23 de outubro de 2006.

21.3 : 629.7.076.6

Huaura Solorzano, C. R.

Estudo dos efeitos perturbativos do terceiro corpo e do achatamento de um planeta na dinâmica de um veículo espacial: caso Netuno-Tritão / Carlos Renato Huaura Solórzano.- São José dos Campos: INPE, 2006.

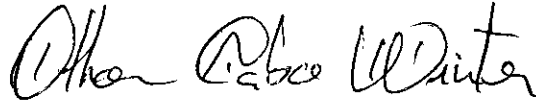
179p. ; (INPE-14600-TDI/1182)

1.Missão de sobrevôo. 2.Satélites interplanetários.  
3.Perturbação. 4.Netuno. 5.Tritão. I.Título.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de **Doutor(a)** em

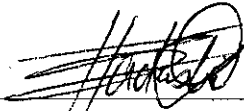
**Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle**

Dr. Othon Cabo Winter



Presidente / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Dr. Tadashi Yokoyama



Orientador(a) / UNESP/RC / Rio Claro - SP

Dr. Antonio Fernando Bertachini de  
Almeida Prado



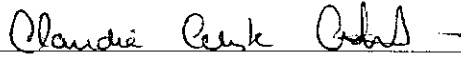
Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dra. Teresinha de Jesus Stuchi



Convidado(a) / UFRJ / Rio de Janeiro - RJ

Dra. Claudia Celeste Celestino



Convidado(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Aluno (a): **Carlos Renato Huaura Solorzano**

São José dos Campos, 23 de outubro de 2006



**Por aqui não se passa sem que se sofra o calor do fogo (dedicado aos capítulos 1 - 7).**

**A Divina Comédia – Purgatório - Canto XXVII, Verso 10**

**À GLÓRIA de quem tudo, aos seus acenos, Move, o mundo penetra e resplandece (dedicado ao capítulo 8).**

**A Divina Comédia – Paraíso - Canto I, Verso 3**



**Dedico este trabalho a meus pais:**

**Luis Alejandro Huaura Pisconte**

**Edith Solórzano Figueroa**

**À minha esposa Isabel Cristina Ramos pelo seu apoio nos momentos difíceis.**

**À minha filha Patrícia Cristina Ramos Huaura por ser a força motora na culminação dos meus projetos.**

**A meus irmãos:**

**Agustín Alejandro Huaura Solórzano**

**Milagros Patricia Huaura Solórzano**

**À minha cunhada:**

**Danila Montoya**

**A todos os meus familiares**





## **AGRADECIMENTOS**

**Agradeço ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) pelas facilidades ao longo destes anos.**

**À CAPES pela bolsa de pesquisa.**

**Ao Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, pela confiança nos momentos difíceis, pela orientação, pelo constante apoio e espírito científico.**

**Ao Dr. Alexander Alexandrovich Sukhanov, pela orientação, pelo constante apoio e espírito científico e pelas múltiplas observações para a melhora deste trabalho.**

**Ao Dr. Tadashi Yokoyama, pela constante motivação em seguir estudando, e por mostrar que nunca é suficiente e que sempre existe mais para estudar e aprender.**

**Ao Dr. Othon Cabo Winter pelas explicações na compreensão das superfícies de seção de Poincaré, e pelas diversas observações para a melhora deste trabalho.**

**As Drs Teresinha de Jesus Stuchi e Claudia Celeste Celestino pelas multiples observações para a melhora deste trabalho.**

**Aos meus amigo(a)s: Áurea Aparecida da Silva, Angelucci Rodrigues dos Santos, Alexandra Amaro de Lima, María Valverde Ramírez, Rolf Henry Vargas Valdivia, John Elmer Cassa Infantes, Alexandre Lacerda Machuy, os quais, encontrei aqui no Brasil, pela sua amizade e seu apoio constante.**

**Aos meus amigos que deixei no meu país: Luis Caballero, Manuel Reynaga, Miguel Medina, Violeta Correa, Elena Arenas Herrera, pelo constante apoio e pela amizade que se mantém apesar do tempo e da distância.**

**Aos colegas e amigos de ontem e de hoje, pela amizade.**



## RESUMO

Na atualidade, as pesquisas para o conhecimento do nosso sistema solar continuam em andamento. Desta forma, em 1 de julho de 2004, a espaçonave Cassini-Huygens entrou em órbita ao redor de Saturno. Em janeiro de 2005, a sonda Huygens enviou diversas informações da maior das luas de Saturno, denominada Titã. Em 19 de janeiro de 2006 acontece o lançamento do satélite New Horizons a Plutão e Caronte. A exploração do sistema solar pela NASA considera uma missão a Netuno como uma das suas prioridades entre os anos 2008-2013. De forma similar à missão Cassini-Huygens, aqui uma missão completa a Netuno e Tritão é proposta. Este trabalho mostra diversas opções para a missão, com o objetivo de encontrar um compromisso entre o  $\Delta V$  e o tempo de vôo a Netuno. Além disso, Netuno é de interesse científico pela sua turbulenta atmosfera e pela presença da maior das suas luas denominada Tritão. Tritão é particularmente interessante pelo seu tamanho, o qual é comparável a Plutão e Caronte, sua órbita retrógrada e a sua significância na cosmologia do sistema solar. Além disso, determinamos as bases dinâmicas de um veículo espacial no sistema de Netuno, analisando principalmente os efeitos do achatamento e da perturbação de Tritão, estudando numericamente as regiões estáveis onde o veículo espacial pode sobreviver.



# **STUDY OF THE THIRD BODY PERTURBATION AND THE PLANET'S OBLATENESSES IN THE DYNAMICS OF A SPACECRAFT: NEPTUNE-TRITON CASE**

## **ABSTRACT**

At the present time the search for the knowledge of our solar system continues effective. So, in July 1st, 2004, the international Cassini-Huygens Mission spacecraft entered into orbit around the planet Saturn. In January, 2005, it sends data from the Huygens probe, which is on Saturn's largest moon, Titan. On January 19, 2006, occurred the launch of the New Horizons spacecraft to Pluto and Charon. NASA's Solar System Exploration theme listed a Neptune mission as one of its top priorities for the mid-term (2008-2013). In a similar way to the Cassini-Huygens Mission, here a complete mission to Neptune and Triton is proposed. This work shows several schemes for the mission in order to find a good compromise between the  $\Delta V$  and time of flight to Neptune. Neptune is scientifically a very interesting object because of its turbulent atmosphere and the presence of the large moon Triton. Triton is particularly interesting because of its size, retrograde orbit, and the insight into Solar System cosmogony to be gained through its comparative relationship with Pluto and Charon. Then, we study the basic dynamics of a spacecraft in the Neptune System, analyzing the main effects of the oblateness and the Triton's disturbing. We also studied numerically the stable regions where the spacecraft can survive.



## SUMÁRIO

Pág.

### LISTA DE FIGURAS

### LISTA DE TABELAS

### LISTA DE SÍMBOLOS

<b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO</b> .....	<b>27</b>
1.1 – Histórico.....	27
1.2 – Apresentação do problema e Revisão Bibliográfica.....	29
1.2.1 – Apresentação do Problema.....	29
1.2.2 – Revisão Bibliográfica.....	30
1.3 – Organização do Trabalho.....	34
1.3.1 – Missão a Netuno e Tritão.....	34
1.3.2 – Efeitos da dinâmica de Netuno e Tritão no veículo espacial.....	35
<b>CAPÍTULO 2 – MISSÃO A NETUNO</b> .....	<b>37</b>
2.1 - Generalidades.....	37
2.2 – Modelo.....	37
2.2.1 – Aproximação pelas órbitas interligadas (patched conics).....	38
2.2.2 – Assistência gravitacional.....	38
2.2.3 – Vôo na esfera de influência de um planeta.....	40
2.2.4 – Formulação do problema de otimização para transferências envolvendo vários planetas.....	43
2.3 – Transferências da Terra a Netuno.....	44
2.4 – Análise das melhores opções de transferência.....	54
2.5 – Sobrevôo de asteróides.....	63
2.5.1 – Introdução.....	63
2.5.2 – Opções na aproximação.....	63
2.5.3 – Análises.....	64
2.6 – Comentários.....	66
<b>CAPÍTULO 3 – MISSÃO A TRITÃO</b> .....	<b>67</b>
3.1 – Generalidades.....	67
3.2 – Manobras orbitais que visam fazer do veículo espacial um satélite de Tritão.....	67
3.2.1 – Ângulo $\varepsilon$ entre os planos.....	71
3.2.2 – Simulações.....	75
3.3 – Transferência direta a Tritão.....	83
3.3.1 – Simulações.....	87
3.4 – Comentários.....	88
<b>CAPÍTULO 4 – MOVIMENTO AO REDOR DE NETUNO</b> .....	<b>91</b>
4.1 – Generalidades.....	91

4.2 – Modelo Matemático.....	91
4.3 – Movimento ao redor de Netuno.....	101
4.4 – Mapas.....	115
4.4.1 – Mapa da perturbação de Tritão.....	116
4.4.2 – Mapa da perturbação de Tritão e do achatamento.....	118
4.5 – Comentários.....	122
<b>CAPÍTULO 5 – MOVIMENTO AO REDOR DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO LAGRANGIANOS <math>L_4</math> E <math>L_5</math>.....</b>	<b>125</b>
5.1 – Generalidades.....	125
5.2 – Modelo Matemático.....	125
5.3 – Deslocamento angulares.....	127
5.4 – Variando as excentricidades.....	129
5.5 – Variando os semi-eixos maiores.....	131
5.6 – Variando as inclinações.....	134
5.7 – Comentários.....	136
<b>CAPÍTULO 6 – EVOLUÇÃO DAS ÓRBITAS NO SISTEMA NETUNO - TRITÃO.....</b>	<b>139</b>
6.1 – Generalidades.....	139
6.2 – Modelo Matemático.....	139
6.2.1 – Problema restrito circular dos três corpos sem achatamento.....	140
6.2.2 – Problema restrito circular dos três corpos com o primário maior achatado.....	143
6.3 – Superfícies de seção de Poincaré.....	145
6.4 – Análises.....	145
6.5 – Comentários.....	151
<b>CAPÍTULO 7 – ANÁLISES DA CAPTURA GRAVITACIONAL POR TRITÃO.....</b>	<b>153</b>
7.1 – Introdução.....	153
7.2 – Modelo Matemático e metodologia.....	155
7.3 – Análises.....	158
7.4 – Comentários.....	166
<b>CAPÍTULO 8 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>169</b>
8.1 – Introdução.....	169
8.2 – Conclusões.....	169
8.3 – Proposta para futuros trabalhos.....	171
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>173</b>



## LISTA DE FIGURAS

	Pág
2.1 Geometria da manobra assistida pela gravidade.....	40
2.2 Vôo entre três planetas com constantes gravitacionais $\mu_0, \mu_1, \mu_2$ .....	41
2.3 Vetores velocidade no infinito.....	42
2.4 Configuração dos planetas e trajetórias de transferência para a opção EJNI, com lançamento em 2018.....	45
2.5 Configuração dos planetas e trajetória de transferência para a opção EVEJNI, com lançamento no ano 2016.....	46
2.6 Configuração planetária e trajetória de transferência para a opção EVEJSN, com lançamento em 2015.....	47
2.7 $\Delta V$ total vs tempo de vôo do veículo espacial para as diversas opções de transferência. a) Diversas opções de transferência. b) Opções com menores consumos de combustível.....	48
2.8 $V_\infty$ próximo de Netuno vs tempo de vôo do veículo espacial.....	49
2.9 Data de lançamento ótima para as diversas opções de transferência.....	49
2.10 $\Delta V$ total vs tempo de vôo do veículo espacial para trajetórias com frenado nas proximidades de Netuno.....	51
2.11 $V_\infty$ próximo de Netuno vs tempo de vôo do veículo espacial para as transferências com frenado.....	51
2.12 Data de lançamento ótima para as diversas opções de transferência com frenado nas proximidades de Netuno.....	52
2.13 Oportunidades de lançamento para a opção EJNI (tempo de vôo 15 anos).....	54
2.14 Oportunidades de lançamento para a opção EVEJNI (tempo de vôo 16 anos).....	55
2.15 Oportunidades de lançamento para a opção EJNI (tempo de vôo 12 anos).....	56
2.16 Oportunidades de lançamento para a opção EVEJNI (tempo de vôo 18 anos).....	57
2.17 $\Delta V$ total vs Altitude do periápside para a opção EJNI.....	58
2.18 $\Delta V$ total vs Altitude do periápside para a opção EVEJNI.....	59
2.19 $\Delta V$ total vs Altitude do periápside para a opção EVEJSN.....	60
2.20 Relação entre os $\Delta V$ de lançamento para transferências com frenado sem frenado para diversos tempos de vôo.....	61
2.21 $\Delta V$ de frenado em função do tempo de vôo para as diversas opções de transferência.....	62
2.22 Configuração planetária e trajetória de transferência para o sobrevôo do asteroide 1931 TD3.....	65
3.1 Manobras orbitais do veículo espacial.....	68
3.2 Manobra de aproximação a Tritão.....	70

3.3	Posição do $\vec{V}_\infty$ e do plano de órbita do veículo espacial.....	71
3.4	Relações geométricas entre o plano de órbita e o plano de referência.....	72
3.5	(a) $\Delta V$ total da manobra orbital para a opção EJNI para $r_{\pi T} = 2 \times 10^3$ km e $r_{\alpha T} = 3 \times 10^4$ km, considerando: (A) $V_\infty = 11.728$ km/s, (B) $V_\infty = 9.328$ km/s, (C) $V_\infty = 6.304$ km/s. (b) Mapa do ângulo épsilon.....	76
3.6	(a) $\Delta V$ total da manobra orbital para a opção EVEJNI para $r_{\pi T} = 2 \times 10^3$ km e $r_{\alpha T} = 3 \times 10^4$ km, considerando: (A) $V_\infty = 14.651$ km/s, (B) $V_\infty = 9.980$ km/s, (C) $V_\infty = 8.925$ km/s. (b) Mapa do ângulo épsilon.....	77
3.7	(a) $\Delta V$ total da manobra orbital para a opção EVEJSN para $r_{\pi T} = 2 \times 10^3$ km, $r_{\alpha T} = 3 \times 10^4$ km considerando: (A) $V_\infty = 17.278$ km/s, (B) $V_\infty = 15.109$ km/s, (C) $V_\infty = 9.608$ km/s. (b) Mapa do ângulo épsilon.....	78
3.8	$\Delta V$ total da manobra orbital, considerando $r_{\pi T} = 2 \times 10^3$ km, $r_{\alpha T} = 3.6 \times 10^4$ km. Para: a) EJNI: (1) $V_\infty = 11.727$ km/s, (2) $V_\infty = 9.328$ km/s, (3) $V_\infty = 6.304$ km/s. b) EVEJNI: (4) $V_\infty = 14.651$ km/s, (5) $V_\infty = 9.980$ km/s, (6) $V_\infty = 8.925$ km/s. c) EVEJSN: (7) $V_\infty = 17.278$ km/s, (8) $V_\infty = 15.109$ km/s, (9) $V_\infty = 9.608$ km/s.....	79
3.9	Comportamento de $\Delta V_T$ e $\Delta V_3$ para $r_\pi = 3 \times 10^4$ km, considerando: (1) $r_{\alpha T} = 3 \times 10^4$ km, $r_{\pi T} = 2 \times 10^3$ km, (2) $r_{\alpha T} = 3 \times 10^4$ km, $r_{\pi T} = 3.5 \times 10^3$ km, (3) $r_{\alpha T} = 2 \times 10^3$ km, $r_{\pi T} = 2 \times 10^3$ km, (4) $r_{\alpha T} = 3.5 \times 10^3$ km, $r_{\pi T} = 3.5 \times 10^3$ km. Para a) $V_\infty = 9.328$ km/s, b) $V_\infty = 6.304$ km/s (Linhas contínuas $\Delta V_T$ , descontínuas $\Delta V_3$ ).....	81
3.10	Comportamento de $\Delta V_T$ e $\Delta V_3$ para $r_\pi = 3 \times 10^4$ km, $r_{\alpha T} = 5.51 \times 10^4$ km, considerando (1) $V_\infty = 6.304$ km/s, (2) $V_\infty = 8.925$ km/s, (3) $V_\infty = 9.3283$ km/s (Linhas contínuas $\Delta V_T$ , descontínuas $\Delta V_3$ ).....	82
3.11	Relação geométrica entre os vetores $\hat{r}'$ e $\hat{r}_0$ .....	83
3.12	Relações angulares do encontro direto entre o veículo espacial e Tritão.....	84
3.13	Encontro direto do veículo espacial com Tritão.....	86
3.14	$\Delta V$ para uma transferência direta a Tritão. Considerando $V_\infty$ : (1) 5.664 km/s, (2) 6.303 km/s, (3) 7.077 km/s, (4) 9.3283 km/s, (5) 11.727 km/s, (6) 14.651 km/s.....	88
4.1	Relação geométrica entre o sistema arbitrário XYZ e o sistema xyz no equador de Netuno.....	94
4.2	Relação geométrica entre os diversos planos.....	100
4.3	Comportamento da inclinação do clone para um semi-eixo maior de $3R_N$ (linhas descontínuas desprezam o achatamento e as linhas contínuas consideram o achatamento).....	102
4.4	Comportamento da excentricidade (a,b) e do argumento do pericentro (c) para semi-eixo maior de $3R_N$ desprezando os efeitos	

	do achatamento.....	103
4.5	Comportamento da excentricidade para semi-eixo maior de $3R_N$ considerando os efeitos do achatamento.....	104
4.6	Comportamento da inclinação do clone para semi-eixo maior de $6R_N$ (linhas descontínuas desprezam o achatamento e as linhas contínuas consideram o achatamento).....	105
4.7	Comportamento da excentricidade (a,b) e do argumento do pericentro (c) para semi-eixo maior de $6R_N$ desprezando os efeitos do achatamento.....	107
4.8	Comportamento da excentricidade para semi-eixo maior de $6R_N$ considerando os efeitos do achatamento.....	108
4.9	Comportamento da inclinação para semi-eixo maior de $9R_N$ (linhas descontínuas desprezam o achatamento e as linhas contínuas consideram o achatamento).....	109
4.10	Comportamento da excentricidade (a,b) e do argumento do pericentro (c) para semi-eixo maior de $9R_N$ desprezando os efeitos do achatamento.....	110
4.11	Comportamento da excentricidade a $9R_N$ considerando o efeito do achatamento.....	111
4.12	Curvas de nível: Excentricidade vs argumento do pericentro quando $J_2 = 0$ , para: a) $I = [40^0-141^0]$ , b) Inclinação inicial fora do intervalo anterior.....	112
4.13	Varição da excentricidade e da inclinação. Para o clone: $e=0.07$ , $I= 49^0$ , $\omega = 270^0$ , $\Omega=270^0$ , $a = 6.5R_N$ (linhas contínuas) sem $J_2$ e (linhas descontínuas) com $J_2$ .....	114
4.14	Varição da excentricidade e da inclinação. Para o clone: $e=0.01$ , $I= 60^0$ , $\omega = 0^0$ , $\Omega=270^0$ , $a = 6R_N$ .....	114
4.15	Mapas do clone orbitando Netuno e perturbado por Tritão.....	117
4.16	Comportamento da excentricidade e do argumento do pericentro para $7R_N$ .....	119
4.17	Mapas do clone orbitando Netuno e perturbado por Tritão e achatamento.....	120
4.18	Comportamento da excentricidade e do argumento do pericentro para $i_0 = 49^0, 124^0$ .....	121
5.1	Órbitas “tadpole” para $\mu_2 = 2.09 \times 10^{-3}$ com condições iniciais $x(0) = 0.0065 + 0.5 - \mu_2, y(0) = 0.0065 + \sqrt{3}/2, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$ .....	126
5.2	Órbitas “tadpole” para $\mu_2 = 0.020558$ com condições iniciais $x(0) = 0.0065 + 0.5 - \mu_2, y(0) = 0.0065 + \sqrt{3}/2, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$ .....	126
5.3	Órbitas “horseshoe” para $\mu_2 = 0.020558$ com condições iniciais $x(0) = -1.02745, y(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.04032$ .....	127
5.4	Comportamento da excentricidade para: (A) $\Delta\lambda_0 = 1^0$ , (B) $\Delta\lambda_0 = 50^0$ (sem $J_2$ ).....	129
5.5	Comportamento do semi-eixo maior para: (C) $\Delta\lambda_0 = 80^0$ , (D) $\Delta\lambda_0 = 85^0$ (com $J_2$ ).....	129
5.6	Comportamento da excentricidade para valores iniciais: (A) 0.1,	

	(B) 0.3, (C) 0.7 (sem $J_2$ ).....	130
5.7	Comportamento do ângulo ressonante para valores da excentricidade: (A) 0.37, (B) 0.4 (com $J_2$ ).....	130
5.8	Comportamento da excentricidade para semi-eixo maior de: (A) $13.820R_N$ , (B) $13.900R_N$ , (C) $13.980R_N$ , (D) $14.060R_N$ (sem $J_2$ ).....	132
5.9	Comportamento da inclinação para: (A) $a = 14.65R_N$ , (B) $a = 14.570R_N$ (sem $J_2$ ).....	133
5.10	Comportamento da inclinação para: (A) $a = 14.65R_N$ , (B) $a = 14.570R_N$ (com $J_2$ ).....	134
5.11	Comportamento de: a) Ângulo ressonante, b) Inclinação, c) Excentricidade. Para $b_0 = 120^\circ$ sendo: (1) Sem $J_2$ , (2) Com $J_2$ .....	135
6.1	Curvas de velocidade zero para valores da constante de Jacobi $C_J$ : (a) 3.0000, (b) 3.0143. Áreas escuras são as regiões de exclusão...	142
6.2	Curvas de velocidade zero associadas com os pontos de equilíbrio lagrangeanos $L_1$ e $L_2$ .....	143
6.3	Superfícies de seção de Poincaré sem achatamento para: a) $C_J = 3.17233$ , b) $C_J = 3.13212$ , c) $C_J = 3.01500$ .....	146
6.4	Superfícies de seção de Poincaré com achatamento para: a) $C_{JJ_2} = 3.17233$ , b) $C_{JJ_2} = 3.13212$ , c) $C_{JJ_2} = 3.02054$ .....	147
6.5	Superfícies de seção de Poincaré para: a) $x(0) = 0.5$ , $C_J = 3.050750$ e $C_{JJ_2} = 3.05246$ . b) $x(0) = 0.5843$ , $C_J = 3.17233$ e $C_{JJ_2} = 3.17440$ . c) $x(0) = 0.6167$ , $C_J = 3.132120$ e $C_{JJ_2} = 3.13436$ . d) $x(0) = 0.72$ , $C_J = 3.01900$ e $C_{JJ_2} = 3.02187$ .....	149
7.1	Parâmetros da captura gravitacional balística.....	156
7.2	$\sigma$ vs $C_J$ para a condição I. (a) órbitas diretas, (b) órbitas retrógradas.....	159
7.3	$\sigma$ vs $C_J$ para a condição II. (a) órbitas diretas, (b) órbitas retrógradas.....	160
7.4	$\sigma$ vs $C_J$ para a condição III. (a) órbitas diretas, (b) órbitas retrógradas.....	161
7.5	Órbita de captura da condição II considerando $\sigma$ no intervalo $[0^\circ, 20^\circ]$ para órbitas diretas. (a) Sistema fixo, (b) Sistema girante (c) $E_2$ vs tempo.....	162
7.6	Órbita de captura da condição II considerando $\sigma$ no intervalo $[60^\circ, 120^\circ]$ para órbitas diretas. (a) Sistema fixo, (b) Sistema girante, (c) $E_2$ vs tempo.....	163
7.7	Órbita de captura da condição II considerando $\sigma$ no intervalo $[0^\circ, 30^\circ]$ para órbitas retrógradas. (a) Sistema fixo, (b) Sistema girante, (c) $E_2$ vs tempo.....	164
7.8	Órbita de captura da condição II considerando $\sigma$ no intervalo $[120^\circ, 170^\circ]$ para órbitas retrógradas. (a) Sistema fixo, (b) Sistema girante, (c) $E_2$ vs tempo.....	165

## LISTA DE TABELAS

	<b>Pág.</b>
2.1 Opções de transferência ótimas para um tempo de vôo de 12 anos.....	45
2.2 Datas ótimas de lançamento para as diversas opções de transferência.....	46
2.3 $\Delta V$ de frenado nas proximidades de Netuno para a opção EJNI.....	62
6.1 Condições iniciais usadas para gerar as Figuras 6.5.....	151
7.1 Tabela de valores para Tritão.....	158



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Latinos

- a** - semi-eixo maior da órbita da primeira elipse de transferência
- a'** - semi-eixo maior da segunda elipse de transferência
- a<sub>T</sub>** - semi-eixo maior de Tritão
- $\hat{c}'$**  - vetor unitário normal ao plano de órbita
- C<sub>J</sub>** - constante de Jacobi
- $\hat{c}$**  - vetor unitário normal ao plano de Tritão
- C<sub>3</sub>** - energia de lançamento
- e** - excentricidade da órbita do satélite
- e<sub>T</sub>** - excentricidade de Tritão
- E 2** - energia de dois corpos
- DE 2** - variação da energia de dois corpos
- I<sub>T</sub>** - inclinação de Tritão respeito ao plano invariável
- I** - inclinação inicial do clone ou veículo espacial
- $\Upsilon$**  - inclinação do equador de Netuno respeito ao plano arbitrário
- J<sub>2</sub>** - coeficiente de achatamento de Netuno
- M<sub>N</sub>** - massa de Netuno
- M<sub>T</sub>** - massa de Tritão
- n<sub>1</sub>** - movimento médio
- r<sub>a</sub>** - raio do apocentro
- r<sub>p</sub>** - raio do pericentro

- $\hat{r}_0$  - vetor unitário da posição inicial de Tritão
- $R_{J2}$  - função perturbadora do achatamento
- $R_N$  - raio de Netuno
- $\hat{S}$  - vetor unitário
- $t$  - tempo
- $\bar{u}$  - vetor velocidade do planeta em relação ao Sol
- $u_{T0}$  - argumento da latitude do Tritão
- $U_T$  - potencial aplicado em Tritão
- $u_n$  - componente normal da velocidade do veículo espacial
- $u_r$  - componente radial da velocidade do veículo espacial
- $\bar{V}$  - vetor velocidade heliocêntrica do veículo espacial
- $D\bar{V}$  - vetor velocidade característica
- $\bar{V}_\infty$  - vetor velocidade no infinito
- $\bar{V}_p$  - vetor velocidade de sobrevôo do planeta
- $\hat{x}$  - vetor unitário no equador de Netuno

### **Gregos**

- $b$  - latitude equatorial do satélite
- $b_1$  - ângulo entre os planos de órbita de Tritão e do satélite
- $b_2$  - ângulo entre a perpendicular ao vetor  $\hat{r}'$  e a velocidade do satélite
- $d$  - ângulo formado entre vetor posição heliocêntrica e vetor do periápsides
- $Y$  - ângulo formado entre os vetores velocidade Tritão e do satélite
- $Y'$  - longitude equatorial do satélite



- $\hat{A}_1$  - eixo do momento principal de inércia
- $l$  - longitude média
- $l - l_T$  - ângulo ressonante
- $Dl_0$  - deslocamento angular inicial
- $j$  - ângulo entre  $\hat{e}_1$  e  $\hat{r}_p$
- $w_{T0}$  - argumento do pericentro inicial de Tritão
- $w$  - argumento do perigeu do satélite ou clone
- $\bar{w}$  - vetor de rotação (spin) de Netuno
- $W$  - longitude do nodo ascendente do satélite ou clone
- $W_T$  - longitude do nodo ascendente do Tritão
- $\hat{W}$  - longitude do nodo do equador respeito ao plano arbitrário
- $s$  - ângulo que especifica a posição do periápside
- $t$  - torque
- $J$  - anomalia verdadeira
- $J^*$  - anomalia verdadeira quando  $r \rightarrow \infty$



## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 Histórico

O início da exploração espacial remonta aos primeiros vôos dos balões (1912) que descobririam os raios cósmicos. Em 1946, o foguete NRL (Naval Research Laboratory) V-1, fez observações do espectro ultravioleta do Sol. O Sputnik 1 (URSS), em 1957, se converteria no primeiro satélite artificial da Terra. Em 1958, o Explorer III (EUA) descobriria o cinturão de radiação ao redor da Terra. A exploração do nosso sistema solar começou em 1959, com as naves soviéticas Luna 1, 2 e 3 e a norte-americana Pioneer 4, que foram até a Lua. A exploração do sistema solar continuou na década de 60, com as séries Mariner (EUA) a Vênus, Marte e Mercúrio. Após isso, tivemos a Zond soviética e as séries norteamericanas Ranger, Lunar Orbiter, Surveyor e Apollo até a Lua, além das missões soviéticas Venera a Vênus.

A exploração dos planetas jovianos começou com as naves americanas Pioneer 10, em 1972, que foi até Júpiter, seguida pela Pioneer 11 em 1973 que teve um vôo de passagem por Júpiter e Saturno. As visitas aos planetas do nosso sistema solar continuaram com a Viking, em 1975, que foi até Marte. A Voyager 1 foi para Júpiter e Saturno e a Voyager 2 para Júpiter, Saturno, Urano e Netuno, sendo ambas lançadas em 1977. Em 1978, a Pioneer 12 e 13 orbitaram Vênus. Missões para o estudo de corpos menores do nosso sistema solar foram a ISEE-3 (International Sun Earth Explorer), para o estudo do cometa Giacobini–Zinner em 1978, e as Vega 1 e 2 (URSS) para o estudo do cometa Halley, as quais também sobrevoaram Vênus. A nave Giotto (ESA) e as japonesas Sakigake e Suisei investigam o cometa Halley em 1985. As soviéticas Fobos foram lançadas para Marte em 1988, e a Galileo (EUA e ESA) foi lançada em 1989 para Júpiter com encontros com os asteróides Gaspra e

Ida. Magalhães visitou Vênus em 1989, e a japonesa Hiten foi à Lua em 1990. A missão Ulisses (EUA e ESA) foi lançada em 1990 e sobrevoou Júpiter antes de posicionar-se em órbita polar ao redor do Sol.

Depois disso, Clementine (EUA) orbitou a Lua em 1994. Em 1996 a NEAR (Near Earth Asteroid Rendezvous) foi ao encontro dos asteróides Manthylida e Eros. A Mars Global Surveyor e a Pathfinder, ambas dos EUA, foram lançadas em 1996 para Marte. Em 1997 a missão conjunta da NASA e da ESA Cassini/Huygens teve como objetivo estudar o sistema de Saturno e das suas luas geladas, em especial Titã. A missão consistiu do satélite Cassini (NASA) e da sonda Huygens (ESA), que foi deixada na atmosfera de Titã. A nave norte-americana Lunar Prospector foi lançada em 1998 para estudar a Lua. O satélite japonês Nozomi foi enviado a Marte em 1998. Em 1999, a missão norte-americana Stardust foi enviada com o objetivo de coletar amostras do cometa 81P/Wild2. Entre algumas das missões dos últimos anos tivemos a missão Messenger (NASA) lançada no 2004 a Mercúrio, Deep Impact (NASA) ao cometa Tempel (2005), Venus Express (ESA) em 2005 a Vênus, e no presente ano 2006 a missão New Horizons a Plutão e Caronte. Porém, o conhecimento e exploração do nosso sistema solar ainda está andamento.

No entanto, os desvios que experimentam as órbitas dos corpos celestes são devidos às perturbações orbitais. Estas forças de perturbação incluem os efeitos do achatamento dos corpos, as atrações gravitacionais de outros corpos, o arrasto atmosférico, a pressão de radiação solar, efeitos das marés, etc.

Um fenômeno que tem um efeito dominante na evolução dos sistemas planetários é o denominado efeito da maré, devido aos fenômenos de dissipação de energia e intercâmbio de momento angular entre o satélite e o planeta. Desta forma, as marés são responsáveis por severas e complicadas mudanças na física do sistema. O fenômeno das marés não é fácil de modelar, devido principalmente a que os modelos precisam de alguns parâmetros cujos

valores não são bem conhecidos (por exemplo precisam de informações da distribuição de densidade interna). No entanto, uma das características que ressalta nos efeitos das marés é a grande escala de tempo envolvida.

O efeito mais significativo da maré é a variação secular do semi-eixo maior do satélite. Como consequência desta variação, o movimento médio do satélite varre vários valores em um certo intervalo de tempo. No entanto, se um sistema de satélites está sobre a ação desta força dissipativa, muitas possibilidades de ressonâncias podem acontecer entre eles. As situações mais comuns são as ressonâncias orbitais entre os movimentos médios dos satélites. Os casos mais significativos são para os planetas maiores, onde dois ou mais satélites podem estar envolvidos nestas ressonâncias.

Devido ao efeito das marés mencionado anteriormente, é conhecido que Tritão esta espiralando em direção a Netuno, podendo enfrentar diversas ressonâncias seculares no futuro. Além disso, Tritão é retrógrado e apresenta uma órbita altamente inclinada. No entanto, o sistema de Netuno mostra que os pequenos satélites interiores sobreviveram aos efeitos perturbativos de Netuno e Tritão, ou seja, dessa evolução o principal resultado é a presença estável dos anéis de Netuno.

## **1.2 Apresentação do Problema e Revisão Bibliográfica**

### **1.2.1 Apresentação do Problema**

Uma missão para o sistema de Netuno aparece na lista de prioridades da NASA, na metade do período 2008-2013 (Hammel et al 2002). Desta forma, a missão permitirá obter diversas informações do sistema de Netuno, permitindo assim entender possíveis sistemas extra-solares similares.

Para atingir com sucesso a missão devemos considerar as diversas opções de transferência de um veículo espacial para Netuno. Além disso, todas as transferências devem ser analisadas em termos do mínimo consumo de

combustível (relacionado ao mínimo  $\Delta V$ ). Desta forma, para a missão, existe um compromisso entre  $\Delta V$  e o tempo de vôo a Netuno.

Swenson (1992) propõe uma missão a Netuno utilizando manobras gravitacionalmente assistidas com a Terra e Júpiter, considerando múltiplas manobras assistidas com a gravidade com Vênus (VVEJGA). Além disso, considera uma combinação com manobras propulsivas.

A presença do terceiro corpo resulta em uma perturbação dos satélites, naturais ou artificiais. Um dos primeiros trabalhos nesse campo foi desenvolvido por Kozai (1959), que mostrou a possibilidade de reduções drásticas no tempo de vida orbital devido a atração Lua-Sol sobre satélites artificiais com órbitas altamente excêntricas.

Do ponto de vista da dinâmica do sistema de Netuno, devido aos efeitos das marés, Tritão está em queda e no futuro seu movimento médio entrará em sucessivas ressonâncias com os satélites mais internos de Netuno. Os satélites internos são afetados principalmente pelo achatamento do planeta.

Yokoyama (2002), através de diversas simulações, mostrou que a variação do equador de Netuno devida à aproximação de Tritão é mínima. No entanto, os efeitos das marés para tempos de grandeza curtos (50 a 100 anos) não são importantes, já que o efeito secular da maré tem um período muito longo.

Assim, um dos problemas que temos de enfrentar é encontrar as diversas trajetórias que nos permitam atingir Netuno com o mínimo consumo de combustível. Analisaremos também os efeitos de Netuno e Tritão na órbita de um veículo espacial. Esse estudo pode ser ampliado a pequenos corpos que orbitam o sistema de Netuno.

### **1.2.2 Revisão Bibliográfica**

Na presente revisão bibliográfica mostraremos alguns trabalhos desenvolvidos no referente às trajetórias interplanetárias e à dinâmica do sistema de Netuno.

Entre os primeiros trabalhos que abordam os problemas das missões interplanetárias, temos o estudo feito por Hollister e Prussing (1966), os quais propõem uma transferência a Marte através de Vênus, analisando as diversas vantagens da manobra assistida com a gravidade durante o encontro com Vênus. Um dos trabalhos pioneiros no seu tempo, no sentido de que teve a visão de fazer um “tour” por uma série de planetas do nosso sistema solar utilizando os conceitos de manobra assistida pela gravidade, foi o trabalho de Flandro (1966), o qual planeja uma missão ao sistema solar exterior utilizando a energia obtida do campo gravitacional de Júpiter. O seu objetivo principal é fazer com que o veículo espacial ganhe energia nos encontros planetários. Desta forma, os planetas intermediários aparecem como campos de força que se movem com respeito ao sistema de coordenadas heliocêntricas inerciais. Assim, o trabalho é feito sobre o veículo espacial e sua energia pode aumentar ou diminuir, dependendo da geometria do encontro.

Em plena década de setenta, na qual se dá início aos vôos ao sistema solar exterior (Pioneer 10 a Júpiter, Pioneer 11 a Júpiter e Saturno, Voyager 2 a Júpiter, Saturno, Urano, Netuno, Voyager 1 a Júpiter e Saturno). D’amario et al (1981) desenvolve diversas técnicas para minimizar o  $\Delta V$  total para diversas trajetórias interplanetárias. Essas técnicas foram aplicadas com sucesso na missão Galileo (1989).

Em 1978 foi lançado o ISEE-3 (International Sun Earth Explorer) com a missão de estudar os ventos solares e os raios cósmicos, o qual ficou no ponto  $L_1$  do sistema Sol-Terra. Quando próximo ao final da sua missão e com uma quantidade limitada de combustível foi renomeado como ICE (International Comet Explorer) e teve a missão de pesquisar o cometa Giacobini-Zinner. Para isso utilizou diversas manobras assistidas com a gravidade, mudando sua trajetória para encontrar a cauda do cometa em 11 de setembro de 1985. O trabalho de Farquhar, Muhonen e Church (1985) apresenta uma discussão dos conceitos das manobras assistidas com a gravidade, assim como as suas aplicações à missão ISEE-3/ICE. O trabalho de Muhonen, Davis e Dunham

(1985) expõem uma série de manobras alternativas para a trajetória de escape do ISEE-3 e mostra diversas soluções disponíveis.

Striepe e Braun (1991) analisam missões a Marte utilizando a técnica de manobras assistidas pela gravidade com Vênus. Para certas orientações dos planetas incorpora manobras propulsivas. Peralta e Flanagan (1995) planejam as trajetórias interplanetárias da missão Cassini (lançado em 15/10/1997). Essa missão tem como objetivo estudar o sistema saturniano. Assim, a trajetória assistida pela gravidade com Vênus–Vênus–Terra–Júpiter fornece a energia necessária para atingir Saturno.

Um dos trabalhos que propõe a utilização da atmosfera planetária para os vôos interplanetários é desenvolvido por Sims et al (1995), o qual analisa as trajetórias aero-gravitacionalmente assistidas aos planetas exteriores. Este tipo de manobra pode reduzir os requisitos na energia de lançamento e no tempo de vôo. Analisando o desenvolvimento de uma missão futura a Júpiter, Saturno, Urano, Netuno e Plutão usando a atmosfera de Vênus e/ou Marte para a assistência aero-gravitacional.

Sims, Staugler, e Longuski (1997), analisam uma série de trajetórias para Plutão usando manobras assistidas pela gravidade com Júpiter. Também analisam as manobras assistidas pela gravidade com Marte em conjunção com múltiplas manobras assistidas com Vênus. Analisa também as possibilidades de diversos sobrevôos aos asteróides. Sukhanov (1999) analisa uma missão ao Sol, mediante manobras assistidas pela gravidade nos planetas interiores. Considera manobras assistidas pela gravidade na Terra, Marte, e Vênus para se aproximar do Sol, considerando certas vantagens no consumo de combustível com respeito á manobra assistida por Júpiter.

Com respeito a análise da perturbação do terceiro corpo e à dinâmica do sistema de Netuno, diversos estudos foram desenvolvidos. Kozai (1959) desenvolveu os termos seculares principais e de longo período da função perturbadora devido a atração gravitacional Lua-Sol em termos dos elementos



orbitais do satélite, do Sol e da Lua. Kaula (1962) obteve os termos da função perturbadora para a perturbação lunisolar, utilizando elementos equatoriais para a Lua e o Sol.

Posteriormente, Giacaglia (1970) apresenta uma teoria semi-analítica para o movimento de um satélite com respeito à Lua, incluindo as forças gravitacionais da Lua, Terra, Sol e a não esfericidade do campo gravitacional da Lua. Além disso, o mesmo Giacaglia (1973) obteve a função perturbadora para a perturbação da Lua usando elementos eclípticos para a Lua e elementos equatoriais para o satélite. Foram calculados termos seculares de longo e de curto período e eles foram expressos de forma fechada. Em outro trabalho, Kozai (1973) desenvolveu um método alternativo para o cálculo das perturbações lunisulares. A função perturbadora foi expressa em termos dos elementos orbitais do satélite e das coordenadas geocêntricas do Sol e da Lua. Os termos seculares e de longo período são obtidos por integração numérica e os de curto período são obtidos analiticamente.

Estudos sobre a dinâmica do sistema de Netuno são apresentados no trabalho de Chyba et al (1989), que estuda a evolução de Tritão, o qual está espiralando em direção ao planeta devido aos efeitos das marés com Netuno. O trabalho mostra a possibilidade de Tritão atingir o limite de Roche, e também o fato de que Tritão possivelmente sempre esteve em órbita retrógrada. Goldreich et al (1989) faz uma análise dos efeitos da evolução das marés na órbita de Tritão. Apresenta a hipótese de que Tritão foi capturado a partir de uma órbita heliocêntrica. No entanto, argumenta que os efeitos das marés de Netuno sobre Tritão conduziram ao estado atual, onde Tritão perturba fortemente Nereida, assim como também os outros satélites de Netuno.

Antes da chegada da Voyager 2 a Netuno (25/08/1989), existiam uma série de controvérsias com respeito à presença de anéis e de outras luas (até então só eram conhecidas Tritão e Nereida) no sistema de Netuno. A possibilidade dos anéis estarem inclinados entre  $0^{\circ}$  a  $15^{\circ}$ ,  $165^{\circ}$  a  $180^{\circ}$ , ou próximos a  $90^{\circ}$ , foi

sugerida no estudo de Dobrovolskis (1980). No entanto, Borderies (1989) confirmou as bases teóricas para a existência de anéis polares. Ambos, Dobrovolskis (1980) e Borderies (1989), argumentaram que os anéis podem ser estáveis na presença de fenômenos de dissipação de energia entre as partículas (Dobrovolski et al. 1989a). No trabalho de Dobrovolskis et al (1989b), mediante métodos analíticos e numéricos, foi provado que Netuno poderia ter anéis polares. No entanto, a Voyager 2 não encontrou anéis polares ao redor de Netuno, ficando descartada essa hipótese.

A Voyager 2 descobriu seis novos satélites internos de Netuno. O trabalho de Owen, Vaughan e Synnott (1991) apresenta os elementos orbitais desses pequenos satélites. Estes pequenos satélites tiveram a designação temporária da IAU de 1989N1 a 1989N6. Foram renomeados posteriormente como Proteus, Larissa, Despina, Galatea, Thalassa, Naiada e os anéis foram denominados como Le Verrier e Adams e posteriormente encontrados Galle, Lassell, e Arago. Através da análise das informações da Voyager 2, Porco (1991) concluiu que a dinâmica dos arcos (Liberty, Equality, Fraternity, e Courage que formam parte do anel Adams) podem ser explicadas pelas perturbações de Galatea. Foryta e Sicardy (1996) estudaram os efeitos de um pequeno satélite (Galatea) sobre as partículas dos arcos que formam parte do anel Adams.

### **1.3 Organização do Trabalho**

O presente trabalho apresenta os seguintes itens gerais.

1. Missão a Netuno e Tritão.
2. Efeitos da dinâmica de Netuno e Tritão no veículo espacial.

A seguir discutiremos brevemente cada um dos tópicos a serem investigados.

#### **1.3.1 Missão a Netuno e Tritão**

Esta missão foi dividida nos pontos mostrados abaixo.

1.3.1.1.- Transferência da Terra a Netuno: No desenvolvimento das trajetórias foram consideradas as seguintes possibilidades:

Transferência direta Terra-Netuno.

Transferência Terra-Júpiter-Netuno.

Transferência Terra-Saturno-Netuno.

Transferência Terra-Júpiter-Saturno-Netuno.

Transferência Terra-Vênus-Terra-Júpiter-Netuno.

Transferência Terra-Vênus-Terra-Júpiter-Saturno-Netuno.

Dois importantes parâmetros, a velocidade característica  $\Delta V$  e a velocidade no infinito  $V_\infty$  próximo de Netuno, serão obtidos como função do tempo de vôo. Esses dois parâmetros determinam o consumo de combustível para a transferência e o impulso necessário para a captura nas proximidades de Netuno. Serão consideradas as datas ótimas entre os anos 2008-2020. O item 1.3.1.1 será analisado no capítulo 2.

1.3.1.2.- Aproximação a Tritão: Na missão em estudo, através de diversas manobras, o veículo espacial pode ser colocado em órbita ao redor de Tritão. Analisaremos duas possibilidades: As manobras que visam fazer do veículo espacial um satélite de Tritão e a transferência direta a Tritão. No capítulo 3 estudaremos as manobras mencionadas neste item.

### **1.3.2 Efeitos da Dinâmica de Netuno e Tritão no Veículo Espacial.**

1.3.2.1.- Estudo do movimento de um veículo espacial ao redor de Netuno: A dinâmica considerara os efeitos do achatamento de Netuno e a perturbação de Tritão. Analisaremos a estabilidade das órbitas ao redor de Netuno, que pode ser estendida a partículas que denominaremos de clones. O item 1.3.2 será estudado nos capítulos 4, 5 e 6. No capítulo 7, faremos uma breve introdução ao estudo da captura gravitacional por Tritão.



## **CAPÍTULO 2**

### **MISSÃO A NETUNO**

#### **2.1 Generalidades**

A técnica das manobras assistidas pela gravidade como um meio para realizar a exploração de planetas foi exemplificado pelas missões Voyager, Galileo, Cassini etc. Assim, em 20 de agosto de 1977, a Voyager 2 foi lançada para a exploração do nosso sistema solar exterior. Em 25 de agosto de 1989 sobrevôu Netuno, sendo a missão um sucesso no desenvolvimento de trajetórias interplanetárias. O estudo da missão interplanetária permite considerar os diversos campos gravitacionais dos planetas como restritos às suas respectivas esferas de influência. A trajetória interplanetária do veículo espacial é representada por uma série de segmentos de movimento kepleriano não perturbado nas esferas de influência dos diversos corpos celestes. Desta forma, a trajetória passa da esfera de influência do Sol às esferas de influência dos planetas e vice-versa. Análises dos vôos interplanetários mediante a técnica das manobras assistidas pela gravidade são conhecidas e podem ser aplicadas quando o veículo espacial passa de um corpo celeste a outro. Esta manobra fornece uma mudança na energia heliocêntrica do veículo espacial, o qual pode reduzir a quantidade de propelente necessária para atingir a missão interplanetária.

#### **2.2 Modelo**

Como foi apresentado na seção 1.3.1.1, estamos interessados nas diversas opções de transferência da Terra a Netuno. Para atingir com sucesso a missão, usamos a gravidade dos planetas, através das manobras assistidas. Assim, para encontrar as trajetórias interplanetárias, utilizamos o método “patched

conics”, o qual considera as passagens pelas esferas de influência dos planetas, e as transferências como heliocêntricas, sendo as perturbações na esfera de influência desprezíveis. A aproximação “patched conics” considera a trajetória como sendo constituída de uma série de cônicas interligadas.

### **2.2.1 Aproximação pelas órbitas interligadas(patched-conic).**

O vôo interplanetário do veículo espacial utiliza muito do seu tempo de vôo movendo-se no campo gravitacional do Sol. Apenas por breves períodos de tempo, comparado com a duração total da missão, a trajetória do veículo é dominada pelo campo gravitacional do planeta de partida, sobrevôo e chegada. As perturbações causadas pelos outros planetas enquanto o veículo espacial segue seu caminho heliocêntrico é desprezada. Assim sendo, através do uso das órbitas interligadas, podemos obter uma boa estimativa do consumo de combustível.

A aproximação “patched-conic” nos permite ignorar a influência gravitacional do Sol no veículo espacial quando este se encontra próximo de um planeta. Se mudamos para um sistema de referencia heliocêntrico, podemos determinar a velocidade do veículo espacial relativa ao Sol e a conseqüente órbita heliocêntrica. O mesmo processo é seguido de forma inversa, quando chegamos à esfera de influência do planeta alvo.

### **2.2.2 Assistência Gravitacional**

Uma conseqüência importante de um veículo espacial ingressar na esfera de influência de um planeta é a possibilidade de ganhar ou perder energia. O ganho ou perda de energia é causado pela rotação do vetor velocidade do veículo espacial devido a influência do campo gravitacional. Isto é, o campo gravitacional do planeta gira o vetor velocidade relativa do veículo espacial (em direção ao movimento do planeta). O vetor velocidade de saída da esfera de

influência com respeito ao corpo fixo é diferente do vetor velocidade de entrada à esfera de influência, o qual fornece uma variação na energia. Outra grandeza importante é a velocidade do veículo espacial no infinito  $V_{\infty}$ , que é velocidade antes e depois de passar pela esfera de influência do planeta.

Considerando o vôo de um veículo espacial através da esfera de influência de um planeta (Fig. 2.1), designaremos  $\vec{V}_{\infty}$  e  $\vec{V}'_{\infty}$  os vetores velocidade no infinito do veículo espacial com relação ao planeta, ao entrar e sair da esfera de influência. As velocidades heliocêntricas do veículo espacial, quando entra e saí da esfera de influência do planeta, são:

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \vec{u} + \vec{V}_{\infty} \\ \vec{V}' &= \vec{u} + \vec{V}'_{\infty}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Onde  $\vec{u}$  é a velocidade do planeta com relação ao Sol. O tempo de vôo na esfera de influência é assumido pequeno quando comparado ao período orbital do planeta. Sendo assim, a velocidade do planeta  $\vec{u}$  é aproximadamente a mesma para a entrada e para a saída. O sobrevôo do planeta muda a velocidade do veículo espacial, conforme:

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}' - \vec{V} = \vec{V}'_{\infty} - \vec{V}_{\infty}\tag{2.2}$$

Essa passagem produz um impulso na trajetória do veículo espacial, que é denominado de assistência por gravidade.

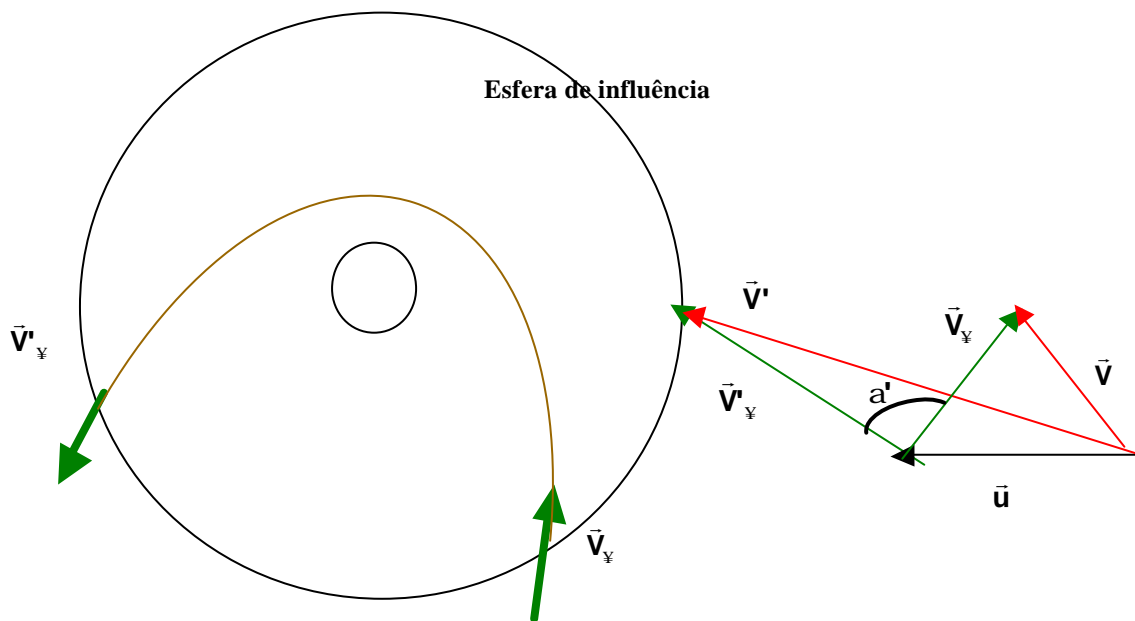


FIGURA 2.1 – Geometria da manobra assistida pela gravidade.

### 2.2.3 Vôo na Esfera de Influência de um Planeta

Considere o vôo entre três planetas (Fig 2.2) com constantes gravitacionais  $\mu_0, \mu_1, \mu_2$ . O vôo inicia no planeta de massa  $\mu_0$ , e posição  $\vec{r}_0$ , no tempo  $t_0$  fazendo uma manobra assistida com a gravidade do planeta de massa  $\mu_1$ , e posição  $\vec{r}_1$ , no tempo  $t_1$ , e vai até o planeta destino de massa  $\mu_2$ , e posição  $\vec{r}_2$ , no tempo  $t_2$ . Duas partes da trajetória do veículo espacial ( $\vec{r}_0$  a  $\vec{r}_1$  em  $t_1 - t_0$  e de  $\vec{r}_1$  a  $\vec{r}_2$  em  $t_2 - t_1$ ), podem ser encontradas pelas soluções do problema de Lambert (Battin 1987). Estas soluções determinam  $\vec{V}_{\infty}$  e  $\vec{V}'_{\infty}$  (na esfera de influência do planeta 1).



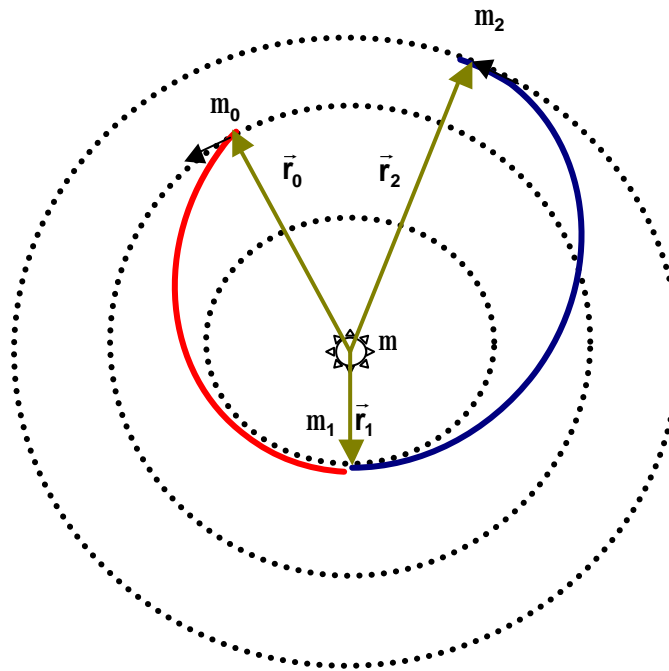


FIGURA 2.2 – Vôo entre três planetas com constantes gravitacionais  $\mu_0, \mu_1, \mu_2$ .

O ângulo de giro ( $\alpha'$ ) pode ser determinado a partir de:

$$\cos \alpha' = \frac{\vec{V}_\infty \cdot \vec{V}'_\infty}{V_\infty V'_\infty} \quad (2.3)$$

Podemos considerar que os vetores velocidade no infinito se movem ao longo de superfícies paralelas (Fig. 2.3), sendo o raio da esfera de influência menor que a distância heliocêntrica, considerando que o veículo espacial pode entrar ou sair em algum ponto da superfície sem mudança drástica na trajetória heliocêntrica.

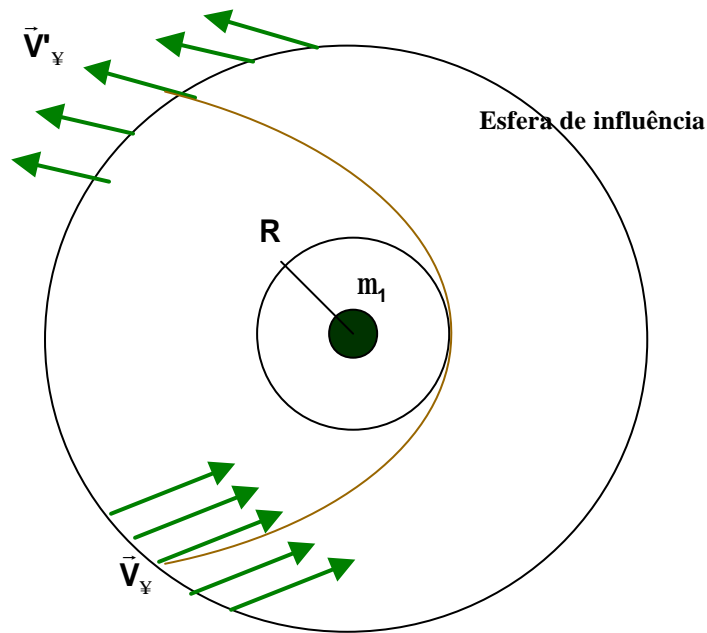


FIGURA 2.3 – Vetores velocidade no infinito.

O ângulo de giro pode ser expressado de outra forma como:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha'}{2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{R_{\pi} V_{\infty}^2}{\mu_1}} \quad (2.4)$$

Assim sendo, a distância do periápside na trajetória é dada por:

$$R_{\pi} = \frac{\mu_1}{V_{\infty}^2} \left( \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha'}{2}\right)} - 1 \right) \quad (2.5)$$

Onde  $R$  é a distância mínima à qual o veículo espacial pode se aproximar do planeta ( $R_{\pi}$  = raio do planeta + altitude da atmosfera + distância de segurança),

sendo  $R_\pi \geq R$ . A manobra assistida pela gravidade é possível quando

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha'}{2}\right) \leq \frac{1}{1 + \frac{R_\pi V_\infty^2}{\mu_1}}$$

#### 2.2.4 Formulação do problema de otimização para transferências envolvendo vários planetas

Consideramos uma transferência que passa por “n” planetas. Depois que a trajetória do veículo espacial é encontrada pelas soluções do problema de Lambert, o  $\Delta V$  total pode ser encontrado por  $\Delta V = \sum_{j=0}^n \Delta V_j$  sendo:  $\Delta V_0$  o impulso de lançamento,  $\Delta V_j$  o impulso na esfera de influência do j-ésimo planeta,  $\Delta V_n$  o impulso de frenagem. O problema de otimização é encontrar:  $\Delta V_m = \min_t \Delta V$ . Assim:

$t_0, \bar{r}_0$  : tempo de lançamento e posição do planeta de partida no tempo  $t_0$ .

$t_j, \bar{r}_j$  : j-ésima manobra assistida e posição do j-ésimo planeta no tempo  $t_j$  ( $j=1, \dots, n-1$ ).

$t_n, \bar{r}_n$  : tempo de chegada ao planeta final e posição do planeta no tempo  $t_n$ .

Sendo:

$\bar{t} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ . O problema de otimização é solucionado por:

$$\Delta V_m = \min_t \Delta V \tag{2.6}$$

### 2.3 Transferências da Terra a Netuno

O veículo espacial pode realizar diversas manobras assistidas pela gravidade. Terra e Vênus são os planetas interiores que têm o maior campo gravitacional. No entanto, entre os planetas externos, Júpiter e Saturno mostram ótimas contribuições para os vôos a Netuno, devido à energia obtida durante as aproximações a esses planetas. Mas, ao se aproximar de Netuno, o veículo espacial precisa ter um valor baixo da velocidade no infinito para facilitar a frenagem e captura pelo planeta. Consideraremos as datas ótimas de lançamento no intervalo 2008 – 2020, com o objetivo de aplicar nossos resultados a uma possível missão futura. Analisaremos as seguintes opções de transferência (Solórzano et al, 2006a):

- Transferência direta Terra a Netuno (EN).
- Transferência Terra - Júpiter - Netuno (EJN).
- Transferência Terra - Saturno - Netuno (ESN).
- Transferência Terra - Júpiter - Saturno - Netuno (EJSN).
- Transferência Terra - Vênus - Terra - Júpiter - Netuno (EVEJN).
- Transferência Terra - Vênus - Terra - Júpiter - Saturno - Netuno (EVEJSN).

Vemos na Tabela 2.1 que o  $\Delta V$  mínimo é 6.507 km/s para a opção EJN. O tempo total de vôo é de 12 anos, com uma altitude de lançamento da Terra de  $0.2 \times 10^3$  km e uma aproximação a Netuno de  $1.2 \times 10^3$  km. A velocidade no infinito do veículo espacial, ao se aproximar de Netuno, é 11.728 km/s. Uma outra opção com um valor baixo de  $\Delta V$  é EVEJN. No entanto, a velocidade no infinito próxima de Netuno é maior que a opção EJN, o que aumenta os custos de frenagem.

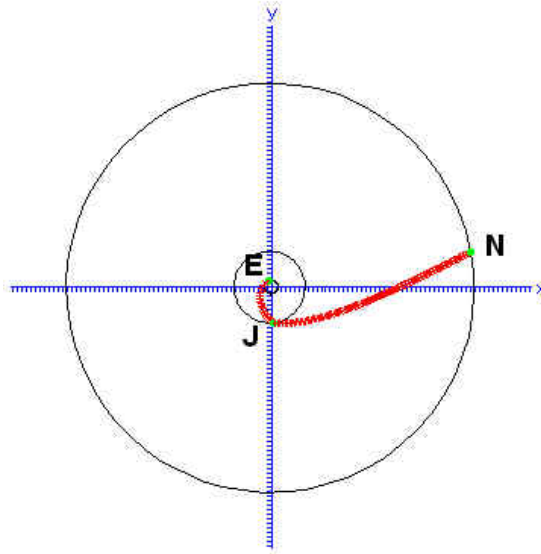


FIGURA 2.4 – Configuração dos planetas e trajetórias de transferência para a opção EJNI, com lançamento em 2018.

**Tabela 2.1 - Opções de transferências ótimas para um tempo de vôo de 12 anos**

Opção de transferência	Data de lançamento	$V_{\infty}$ em Netuno (km/s)	$\Delta V$ total (km/s)
EN	13/04/2012	9.436	8.992
EJNI	14/01/2018	11.728	6.507
ESN	13/02/2016	12.535	7.775
EJSN	18/11/2015	15.757	6.719
EVEJNI	24/08/2016	14.578	6.646
EVEJSN	09/06/2015	17.275	7.206

As Figuras 2.4 e 2.5 mostram as diversas configurações dos planetas, projetadas sobre o plano da eclíptica, para as opções de transferência EJNI e

EVEJN. A Figura 2.6 mostra a configuração planetária e a trajetória de transferência sobre o plano da eclíptica para o esquema EVEJSN.

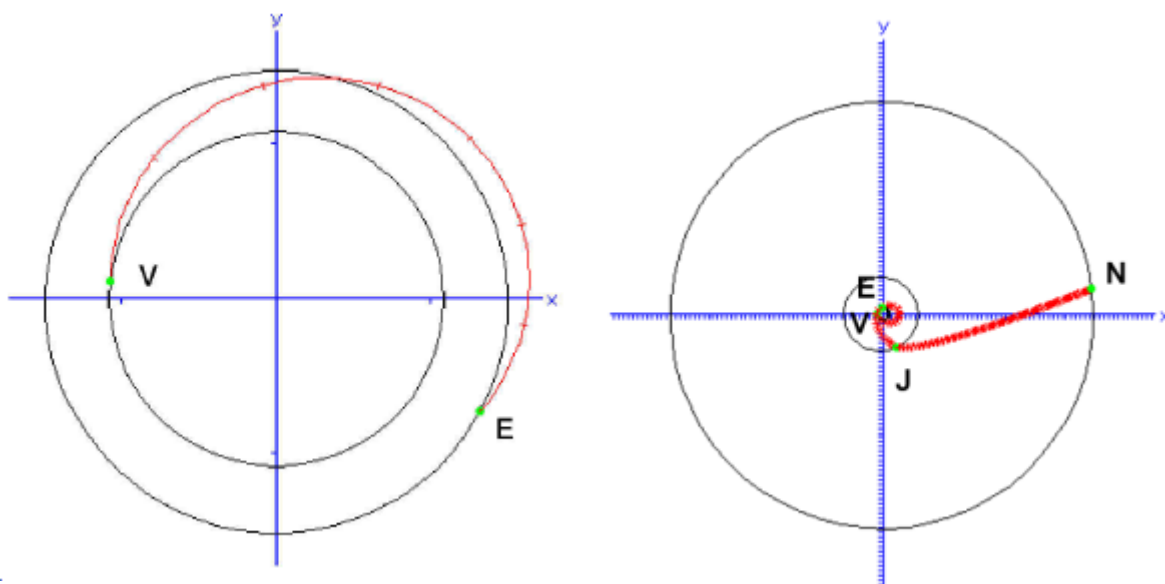


FIGURA 2.5 – Configuração dos planetas e trajetória de transferência para a opção EVEJN, com lançamento no ano 2016.

**Tabela 2.2 - Datas ótimas de lançamento para as diversas opções de transferência**

Opção de transferência	Data ótima de lançamento	$V_{\infty}$ em Netuno (km/s)	$\Delta V$ total (km/s)
EN	09/04/2009	6.258	8.691
EJN	13/01/2018	7.050	6.367
ESN	17/01/2014	7.468	7.273
EJSN	26/11/2015	4.124	6.428
EVEJN	28/05/2013	3.748	5.642
EVEJSN	30/05/2015	5.083	5.441

A Tabela 2.2 mostra as datas de lançamento ótimas para as diversas transferências. O  $\Delta V$  mínimo é 5.441 km/s para a opção EVEJSN, sendo o tempo total de vôo de 23.69 anos, com uma altitude de lançamento da Terra de  $0.2 \times 10^3$  km e uma altitude em Netuno de  $1.2 \times 10^3$  km. A velocidade no infinito do veículo espacial ao se aproximar a Netuno é de 5.083 km/s.

A opção EVEJN tem menor velocidade no infinito próxima de Netuno, no valor de 3.748 km/s para um tempo de transferência ótimo de 29.95 anos.

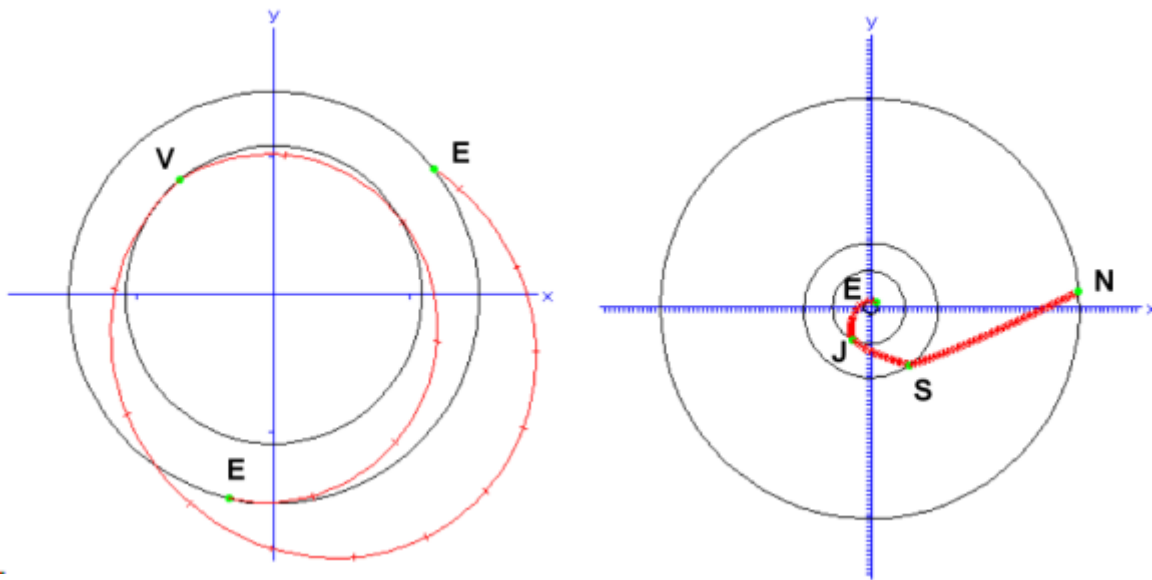
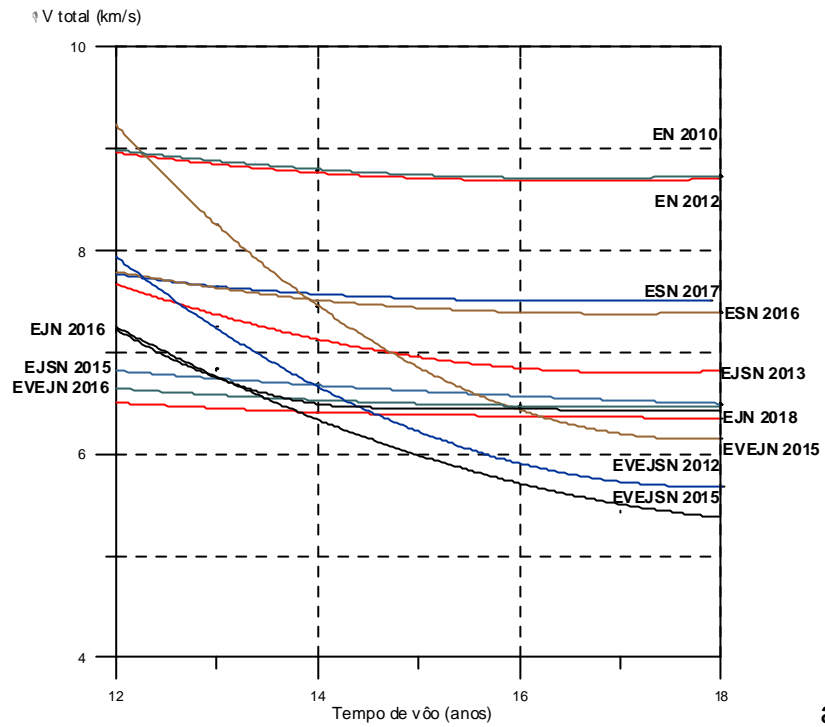


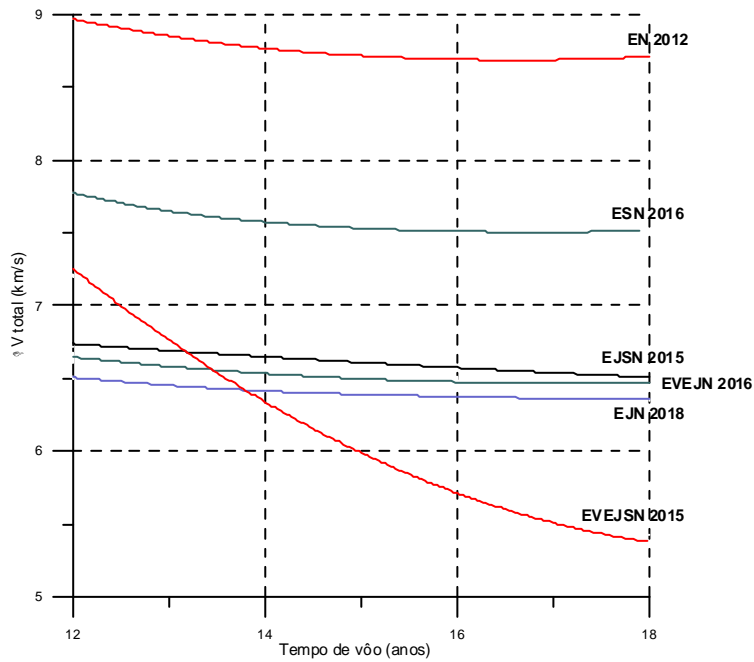
FIGURA 2.6 – Configuração planetária e trajetória de transferência para a opção EVEJSN, com lançamento em 2015.

A Figura 2.7a mostra as diversas opções de transferência da Terra a Netuno para diversas datas. As datas que fornecem os menores consumos são mostradas na Figura 2.7b. Assim, as opções EJV, EJSN, EVEJN, e EVEJSN são mais aceitáveis do ponto de vista do consumo de combustível, se a duração da transferência é limitada em 12 anos. Para tempos de transferência maiores que 13.8 anos, a opção EVEJSN é ótima em termos de mínimo  $\Delta V$ . A Figura 2.8 mostra a velocidade no infinito próximo de Netuno. A opção EVEJSN é ótima em termos do mínimo  $\Delta V$ , no entanto  $V_{\infty}$  é elevado nesta opção. As

opções EJN e EVEJN são mais eficientes devido a apresentarem uma baixa velocidade no infinito próxima de Netuno e um valor baixo do  $\Delta V$ .



a



b

FIGURA 2.7 –  $\Delta V$  total vs tempo de voo do veículo espacial para as diversas



opções de transferência. a) Diversas opções de transferência.  
 b) Opções com menores consumos de combustível.

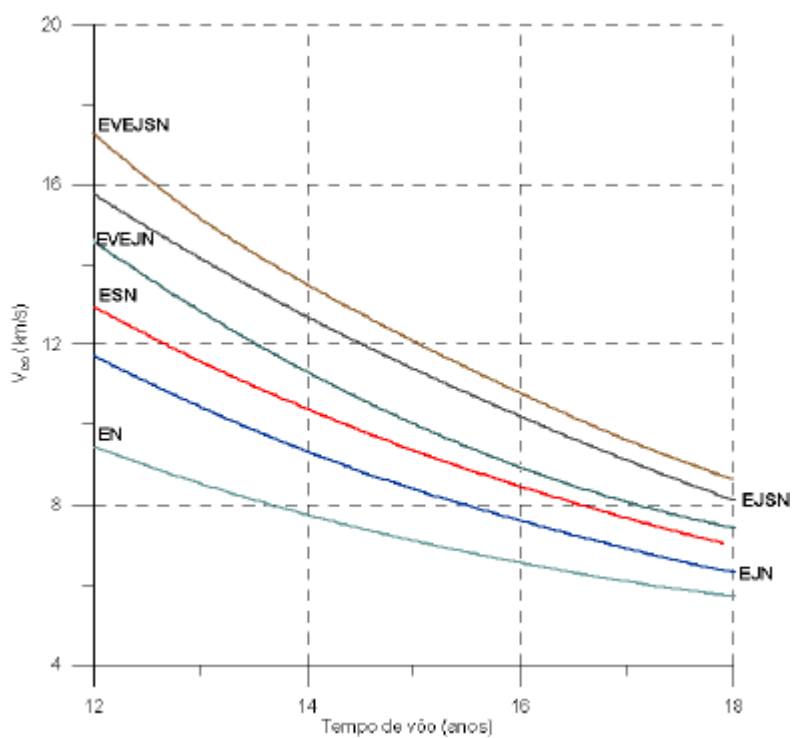


FIGURA 2.8 –  $V_{\infty}$  próximo de Netuno vs tempo de voo do veículo espacial.

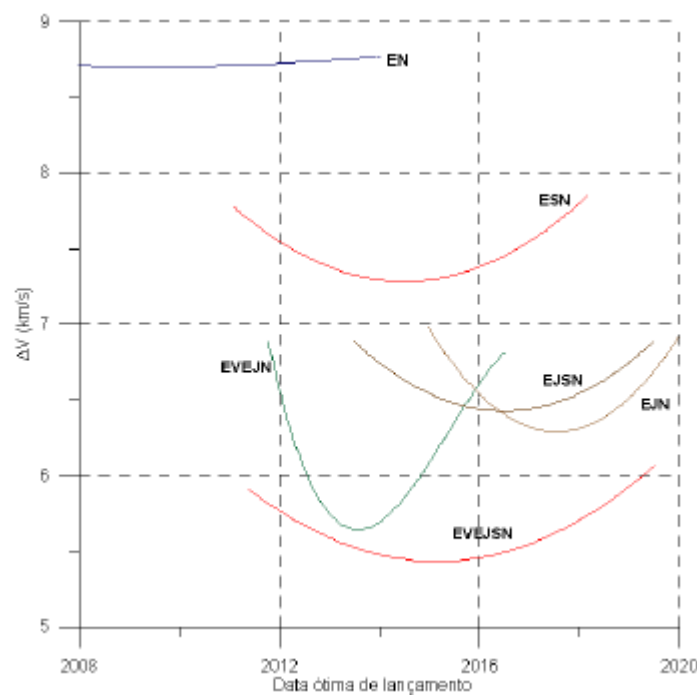


FIGURA 2.9 – Data de lançamento ótima para as diversas opções de transferência.

A Figura 2.9 mostra o  $\Delta V$  total ótimo como uma função das datas de lançamento ótimas para as diversas opções de transferência entre os anos 2008 – 2020. Os resultados são mostrados na Tabela 2.2. As datas de lançamento para Netuno, para cada uma das opções consideradas, são discretas, isto é, o lançamento é possível durante curtas janelas de lançamento. Desta forma, a Figura 2.9 é uma aproximação destas datas.

As manobras assistidas pela gravidade com Júpiter e Saturno têm um enorme potencial para reduzir o  $\Delta V$  total para as trajetórias a Netuno. No entanto, para o intervalo considerado, Urano não se encontra em boa posição. Além disso, utilizamos manobras assistidas pela gravidade com a Terra e com Vênus como uma outra forma de incrementar a energia heliocêntrica da trajetória para atingir Júpiter e reduzir o consumo de combustível para atingir Netuno.

A Figura 2.10 mostra o  $\Delta V$  total o qual considera o frenado nas proximidades de Netuno como função do tempo de vôo. Observamos que nos primeiros 14 anos a opção EVEJSN tem um alto consumo de combustível. No entanto, para tempos de transferência entre os 17-18 anos, esta opção mostra um melhor desempenho no referente ao consumo de combustível. Esse frenado é aplicado a uma distancia pericêntrica que representa aproximadamente 5% do raio do planeta. No entanto, consideramos o raio apocêntrico no infinito. Desta forma, dentro da esfera de influência passamos de uma órbita hiperbólica para uma órbita parabólica.

O esquema EJNI mostra-se ótimo, quando comparado aos outros esquemas, devido ao fato de que, para um tempo de vôo de 12 anos, tem um  $\Delta V$  ótimo de 9.298 km/s e mantém seu comportamento ótimo até um tempo de vôo próximo

de 17 anos. No entanto, existe uma região onde existem múltiplos pontos de interseção de todas as opções.

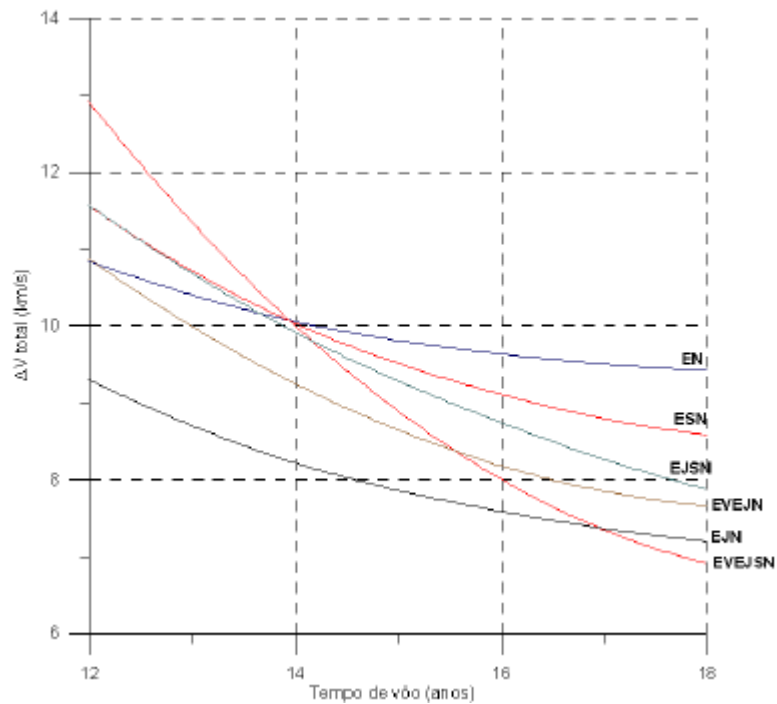


FIGURA 2.10 –  $\Delta V$  total vs tempo de voo do veículo espacial para trajetórias com frenado nas proximidades de Netuno.

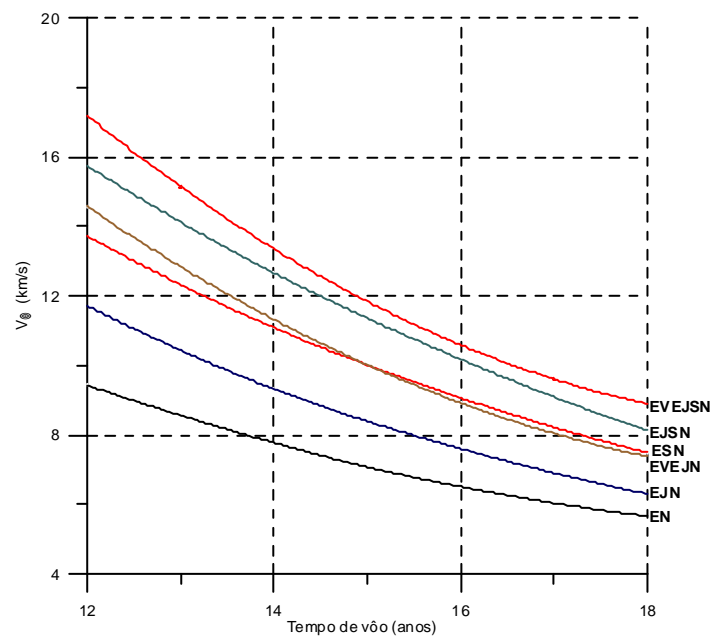


FIGURA 2.11 –  $V_{\infty}$  próximo de Netuno vs tempo de voo do veículo espacial

para as transferências com frenado.

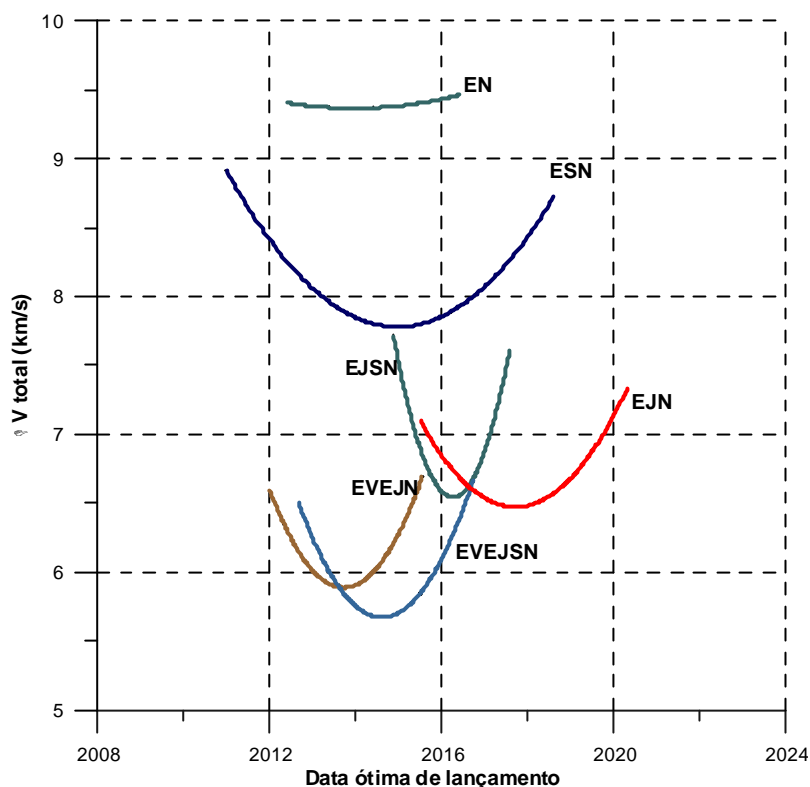


FIGURA 2.12 – Data de lançamento ótima para as diversas opções de transferência com frenado nas proximidades de Netuno.

Isto acontece quando o tempo de vôo é próximo dos 14 anos. Para um tempo de vôo de 14 anos ou mais, as opções EN, ESN, e EJSN têm um alto consumo de combustível quando comparadas às opções EVEJN, EJN e EVEJSN. A opção EVEJN apresenta também um baixo consumo de combustível até um tempo de vôo de aproximadamente 15.5 anos. As opções mostradas foram simuladas considerando datas de lançamento em 2012 para a transferência Terra-Netuno, em 2018 para a transferência Terra-Júpiter-Netuno, em 2016 para a transferência Terra-Saturno-Netuno, em 2015 para a transferência Terra-Júpiter-Saturno-Netuno, em 2016 para a transferência Terra-Vênus-Terra-Júpiter-Netuno, e em 2015 para a transferência Terra-Vênus-Terra-Júpiter-Saturno-Netuno. A Figura 2.11 mostra a velocidade no infinito nas proximidades de Netuno em função do tempo de vôo para os diversos

esquemas de transferência nos quais foi considerado o frenado nas proximidades de Netuno. Observamos que a opção EN tem um menor valor de  $V_{\infty}$ , e a opção EVEJSN tem os maiores valores. Deste ponto de vista, observamos que a opção EJNI tem melhores resultados, devido ao fato de apresentar um valor baixo da  $V_{\infty}$ , além de mostrar valores baixos do  $\Delta V$  total. A Figura 2.12 nos fornece o  $\Delta V$  total como função das datas ótimas de lançamento considerando frenado nas proximidades de Netuno no intervalo 2008-2020. A opção EVEJSN nos fornece o melhor valor do  $\Delta V$  total ótimo de 5.647 km/s. No entanto, outra opção com um valor baixo do  $\Delta V$  total ótimo é EVEJN, com um valor de 5.899 km/s. A opção EJNI tem um valor ótimo de aproximadamente 6.584 km/s, sendo a terceira opção com melhores valores do  $\Delta V$  total ótimo.

Desta forma, nas seções anteriores, dois importantes parâmetros, o  $\Delta V$  total e a velocidade no infinito  $V_{\infty}$  próxima de Netuno (Solórzano et al, 2005) são consideradas como função do tempo de vôo. Estes dois parâmetros determinam o consumo de combustível. O  $\Delta V$  foi considerado o parâmetro mais importante. A opção EJNI sem frenado fornece os melhores valores ótimos do  $\Delta V$  total para uma transferência cuja duração seja menor que 13.8 anos. Esta opção também determina valores baixos para o  $V_{\infty}$ . Para grandes tempos de transferência a opção EVEJSN é ótima em termos do mínimo  $\Delta V$ . No entanto  $V_{\infty}$  é alto nesta opção. Para encontrar as datas ótimas de lançamento, as opções EJNI, EVEJN, e EVEJSN são mais aceitáveis. Comparando os gráficos das opções de transferência com frenado e sem frenado para tempos de vôo entre 12 e 18 anos, de acordo com o esperado, existe um aumento no consumo de combustível devido ao frenado. Assim, a opção EVEJSN tem um comportamento semelhante nos dois casos, por que inicialmente apresenta valores elevados e depois são obtidos valores menores. A opção EJNI com frenado tem um comportamento ótimo no consumo de combustível comparado às demais opções para um tempo de vôo entre 12 e 17 anos.

## 2.4 Análise das Melhores Opções de Transferência

Considerando a análise feita anteriormente, com o objetivo de encontrar as melhores opções para transferir um veículo espacial desde a Terra até Netuno, encontramos que as melhores opções sem frenado e com frenado próximo de Netuno (Solórzano et al, 2006b), estão representadas pelas transferências: Terra – Júpiter – Netuno (EJN), Terra - Vênus - Terra – Júpiter – Netuno (EVEJN) e Terra - Vênus - Terra – Júpiter – Saturno – Netuno (EVEJSN). Na presente seção nosso objetivo é aprofundar o estudo das transferências mencionadas anteriormente.

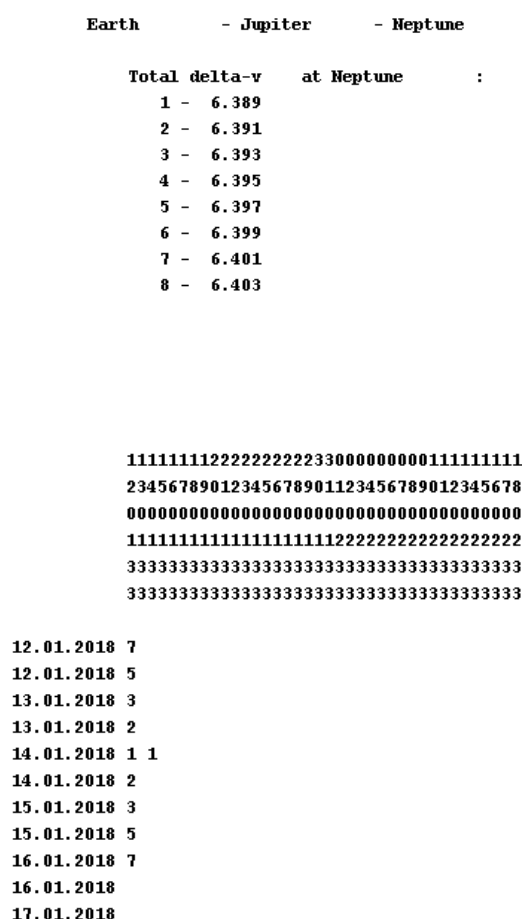


FIGURA 2.13 – Oportunidades de lançamento para a opção EJN (tempo de vôo 15 anos).

Earth	- Venus	- Earth	- Jupiter	- Neptune
<b>Total delta-v at Neptune :</b>				
1	-	6.588		
2	-	6.688		
3	-	6.788		
4	-	6.888		
5	-	6.988		
6	-	7.088		
7	-	7.188		
8	-	7.288		
9	-	7.388		
a	-	7.488		

**001111122222300**  
**680246802468013**  
**000000000000000**  
**888888888888899**  
**333333333333333**  
**222222222222222**

**6.08.2016 7**  
**8.08.2016 6**  
**10.08.2016 4**  
**12.08.2016 3**  
**14.08.2016 2**  
**16.08.2016 1**  
**18.08.2016 1**  
**20.08.2016 1**  
**22.08.2016 1**  
**24.08.2016 3**  
**26.08.2016 5**  
**28.08.2016 7**  
**30.08.2016 a**  
**1.09.2016**

FIGURA 2.14 – Oportunidades de lançamento para a opção EVEJN (tempo de vôo 16 anos).

As Figuras 2.13 - 2.16 mostram as diversas oportunidades de lançamento. Os  $\Delta V$  totais otimizados aparecem como uma função da data de lançamento e de chegada. As datas de lançamento aparecem nas linhas da esquerda no formato dd.mm.yyyy (dd: dia, mm: mês, yyyy: ano). As datas de chegada estão

representadas como uma matriz coluna de seis linhas, no formato ddmmyy. Os números 1 até 9, e as letras a,b etc, correspondem ao  $\Delta V$  mínimo para a viagem a Netuno. A Figura 2.13 mostra as datas de lançamento da Terra e as datas de chegada a Netuno para a opção EJM. Consideramos que o tempo de transferência este limitado em 15 anos para o intervalo considerado. Na Figura 2.14, para a opção mostrada, o tempo de transferência é de 16 anos.

Earth	- Jupiter	- Neptune
<b>Total delta-v at Neptune :</b>		
1	-	6.507
2	-	6.510
3	-	6.513
4	-	6.516
5	-	6.519
6	-	6.522
7	-	6.525
8	-	6.528
9	-	6.531
a	-	6.534
b	-	6.537
c	-	6.540
111111111222222222		
12345678901234567		
000000000000000000		
111111111111111111		
333333333333333333		
000000000000000000		
10.01.2018		
10.01.2018	c	
11.01.2018	a	
11.01.2018	8	
12.01.2018	6	
12.01.2018	54	
13.01.2018	3	
13.01.2018	2	
14.01.2018	21	
14.01.2018	1 1	
15.01.2018	2 2	
15.01.2018	3	
16.01.2018	4	
16.01.2018	6 5	
17.01.2018	8 7 6	
17.01.2018	a 9 8	
18.01.2018	c b	
18.01.2018		
19.01.2018		

FIGURA 2.15 – Oportunidades de lançamento para a opção EJM (tempo de voo 12 anos).



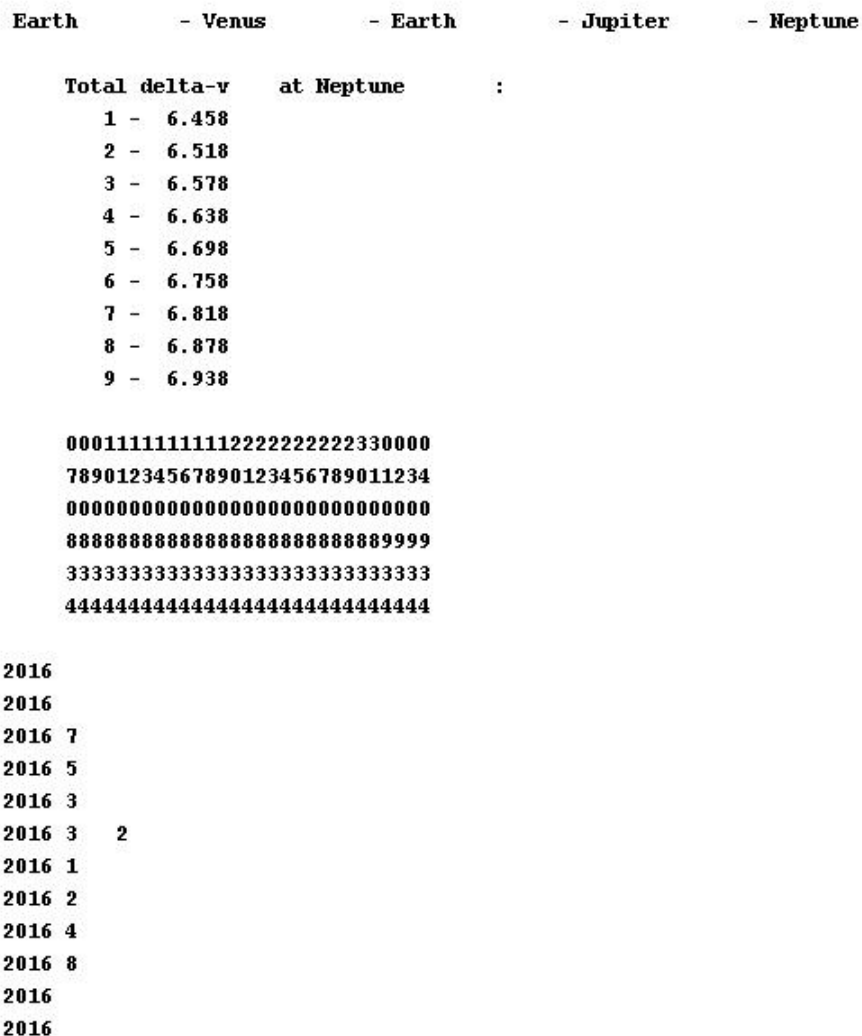


FIGURA 2.16 – Oportunidades de lançamento para a opção EVEJN (tempo de vôo 18 anos).

A Figura 2.15 mostra que a janela de interesse para a opção EJN, considerando um tempo de vôo de 12 anos, está entre 10/01/2018 e 19/01/2018, em cujo intervalo encontramos valores do  $\Delta V$  total entre 6.507 km/s e 6.540 km/s. A Figura 2.16, para a opção EVEJN, mostra a janela de interesse entre 06/08/2016 e 28/08/2016. No entanto, o tempo de vôo é de 18 anos. Por outro lado, as análises feitas para as opções mencionadas anteriormente não consideram o efeito do frenado nas proximidades de

Netuno. Do ponto de vista da energia fornecida pelos planetas durante a manobra assistida pela gravidade, temos que as principais contribuições provêm de Júpiter, Saturno, Vênus e Terra. Considerando esse fato, e também que as melhores trajetórias (EJN, EVEJN, EVEJSN) consideram o sobrevôo de Júpiter, a seguir faremos uma análise das variações na altitude do periápside próximo de Júpiter e as suas conseqüências no consumo de combustível.

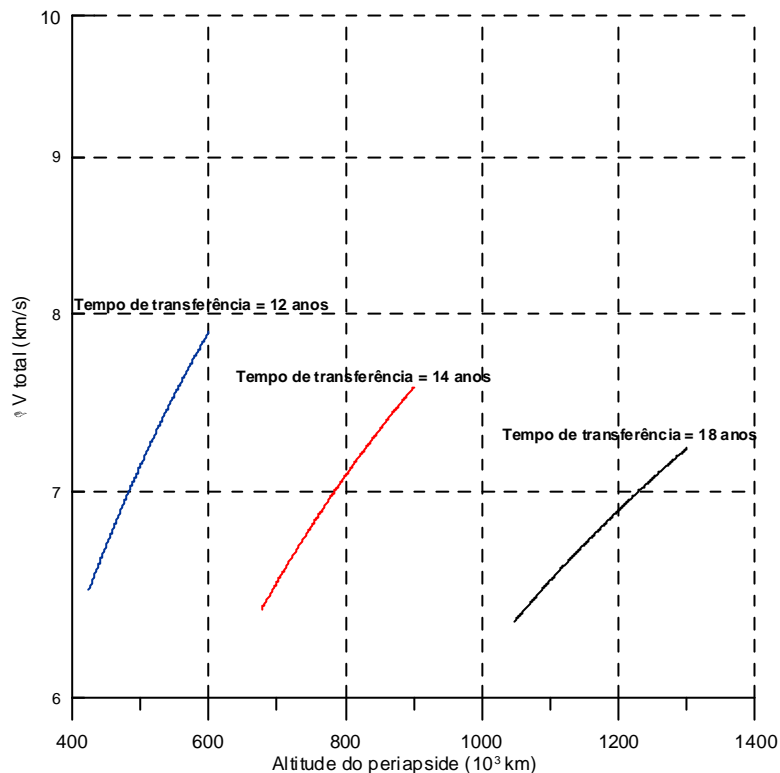


FIGURA 2.17 –  $\Delta V$  total vs Altitude do periápside para a opção EJN.

A Figura 2.17 mostra o comportamento do  $\Delta V$  total ótimo em função da altitude do periápside para a opção EJN. Para essa análise consideramos o tempo de transferência fixo e variamos as altitudes do periápside para observar o comportamento do  $\Delta V$  total ótimo. Para o tempo de transferência de 12 anos, o valor ótimo é dado por uma altitude de  $4.2 \times 10^5$  km, o qual nos fornece um valor de  $\Delta V$  total ótimo de 6.507 km/s. Assim, nas diversas simulações efetuadas, conforme variamos as altitudes com respeito a Júpiter, o  $\Delta V$  total

ótimo sofre diversos acréscimos. Assim, com um tempo de vôo de 12 anos e para uma altitude de  $6 \times 10^5$  km, obtemos um  $\Delta V$  total ótimo é de 7.891 km/s, o qual representa aproximadamente um acréscimo do 21.27% com respeito ao seu valor inicial ótimo.

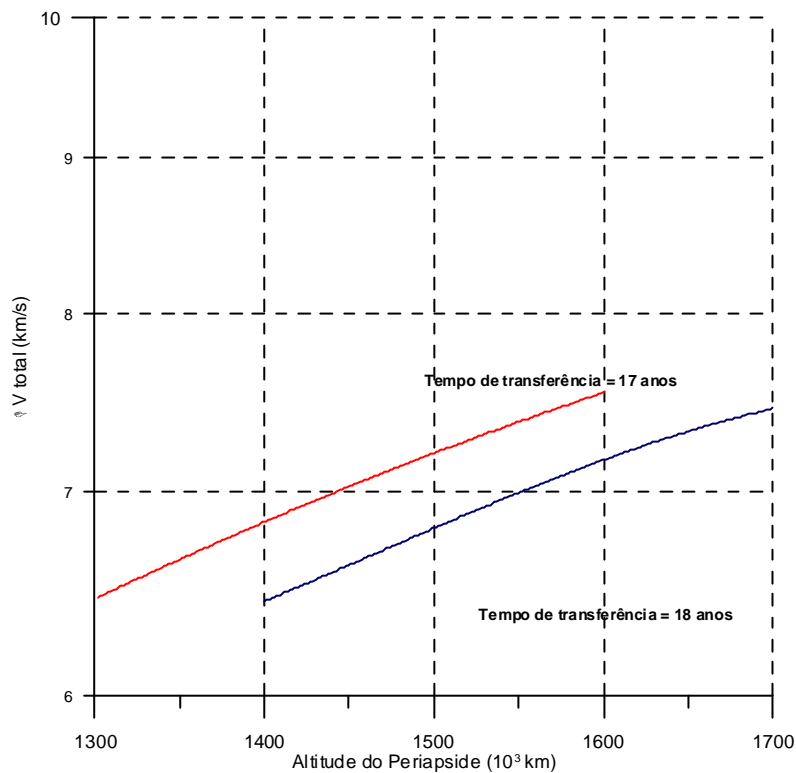


FIGURA 2.18 –  $\Delta V$  total vs Altitude do periapside para a opção EVEJN.

Para um tempo de transferência de 14 anos (Fig. 2.17), variamos as altitudes entre os  $6.7 \times 10^5$  km e os  $9.2 \times 10^5$  km, sendo o  $\Delta V$  total ótimo de 6.412 km/s. O valor de  $\Delta V$  sofre um acréscimo do 17% com respeito ao valor inicial ótimo no valor máximo da altitude. Para um tempo de vôo de 18 anos, o valor do  $\Delta V$  total ótimo é de 6.355 km/s. No entanto, as altitudes dos periapsides variam entre  $1.04 \times 10^6$  km e  $1.3 \times 10^6$  km. O  $\Delta V$  total ótimo sofre um acréscimo do 13%.

Os valores analisados anteriormente mudam devido ao fato do valor mínimo do  $\Delta V$  total ter um certo valor já otimizado quando se aproxima de Júpiter. No

entanto, ao modificar esse valor, estamos “forçando” à trajetória inicialmente otimizada a corrigir a órbita de transferência para atingir a altitude “desejada”.

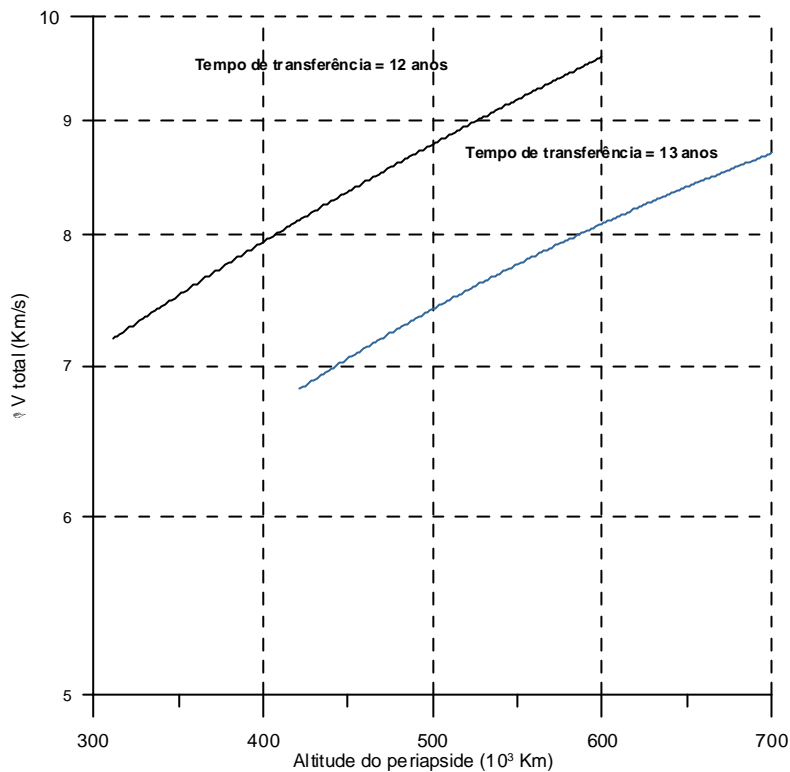


FIGURA 2.19 –  $\Delta V$  total vs Altitude do periápside para a opção EVEJSN.

A Figura 2.18 mostra a opção EVEJN, e a opção EVEJSN é mostrada na Figura 2.19. Essas correções aparecem refletidas no consumo de combustível. Isso causa um aumento do  $\Delta V$  total, o qual deve ser reotimizado em função da altitude desejada. Mas, por outro lado, mesmo que seja uma simulação do caráter experimental, as variações da altitude em relação a Júpiter podem ser consideradas em uma missão real, tirando proveito do sobrevôo a certas altitudes do planeta. Assim sendo, temos que considerar os respectivos acréscimos no consumo de combustível com respeito à missão inicialmente planejada.

O  $\Delta V$  de lançamento para as opções EJV, EVEJV e EVEJSN, são mostrados na Figura 2.20, tanto para os esquemas com frenado como para os esquemas sem frenado. No entanto, as diferenças são mínimas para cada um dos

esquemas. As opções EVEJN e EVEJSN sofrem pequenos acréscimos ao longo do tempo, ou seja, para atingir a configuração de planetas desejada precisamos aumentar a velocidade de lançamento. Este fato é devido ao período de translação de Vênus. Mesmo acontecendo esse fato, o esquema EVEJSN apresenta os valores mais baixos do  $\Delta V$  ótimo de lançamento. Mas, o esquema EJVN sofre uma pequena diminuição no  $\Delta V$  de lançamento para o intervalo de tempo analisado. Em todas as simulações o tempo de vôo foi considerado entre os 12 e 18 anos

A Figura 2.21 mostra o  $\Delta V$  de frenado nas proximidades de Netuno como função do tempo de vôo para as diversas opções de transferência. Assim, a

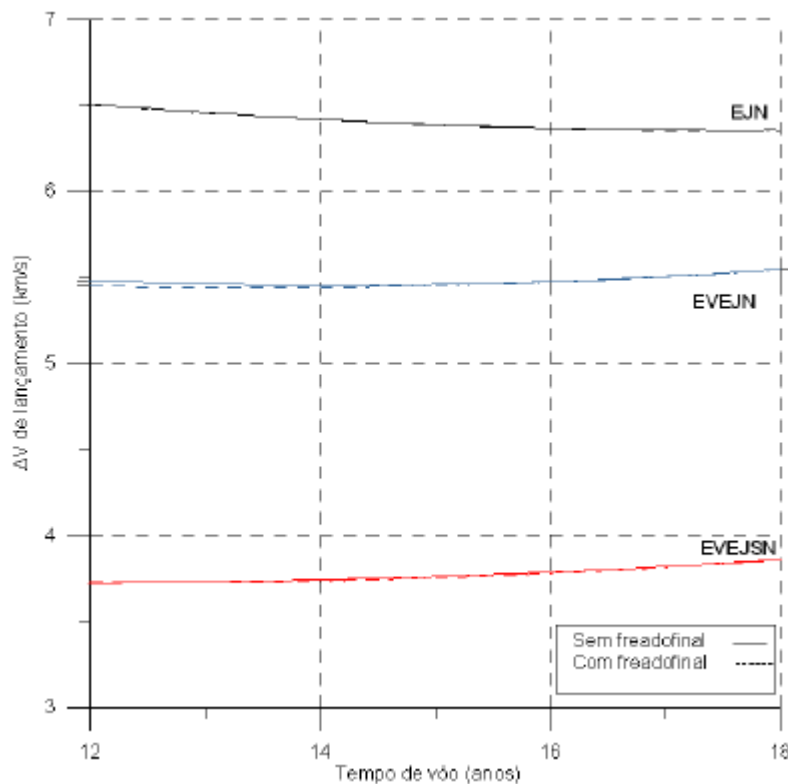


FIGURA 2.20 – Relação entre os  $\Delta V$  de lançamento para transferências com frenado e sem frenado para diversos tempos de vôo.

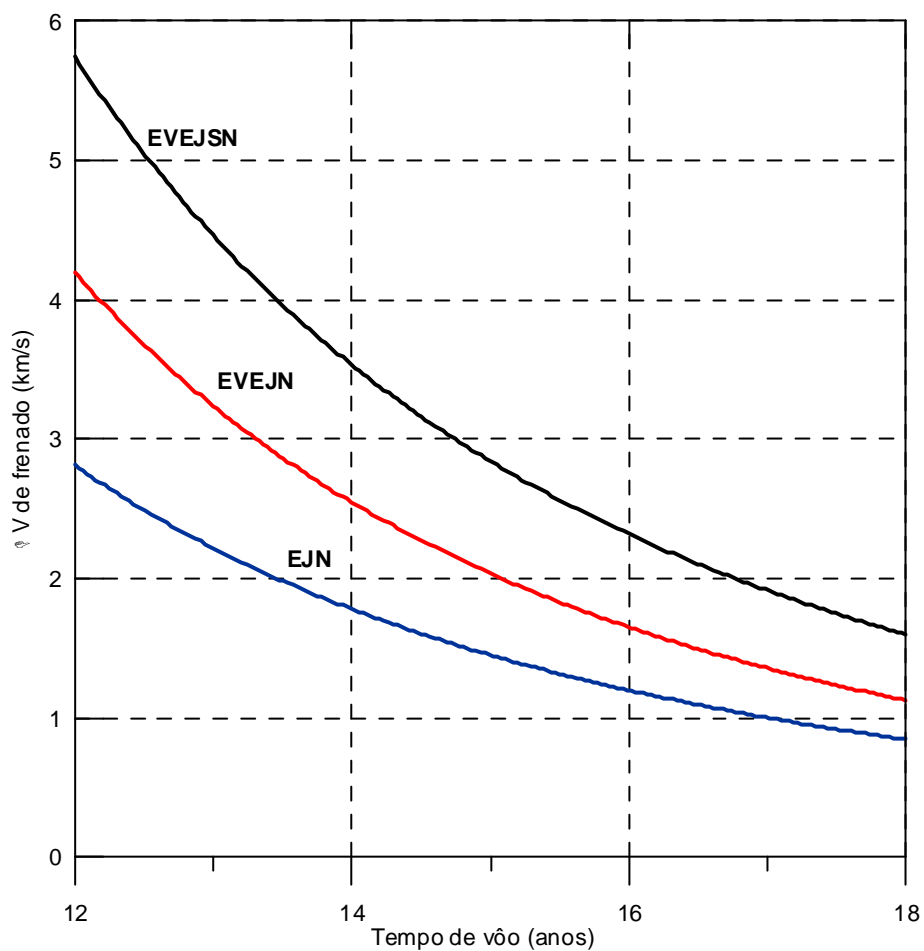


FIGURA 2.21 –  $\Delta V$  de frenado em função do tempo de voo para as diversas opções de transferência.

Tabela 2.3 - DV de frenado nas proximidades de Netuno para a opção EJM

Tempo de voo (anos).	Data de lançamento	$\Delta V$ de frenado (km/s)	$\Delta V$ total (km/s)
12	14/01/2018	2.791	9.298
14	14/01/2018	1.802	8.215
18	14/01/2018	0.841	7.196

No caso da opção EJN, para um tempo de vôo de 12 anos (Tabela 2.3), o  $\Delta V$  ótimo de frenado é 2.791 km/s. No entanto, o  $\Delta V$  de frenado sofre uma diminuição de 35.43% (para 14 anos) do combustível necessário para um tempo de vôo de 12 anos. Para um tempo de vôo de 18 anos, existe uma diminuição de 53.33% do valor usado para uma transferência de 14 anos.

## **2.5 Sobrevôo de Asteróides**

### **2.5.1 Introdução**

Os asteróides contêm informação com respeito à formação do nosso sistema solar. Desta forma, a missão Galileo foi a primeira missão espacial que se aproximou dos asteróides (Belton e Delamere 1992) Gaspra (951) e Ida (243). Foi o começo de um refinado estudo dos asteróides “in situ”, exemplificado pelo satélite NEAR (Veverka et al., 2000) que foi até Eros (433). Embora o numero de asteróides que pode ser pesquisado desta forma seja limitado em oposição às observações da Terra, isto pode ser compensado pela qualidade das informações realizadas “in situ”. (Missões Stardust 1999, Muses-C 2002).

Do ponto de vista da distribuição de asteróides, temos: a) Os asteróides do cinturão principal, que estão localizados em forma de um anel entre as órbitas de Marte e Júpiter, b) Os asteróides que estão entre as órbitas de Vênus e do cinturão principal de asteróides, c) Asteróides que se movem ao longo da órbita de Júpiter, nos pontos de equilíbrio triangulares, tanto na frente (asteróides gregos) como na parte de trás (asteróides troianos).

### **2.5.2 Opções na aproximação**

Considerando a missão a Netuno, nosso objetivo é aproveitar a passagem do veículo espacial para fazer uma aproximação aos asteróides. Em um primeiro estágio, considerando a longa duração do vôo e o relativo curto tempo em que

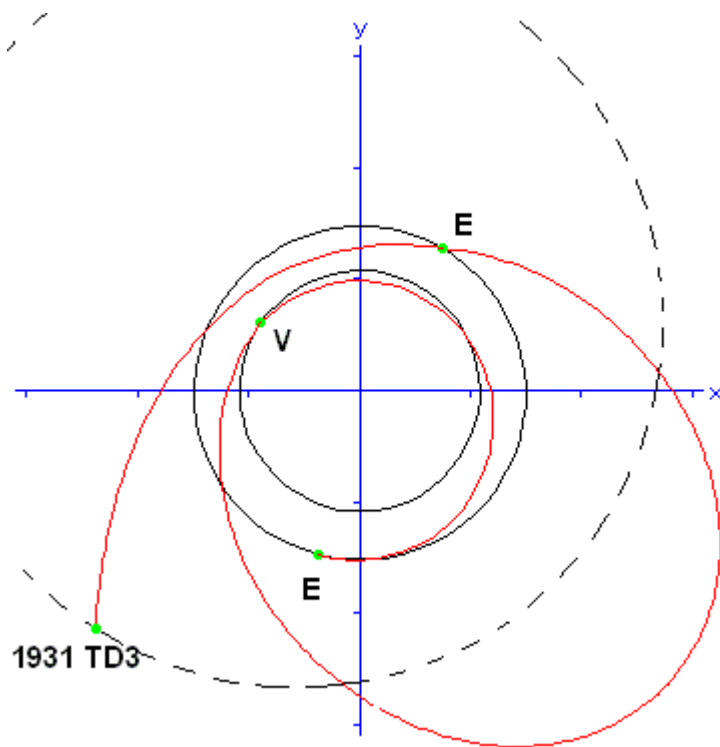
o veículo espacial se move na vizinhança do asteroide, é vantajoso o planejamento da missão aos diversos planetas utilizando a passagem pelo cinturão de asteroides. Em um segundo estágio, quando a exploração dos asteroides for mais detalhada, é vantajoso usar os esquemas da missão planejando o pouso de uma sonda na superfície do asteroide. O ponto principal é o conjunto das trajetórias que nos fornecem um mínimo consumo de combustível no seu encontro com o asteroide.

### **2.5.3 Análises**

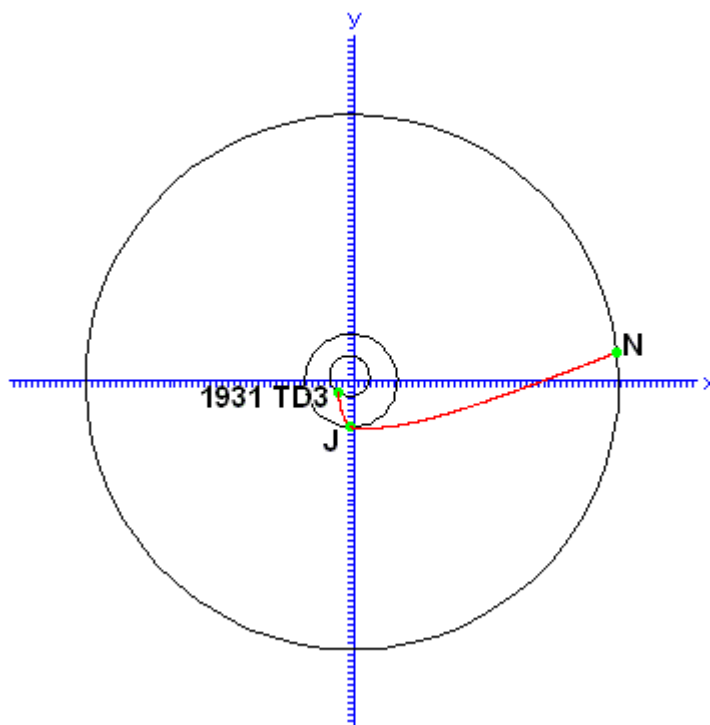
A Figura 2.22 mostra a configuração planetária projetada sobre o plano da eclíptica para a opção EVEJN, no qual é possível considerar o sobrevôo do asteroide 1931 TD3 (8778). O acréscimo no consumo de combustível é de 0.165 km/s. Desta forma, o asteroide 1931 TD3 está próximo à trajetória do veículo espacial e a reotimização da trajetória produz o acréscimo no consumo de combustível.

O ponto de desvantagem é a elevada velocidade (23.485 km/s) com a qual o veículo espacial se aproxima do asteroide. Este fato implica na escassa possibilidade de usar a opção EVEJN para pousar na superfície do asteroide. O objetivo da presente análise foi mostrar as conseqüências da aproximação aos asteroides do ponto de vista do consumo de combustível. No entanto, na literatura existem algumas técnicas que podem ser usadas para diminuir a velocidade da aproximação aos asteroides (Labunsky, Papkov e Sukhanov 1998).





a



b

FIGURA 2.22 – Configuração planetária e trajetória de transferência para o sobrevôo do asteroide 1931 TD3.

## 2.6 Comentários

As trajetórias do veículo espacial são aproximadas por seções cônicas pela solução do problema de Lambert para cada parte da trajetória. No entanto, uma análise detalhada das limitações e vantagens do método “patched conics” é descrito em Battin (1987). Com a aproximação “patched conics”, o tempo de chegada pode ser estimado com erros de diversos dias devido ao campo gravitacional dos planetas, o qual pode alterar o movimento do veículo espacial durante a passagem. De forma prática, para as diversas missões desenvolvidas pela NASA, foi demonstrado que a técnica do “patched conics” é suficiente para demonstrar a existência da trajetória assistida pela gravidade. Fornecendo essa técnica uma boa estimativa do consumo de combustível para as diversas missões.

Urano não se encontra em posição vantajosa para os anos considerados na presente pesquisa. Esse fato é também mostrado no trabalho de Longunski e Williams (1991), os quais mostram ótimas oportunidades de lançamento a Netuno entre os anos 2005 – 2007, 2021 – 2022, através de diversas manobras assistidas com a gravidade com Júpiter e Urano. Um ponto de concordância com o trabalho mencionado é a consideração de possíveis manobras assistidas com a gravidade com Júpiter e Saturno para chegar a Netuno entre os anos 2016 – 2019. No entanto, um ponto de discordância com a pesquisa de Logunski e Williams, é o fato de não fornecer os valores ótimos do  $\Delta V$  para cada uma das opções mostradas. As opções mostradas no presente trabalho estão em concordância e aprofundam as opções desenvolvidas pelo Outer Planets Science Working Group (OPSWG) da NASA para a década entre 1992 – 2002 (Stern, comunicação eletrônica).

## CAPÍTULO 3

### MISSÃO A TRITÃO

#### 3.1 Generalidades

Nosso interesse ao estudar o sistema de Netuno é similar ao obtido pela missão Galileo ao estudar o sistema de Júpiter e à missão Cassini ao estudar o sistema de Saturno, os quais têm enriquecido grandemente à comunidade científica planetária. O interesse da comunidade científica internacional para o sistema de Netuno tem como justificativas principais (Hammel et al, 2002): (a) Conhecer a densidade e composição dos anéis, (b) Conhecer a densidade e a composição dos pequenos satélites. No caso especial de Tritão, deseja-se principalmente: (a) Conhecer a distribuição de gelos ( $N_2$ , CO,  $CO_2$ , e  $CH_4$ ) na superfície, (b) Verificar em que profundezas é possível encontrar água congelada, (c) Entender os diversos processos físicos que afetam sua superfície, etc. Neste capítulo, estudaremos as diversas manobras orbitais (transferências do tipo Hohmann) para posicionar o veículo espacial em órbita ao redor de Tritão. O objetivo do presente capítulo é obter uma estimativa do consumo de combustível nas manobras de aproximação de Tritão.

#### 3.2 Manobras Orbitais que Visam Fazer do Veículo Espacial um Satélite de Tritão

A primeira parte da manobra é transferir o veículo espacial desde a órbita inicialmente hiperbólica até uma primeira órbita elíptica.

Assim temos que:  $r_\pi$  = raio do pericentro,  $r_\alpha$  = raio do apocentro,  $V_\infty$  = velocidade no infinito nas proximidades da esfera de influência de Netuno,  $a$  = semi-eixo maior da primeira elipse de transferência,  $a'$  = semi-eixo maior da segunda

elipse de transferência,  $\mu$  = constante gravitatória,  $\hat{c}$  = vetor unitário normal ao plano do Tritão. A Figura 3.1 mostra as diversas manobras orbitais.

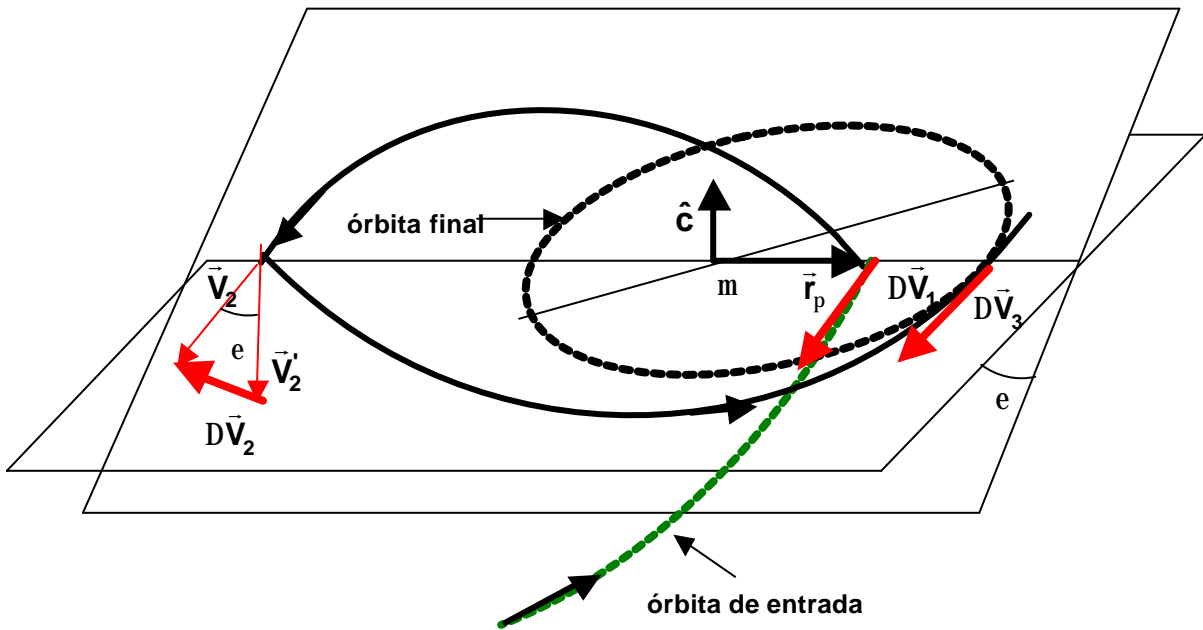


FIGURA 3.1 – Manobras orbitais do veículo espacial.

A velocidade no pericentro da órbita hipérbolica é dada por:

$$V_1^2 = \frac{2\mu}{r_\pi} + V_\infty^2 \quad (3.1)$$

A velocidade no pericentro da órbita elíptica é dada por:

$$V_1'^2 = \frac{2\mu}{r_\pi} - \frac{\mu}{a} \quad (3.2)$$

A variação de velocidade requerida pela manobra é dada por:

$$\Delta V_1 = V_1 - V_1' \quad (3.3)$$

A segunda manobra é transferir o veículo espacial desde o apocentro da primeira elipse ao pericentro da segunda elipse posicionada no plano de Tritão. Sendo assim, o objetivo desta transferência é mudar o pericentro da segunda elipse, sendo também necessário fazer uma mudança do plano da órbita.

Temos que  $R$  é o raio da órbita de Tritão, e  $\varepsilon$  é o ângulo entre o plano da órbita de Tritão e o plano do veículo espacial. A velocidade no apocentro da primeira órbita elíptica é:

$$V_2^2 = \left( \frac{\mu}{a} \right) \left( \frac{r_\pi}{r_\alpha} \right) \quad (3.4)$$

A velocidade no apocentro da segunda órbita elíptica de raio  $R$  é:

$$V_2'^2 = \left( \frac{\mu}{a'} \right) \left( \frac{R}{r_\alpha} \right) \quad (3.5)$$

A variação de velocidades requerida pela manobra é:

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_2^2 + V_2'^2 - 2V_2 V_2' \cos \varepsilon} \quad (3.6)$$

Posteriormente (seção 3.2.1) veremos como obter o ângulo  $\varepsilon$  entre os planos.

A terceira manobra consiste em entrar na esfera de influência de Tritão para ficar em órbita ao redor dele (com as manobras anteriores nos posicionamos no plano de Tritão). Precisamos calcular a velocidade no pericentro da segunda elipse (no plano de Tritão) e considerar a velocidade de Tritão na sua órbita. Com isso é possível obter a velocidade no infinito, que corresponde à velocidade com a qual o veículo entra na esfera de influência de Tritão. A

velocidade característica é a diferença entre a velocidade na hipérbole de transferência inicial e a velocidade na elipse final.

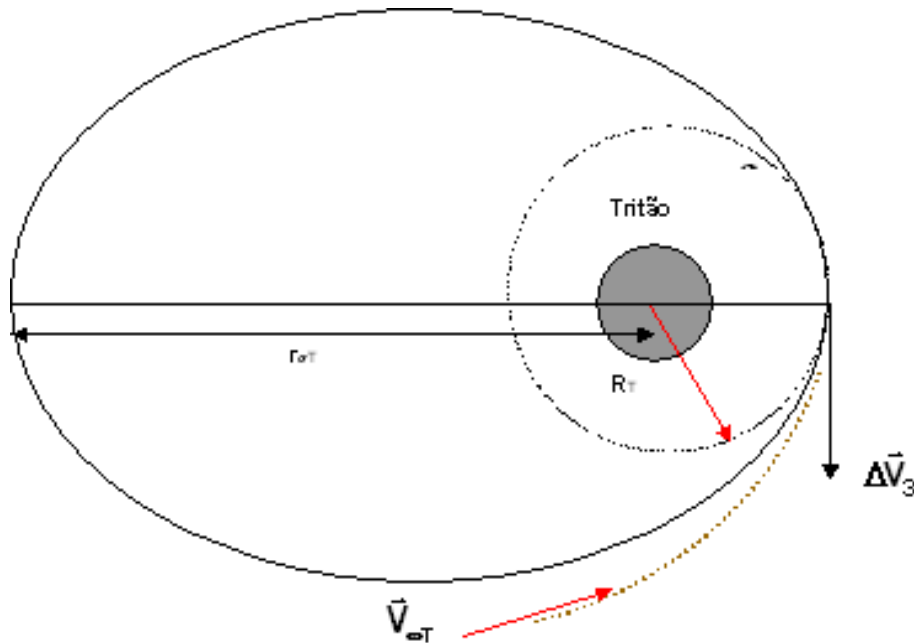


FIGURA 3.2 – Manobra de aproximação a Tritão.

A velocidade no pericentro da segunda órbita elíptica é:

$$V_3^2 = \left( \frac{\mu}{a'} \right) \left( \frac{r_\alpha}{R} \right) \quad (3.7)$$

A velocidade de Tritão ao redor do Netuno é:

$$V_T^2 = \left( \frac{\mu}{R} \right) \quad (3.8)$$

A velocidade no infinito ao ingressar na esfera de influência de Tritão é:

$$V_{\infty T} = V_3 - V_T$$

Sendo:  $r_{\alpha T}$  = raio do apocentro da órbita ao redor do Tritão,  $r_{\pi T} = R_T$  = raio do pericentro da órbita ao redor do Tritão,  $\mu_T$  = constante gravitacional de Tritão,

$V_{\infty T}$  = velocidade ao ingressar na esfera de influência do Tritão. A variação de velocidade requerida pela manobra é:

$$\Delta V_3 = \sqrt{\frac{2\mu_T}{R_T} + V_{\infty T}^2} - \sqrt{\frac{2\mu_T}{(R_T + r_{\alpha T})} \left(\frac{r_{\alpha T}}{R_T}\right)} \quad (3.9)$$

### 3.2.1 Ângulo $\varepsilon$ entre os planos

Na órbita de entrada do veículo espacial assumiremos que o raio do pericentro da órbita hiperbólica de entrada é conhecido. Definiremos o plano de órbita pelos vetores unitários  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$ , de tal forma que:

$$\hat{e}_1 = \frac{\vec{V}_{\infty}}{|\vec{V}_{\infty}|}, \hat{e}_2 \perp \hat{e}_1 \quad (3.10)$$

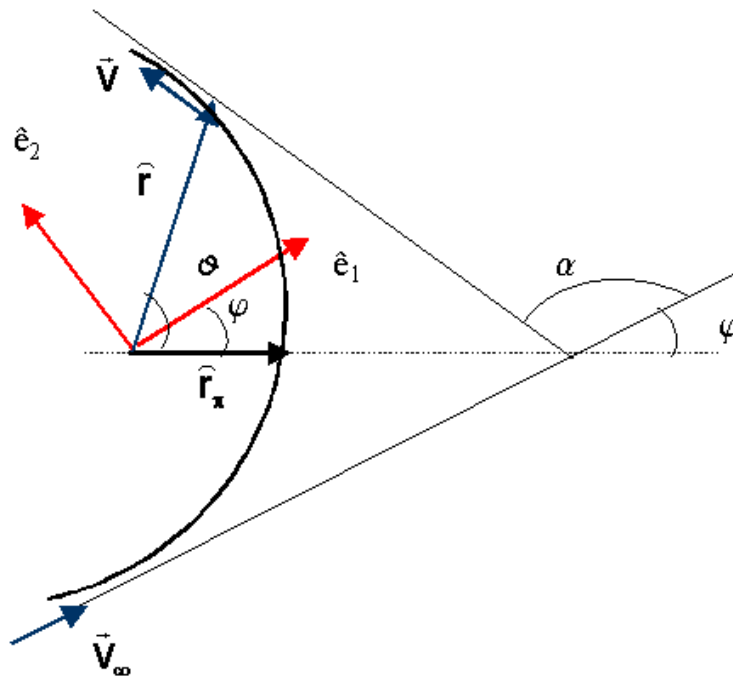


FIGURA 3.3 – Posição do  $\vec{V}_{\infty}$  e do plano de órbita do veículo espacial.

O plano de órbita está centrado no planeta (Figura 3.3) e pode girar arbitrariamente ao redor do vetor  $\vec{V}_\infty$  (ver Figura 2.3). Desta forma,  $\hat{e}_2$  pode ser selecionado de forma arbitrária. Além disso, sejam:  $\alpha =$  ângulo de giro,  $\vartheta =$  anomalia verdadeira,  $\varphi =$  ângulo entre  $\hat{e}_1$  e  $\hat{r}_\pi$ . Consideramos um vetor unitário  $\hat{e}_{20}$  ( $\hat{e}_{20} \perp \hat{e}_1$ ) no plano de referência.

Seja  $\hat{e}_{20} = \{e_{20x}, e_{20y}, 0\}$ , definiremos:

$$\hat{e}_{30} = \hat{e}_1 \times \hat{e}_{20} = \{e_{30x}, e_{30y}, e_{30z}\} \quad (3.11)$$

Da geometria do problema (Figura 3.4):

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_{20} \cos \Psi + \hat{e}_{30} \sin \Psi \quad (3.12)$$

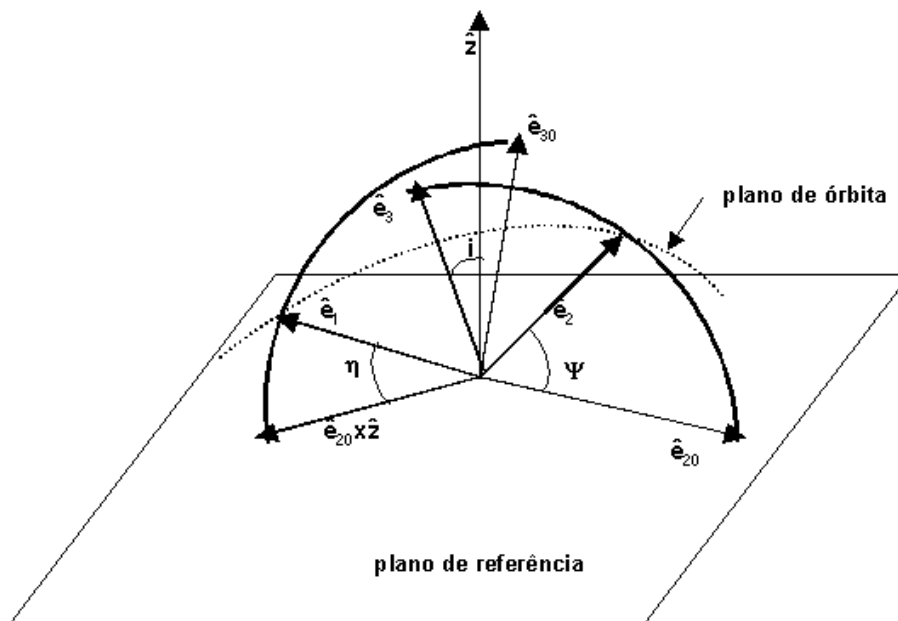


FIGURA 3.4 – Relações geométricas entre o plano de órbita e o plano de referência.

O ângulo  $\Psi$  pode ser selecionado arbitrariamente (Figura 3.4). O vetor  $\hat{e}_{20}$  pode ser encontrado a partir das equações:



$$\begin{aligned} e_{20x}^2 + e_{20y}^2 &= 1 \\ e_{1x}e_{20x} + e_{1y}e_{20y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para evitar a ambigüidade, consideraremos que  $e_{30z} > 0$ . Da Figura 3.3,

$$\varphi = \frac{\pi - \alpha}{2}, \text{ sendo conhecido que } \cos \varphi = \frac{1}{1 + \frac{r_\pi V_\infty^2}{\mu}}. \text{ Da Figura 3.4 obtemos:}$$

$$\hat{r}_\pi = r_\pi(\hat{e}_1 \cos \varphi - \hat{e}_2 \sin \varphi) \quad (3.14)$$

$$\hat{r} = r(\hat{e}_1 \cos(\vartheta - \varphi) + \hat{e}_2 \sin(\vartheta - \varphi)) \quad (3.15)$$

Das órbitas hiperbólicas é conhecido que:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mu}{V_\infty^2} \\ e &= 1 + \frac{r_\pi V_\infty^2}{\mu} \end{aligned}$$

Seja o vetor unitário:

$$\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \{e_{3x}, e_{3y}, e_{3z}\} \quad (3.16)$$

Das Equações (3.12) e (3.13) obtemos:

$$\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_{20} \cos \Psi + \hat{e}_1 \times \hat{e}_{30} \sin \Psi = \hat{e}_1 \times \hat{e}_{20} \cos \Psi - \hat{e}_{20} \sin \Psi \quad (3.17)$$

Sendo  $\hat{e}_3$  ortogonal ao plano de órbita. Por outro lado, dos elementos orbitais é

conhecido que:  $\cos i = e_{3z}$ ,  $\tan \Omega = -\frac{e_{3x}}{e_{3y}}$ ,  $\cos \omega = \frac{\vec{r}_\pi \cdot \hat{k}}{r_\pi}$ ,  $\hat{k} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{bmatrix}$ . Seja

$\hat{z} = \{0,0,1\}$  normal ao plano de referência. Então:

$$\cos i = \hat{z} \cdot \hat{e}_3 = \hat{z} \cdot \hat{e}_1 \times \hat{e}_{20} \cos \Psi = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_{20} \times \hat{z} \cos \Psi \quad (3.18)$$

Seja  $\eta$  o ângulo entre  $\vec{V}_\infty$  e o plano de referência. O vetor unitário  $\hat{e}_{20} \times \hat{z}$  esta na direção da projeção do vetor  $\hat{e}_1$  sobre o plano de referência.

Assim,  $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_{20} \times \hat{z} = \cos \eta$  então:

$$\cos i = \cos \eta \cos \Psi \quad (3.19)$$

Consideramos a inserção do veículo espacial em uma órbita final, cujo vetor momento angular orbital  $\hat{c}$  é normal à órbita final. Em nosso caso, o plano da órbita de Tritão. Sabemos que:

$$\hat{c} = \{\sin \Omega_T \sin i_T, \cos \Omega_T \sin i_T, \cos i_T\}$$

Denominando:

$$\gamma_1 = \hat{e}_1 \cdot \hat{c}, \quad \gamma_2 = \hat{e}_{20} \cdot \hat{c}, \quad \gamma_3 = \hat{e}_{30} \cdot \hat{c} \quad (3.20)$$

Os quais representam aos cosenos diretores de  $\hat{c}$  em função de  $\hat{e}_1, \hat{e}_{20}, \hat{e}_{30}$ .

Assim:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (3.21)$$

Para realizar a manobra no pericentro da hipérbole de entrada consideraremos que o raio do pericentro esta no plano da órbita final. Assim,  $\vec{r}_\tau \cdot \hat{c} = 0$ , e usando as equações anteriores obtemos:

$$\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi \cos \Psi - \gamma_3 \sin \varphi \sin \Psi = 0 \quad (3.22)$$

O ângulo  $\Psi$  pode ser encontrado a partir de:

$$\cos \Psi = \frac{\gamma_2 \gamma_1 \sin \varphi \pm \gamma_3 \sqrt{\sin^2 \varphi - \gamma_1^2}}{(1 - \gamma_1^2) \sin \varphi} \quad (3.23)$$

Sendo  $\varepsilon$  o ângulo entre a órbita hiperbólica inicial do veículo espacial (plano inicial) e o plano da órbita final (ver Figura 3.1). Devido às Equações (3.11), (3.17) (3.20):

$$\cos \varepsilon = \hat{e}_3 \cdot \hat{c} = -\gamma_2 \sin \Psi + \gamma_3 \cos \Psi \quad (3.24)$$

### 3.2.2 Simulações

Consideramos as melhores opções de transferência (EJN, EVEJN, EVEJSN) no que se refere ao consumo de combustível (seção 2.4). Usaremos os valores dos seus vetores velocidades no infinito na proximidade da esfera de influência de Netuno para determinar o consumo de combustível adicional em colocar o veículo espacial em órbita ao redor de Tritão. Consideraremos que o raio pericêntrico da órbita ao redor de Tritão ( $R_T$ ) é formado pelo raio de Tritão e pela altitude a qual se encontra o veículo espacial ( $R_T = R_T + h$ ), sendo a raio de Tritão aproximadamente 1300 km.

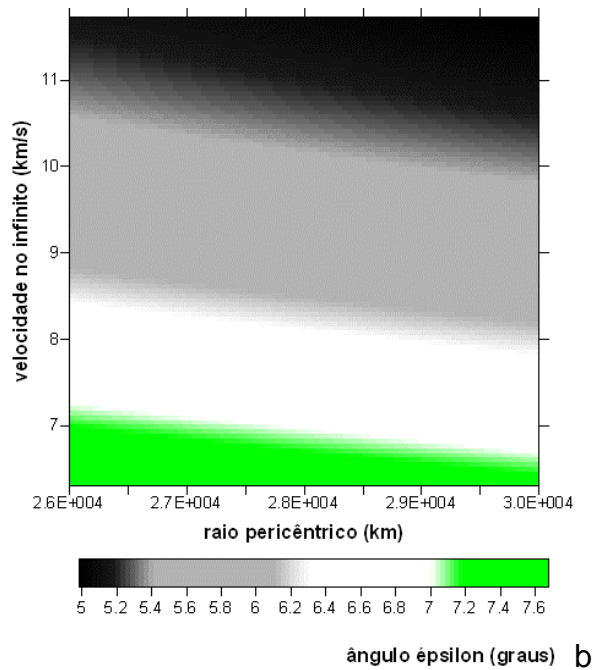
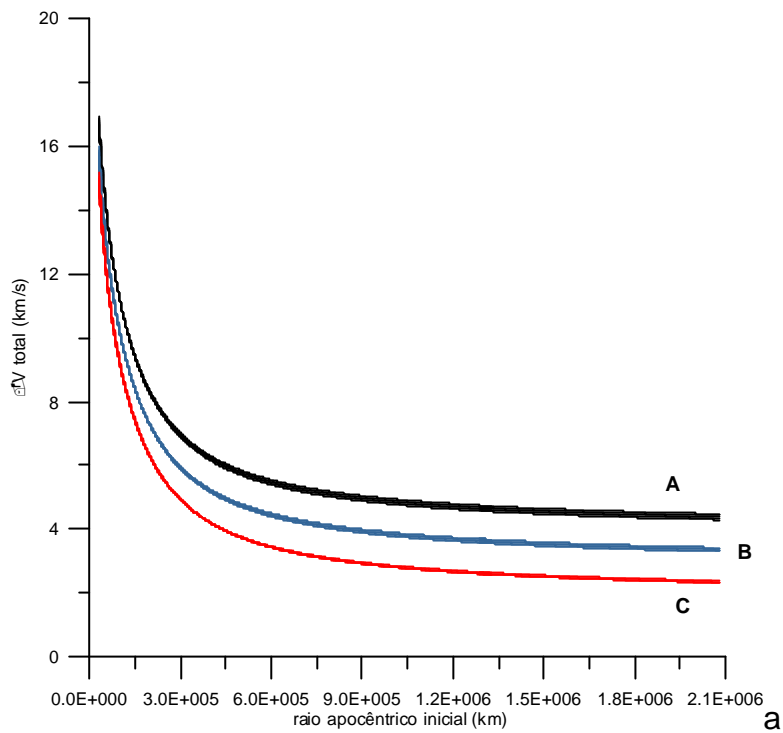


FIGURA 3.5 – (a)  $\Delta V$  total da manobra orbital para a opção EJNI para  $r_{\pi T} = 2 \times 10^3$  km e  $r_{\alpha T} = 3 \times 10^4$  km, considerando: (A)  $V_{\infty} = 11.728$  km/s, (B)  $V_{\infty} = 9.328$  km/s, (C)  $V_{\infty} = 6.304$  km/s. (b) Mapa do ângulo  $\epsilon$ .

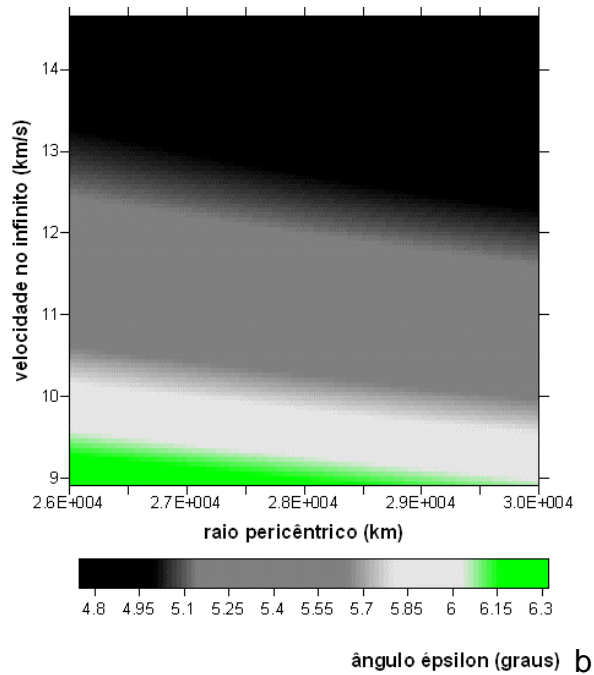
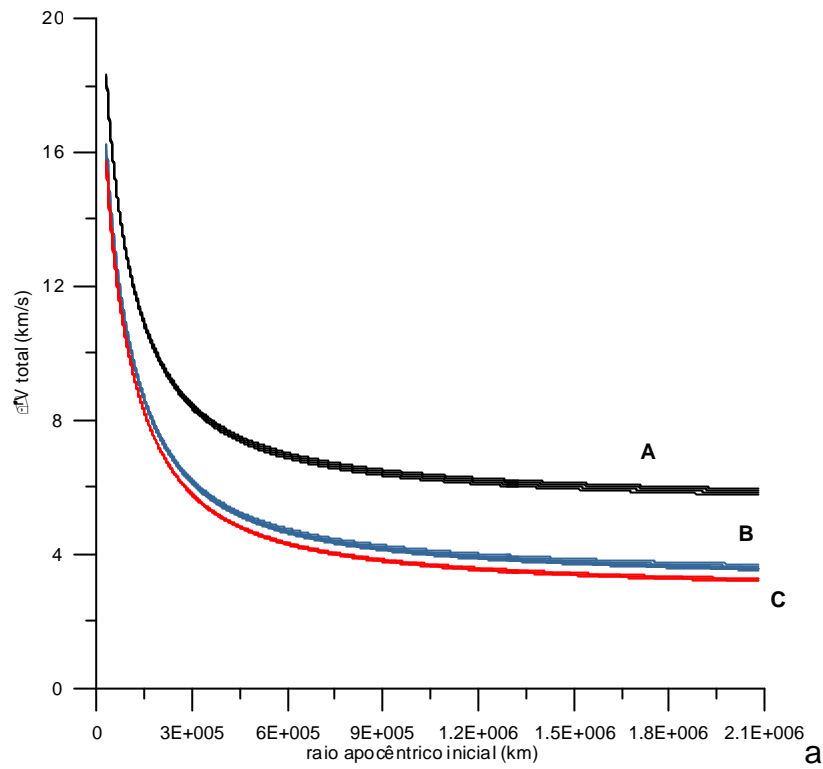


FIGURA 3.6 – (a)  $\Delta V$  total da manobra orbital para a opção EVEJN para  $r_{\pi T} = 2 \times 10^3$  km e  $r_{\alpha T} = 3 \times 10^4$  km, considerando: (A)  $V_{\infty} = 14.651$  km/s, (B)  $V_{\infty} = 9.980$  km/s, (C)  $V_{\infty} = 8.925$  km/s. (b) Mapa do ângulo épsilon.

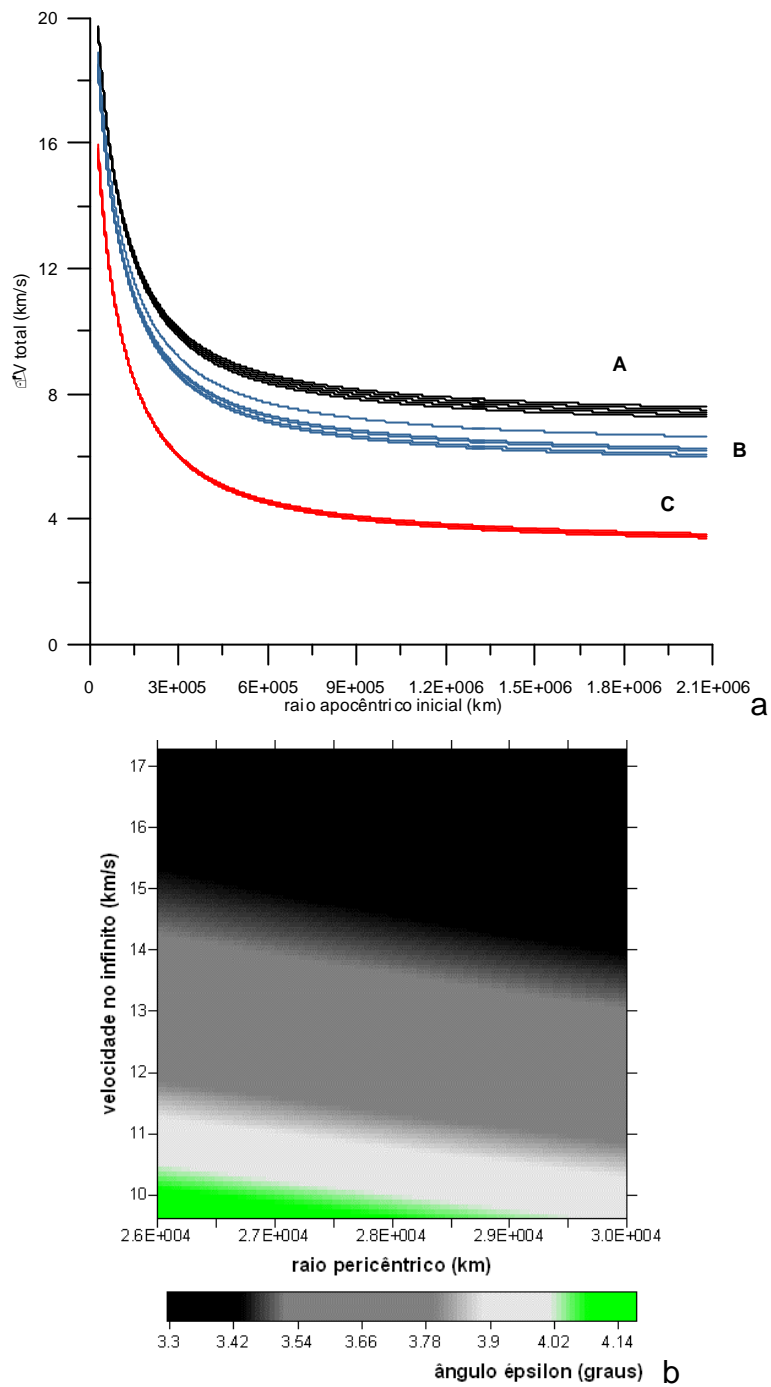


FIGURA 3.7 – (a)  $\Delta V$  total da manobra orbital para a opção EVEJSN para  $r_{\pi T} = 2 \times 10^3$  km e  $r_{\alpha T} = 3 \times 10^4$  km, considerando: (A)  $V_{\infty} = 17.278$  km/s, (B)  $V_{\infty} = 15.109$  km/s, (C)  $V_{\infty} = 9.608$  km/s. (b) Mapa do ângulo épsilon.

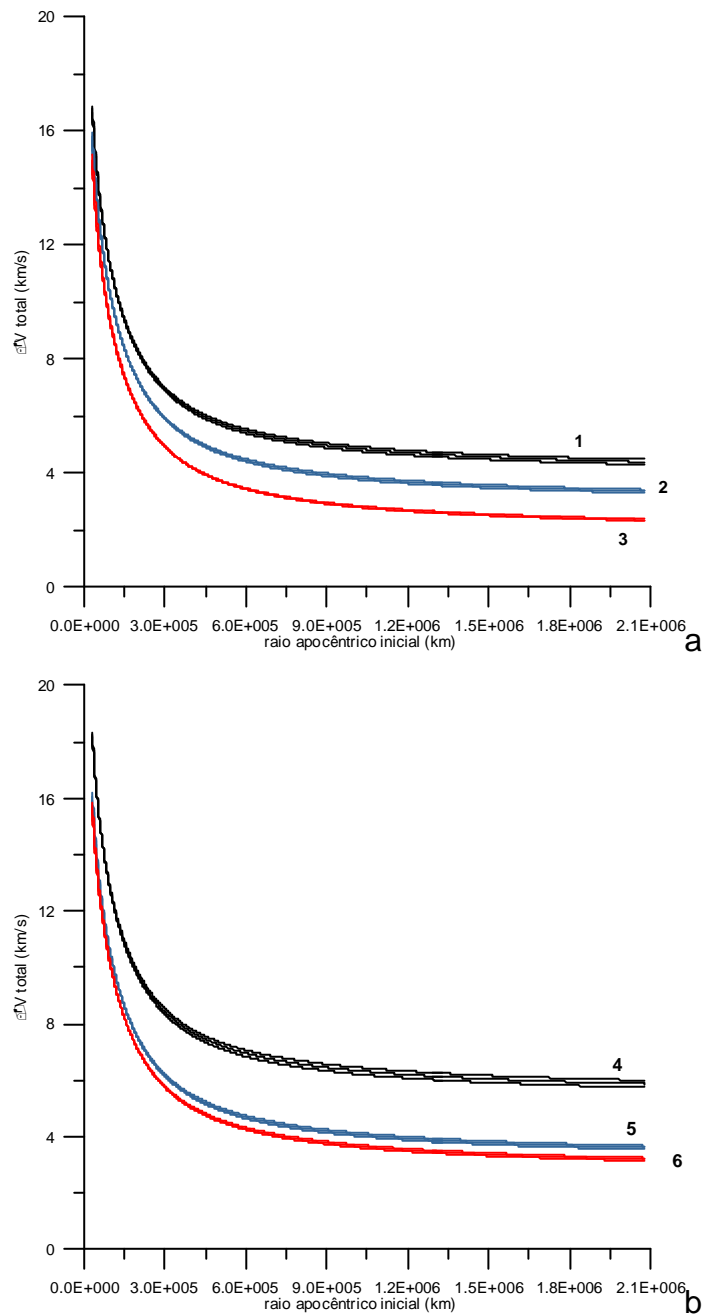


FIGURA 3.8 –  $\Delta V$  total da manobra orbital, considerando  $r_{\pi T} = 2 \times 10^3$  km,  $r_{\alpha T} = 3.6 \times 10^4$  km. Para: a) EJM: (1)  $V_{\infty} = 11.727$  km/s, (2)  $V_{\infty} = 9.328$  km/s, (3)  $V_{\infty} = 6.304$  km/s. b) EVEJM: (4)  $V_{\infty} = 14.651$  km/s, (5)  $V_{\infty} = 9.980$  km/s, (6)  $V_{\infty} = 8.925$  km/s. c) EVEJSN: (7)  $V_{\infty} = 17.278$  km/s, (8)  $V_{\infty} = 15.109$  km/s, (9)  $V_{\infty} = 9.608$  km/s

(continua).

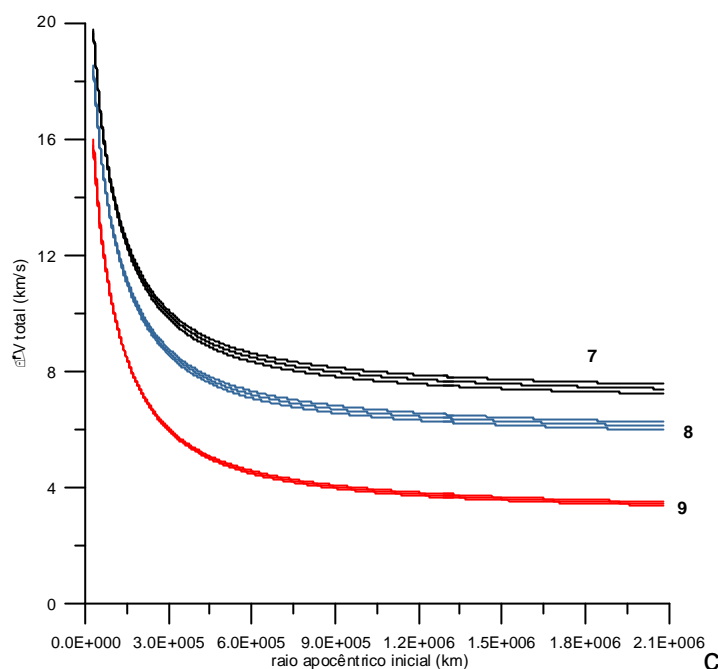


FIGURA 3.8 – (Conclusão).

A análise das manobras ao redor de Netuno e de Tritão mostram a dependência da velocidade característica (em especial do  $\Delta V_1$  de frenado) com a velocidade com a qual o veículo espacial ingressa na esfera de influência de Netuno ( $V_\infty$ ). As Figuras 3.5a - 3.7a mostram que, quanto maior o valor da velocidade no infinito, maior o consumo total da manobra. A situação é invertida quando a velocidade no infinito é menor. No entanto, para valores elevados do raio apocêntrico, os consumos de combustível são bastante baixos, sendo possível encontrar uma aproximação assintótica às curvas, o que acontece quando  $r_\alpha \rightarrow \infty$ . A desvantagem dessa situação é o tempo necessário, como consequência do crescimento do semi-eixo maior da órbita do veículo espacial. Ao longo das simulações foram considerados raios do pericentro entre os  $2.6 \times 10^4$  km e os  $3 \times 10^4$  km.



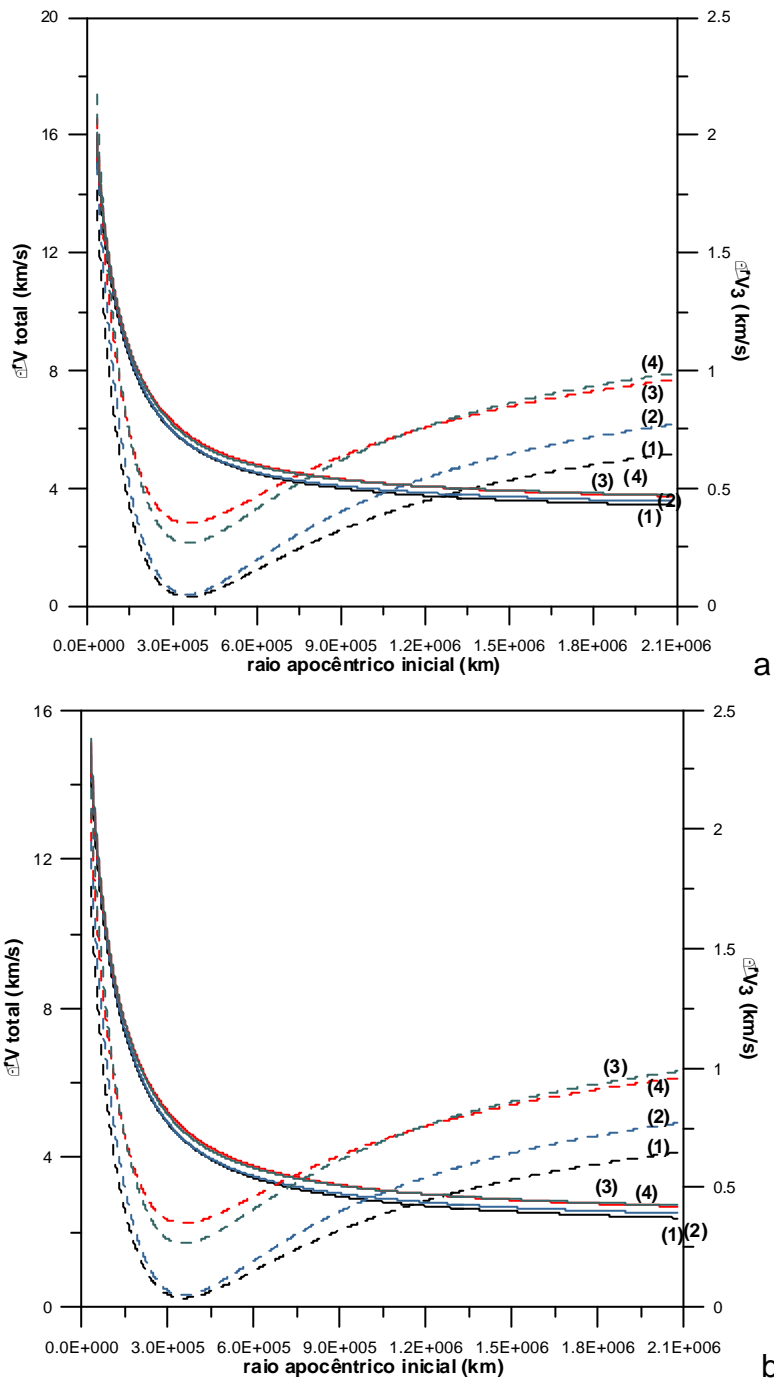


FIGURA 3.9 – Comportamento de  $\Delta V_T$  e  $\Delta V_3$  para  $r_\pi = 3 \times 10^4$  km, considerando:  
 (1)  $r_{\alpha T} = 3 \times 10^4$  km,  $r_{\pi T} = 2 \times 10^3$  km, (2)  $r_{\alpha T} = 3 \times 10^4$  km,  $r_{\pi T} = 3.5 \times 10^3$  km, (3)  $r_{\alpha T} = 2 \times 10^3$  km,  $r_{\pi T} = 2 \times 10^3$  km, (4)  $r_{\alpha T} = 3.5 \times 10^3$  km,  $r_{\pi T} = 3.5 \times 10^3$  km. Para a)  $V_\infty = 9.328$  km/s, b)  $V_\infty = 6.304$

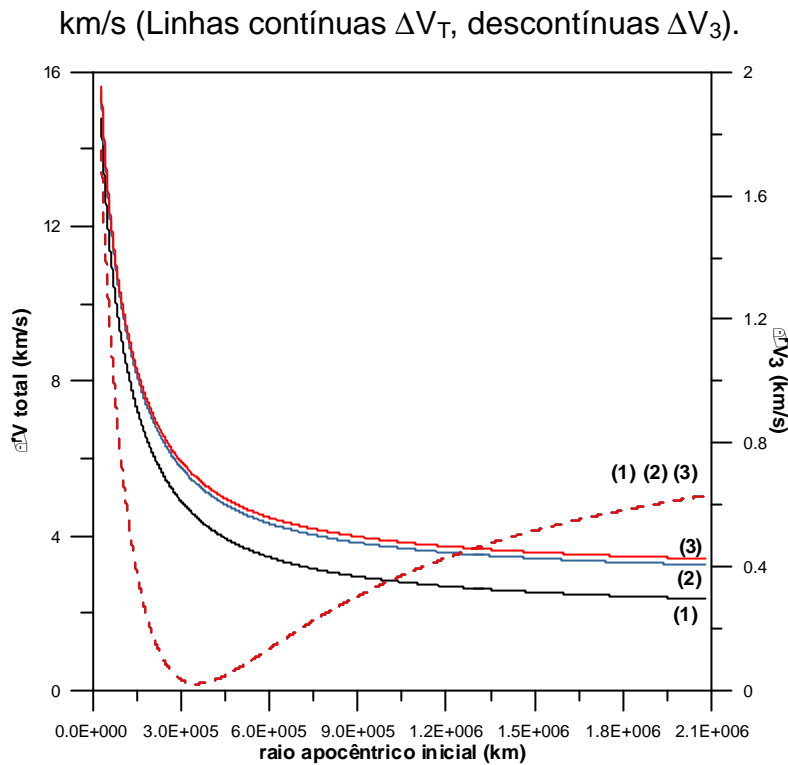


FIGURA 3.10 – Comportamento de  $\Delta V_T$  e  $\Delta V_3$  para  $r_\pi = 3 \times 10^4$  km,  $r_{\alpha T} = 5.51 \times 10^4$  km, considerando (1)  $V_\infty = 6.304$  km/s, (2)  $V_\infty = 8.925$  km/s, (3)  $V_\infty = 9.3283$  km/s (Linhas contínuas  $\Delta V_T$ , descontínuas  $\Delta V_3$ ).

As Figuras 3.5b - 3.7b mostram, em código de cores, os valores de  $\varepsilon$  (ângulo entre o plano orbital de Tritão e o plano da órbita do veículo espacial), o qual é função da velocidade no infinito e do raio do pericentro. No entanto, comparando o ângulo de mudança de plano entre as diversas opções, encontramos uma dependência inversa com os valores da velocidade no infinito, ou seja, quanto mais elevado o valor da velocidade no infinito os ângulos de mudança de plano são menores.

Quando mudamos o raio do pericentro e do apocentro da órbita ao redor de Tritão, acontecem pequenas mudanças no  $\Delta V_T$  e no  $\Delta V_3$ , que representa o consumo de combustível para mudar da órbita hiperbólica para uma órbita elíptica dentro da esfera de influência de Tritão (Figura 3.8). No entanto, do

ponto de vista do  $\Delta V_3$  (Figura 3.9), para valores do raio de pericentro ao redor do Tritão entre os  $2 \times 10^3$  km e  $3.5 \times 10^3$  km, o consumo de combustível é menor quando comparado ao caso das órbitas circulares. Isto é, é necessário mais combustível para posicionar o veículo espacial em órbita circular ao redor de Tritão do que para posicionar o satélite em uma órbita elíptica. Isto é, devido à interação com as forças gravitacionais de Tritão (linhas 3 e 4). A Figura 3.8 e 3.10 mostram que a influência da variação do  $V_\infty$  no  $\Delta V_3$  é desprezível. No entanto, sua principal influência está no  $\Delta V_T$ , como consequência dos acréscimos em  $\Delta V_1$ .

### 3.3 Transferência Direta a Tritão

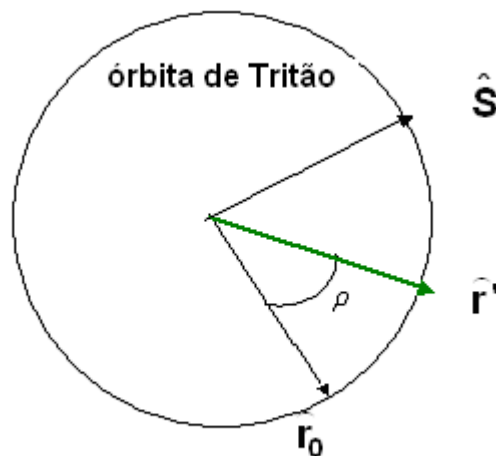


FIGURA 3.11 – Relação geométrica entre os vetores  $\hat{r}'$  e  $\hat{r}_0$ .

Sejam os vetores unitários  $\hat{S}$  e  $\hat{r}_0$  perpendiculares entre si. O ângulo  $\rho$  determina a posição angular entre um vetor unitário da posição inicial de Tritão  $\hat{r}_0$  e o vetor unitário da posição no momento do encontro com o veículo espacial  $\hat{r}'$ . Da geometria do problema (Figura 3.11) temos:

$$\hat{S} = \hat{c}x\hat{r}_0 \quad (3.25)$$

Sendo o vetor  $\hat{r}'$  uma combinação linear de  $\vec{S}$  e  $\vec{r}_0$ :

$$\vec{r}' = (\hat{r}_0 \cos p + \hat{S} \sin p)r' \quad (3.26)$$

A expressão vetorial para  $\hat{c}$  é conhecida (seção 3.2.1). A posição inicial de Tritão ( $\hat{r}_0$ ) antes do encontro com o veículo espacial pode ser expressa como:

$$\hat{r}_0 = \begin{bmatrix} \cos \Omega_{T0} \cos u_{T0} - \sin \Omega_{T0} \sin u_{T0} \cos i_{T0} \\ \sin \Omega_{T0} \cos u_{T0} + \cos \Omega_{T0} \sin u_{T0} \cos i_{T0} \\ \sin u_{T0} \sin i_{T0} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Onde  $u_{T0} = \vartheta_{T0} + \omega_{T0}$  representa o argumento da latitude (anomalia verdadeira + argumento do pericentro). O ângulo entre  $\vec{r}'$  e  $\vec{V}_\infty$  (ver Figura 3.12) será:

$$\cos \varphi = -\frac{\vec{r}' \cdot \vec{V}_\infty}{r' V_\infty} \quad (3.28)$$

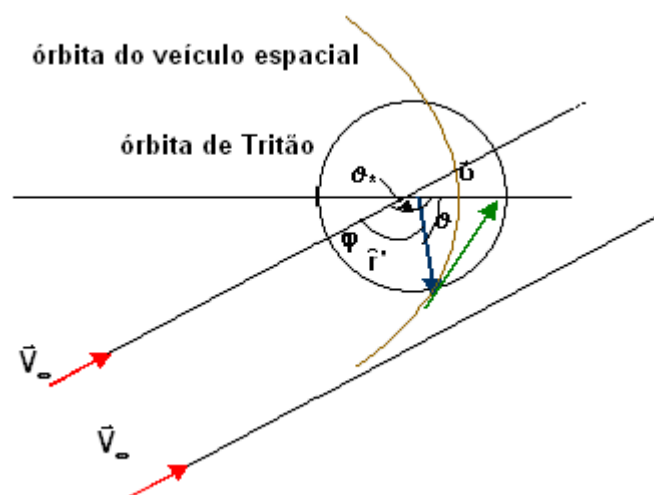


FIGURA 3.12 – Relações angulares do encontro direto entre o veículo espacial

e Tritão.

A velocidade do veículo espacial ao se aproximar de Netuno, à distancia  $r'$ , é:

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r'} + V_{\infty}^2} \quad (3.29)$$

Da mecânica celeste sabemos que:

$$e = -\frac{1}{\cos \vartheta^*}$$

$$r' = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}$$

$$\frac{2\mu}{r'} + V_{\infty}^2 = \frac{\mu}{p}(1 + e^2 + 2e \cos \vartheta)$$

Da geometria do problema:  $\varphi = \vartheta^* - \vartheta$ .

Além disso, da Figura 3.13, temos que:

$\beta_1$  : Ângulo entre os planos de órbita de Tritão e do satélite.

$\beta_2$  : Ângulo entre a perpendicular ao vetor  $\hat{r}'$  e a velocidade do satélite.

$\Psi$  : Ângulo formado entre os vetores velocidade de Tritão e do satélite.

$$\text{sen } \Psi = \text{sen } \beta_1 \text{sen } \beta_2 \quad (3.30)$$

Sendo o vetor unitário  $\hat{c}'$  perpendicular ao plano de órbita do veículo espacial temos:

$$\hat{c}' = \frac{\hat{r}' \times \vec{V}_{\infty}}{|\hat{r}' \times \vec{V}_{\infty}|} \quad (3.31)$$

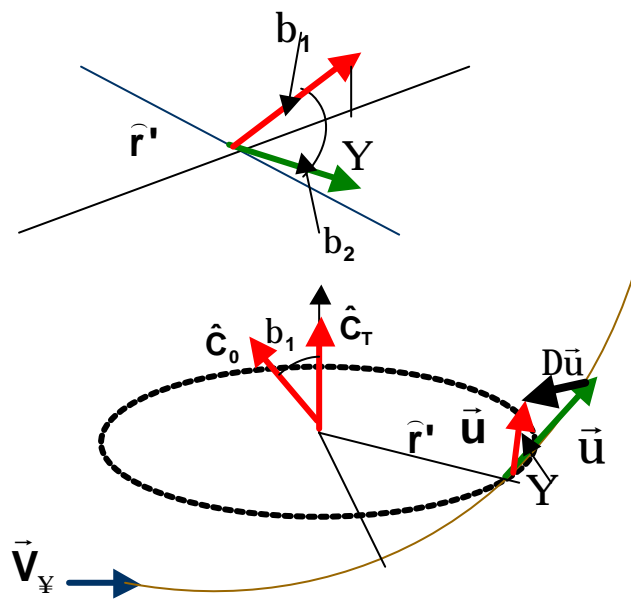


FIGURA 3.13 – Encontro direto do veículo espacial com Tritão.

O ângulo entre os vetores será:

$$\cos \beta_1 = \frac{\vec{c} \cdot \vec{c}'}{cc'} \quad (3.32)$$

As componentes radiais e normais da velocidade do veículo espacial são:

$$\begin{aligned} v_r &= e \cos \vartheta \sqrt{\frac{\mu}{p}} \\ v_n &= \frac{1}{r} \sqrt{\mu p} \end{aligned} \quad (3.33)$$

O valor de  $\beta_2$  será dado por:

$$v_r = e \cos \vartheta \sqrt{\frac{\mu}{p}}$$

$$\cos \beta_2 = \frac{v_n}{v} = \frac{\sqrt{\mu p}}{vr}$$
(3.34)

Sendo  $u$  a velocidade de Tritão na sua órbita ao redor de Netuno. O  $\Delta v$  necessário para que o veículo espacial encontre diretamente a Tritão será:

$$\Delta v = \sqrt{v^2 + u^2 - 2vu \cos \Psi}$$
(3.35)

### 3.3.1 Simulações

O vetor  $\hat{r}_0$  foi posicionado sobre a linha dos nodos e consideramos o sistema de referência com respeito ao equador de Netuno. A Figura 3.14 mostra dois grandes picos para as opções (1) e (3), ou seja, para os valores do ângulo  $\rho$  aproximadamente entre  $0^\circ$  a  $50^\circ$  o consumo de combustível é alto. O mínimo consumo de combustível para a opção (1) é de aproximadamente 4.186 km/s, quando o ângulo  $\rho$  é de  $120^\circ$ . A opção (3) tem um mínimo de 5.136 km/s para um ângulo de  $110^\circ$ . As opções (2), (4), (5), (6), tem um perfil semelhante, ou seja apresentam um pico aproximadamente entre  $160^\circ$  a  $180^\circ$ , o qual fornece valores elevados para o consumo de combustível. No entanto, entre os  $20^\circ$  e  $150^\circ$ , existe uma região de aparente estabilidade onde não muda drasticamente o valor do consumo de combustível. Mas existem pequenas diferenças entre esses valores. Desta forma, para a opção (2) o valor mínimo é de 4.486 km/s para um ângulo de  $88^\circ$ ; para a opção (4) o mínimo é de 6.839 km/s para um ângulo de  $80^\circ$ ; para a opção (5) o mínimo é de 8.890 km/s e para um ângulo de  $80^\circ$  é de 11.544 km/s, para um ângulo de  $80^\circ$  para a opção (6). De forma prática, esses esquemas podem ser aplicados para uma missão cujo objetivo seja sobrevoar Tritão considerando que os menores valores do consumo de

combustível estão dados quando  $\vec{r}'$  e  $\vec{r}_0$  formam um ângulo entre os  $80^\circ$  e  $110^\circ$ .

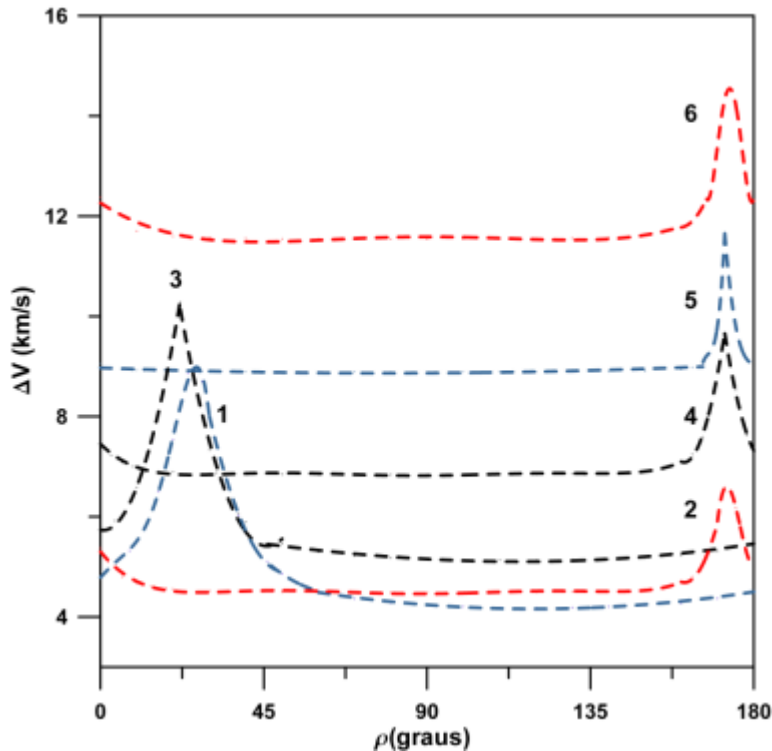


FIGURA 3.14 –  $\Delta V$  para uma transferência direta a Tritão. Considerando  $V_\infty$ : (1) 5.664 km/s, (2) 6.303 km/s, (3) 7.077 km/s, (4) 9.3283 km/s, (5) 11.727 km/s, (6) 14.651 km/s.

### 3.4 Comentários

As manobras orbitais que foram projetadas nesse capítulo para atingir a Tritão, são do tipo impulsivas (transferências do tipo Hohmann). No caso das manobras orbitais que visam fazer do veículo espacial um satélite de Tritão, tem que a primeira manobra orbital onde o impulso é aplicado no pericentro da órbita de transferência é ótima do ponto de vista da mudança do semi-eixo maior. Em nosso caso, o semi-eixo maior decresce devido ao decrescimento do raio apocêntrico. Na segunda manobra orbital, aplicamos o impulso no apocentro da primeira elipse. Esta manobra é ótima do ponto de vista da



mudança do plano orbital e do aumento no raio do pericentro. A terceira manobra orbital, aplicada no pericentro da órbita ao redor de Tritão, é ótima para mudar o raio do apocentro. Ao longo das simulações efetuadas, mostra-se a proporcionalidade direta entre o  $\Delta V$  total e  $V_\infty$  próximo de Netuno. Pequenas mudanças no raio do pericentro não trazem significativas mudanças ao consumo de combustível, mas elevados valores do raio do apocentro minimizam o consumo de combustível, sendo uma desvantagem o tempo investido na manobra. No caso da transferência direta a Tritão, encontramos certos intervalos onde o ângulo  $\rho$  nos fornece o mínimo consumo de combustível em uma missão de sobrevôo a Tritão. Em geral, as manobras que visam fazer do veículo espacial um satélite de Tritão, quando comparadas as transferências diretas, nos fornecem mínimos valores a  $\Delta V$  mas, como foi falado anteriormente, a sua principal desvantagem é o tempo. Dependendo dos objetivos da missão é possível escolher uma manobra de simples sobrevôo a Tritão, escolhendo as opções com mínimo  $V_\infty$  o qual nos fornece mínimo  $\Delta V$ .



## **CAPÍTULO 4**

### **MOVIMENTO AO REDOR DO NETUNO**

#### **4.1 Generalidades**

Nos capítulos anteriores foram analisadas as diversas opções para transferir um veículo espacial desde a Terra até Netuno, e as diversas manobras para atingir Tritão. No caso das missões espaciais desenvolvidas nos últimos anos, temos o caso da Cassini-Huygens, que viajou para Saturno e em janeiro do 2005, se encontrou com a maior das suas luas (Titã). Desta forma, para a missão ao sistema de Netuno, nosso interesse é conhecer os efeitos da dinâmica de Netuno e Tritão no veículo espacial.

Os primeiros estudos do movimento orbital dos satélites Netunianos foram desenvolvidos Harris (1984), para o caso de Tritão, e por Rose (1974) e Veillet (1982,1988), para o caso de Nereida. Harris utilizou uma órbita inclinada com precessão constante para representar à órbita de Tritão. Borderies (1989), Dobrovolskis, Borderies e Steiman-Cameron (1989) estudam as configurações de equilíbrio do plano orbital das partículas de testes no campo gravitacional de Netuno e Tritão. Segundo Borderies, seguindo um trabalho anterior de Dobrovolskis (1980), existia a possibilidade da existência de anéis em órbitas polares ao redor de Netuno, mas esse fato foi descartado depois da viagem da Voyager 2.

#### **4.2 Modelo Matemático**

As equações de movimento usadas nas integrações numéricas incluem os efeitos gravitacionais do planeta Netuno, achatado nos pólos, e a perturbação da maior das suas luas (Tritão). Usaremos as equações de movimento em coordenadas cartesianas centradas no sistema baricêntrico do planeta.

Tomaremos como plano de referência o denominado plano invariável. Todas as integrações numéricas serão realizadas com o integrador Radau 15, o qual nos fornece uma boa relação de precisão e rapidez de cálculo. Sejam  $\vec{r}_i$  e  $\vec{r}_j$  os vetores posição das massas  $m_i$  e  $m_j$  com respeito à massa central  $M_c$ . Assim, as equações de movimento de  $m_i$  com respeito a  $M_c$ , são:

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -G(M_c + m_i) \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3} + Gm_j \left( \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} - \frac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3} \right) \quad (4.1)$$

Considerando o achatamento do planeta, temos:

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -G(M_c + m_i) \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3} + \sum_{j=1}^K Gm_j \left( \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} - \frac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3} \right) + \nabla R_{J_2}, j \neq i \quad (4.2)$$

A primeira parcela representa o movimento kepleriano da massa  $m_i$  ao redor do corpo central  $M_c$ . O somatório representa as interações entre  $m_i$  e as massas  $m_j$ , a última parcela o efeito do achatamento do corpo central na massa  $m_i$ .

Assim, para o nosso problema, temos:

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -G(M_N + m_i) \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3} + Gm_T \left( \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_T}{|\vec{r}_i - \vec{r}_T|^3} - \frac{\vec{r}_T}{|\vec{r}_T|^3} \right) + \nabla R_{J_2} \quad (4.3)$$

Que representa as equações de movimento do satélite considerando os efeitos perturbativos de Tritão e do achatamento do planeta. Onde  $M_N$  e  $m_T$  representam as massas de Netuno e Tritão respectivamente.  $\vec{r}_i$  e  $\vec{r}_T$  são os vetores posição da partícula e de Tritão.

$$\frac{d^2 \vec{r}_T}{dt^2} = -G(M_N + m_T) \frac{\vec{r}_T}{|\vec{r}_T|^3} + \nabla R_{J_2} \quad (4.4)$$

E a Equação (4.4) representa a equação de movimento de Tritão ao redor de Netuno, perturbado pelo achatamento de Netuno, pois o efeito do veículo espacial em Tritão é desprezível.

A função perturbadora do termo de achatamento com respeito ao plano equatorial é:

$$R_{J_2} = \frac{\mu}{|\vec{r}_i|^3} J_2 \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \text{sen}^2 \beta \right) \quad (4.5)$$

As coordenadas do corpo  $m_i$  com respeito ao centro de massas (em coordenadas polares) são:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \Psi' \cos \beta \\ y &= r \text{sen} \Psi' \cos \beta \\ z &= r \text{sen} \beta \end{aligned} \quad (4.6)$$

Onde  $\Psi'$ : longitude e  $\beta$ : latitude equatorial do satélite.

Seja:

$$\text{sen} \beta = \frac{z}{r} \quad (4.7)$$

As coordenadas cartesianas de um veículo espacial em relação aos elementos orbitais com respeito ao plano invariante são:

$$\begin{aligned}
X &= r \cos(f + \omega) \cos \Omega - r \sin(f + \omega) \sin \Omega \cos I \\
Y &= r \cos(f + \omega) \sin \Omega + r \sin(f + \omega) \cos \Omega \cos I \\
Z &= r \sin(f + \omega) \sin I
\end{aligned}
\tag{4.8}$$

Relacionamos as coordenadas do plano arbitrário (X,Y,Z) com as coordenadas no plano do equador (x,y,z) através das seguintes rotações:

$$(x, y, z) = M_\gamma M_{\tilde{T}} M_{\tilde{\Omega}} (X, Y, Z) \tag{4.9}$$

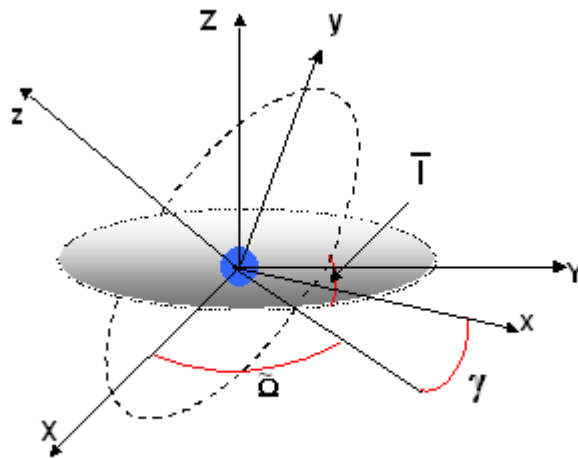


FIGURA 4.1 – Relação geométrica entre o sistema arbitrário XYZ e o sistema xyz no equador de Netuno.

Onde  $\tilde{T}$  e  $\tilde{\Omega}$  posicionam o plano arbitrário em relação ao equador de Netuno, e  $\gamma$  é o ângulo entre o eixo x e a linha do nodo ascendente do plano arbitrário sobre o equador do planeta (ver Figura 4.1). Assim teremos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \tilde{T} & \sin \tilde{T} \\ 0 & -\sin \tilde{T} & \cos \tilde{T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \tilde{\Omega} & \sin \tilde{\Omega} & 0 \\ -\sin \tilde{\Omega} & \cos \tilde{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} x &= [X \cos \tilde{\Omega} + Y \sin \tilde{\Omega}] \cos \gamma + [-X \cos \tilde{\Gamma} \sin \tilde{\Omega} + Y \cos \tilde{\Gamma} \cos \tilde{\Omega} + \\ &\quad Z \sin \tilde{\Gamma}] \sin \gamma \\ y &= -[X \cos \tilde{\Omega} + Y \sin \tilde{\Omega}] \sin \gamma + [-X \cos \tilde{\Gamma} \sin \tilde{\Omega} + Y \cos \tilde{\Gamma} \cos \tilde{\Omega} + \\ &\quad Z \sin \tilde{\Gamma}] \cos \gamma \\ z &= X \sin \tilde{\Gamma} \sin \tilde{\Omega} - Y \sin \tilde{\Gamma} \cos \tilde{\Omega} + Z \cos \tilde{\Gamma} \end{aligned} \quad (4.11)$$

O potencial gravitacional produzido por Netuno em um ponto externo, em especial na posição de Tritão, será expressa por:

$$U = \frac{GM_N}{r_T} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r_T} \right)^n P_n(\sin \beta) \right] \quad (4.12)$$

Após o desenvolvimento consideramos o termo de  $J_n$  de maior ordem ( $n = 2$ ). Além disso, depois colocamos em forma explícita a Equação (4.12) e desprezando a primeira parcela que provêm do fato de considerar toda a massa de Netuno concentrada no seu centro de massa, obtemos:

$$U = -J_2 \frac{GM_N}{2r_T} \left( \frac{R_N}{r_T} \right)^2 [3 \sin^2 \beta - 1] \quad (4.13)$$

O torque sobre Tritão é determinado pelo gradiente do potencial externo de Netuno na posição de Tritão:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ \vec{F} &= -m_T \nabla U = -\nabla U_T\end{aligned}\tag{4.14}$$

Além disso, o torque produzido em Tritão por Netuno é da mesma grandeza que o torque produzido por Tritão sobre Netuno:

$$|\vec{\tau}|_{N \rightarrow T} = -|\vec{\tau}|_{T \rightarrow N}$$

Seja a energia potencial que atua em Tritão:

$$U_T = \left( \frac{-GM_N m_T J_2 R_N^2}{r_T^3} \right) \left( -\frac{1}{2} + \frac{3 \sin^2 \beta}{2} \right)\tag{4.15}$$

Das equações (4.14) e (4.15) teremos o torque aplicado sobre Tritão devido ao achatamento de Netuno.

$$\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) = -\vec{r}_T \times \nabla_T U_T = -m_T \vec{r}_T \times \nabla_T U\tag{4.16}$$

As parcelas serão:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \left( \frac{\partial U_T}{\partial y_T} \right) z_T - \left( \frac{\partial U_T}{\partial z_T} \right) y_T \\ \tau_2 &= -\left( \frac{\partial U_T}{\partial x_T} \right) z_T + \left( \frac{\partial U_T}{\partial z_T} \right) x_T \\ \tau_3 &= \left( \frac{\partial U_T}{\partial x_T} \right) y_T - \left( \frac{\partial U_T}{\partial y_T} \right) x_T\end{aligned}\tag{4.17}$$

$x_T, y_T, z_T$  são as coordenadas cartesianas de Tritão em relação ao equador de Netuno.



Colocando de forma explícita as expressões para  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  e  $\tau_3$ , e usando o fato de que  $U_T$  pode ser reescrito como:

$$U_T = U_0 \left( \frac{3z_T^2}{r_T^5} - \frac{1}{r_T^3} \right)$$

$$U_0 = \left( \frac{-GM_N m_T J_2 R_N^2}{2} \right)$$

$$\frac{\partial U_T}{\partial y_T} = \frac{\partial U_T}{\partial r_T} \frac{\partial r_T}{\partial y_T} = U_0 \left[ \frac{\partial}{\partial r_T} \left( \frac{3z_T^2}{r_T^5} - \frac{1}{r_T^3} \right) \right] \frac{y_T}{r_T}$$

Definindo de maneira similar a Nascimento (2003):

$$U_z = \frac{6U_0 z_T}{r_T^5}, \text{ então:}$$

$$\frac{\partial U_T}{\partial z_T} = \frac{\partial U_T}{\partial r_T} \frac{\partial r_T}{\partial z_T} + U_z = U_0 \left[ \frac{\partial}{\partial r_T} \left( \frac{3z_T^2}{r_T^5} - \frac{1}{r_T^3} \right) \right] \frac{z_T}{r_T} + U_z, \text{ assim da Equação (4.17):}$$

$$\tau_1 = \left( \frac{\partial U_T}{\partial y_T} \right) z_T - \left( \frac{\partial U_T}{\partial z_T} \right) y_T = y_T U_z \quad (4.18)$$

De forma análoga:

$$\tau_2 = x_T U_z \quad (4.19)$$

$$\tau_3 = 0 \quad (4.20)$$

A Equação (4.21) descreve o movimento de um corpo rígido. Onde  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  é o vetor de rotação (spin) de Netuno e os  $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3$  representam os momentos principais de inércia de Netuno. Então teremos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_1 \dot{\omega}_1 + (\mathfrak{S}_3 - \mathfrak{S}_2) \omega_3 \omega_2 &= \tau_1 \\
\mathfrak{S}_2 \dot{\omega}_2 + (\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_3) \omega_1 \omega_2 &= \tau_2 \\
\mathfrak{S}_3 \dot{\omega}_3 + (\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_1) \omega_1 \omega_2 &= \tau_3
\end{aligned} \tag{4.21}$$

A expressão anterior corresponde à equação de Euler do movimento de um corpo rígido (sistema girante com respeito ao sistema fixo). No entanto, para corpos rotacionalmente simétricos cumpre-se que  $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$ , desta maneira a equação de Euler será:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_1 \dot{\omega}_1 + (\mathfrak{S}_3 - \mathfrak{S}_1) \omega_3 \omega_2 &= \tau_1 \\
\mathfrak{S}_2 \dot{\omega}_2 + (\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_3) \omega_1 \omega_2 &= \tau_2 \\
\mathfrak{S}_3 \dot{\omega}_3 &= \tau_3 = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Mas, os ângulos de Euler  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\Omega}, \gamma)$  determinam a orientação dos eixos ligados ao corpo  $(x, y, z)$  com respeito aos eixos fixos  $(X, Y, Z)$ , sendo o vetor velocidade angular:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{\tilde{\Gamma}} \cos \gamma + \dot{\tilde{\Omega}} \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \tilde{\Gamma} \\
\omega_2 &= -\dot{\tilde{\Gamma}} \operatorname{sen} \gamma + \dot{\tilde{\Omega}} \cos \gamma \operatorname{sen} \tilde{\Gamma} \\
\omega_3 &= \dot{\gamma} + \dot{\tilde{\Omega}} \cos \tilde{\Gamma}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Derivando a expressão para  $\omega_1$  (Usando a Equação 4.23) e simplificando (ver Nascimento, 2003):

$$\dot{\omega}_1 = \operatorname{sen}(\tilde{\Gamma}) \dot{\gamma} \cos(\gamma) \dot{\tilde{\Omega}} - \operatorname{sen}(\gamma) \dot{\gamma} \dot{\tilde{\Gamma}} \tag{4.24}$$

Substituindo  $\dot{\omega}_1$  e  $\omega_2$  na primeira equação de Euler, e efetuando algumas simplificações, chegamos à Equação (4.25). De forma análoga, derivamos a

expressão para  $\omega_2$  e usando  $\omega_1$  (Equação 4.23) na segunda equação de Euler e após algumas simplificações, chegamos à Equação (4.26):

$$\frac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{S}_1} \omega_3 \left( \text{sen}(\tilde{\Gamma}) \cos(\gamma) \dot{\tilde{\Omega}} - \text{sen}(\gamma) \dot{\tilde{\Gamma}} \right) = \frac{\tau_1}{\mathfrak{S}_1} \quad (4.25)$$

$$-\frac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{S}_1} \omega_3 \left( \text{sen}(\tilde{\Gamma}) \text{sen}(\gamma) \dot{\tilde{\Omega}} + \cos(\gamma) \dot{\tilde{\Gamma}} \right) = \frac{\tau_2}{\mathfrak{S}_1} \quad (4.26)$$

A partir das Equações (4.18), (4.19), (4.25) e (4.26), obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Omega}} \text{sen} \tilde{\Gamma} &= -\frac{U_z}{\mathfrak{S}_3 \omega_3} (y_T \cos \gamma + x_T \text{sen} \gamma) \\ \dot{\tilde{\Gamma}} &= -\frac{U_z}{\mathfrak{S}_3 \omega_3} (-x_T \cos \gamma + y_T \text{sen} \gamma) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Desta forma, as coordenadas do corpo perturbador estão escritas com respeito ao sistema de eixos fixos ao equador de Netuno. Estas equações de  $\dot{\tilde{\Omega}}$  e  $\dot{\tilde{\Gamma}}$ , fornecem o movimento do equador de Netuno em relação a um referencial arbitrário. A função perturbadora do achatamento também deve ser escrita em função do referencial arbitrário. Para isso convertemos a sua dependência em latitude equatorial em elementos orbitais considerando só a parte secular. Da Figura (4.2) obtemos:

$$\cos i = \cos \tilde{\Gamma} \cos l + \text{sen} \tilde{\Gamma} \text{sen} l \cos(\Omega - \tilde{\Omega}) \quad (4.28)$$

Após operações chegamos a:

$$\begin{aligned} R_{J_2} = S_0 & \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2(\tilde{\Gamma}) \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2(l) \right) + \frac{3}{8} \text{sen}(2\tilde{\Gamma}) \text{sen}(2l) \right. \\ & \left. \cos(\Omega - \tilde{\Omega}) + \frac{3}{8} \text{sen}^2(\tilde{\Gamma}) \text{sen}^2(l) \cos(2\Omega - 2\tilde{\Omega}) \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\text{Sendo: } S_0 = \frac{GM_N R_N^2 J_2}{a^3 (1-e^2)^{3/2}}$$

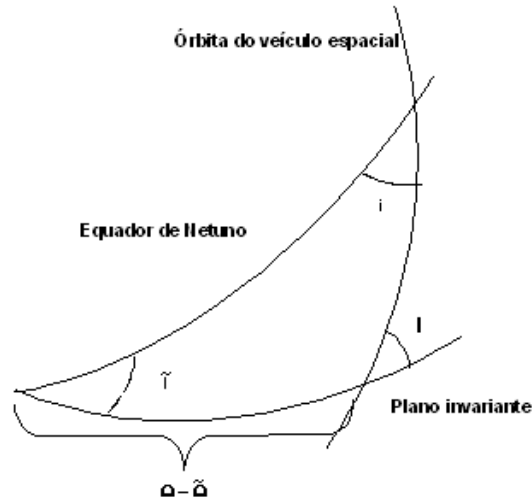


FIGURA 4.2 – Relação geométrica entre os diversos planos.

Por outro lado, as equações de precessão são obtidas de forma explícita, usando a Equação (4.11) na Equação (4.27), e a Equação (4.11) nas relações para  $U_0$  e  $U_z$  colocarmos igualmente na Equação (4.27). Desta forma as equações de precessão serão:

$$\dot{\tilde{\Omega}} = \frac{3Gm_T M_N R_N^2 J_2}{\mathfrak{I}_3 \omega_3 r^5 \sin \tilde{\Gamma}} \left( -X \cos \tilde{\Gamma} \sin \tilde{\Omega} + Y \cos \tilde{\Gamma} \cos \tilde{\Omega} + Z \sin \tilde{\Gamma} \right) \quad (4.30)$$

$$\left( X \sin \tilde{\Gamma} \sin \tilde{\Omega} - Y \sin \tilde{\Gamma} \cos \tilde{\Omega} + Z \cos \tilde{\Gamma} \right)$$

$$\dot{\tilde{\Gamma}} = \frac{3Gm_T M_N R_N^2 J_2}{\mathfrak{I}_3 \omega_3 r^5} \left( X \cos \tilde{\Omega} + Y \sin \tilde{\Omega} \right) \quad (4.31)$$

$$\left( X \sin \tilde{\Gamma} \sin \tilde{\Omega} - Y \sin \tilde{\Gamma} \cos \tilde{\Omega} + Z \cos \tilde{\Gamma} \right)$$

Considerando que  $\sin \beta = z/r$  e a Equação (4.11) a função perturbadora será:

$$R_{J_2} = \left( \frac{\mu R_N^2 J_2}{r^3} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left( \frac{X \sin \tilde{\Gamma} \sin \tilde{\Omega} + -Y \sin \tilde{\Gamma} \cos \tilde{\Omega} + Z \cos \tilde{\Gamma}}{r} \right)^2 \right) \right)$$

### 4.3 Movimento ao Redor de Netuno

Para as simulações serão considerados os valores mostrados abaixo:

$J_2 = 3410.4735914 \times 10^{-6}$  (coeficiente de achatamento de Netuno).

$R_N = 25225$  km (raio equatorial de Netuno).

Os elementos orbitais de Tritão são:

$a_T = 14.325 R_N$  (semi-eixo maior).

$e_T = 0.001$  (excentricidade).

$I_T = 156.834472^\circ$  (inclinação).

$\Omega_T = -90^\circ$  (longitude do nodo ascendente).

$\omega_T = 0^\circ$  (argumento do pericentro).

Os elementos orbitais iniciais do veículo espacial ou clone são:

$e = 0.07$

$\Omega = 270^\circ$

$\omega = 270^\circ$

Quando o clone orbita Netuno a  $3R_N$ , o efeito do achatamento na inclinação é bastante significativo (Figura 4.3). As linhas descontínuas mostram o efeito de Tritão na dinâmica do clone. No entanto, quando adicionamos o achatamento, observamos que as amplitudes de oscilação são quase desprezíveis para a escala de tempo analisada. Assim, quando juntamos os dois efeitos, o achatamento age como um mecanismo protetor, impedindo grandes variações na inclinação.

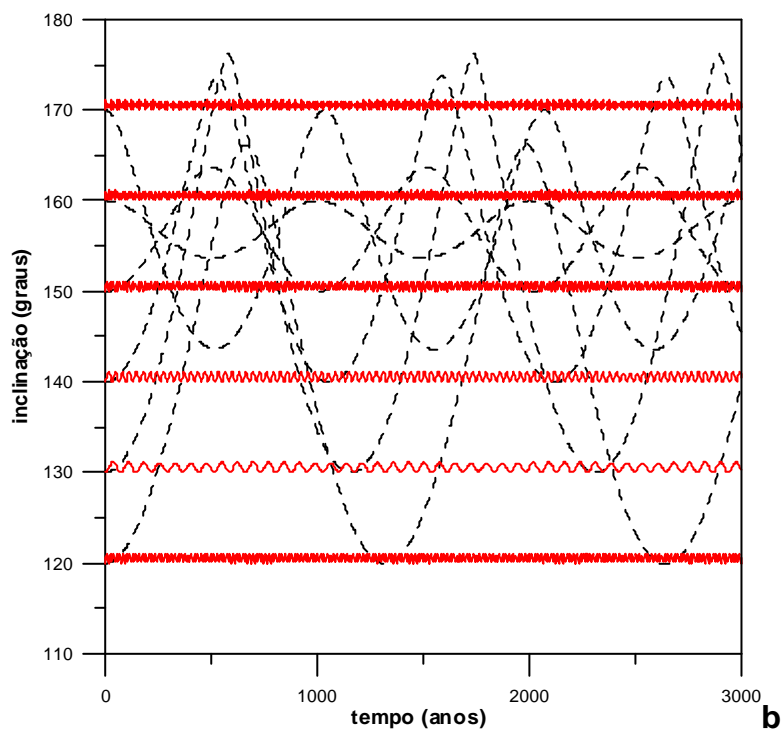
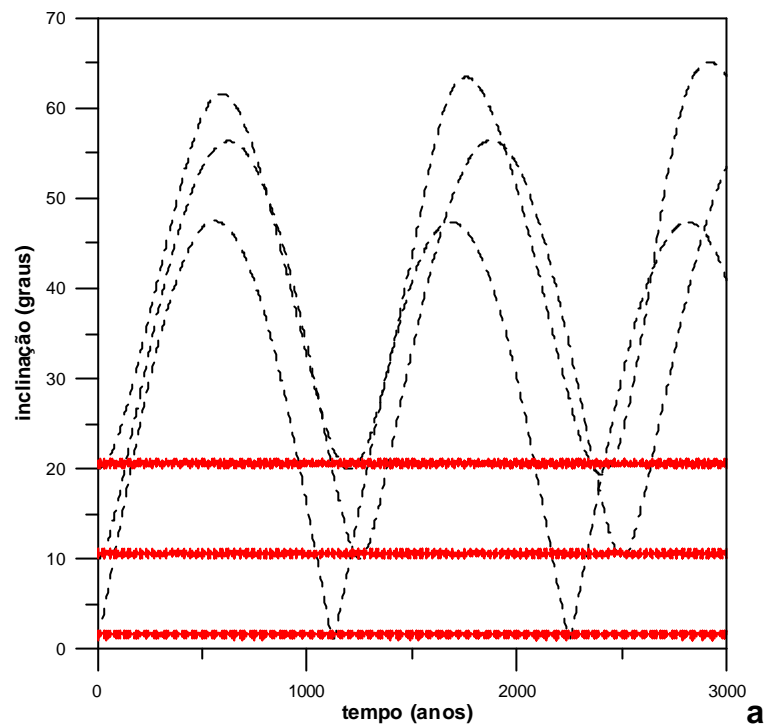
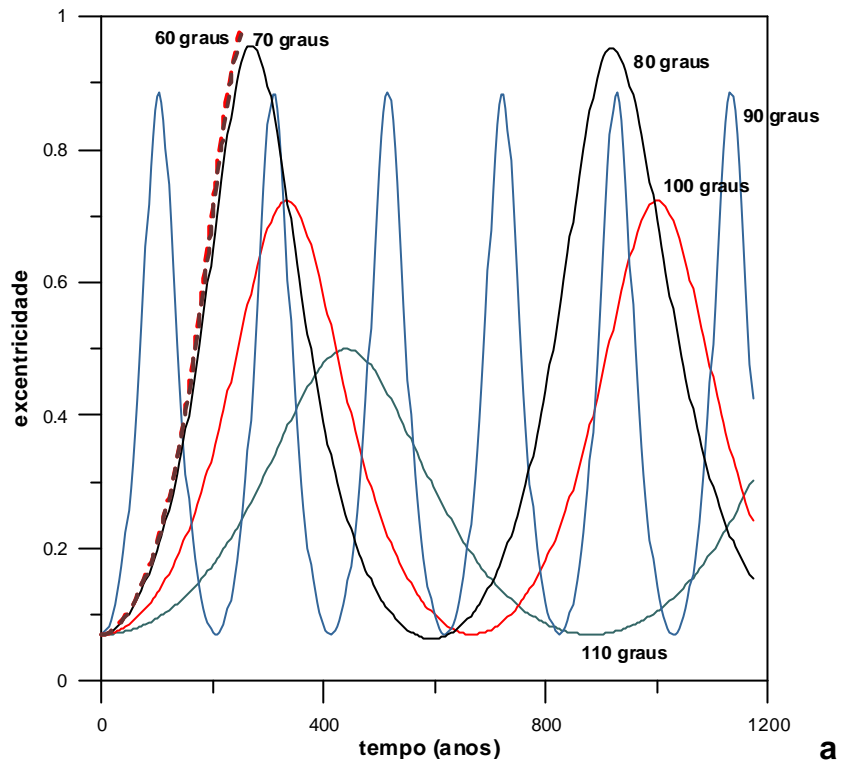
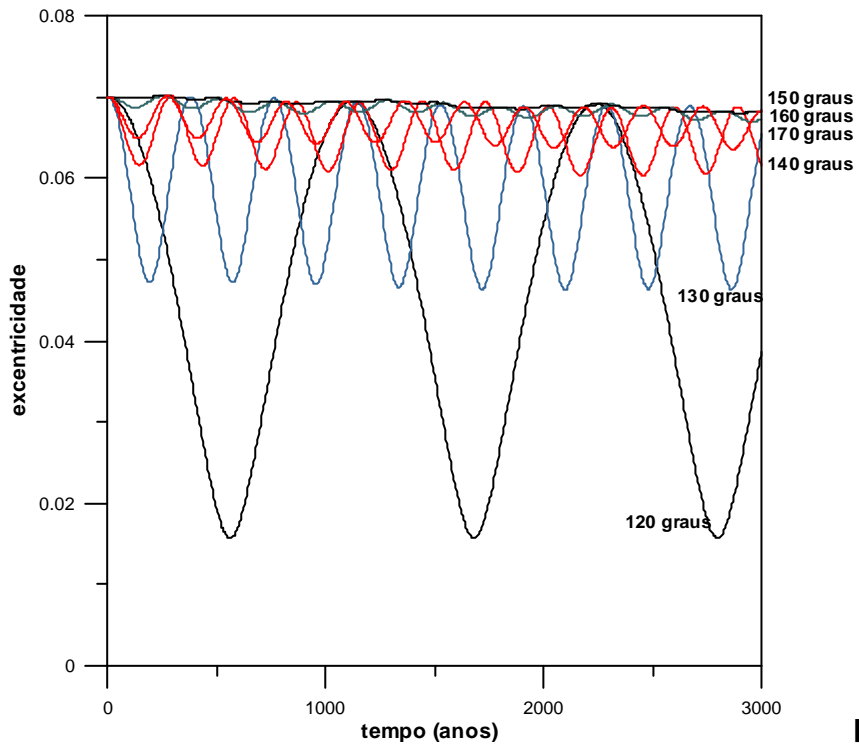


FIGURA 4.3 – Comportamento da inclinação do clone para um semi-eixo maior de  $3R_N$  (linhas descontínuas desprezam o achatamento e as linhas contínuas consideram o achatamento).



**a**



**b**

FIGURA 4.4 – Comportamento da excentricidade (a,b) e do argumento do pericentro (c) para semi-eixo maior de  $3R_N$  desprezando os efeitos do achatamento (continua).

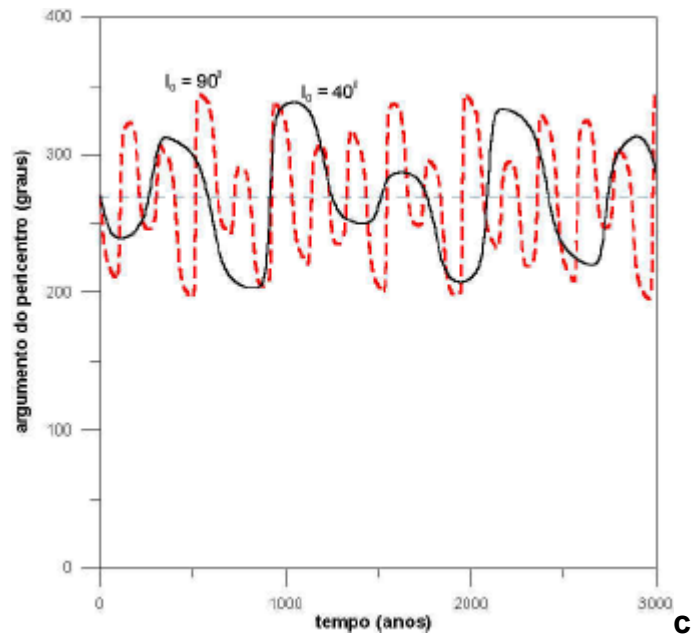


FIGURA 4.4 – (Conclusão).

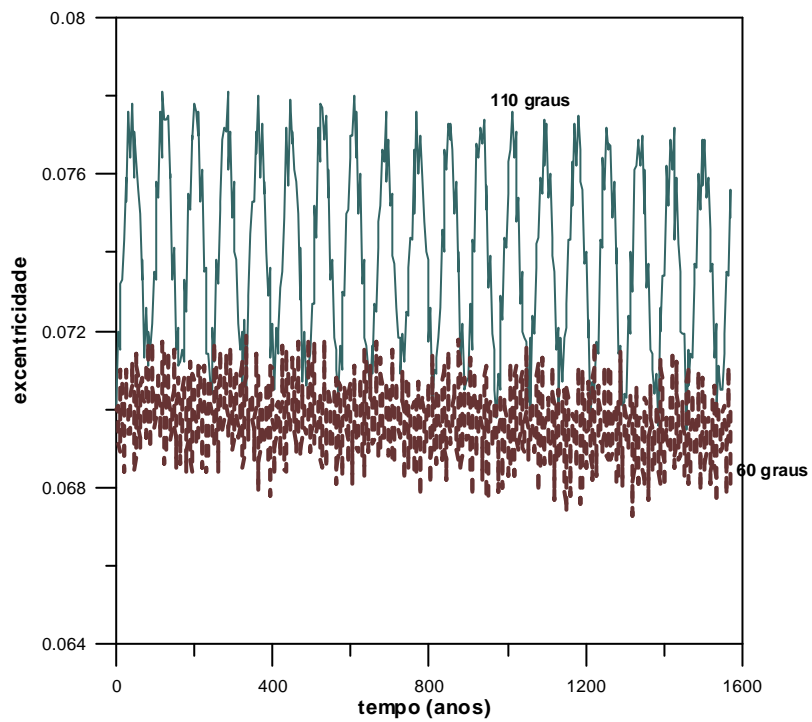


FIGURA 4.5 – Comportamento da excentricidade para semi-eixo maior de  $3R_N$  considerando os efeitos do achatamento.



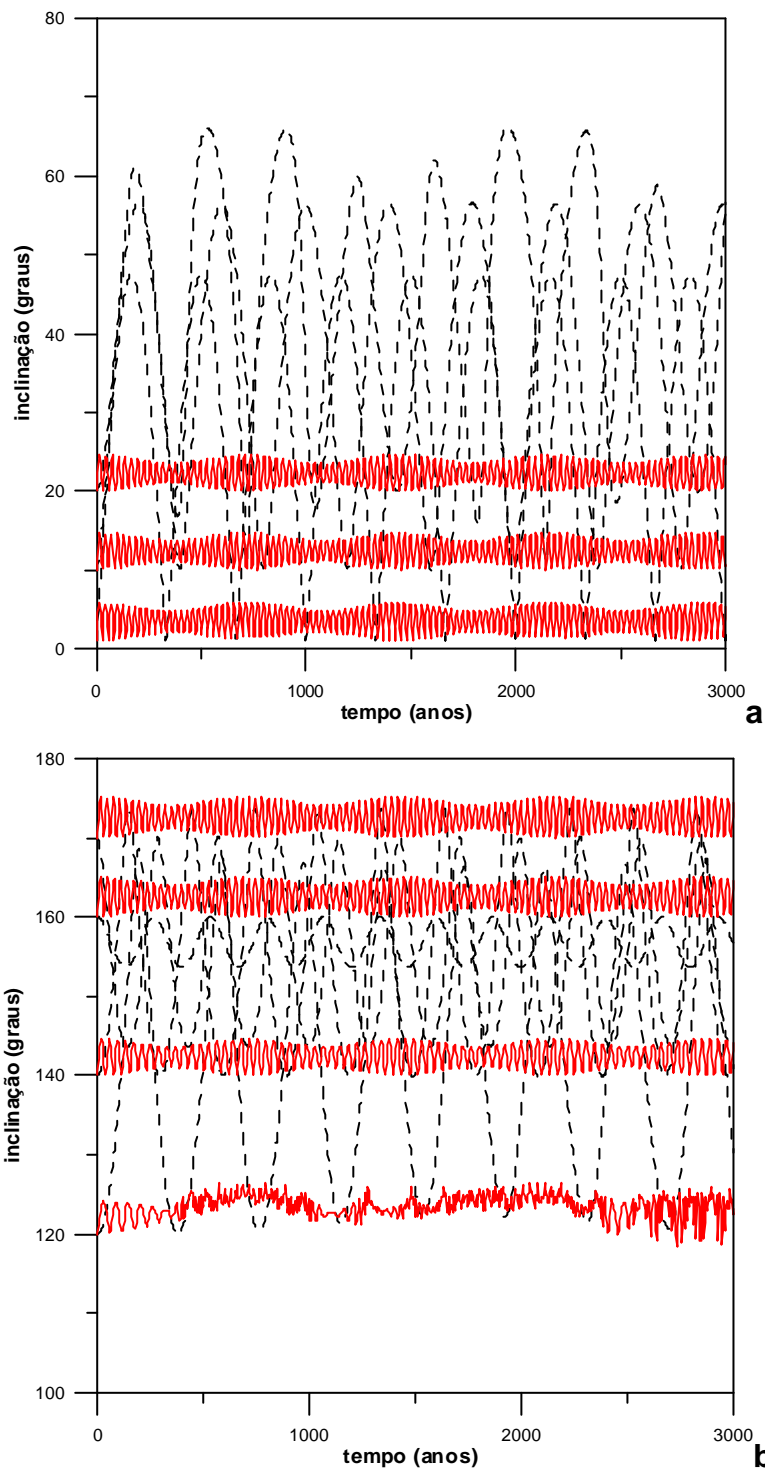
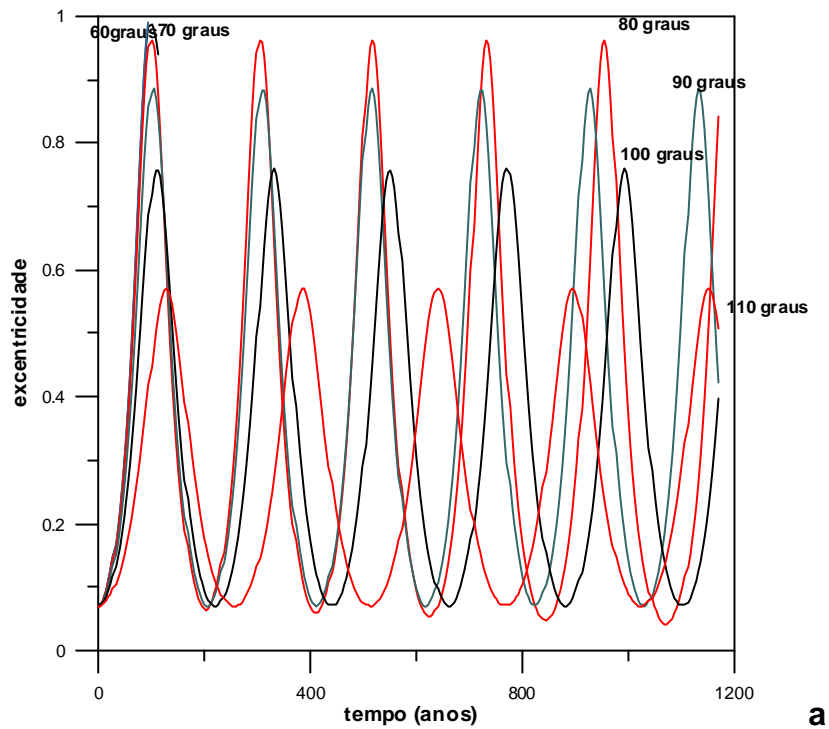


FIGURA 4.6 – Comportamento da inclinação do clone para semi-eixo maior de  $6R_N$  (linhas descontínuas desprezam o achatamento e as linhas contínuas consideram o achatamento).

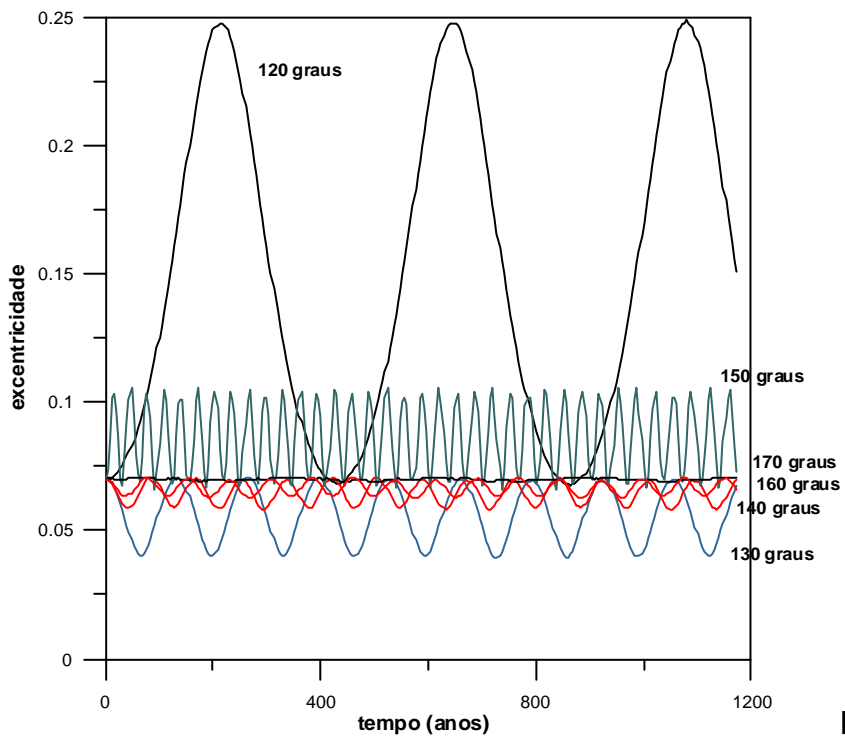
Na análise da excentricidade (para  $3 R_N$ ), quando desprezamos o efeito do achatamento de Netuno, existem órbitas com grandes variações na excentricidade (Figura 4.4a) ao longo do tempo, o qual pode afetar a estabilidade das órbitas inicialmente elípticas. Órbitas retrógradas altamente inclinadas (Figura 4.4b) mostram variações menores com respeito à excentricidade.

Mas, quando consideramos o efeito perturbativo do achatamento de Netuno, as amplitudes de oscilação são muito pequenas quando comparadas ao caso sem achatamento (Figura 4.5). No entanto, essas pequenas variações na excentricidade não alteram a estabilidade das órbitas inicialmente elípticas. A  $6R_N$ , os efeitos da perturbação de Tritão chegam a ser mais significativos (Figura 4.6), pois em uma mesma escala de tempo utilizada anteriormente, a inclinação apresenta um maior número de oscilações.

No entanto, quando acrescentamos a presença do achatamento, estas grandes variações na inclinação do plano orbital do clone desaparecem. Para inclinações iniciais maiores que  $30^\circ$ , observamos grandes amplitudes de oscilações que podem produzir choques ou expulsão dos clones do sistema de Netuno (Figura 4.7a). No entanto, para as órbitas altamente retrógradas a excentricidade experimenta pequenas variações (Figura 4.7b). Quando acrescentamos o achatamento de Netuno (Figura 4.8), as amplitudes de oscilação da excentricidade são menores do que aquelas sem o efeito do achatamento.



**a**



**b**

FIGURA 4.7 – Comportamento da excentricidade (a,b) e do argumento do pericentro (c) para semi-eixo maior de  $6R_N$  desprezando os efeitos do achatamento (continua).

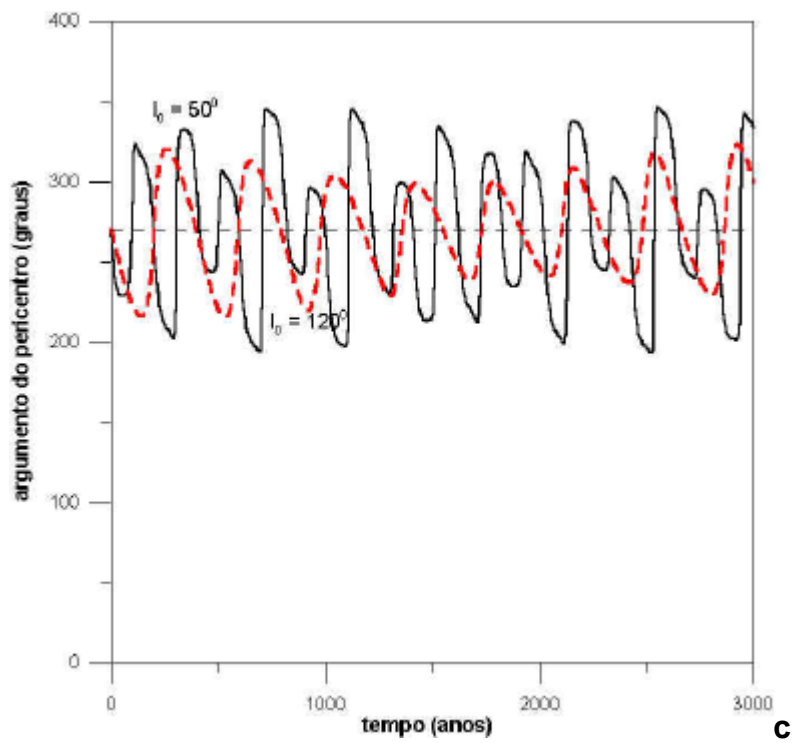


FIGURA 4.7 – (Conclusão).

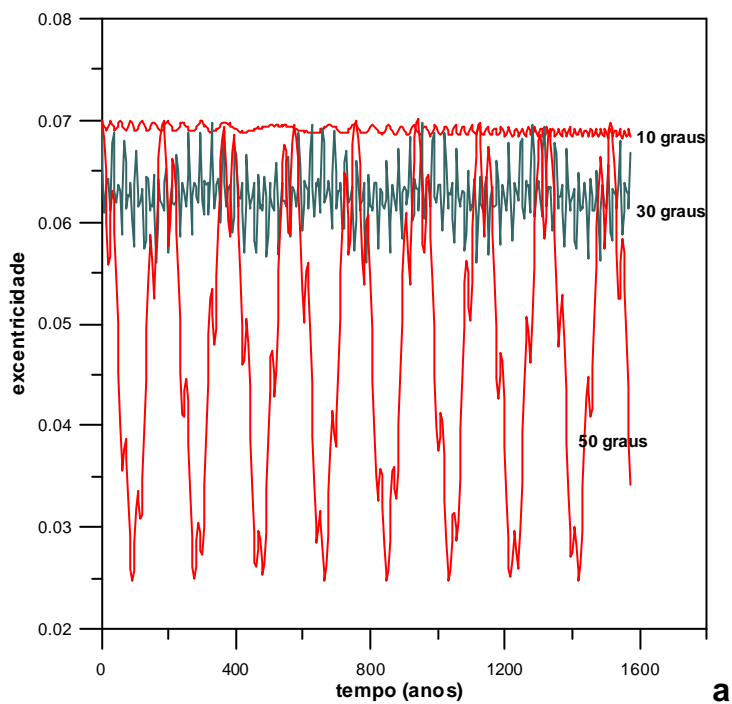


FIGURA 4.8 – Comportamento da excentricidade para semi-eixo maior de  $6R_N$  considerando os efeitos do achatamento (continua).

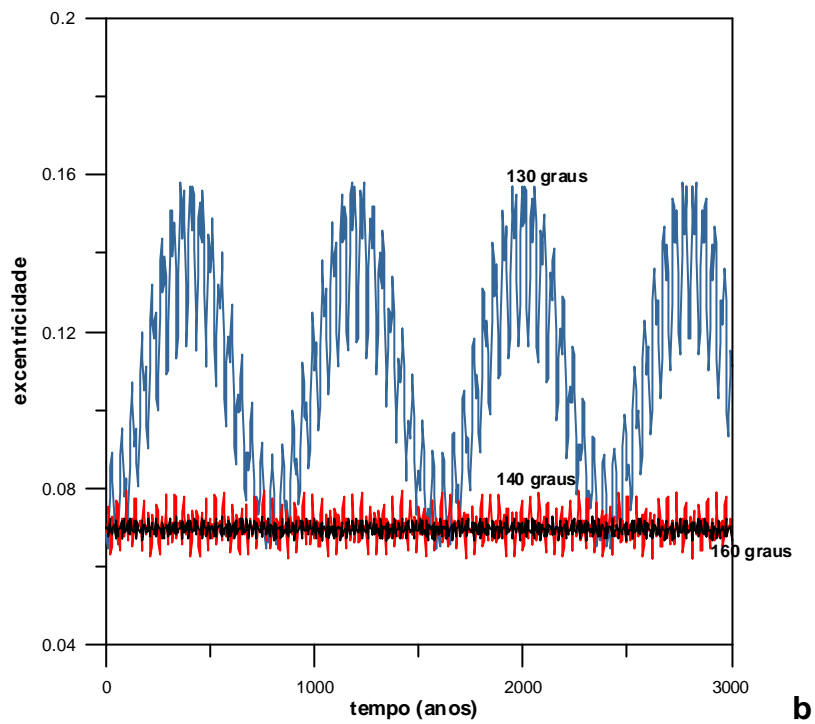


FIGURA 4.8 – (Conclusão).

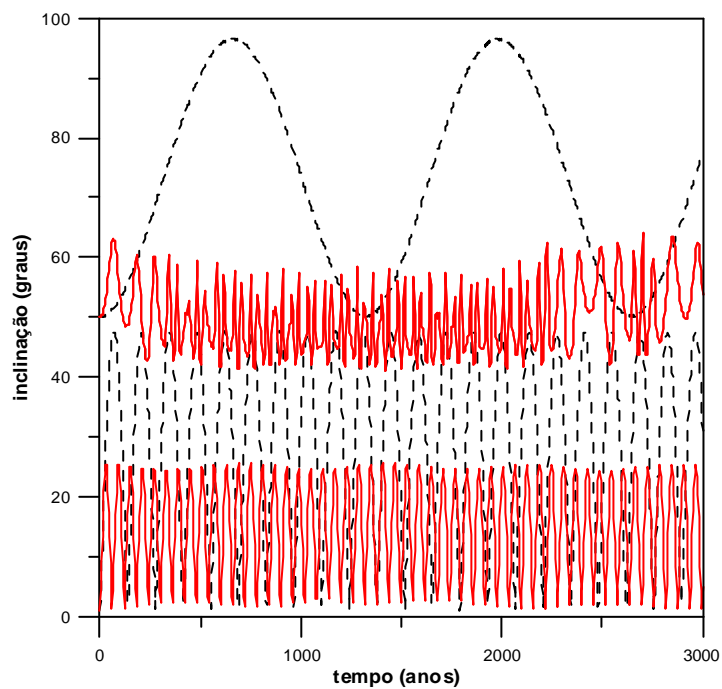


FIGURA 4.9 – Comportamento da inclinação para semi-eixo maior de  $9R_N$  (linhas descontínuas desprezam o achatamento e as linhas contínuas consideram o achatamento).

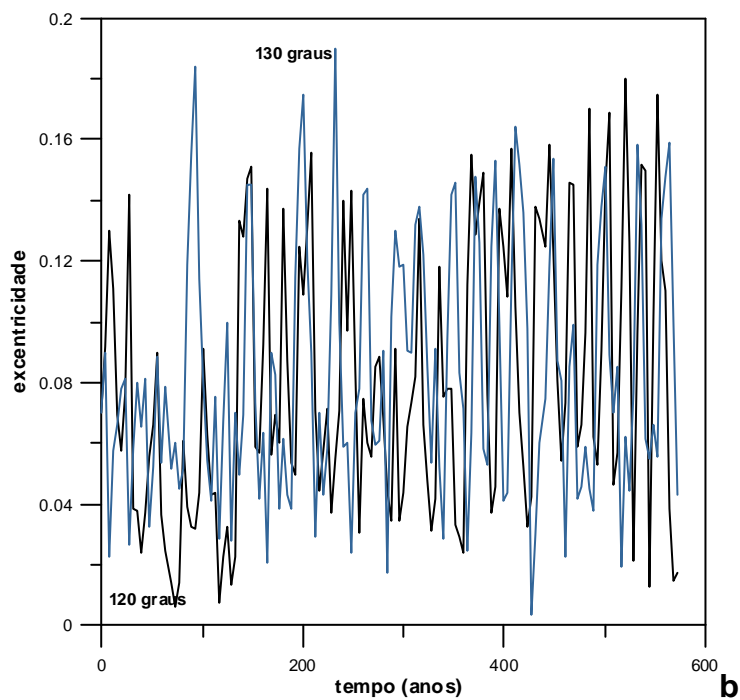
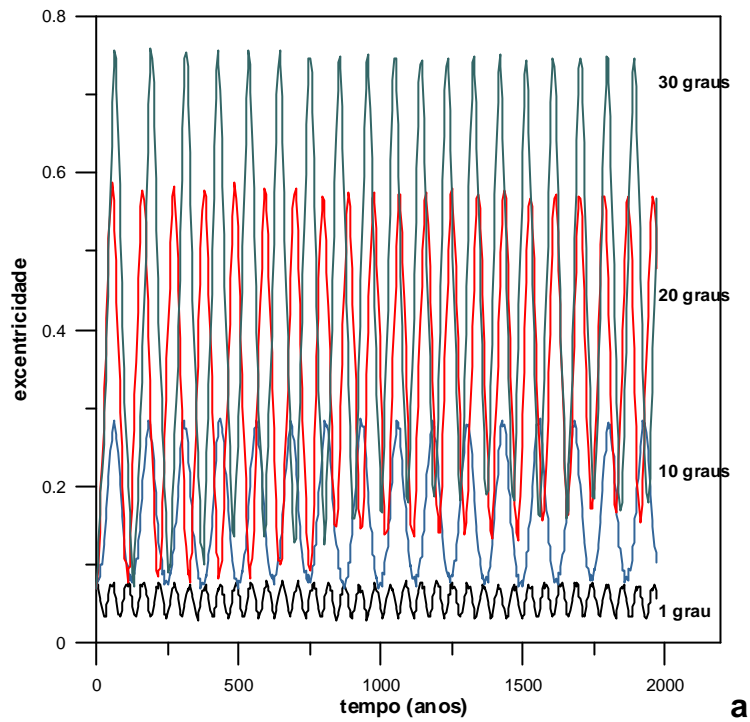


FIGURA 4.10 – Comportamento da excentricidade (a,b) e do argumento do pericentro (c) para semi-eixo maior de  $9R_N$  desprezando os efeitos do achatamento (continua).

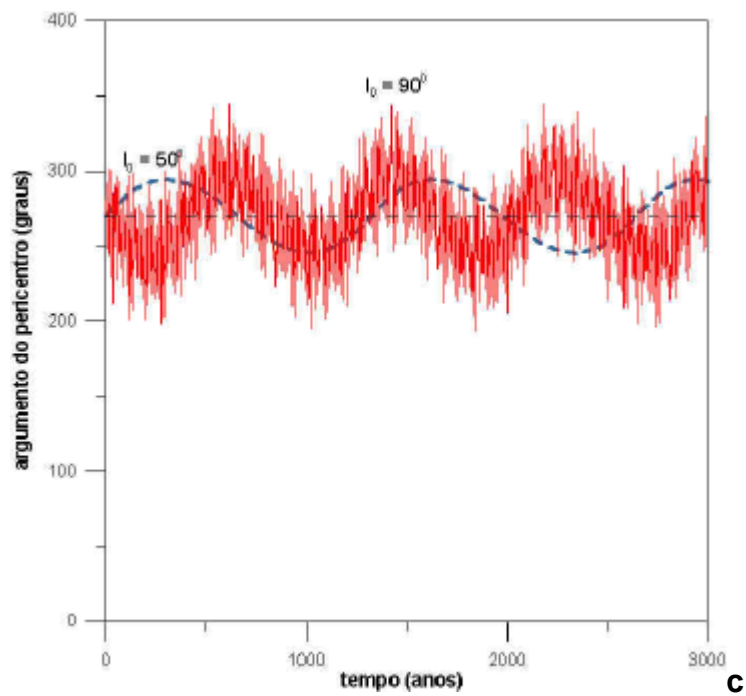


FIGURA 4.10 – (Conclusão).

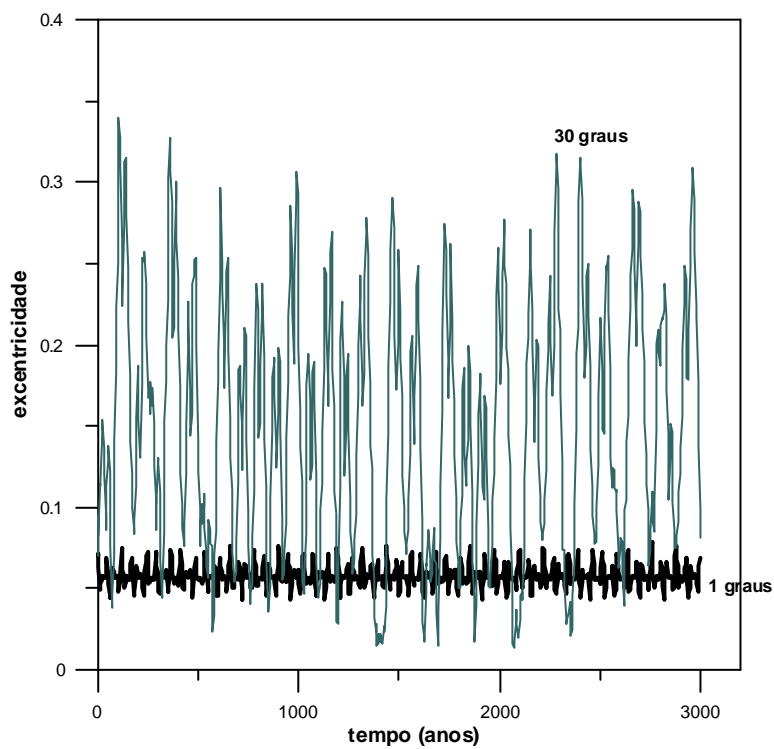


FIGURA 4.11 – Comportamento da excentricidade a  $9R_N$  considerando o efeito do achatamento.

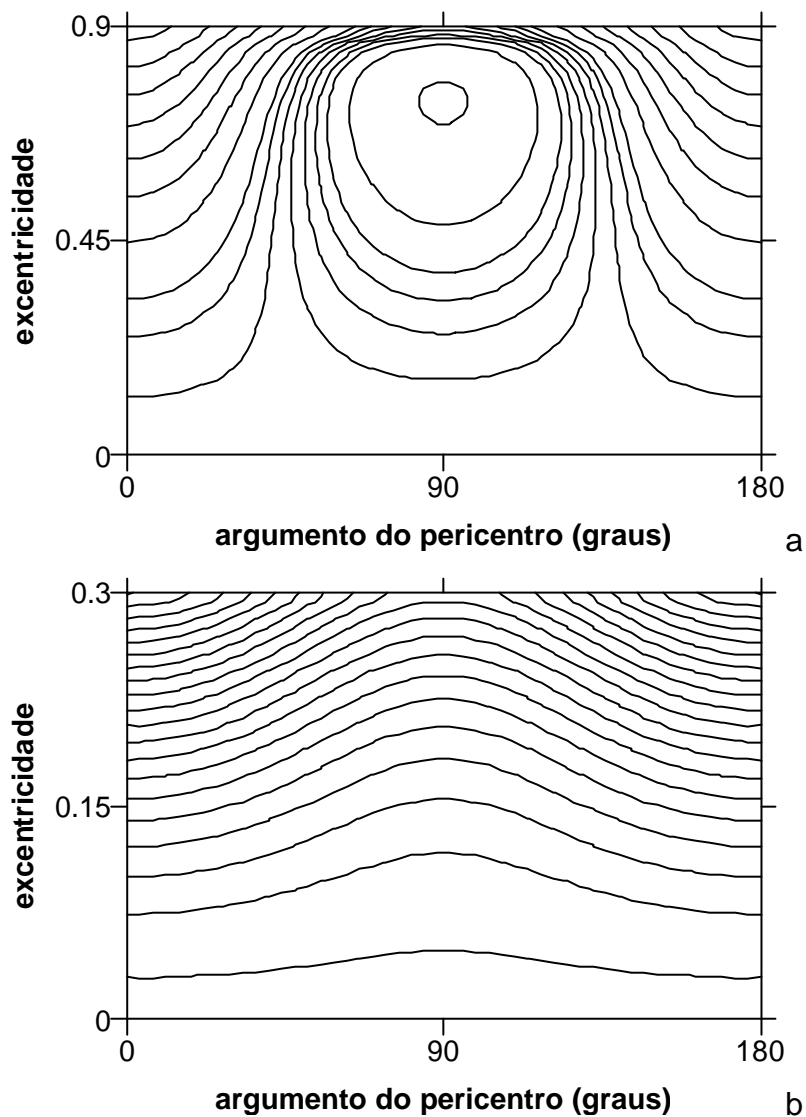


FIGURA 4.12 – Curvas de nível: Excentricidade vs argumento do pericentro quando  $J_2 = 0$ , para: a)  $I = [40^{\circ}-141^{\circ}]$ , b) Inclinação inicial fora do intervalo anterior.

A  $9R_N$ , as variações são ainda mais significativas, de forma que o efeito protetor de achatamento tende a enfraquecer devido à proximidade a Tritão. Os clones experimentam uma maior variação na inclinação ao longo do tempo, mesmo contando com a presença do achatamento do planeta mãe (Figura 4.9). As Figuras 4.10, mostram as variações da excentricidade e do argumento do



pericentro a  $9R_N$ . Nas Figuras 4.9, 4.10, e 4.11 escolhemos satélites posicionados nas proximidades de

$$a \approx a_{\text{crit}} = \left( \frac{2J_2 M_N}{M_T} \right)^{1/5} (1 - e_T^2)^{3/10} (a_T)^{3/5} (R_N)^{2/5} \text{ (ver Kinoshita e Nakai, 1991). Este é}$$

o chamado semi-eixo maior crítico onde a perturbação devida ao achatamento é da mesma ordem de grandeza da perturbação devida a Tritão. Neste caso, observa-se que a excentricidade sofre variações irregulares indicando a possível ocorrência de movimento caótico.

Como foi demonstrado ao longo das simulações, o efeito protetor do achatamento é muito importante. Podemos mostrar um comportamento interessante da excentricidade quando são consideradas diferentes inclinações do clone. No caso do movimento de asteróides é conhecido que, para elevadas inclinações, um asteróide pode sofrer significativas variações na excentricidade devido aos efeitos da ressonância de Kozai-Lidov (Kozai, 1962). Para os satélites planetários exteriores este tipo de ressonância acontece quando a inclinação do satélite esta no intervalo  $40^\circ$ - $141^\circ$  (Yokoyama et al, 2003). No entanto, para um satélite exterior, a perturbação do achatamento é desprezível. As curvas de nível são mostradas na Figura 4.12a. Nessa figura, devido à existência do ponto de equilíbrio, as órbitas inicialmente quase circulares chegam a ficar altamente excêntricas. No segundo caso (Figura 4.12b), as excentricidades não sofrem significativas variações. A situação é muito similar para o nosso problema. Assim, a Figura 4.13a mostra uma significativa variação na excentricidade do clone (linhas contínuas) quando o achatamento do planeta é desprezado. No entanto, quando o achatamento é considerado, desaparecem essas grandes variações (linhas descontínuas). Isto se deve à perturbação causada pelo  $J_2$ , o qual contribui com um termo aditivo na frequência do pericentro. Esse termo aditivo destrói os pontos de equilíbrio prévios, de forma tal que, na ausência deste ponto, as trajetórias correspondentes permanecem quase paralelas ao eixo horizontal (4.12b), já que o pericentro ( $\omega$ ) esta em circulação em vez de libração.

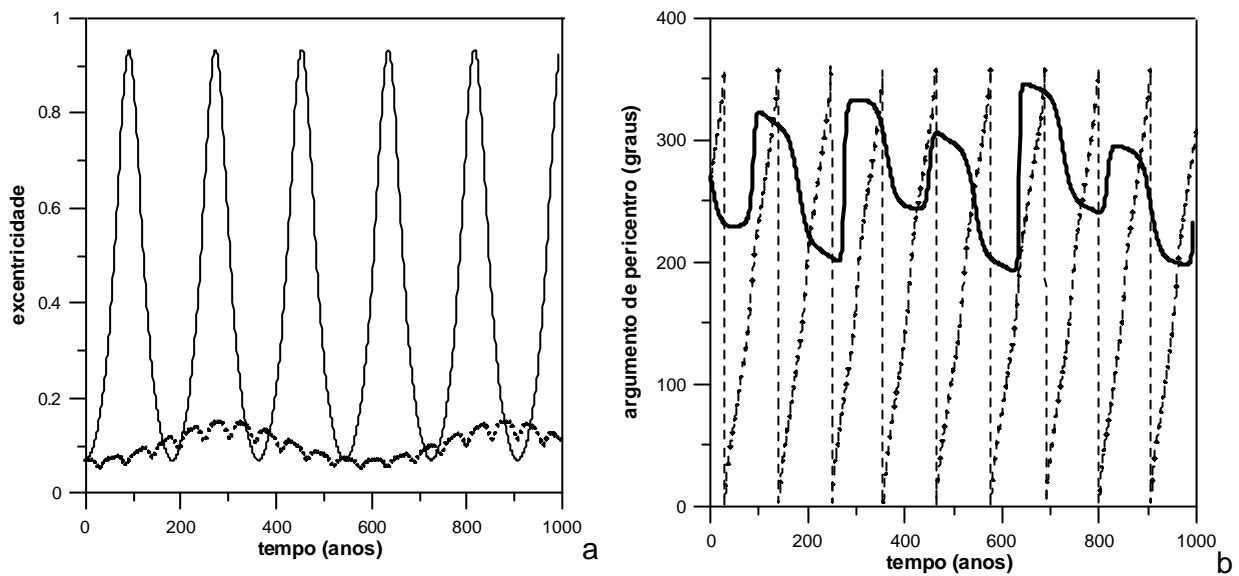


FIGURA 4.13 – Variação da excentricidade e da inclinação. Para o clone:  $e=0.07$ ,  $I=49^\circ$ ,  $\omega = 270^\circ$ ,  $\Omega=270^\circ$ ,  $a = 6.5R_N$  (linhas contínuas) sem  $J_2$  e (linhas descontínuas) com  $J_2$ .

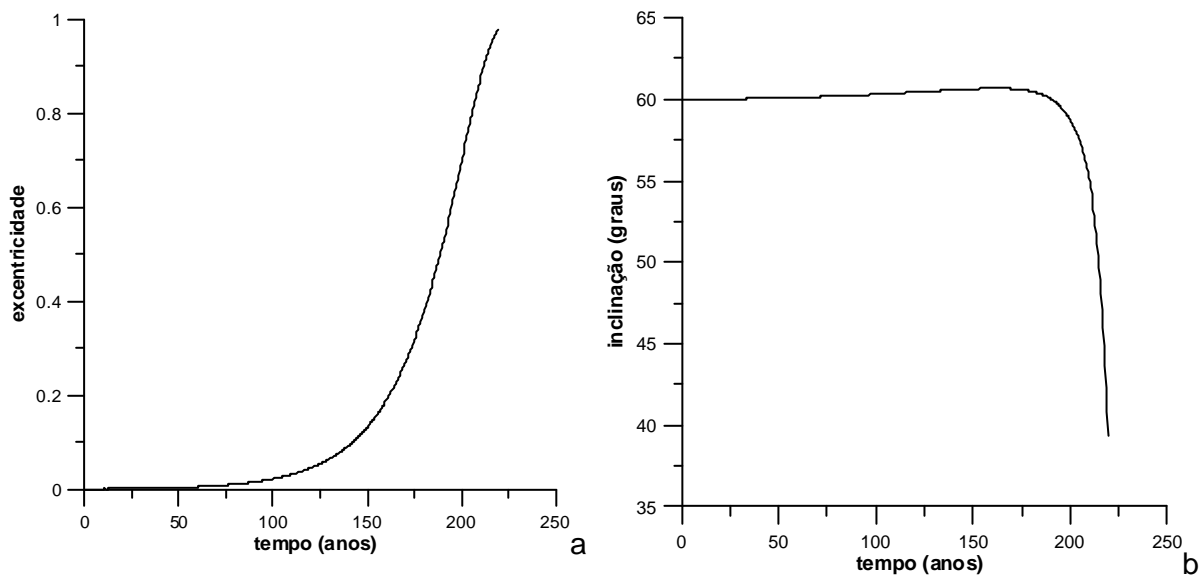


FIGURA 4.14 – Variação da excentricidade e da inclinação. Para o clone:  $e=0.01$ ,  $I=60^\circ$ ,  $\omega = 0^\circ$ ,  $\Omega=270^\circ$ ,  $a = 6R_N$ .

As variações do pericentro estão mostradas nas Figuras 4.4c, 4.7c, 4.10c e 4.13b. Desta forma, devido ao achatamento, as órbitas altamente inclinadas podem permanecer estáveis. Sem esse efeito moderador do achatamento, o clone pode ser ejetado dependendo da inclinação. A Figura 4.14a mostra um exemplo de escape devido à ressonância de Kozai-Lidov quando o achatamento é desprezado. A variação da inclinação está mostrada na Figura 4.14b, onde nota-se que a principal característica deste tipo de ressonância é que quando a inclinação atinge um valor máximo a excentricidade atinge um valor mínimo e vice-versa.

#### 4.4 Mapas

Vamos agora fazer um estudo totalmente numérico da estabilidade temporal de um satélite em torno de Netuno e perturbado por Tritão. Será considerada uma grade de condições iniciais no plano ( $a \times I$ ). Para um tempo de integração de 2000 anos, consideraremos os valores máximos da excentricidade atingidos pelos satélites e a partir daí construiremos a grade no plano ( $a \times I$ ), adotando um código de cores associado ao valor máximo da excentricidade (Vieira Neto e Winter, 2001).

Analisaremos os mapas na faixa de valores da inclinação inicial entre os  $49^\circ$  e  $144^\circ$ . Nas análises feitas anteriormente, observamos os diversos comportamentos da inclinação e da excentricidade, os quais podem produzir órbitas estáveis ao redor de Netuno, órbitas de colisão com o planeta mãe, ou órbitas de escape. Consideramos os clones entre os  $5.5R_N - 7.5R_N$  em grades de  $0.25 R_N$  e  $1^\circ$ . A escolha dessa região provem do fato de que, entre os  $4.67R_N - 14.325R_N$ , não existem luas ou sistemas de anéis (a exceção do Tritão posicionado a  $14.325 R_N$ ). Serão considerados os dados mostrados abaixo:

$J_2 = 3410.4735914 \times 10^{-6}$  (coeficiente de achatamento de Netuno).

$R_N = 25225$  km (raio equatorial de Netuno).

Elementos orbitais de Tritão:

$a_T = 14.325 R_N$  (semi-eixo maior).

$e_T = 0.001$  (excentricidade).

$I_T = 156.834472^0$  (inclinação).

$\Omega_T = -90^0$  (longitude do nodo ascendente).

$\omega_T = 0^0$  (argumento do pericentro).

Elementos orbitais iniciais do clone:

$e = 0.07$

$\Omega = 270^0$

$\omega = 270^0$

#### 4.4.1 Mapa da Perturbação de Tritão

Nesta seção consideraremos um clone orbitando Netuno, onde o corpo perturbador é Tritão. Observamos, na faixa de valores da inclinação entre os  $49^0$  e os  $71^0$ , o forte efeito da perturbação devido a Tritão, o qual se vê refletido no comportamento da excentricidade a qual atinge valores elevados (Fig. 4.15a). Para valores da inclinação inicial entre os  $72^0 - 100^0$  (Fig. 4.15b), as amplitudes atingidas pela excentricidade são menores quando comparadas à Figura 4.15a. No entanto ainda existe a probabilidade de colisões ou escapes.

Para valores da inclinação inicial entre  $[100^0, 122^0]$  os valores da excentricidade diminuem, mas ainda existem órbitas com elevados valores da excentricidade. No intervalo  $[124^0, 145^0]$ , as órbitas permanecem quase-elípticas, com nenhum tipo de risco de colisão ou expulsão (Fig. 4.15c). A Figura 4.16, mostra o comportamento da excentricidade e do argumento do pericentro, na qual a excentricidade pode atingir valores elevados como consequência do clone ficar presa na ressonância de Kozai.

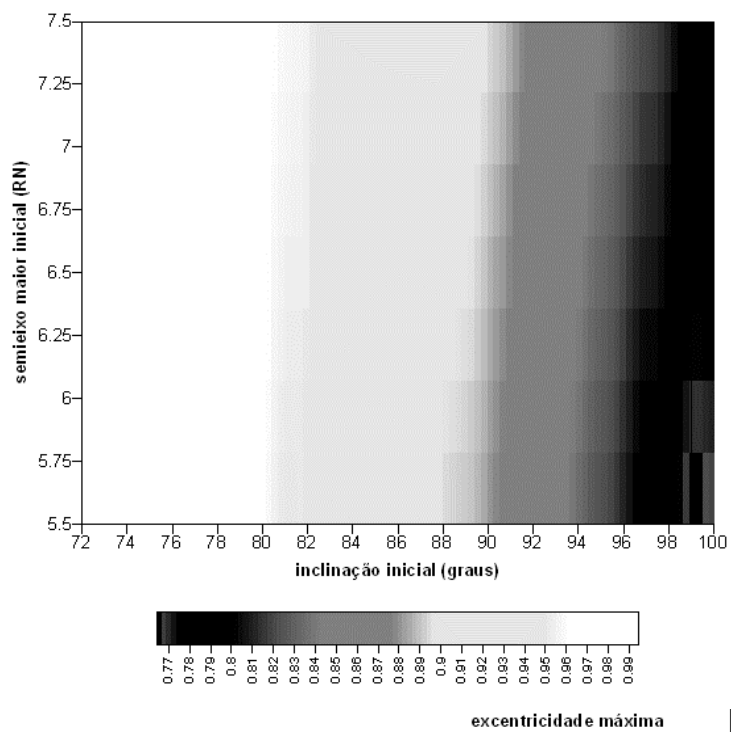
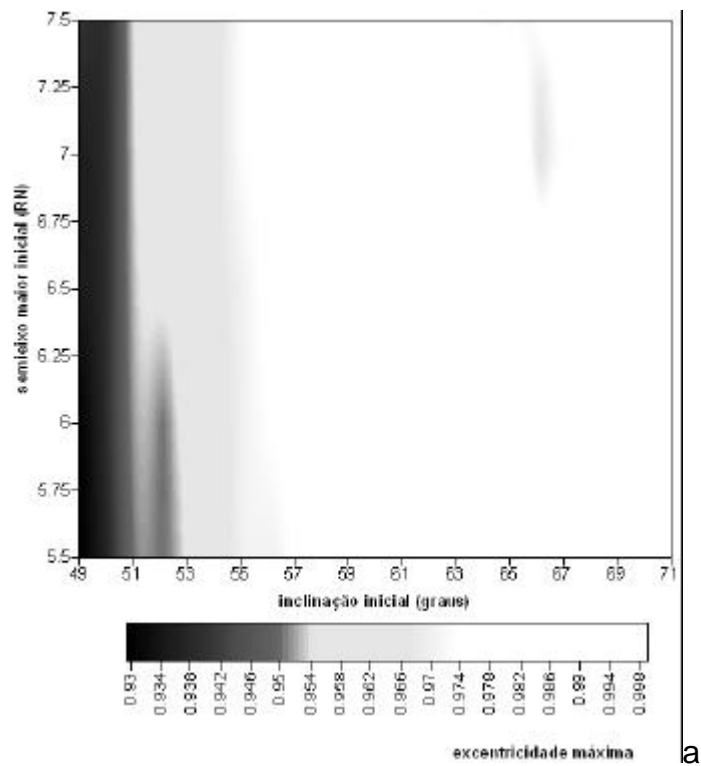


FIGURA 4.15 – Mapas do clone orbitando Netuno e perturbado por Tritão (continua).

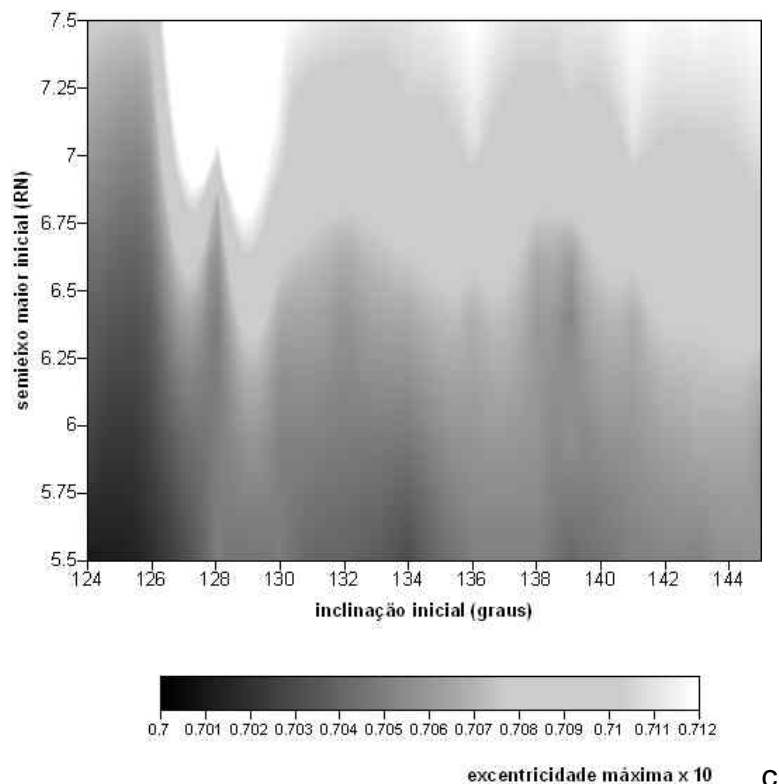


FIGURA 4.15 – (Conclusão).

#### 4.4.2 Mapa da Perturbação de Tritão e do Achatamento.

Nesta seção, incluiremos à perturbação do achatamento, o qual atua em Tritão e no veículo espacial.

Quando consideramos os efeitos adicionais do achatamento de Netuno, observamos mudanças significativas nos mapas, quando comparados ao caso sem achatamento. Desta forma, a região entre  $[49^0, 71^0]$  mostra as regiões onde a excentricidade não sofre mudanças significativas e outras, onde as excentricidades atingem valores elevados. No entanto, a principal característica está em que, conforme aumentamos os valores do semi-eixo maior e, como consequência nos afastamos do planeta mãe, os efeitos do achatamento são imperceptíveis, o que é esperado pois  $R_{J2}$  decai com  $1/a^3$ .

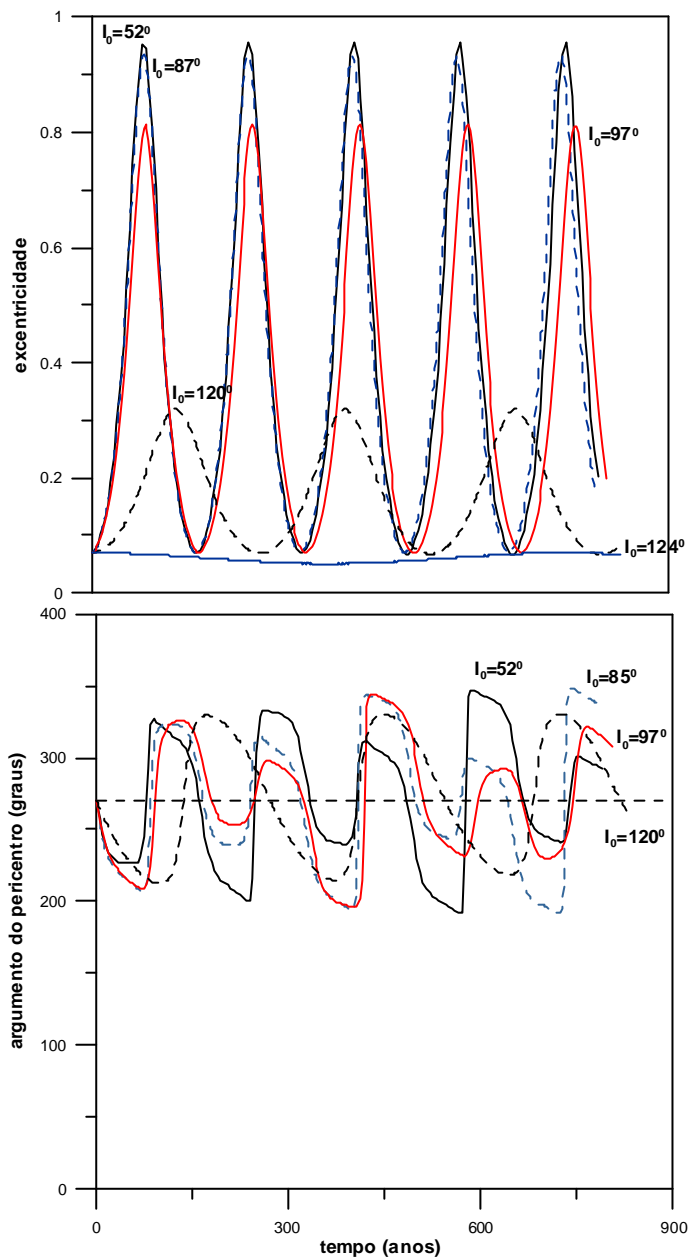
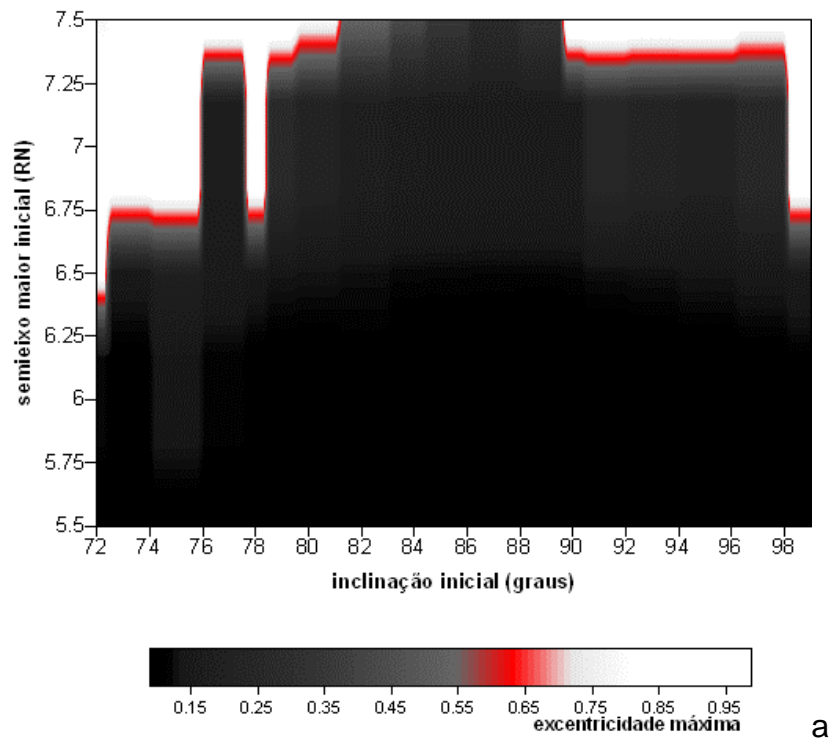
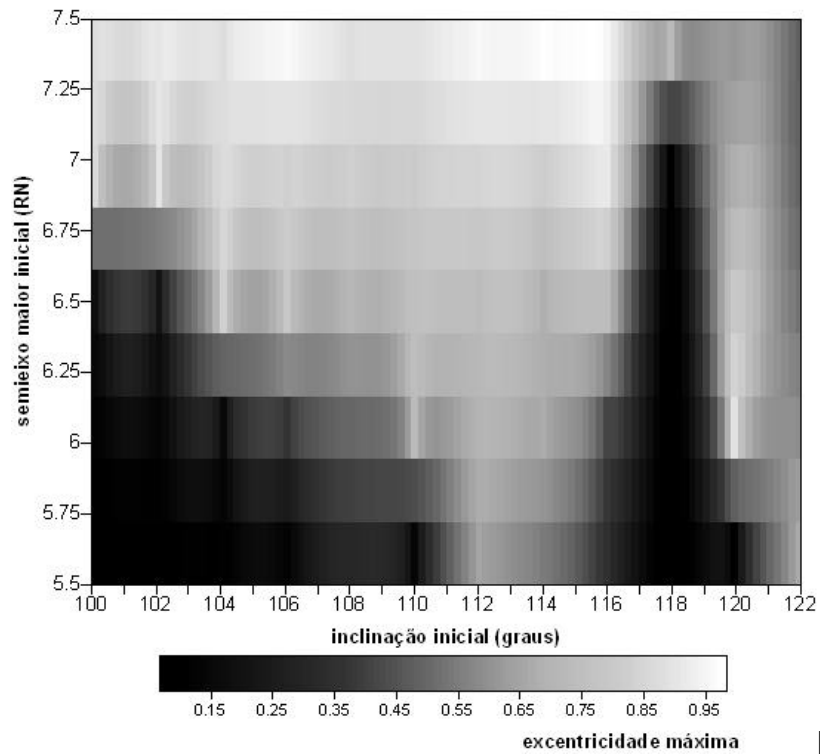


FIGURA 4.16 – Comportamento da excentricidade e do argumento do pericentro para  $7R_N$ .

As Figuras 4.17a e 4.17b, mostram diversas regiões alternadas no comportamento da excentricidade, devido ao efeito de Tritão. As órbitas altamente retrógradas apresentam uma grande diminuição nas amplitudes da excentricidade (Figura 4.17c).



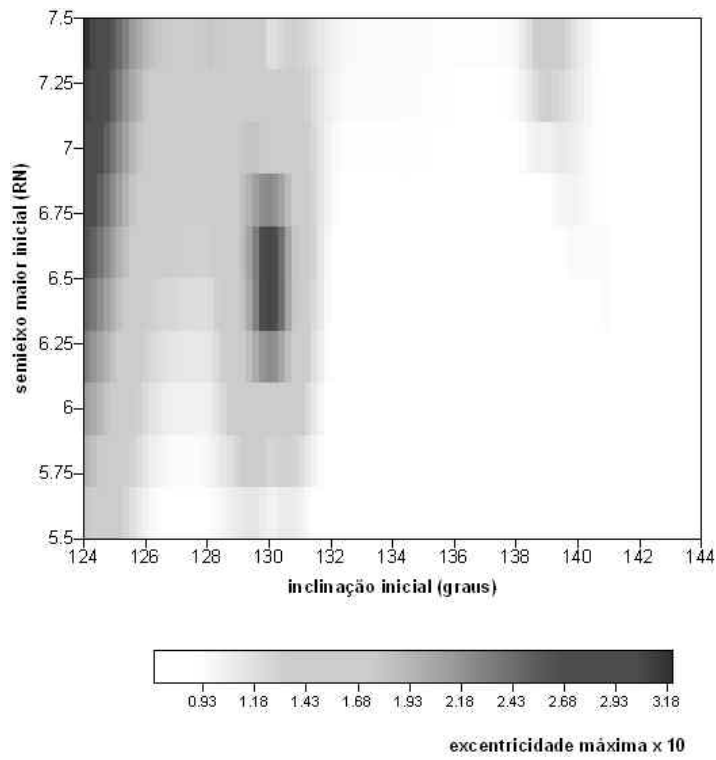
a



b

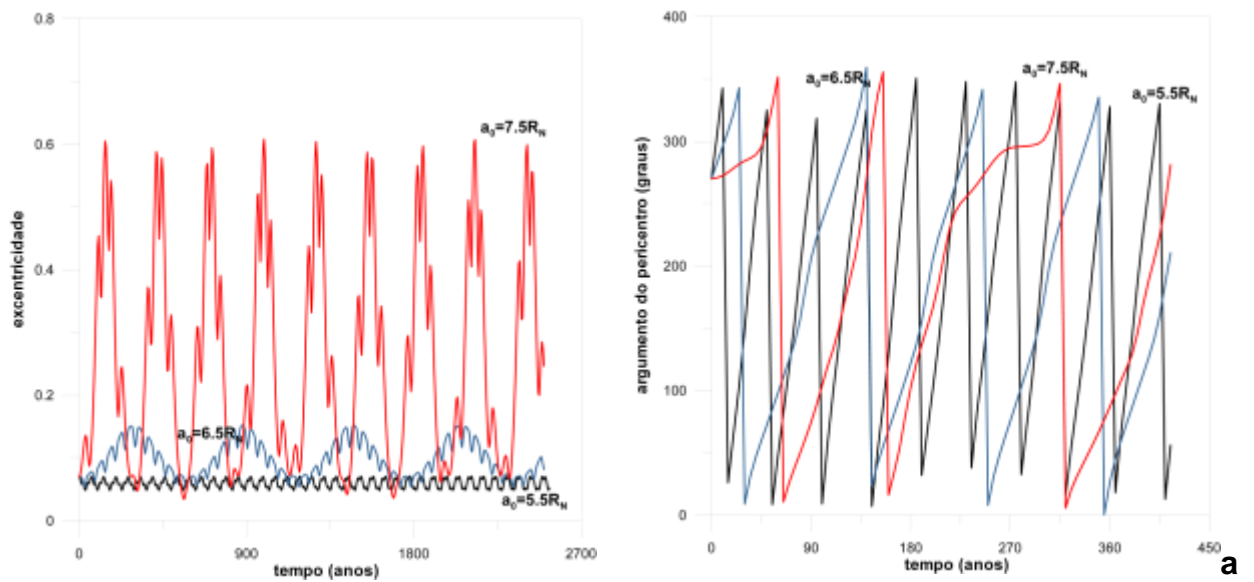
FIGURA 4.17 – Mapas do clone orbitando Netuno e perturbado por Tritão e achatamento (continua).





C

FIGURA 4.17 – (Conclusão).



a

FIGURA 4.18 – Comportamento da excentricidade e do argumento do pericentro para:  
a)  $l_0 = 49^\circ$ , b)  $l_0 = 124^\circ$  (continua).

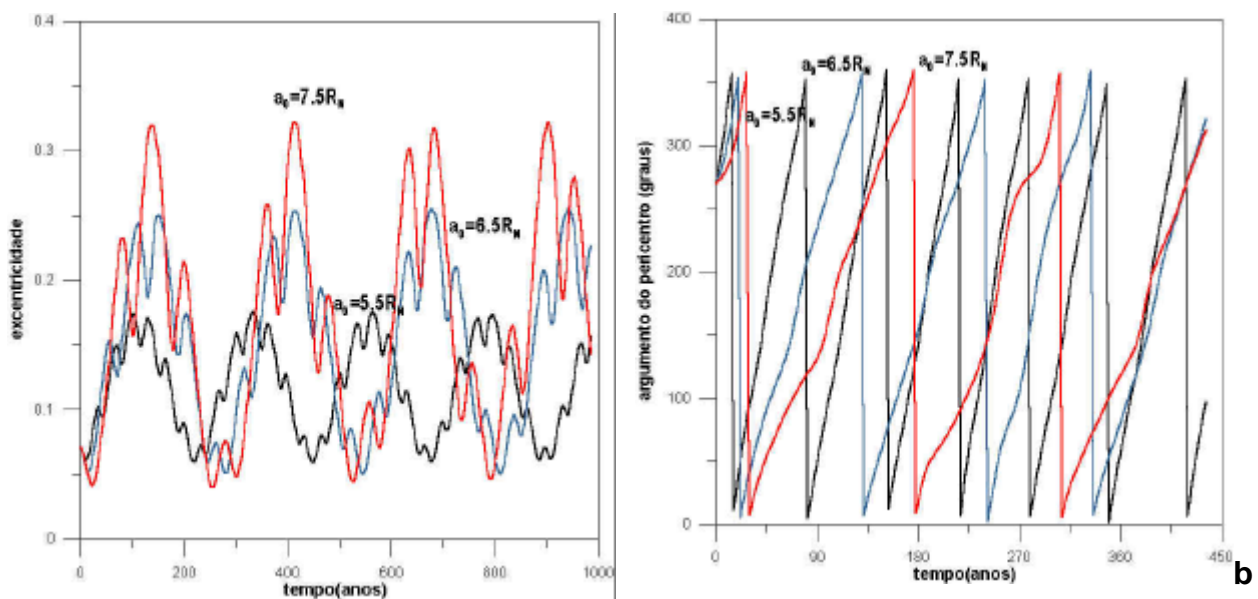


FIGURA 4.18 – (Conclusão).

É interessante mencionar que essas órbitas retrógradas são mais estáveis quando comparadas às órbitas diretas com os mesmos valores do semi-eixo maior. A Figura 4.18 mostra o comportamento da excentricidade e do argumento do pericentro, no qual pelo efeito protetor do achatamento a excentricidade não atinge valores elevados na excentricidade, no entanto, é observada a circulação do argumento do pericentro.

#### 4.5 Comentários

Foi visto que os efeitos de Tritão e do achatamento exercem importantes perturbações na inclinação e excentricidade do satélite. Em alguns casos, o escape ou colisão é claramente mostrado. Conforme mostrado na Figura (4.12) nota-se que, quando  $i_0 \geq 39^\circ$  e  $i_0 \leq 141^\circ$ , existe a possibilidade de acontecer a ressonância de Kozai. Assim, o satélite pode sofrer grandes variações da excentricidade. Porém, no problema aqui estudado, temos o efeito adicional do achatamento. Então, mesmo que o satélite esteja na faixa de  $39^\circ \leq i_0 \leq 141^\circ$ , se o achatamento for incluído, variações significativas da excentricidade podem ser eliminadas conforme mostra a Figura (4.13a). Outro aspecto importante que foi

visto é o de um comportamento bastante irregular, talvez caótico, quando a nave é posicionada na vizinhança de  $a = a_{\text{crit}}$  para determinados valores da inclinação. O semi-eixo maior crítico é aquele para o qual a perturbação do achatamento é da mesma ordem de grandeza da perturbação de Tritão. Então, é esperado que o efeito combinado das duas perturbações resulte diferente do caso em que só uma é a predominante.

As Figuras 4.3, 4.5, 4.6 e 4.8 mostram também os efeitos seculares de Tritão, combinados com os efeitos do achatamento. Mas, como foi explicado por Kinoshita e Nakai (1991), satélites localizados em regiões onde os efeitos do achatamento são predominantes, mantêm suas excentricidades e inclinações originais. Yokoyama et al (2003), Carruba et al (2004) e Solórzano e Prado (2006) também explicaram que quando a inclinação inicial é menor que o ângulo crítico ( $l_{\text{crit}} \approx 39.2^\circ$ ) ou maior que o suplemento do ângulo crítico, o argumento do pericentro circula e, para valores da inclinação inicial em dito intervalo, o argumento do pericentro libra ao redor de  $\pm 90^\circ$ . É uma consequência da denominada ressonância de Kozai-Lidov (Kozai, 1962). Desta forma, para valores da  $l_0 < l_{\text{crit}} = 39.2^\circ$  e para valores  $l_0 > l_{\text{crit}} = 142^\circ$ , o argumento do pericentro circula, sendo as variações temporais na inclinação e na excentricidade pequenas. No entanto, para órbitas altamente inclinadas, o argumento do pericentro pode oscilar entre  $\pm 90^\circ$ , permitindo grandes variações na excentricidade e inclinação.

Também analisamos uma parte da região entre os  $4.67R_N - 14.325R_N$  (Figuras 4.15 - 4.18), onde em principio não é observada a presença de satélites naturais, anéis, arcos ou pequenos corpos orbitando o sistema de Netuno. O sistema de anéis e satélites naturais estendem-se entre os  $1.67R_N$  (anel Galle) até  $4.66R_N$  (satélite Proteus). Analisamos varias grades de condições iniciais ( $a \times i$ ), mostrando a máxima excentricidade dos clones atingida durante a simulação numérica. Este procedimento revela as características básicas da dinâmica do movimento. Assim, mostramos regiões onde a excentricidade

permanece quase constante e outras, onde as excentricidades crescem rapidamente e o clone é ejetado. Neste capítulo não foi o nosso objetivo pesquisar a presença de fenômenos caóticos para os quais existem diversos métodos sofisticados.

## CAPÍTULO 5

### MOVIMENTO AO REDOR DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO LAGRANGIANOS

#### $L_4$ E $L_5$

##### 5.1 Generalidades

Os asteróides troianos se movem quase que na mesma órbita de Júpiter ao redor do Sol, mas em média estão  $60^\circ$  para frente ou para trás de Júpiter na vizinhança dos pontos de equilíbrio lagrangianos  $L_4$  e  $L_5$ . Para órbitas de baixa excentricidade, a órbita dos asteróides em um referencial que gira com Júpiter podem ter a forma “tadpole” e evoluir ao redor de  $L_4$  ou  $L_5$ . Outro tipo de movimento possível é aquele quando os objetos se movem em uma órbita que tem uma forma “horseshoe” em um sistema de referência girante, evoluindo ao redor de  $L_4$  e  $L_5$ . Órbitas do tipo “horseshoe” relativas a Júpiter foram estudadas por Rabe (1961), Taylor (1981), etc. A dinâmica das órbitas “tadpole” e “horseshoe” relativa a satélites (co-orbitais) foram discutidas por Dermott et al (1979), Dermott et al (1980), Dermott e Murray (1981a, 1981b), Yoder et al (1983), etc. No caso do trabalho de Sinclair (1984), ele estuda os efeitos das ressonâncias orbitais sobre satélites em órbitas “tadpole” e “horseshoe” relativas a Mimas, Enceladus, Tethys e Dione (satélites de Saturno).

##### 5.2 Modelo Matemático

O problema restrito circular dos três corpos descreve a dinâmica de uma partícula que se move no campo gravitacional de dois corpos massivos que se movem ao redor do seu centro comum de massa. Desta forma, as equações de movimento são apresentadas em um sistema de referência não-inercial que gira com o movimento médio dos primários. O sistema apresenta duas soluções de equilíbrio estável em  $L_4$  e  $L_5$ , as quais são denominados pontos de

equilíbrio lagrangiano. O problema que estudaremos aqui não é exatamente igual ao problema restrito circular dos três corpos, porque nós consideraremos o achatamento do planeta mãe, o qual afeta o veículo espacial assim como também Tritão. No entanto, os pontos de equilíbrio lagrangianos ainda estão presentes.



FIGURA 5.1 – Órbitas “tadpole” para  $\mu_2 = 2.09 \times 10^{-3}$  com condições iniciais  $x(0) = 0.0065 + 0.5 - \mu_2, y(0) = 0.0065 + \sqrt{3}/2, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$ .

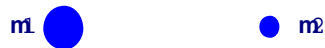
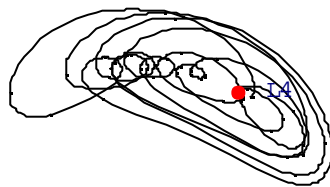


FIGURA 5.2 – Órbitas “tadpole” para  $\mu_2 = 0.020558$  com condições iniciais  $x(0) = 0.0065 + 0.5 - \mu_2, y(0) = 0.0065 + \sqrt{3}/2, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$ .

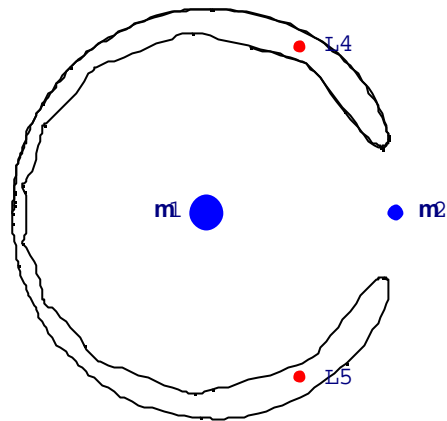


FIGURA 5.3 – Órbitas “horseshoe” para  $\mu_2 = 0.020558$  com condições iniciais  $x(0) = -1.02745, y(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.04032$ .

O nosso objetivo é explorar o movimento de um satélite, ou de algum clone na vizinhança dos pontos  $L_4$  e  $L_5$ . Nós procederemos da forma descrita no capítulo 4, integrando as equações completas de movimento para “n” corpos, usando como plano de referência o denominado plano invariante e usando a origem do sistema de coordenadas no centro de massa de Netuno. Nosso objetivo principal é analisar a influência na posição de equilíbrio, devido as mudança na excentricidade, inclinação e semi-eixo maior.

As Figuras 5.1 – 5.3 mostram alguns exemplos de órbitas “tadpole” (girino) e “horseshoe” (ferradura) para diversos valores de  $\mu_2$ . A unidade de massa é escolhida de forma tal que  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ , onde  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são as massas reduzidas definidas por  $\mu_1 = m_1 / (m_1 + m_2)$  e  $\mu_2 = m_2 / (m_1 + m_2)$ . Assim, para obter essas figuras foram usadas as equações de movimento fornecidas pelo problema restrito circular dos três corpos (resumido no capítulo 6).

### 5.3 Deslocamentos Angulares

Os seguintes valores são considerados.

$R_N = 25225$  km (raio equatorial de Netuno)

$J_2 = 3410.473591490 \times 10^{-6}$  (coeficiente de achatamento de Netuno)

As seguintes condições são consideradas para Tritão:

$a_T = 14.325R_N$  (semi-eixo maior)

$e_T = 0.000016$  (excentricidade)

$I_T = 156.834472^\circ$  (inclinação)

$M_T = 0^\circ$  (anomalia média)

$\omega_T = 0^\circ$  (argumento do pericentro)

$\Omega_T = 0^\circ$  (longitude do nodo)

Vamos definir o deslocamento angular inicial  $\Delta\lambda_0$  como sendo  $\lambda - \lambda_T = 60 + \Delta\lambda_0$ . Nesta parte das simulações consideramos que Tritão e o veículo espacial estão em um mesmo plano de órbita, sendo os elementos orbitais do clone:  $a = 14.325R_N$ ,  $e = 10^{-4}$ ,  $I_T = I = 156.834472^\circ$ ,  $\omega = M = 0^\circ$ ,  $\Omega = 60^\circ$ .

Desprezando o achatamento, quando  $\Delta\lambda_0 < 67^\circ$  (Figura 5.4), a excentricidade quase não sofre mudanças. No entanto, as amplitudes do deslocamento angular com respeito ao ponto lagrangiano oscilam ao redor do ponto de equilíbrio. Para  $\Delta\lambda_0 \geq 67^\circ$  o ângulo ressonante começa a circular. O semi-eixo maior tem um comportamento quase constante ao longo do tempo. Para  $\Delta\lambda_0 \approx 94^\circ$  notamos uma variação forte no semi-eixo maior que pode levar a escape.

Quando consideramos o achatamento, a análise mostra que quando  $\Delta\lambda_0 < 85^\circ$  (Figura 5.5) o semi-eixo maior tem comportamento quase-constante. No entanto para  $\Delta\lambda_0 \geq 85^\circ$  observamos que o semi-eixo maior toma valores elevados os quais podem desestabilizar a órbita inicial com risco de colisões ou ejeções da órbita inicial. Produzindo-se a circulação do ângulo ressonante para  $\Delta\lambda_0 \approx 50^\circ$ .



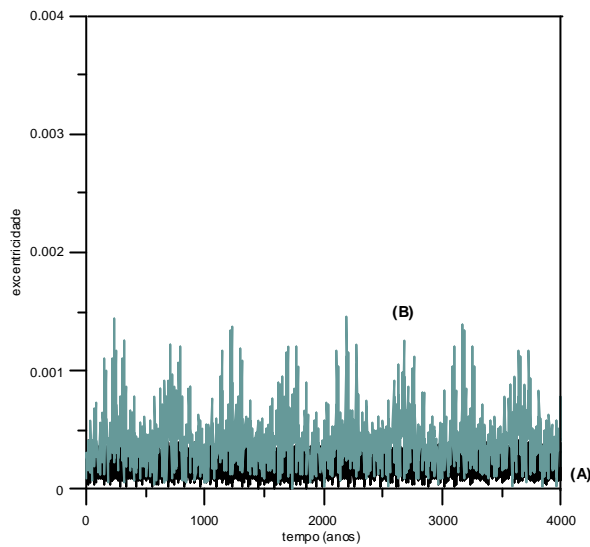


FIGURA 5.4 – Comportamento da excentricidade para: (A)  $\Delta\lambda_0 = 1^\circ$ , (B)  $\Delta\lambda_0 = 50^\circ$  (sem  $J_2$ ).

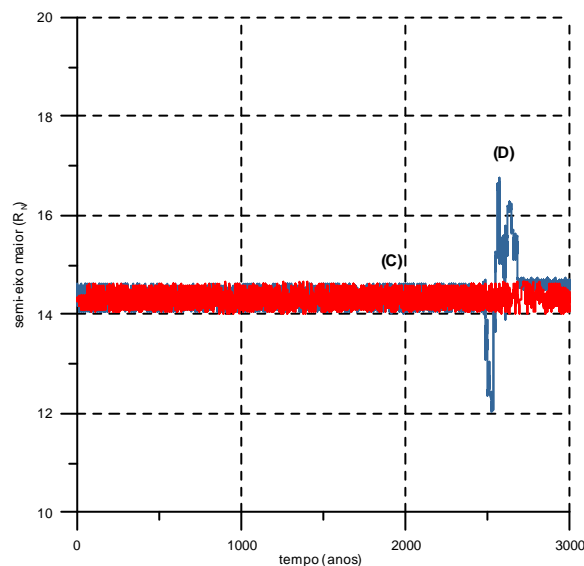


FIGURA 5.5 – Comportamento do semi-eixo maior para: (C)  $\Delta\lambda_0 = 80^\circ$ , (D)  $\Delta\lambda_0 = 85^\circ$  (com  $J_2$ ).

#### 5.4 Variando as Excentricidades

Consideramos que Tritão e o veículo espacial estão em um mesmo plano de órbita. Os elementos orbitais do clone são:  $a = 14.325R_N$ ,  $i_T = i = 156.834472^\circ$ ,

$\omega = M = 0^0$ ,  $\Omega = 60^0$ . Definiremos o deslocamento angular inicial como  $\Delta\lambda_0 = 0$  (lembrar que  $\lambda - \lambda_T = 60 + \Delta\lambda_0$ ).

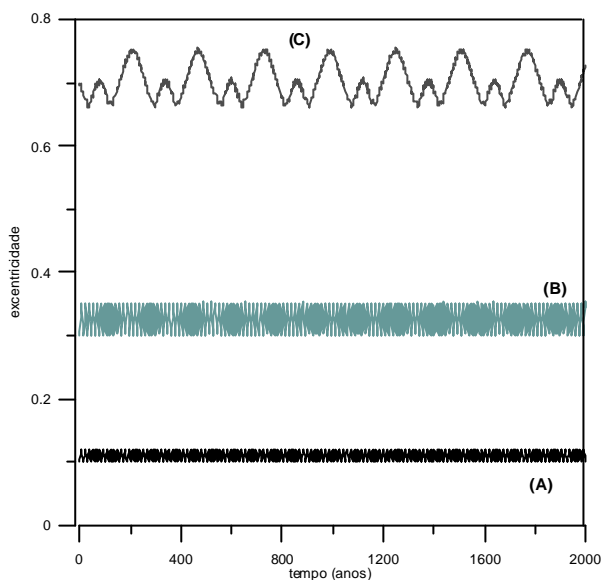


FIGURA 5.6 – Comportamento da excentricidade para valores iniciais: (A) 0.1, (B) 0.3, (C) 0.7 (sem  $J_2$ ).

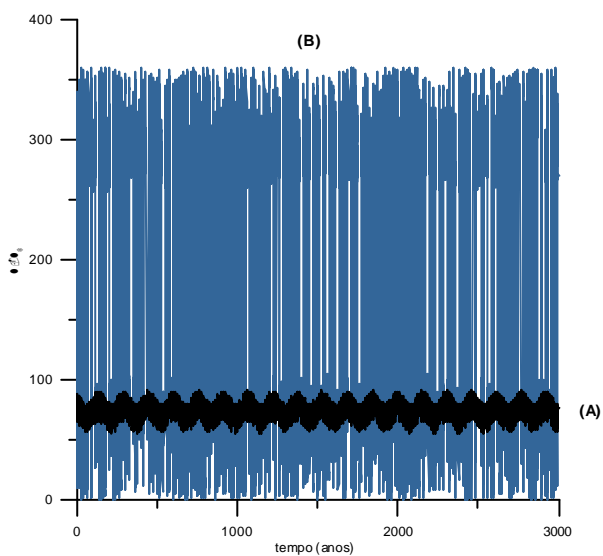


FIGURA 5.7 – Comportamento do ângulo ressonante para valores da excentricidade: (A) 0.37, (B) 0.4 (com  $J_2$ ).

Vimos que nas simulações anteriores, os baixos valores de  $\Delta\lambda_0$  permitem a estabilidade da órbita. Desta forma, isto justifica a escolha de  $\Delta\lambda_0 = 0$ . Para valores iniciais da excentricidade do veículo espacial entre  $0 \leq e < 0.4$ ,  $\Delta\lambda$  libra ao longo do tempo. No entanto, para valores próximos a 0.4, o  $\Delta\lambda$  começa a circular (sem considerar os efeitos do achatamento). O comportamento temporal da excentricidade está mostrado na Figura 5.6. O comportamento é semelhante ao caso no qual consideramos o achatamento do planeta (Figura 5.7).

### 5.5 Variando os Semi-Eixos Maiores

Consideramos que Tritão e o clone estão em um mesmo plano orbital. Os elementos do clone são:  $a = 14.325R_N$ ,  $t_f = l = 156.834472^0$ ,  $\omega = M = 0^0$ ,  $\Omega = 60^0$ ,  $e = 10^{-4}$ .

A seguir, posicionamos o clone em uma órbita deslocada da posição do ponto lagrangiano com respeito ao semi-eixo maior. Considerando o achatamento do planeta para valores do semi-eixo próximos e maiores a  $14.815 R_N$  e iguais e menores a  $13.820R_N$  o semi-eixo maior varia muito. Assim, para valores do semi-eixo maior de  $13.820R_N$ , e desprezando os efeitos do achatamento, encontramos que, em menos de 1000 anos o clone escapa do sistema (Figura 5.8).

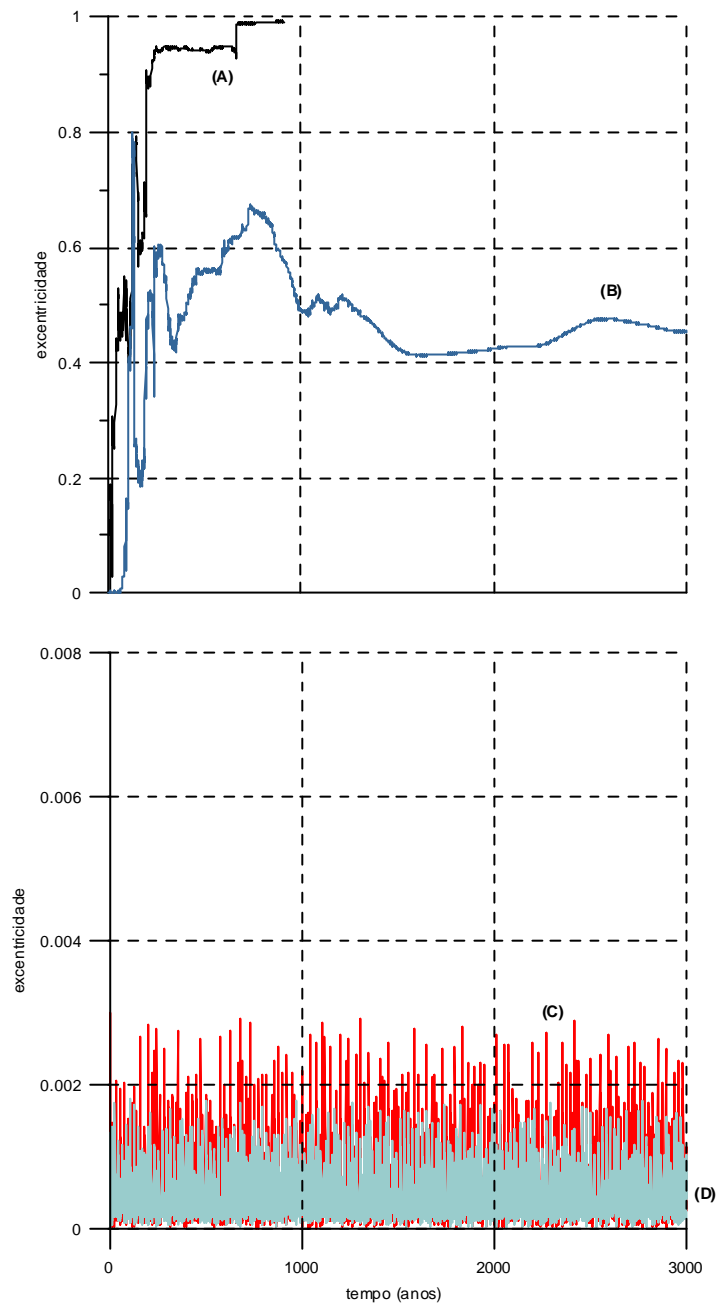


FIGURA 5.8 – Comportamento da excentricidade para semi-eixo maior de: (A)  $13.820R_N$ , (B)  $13.900R_N$ , (C)  $13.980R_N$ , (D)  $14.060R_N$  (sem J2).

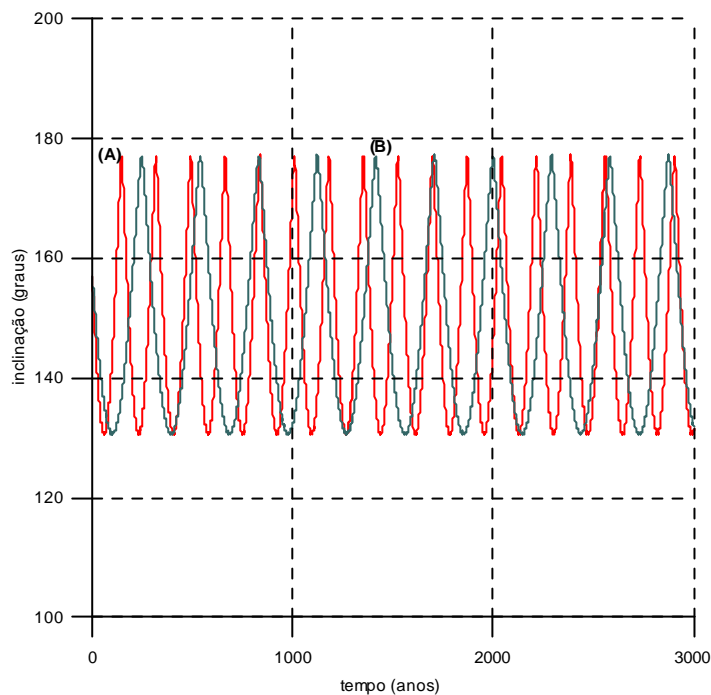


FIGURA 5.9 – Comportamento da inclinação para: (A)  $a = 14.65R_N$ , (B)  $a = 14.570R_N$  (sem  $J_2$ ).

No entanto, considerando a presença do achatamento, vemos que para valores do semi-eixo maior entre  $13.820R_N < a < 14.060R_N$  produz-se circulação em  $\Delta\lambda$ . Para valores do semi-eixo maior próximos e maiores que  $14.060R_N$ , o  $\Delta\lambda$  libra, e o semi-eixo maior mantém um comportamento quase constante, isto cumpre-se ao longo do intervalo  $14.060R_N \leq a \leq 14.650R_N$ . Para valores do semi-eixo maior entre  $14.650R_N < a < 14.810R_N$ ,  $\Delta\lambda$  experimenta circulação.

As Figuras 5.9 e 5.10 mostram o comportamento da inclinação sem e com os efeitos do achatamento do planeta mãe. Observamos que os efeitos do achatamento são quase desprezíveis no caso da inclinação. As análises considerando as variações no semi-eixo maior desprezando o achatamento apresentam pequenas diferenças com as análises que consideram o efeito do achatamento.

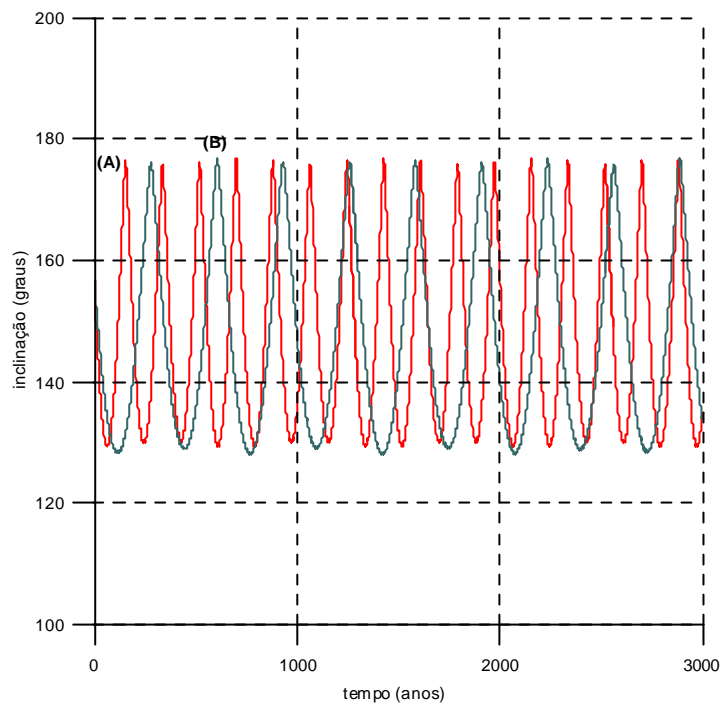


FIGURA 5.10 – Comportamento da inclinação para: (A)  $a = 14.65R_N$ , (B)  $a = 14.570R_N$  (com  $J_2$ ).

## 5.6 Variando as Inclinações

As condições iniciais de Tritão e dos clones são as mesmas que nas simulações anteriores. Tritão se encontra na sua órbita real e retrógrada, e os clones com diversas inclinações iniciais com respeito ao plano invariável. O objetivo é encontrar, de forma experimental, os efeitos no ângulo ressonante com as mudanças da inclinação inicial. Assim, para inclinações iniciais menores que  $120^\circ$ , encontramos que o ângulo ressonante ( $\Delta\lambda$ ) circula. No entanto, para valores da inclinação inicial no intervalo  $[120^\circ, 180^\circ]$  o ângulo ressonante tende a librar.

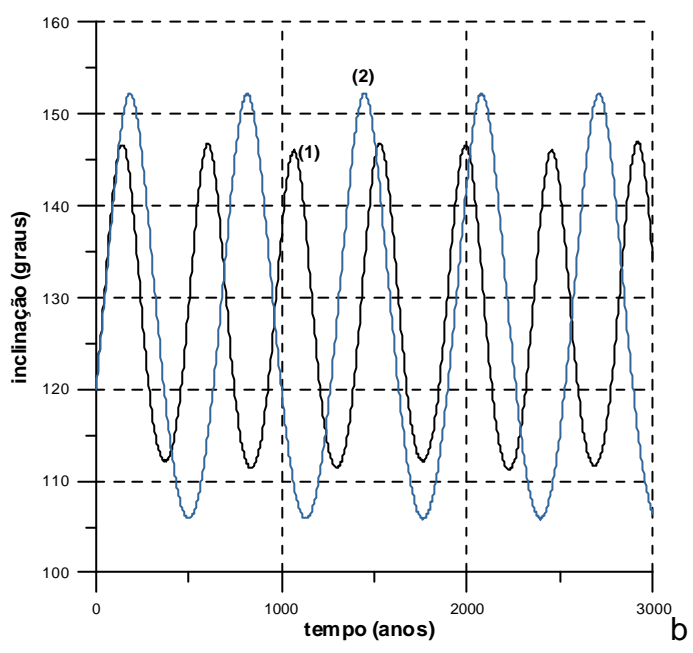
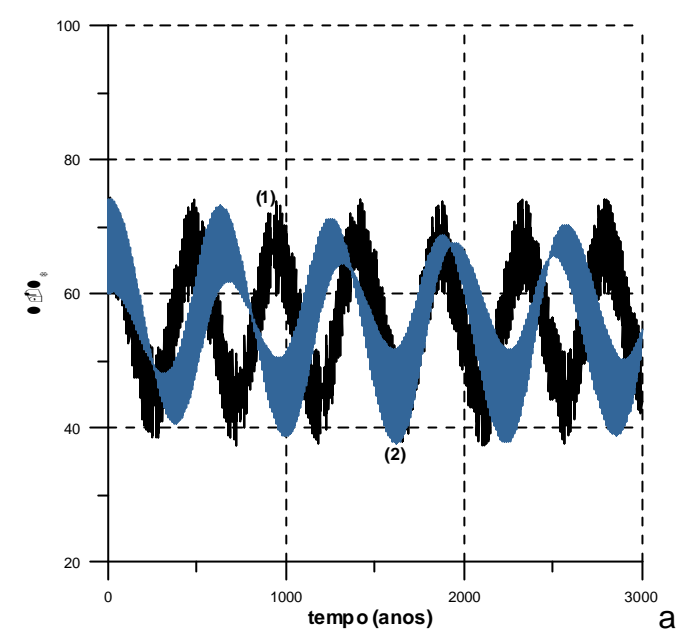


FIGURA 5.11 – Comportamento de: a) Ângulo ressonante, b) Inclinação, c) Excentricidade. Para  $b = 120^0$  sendo: (1) Sem  $J_2$ , (2) Com  $J_2$  (continua).

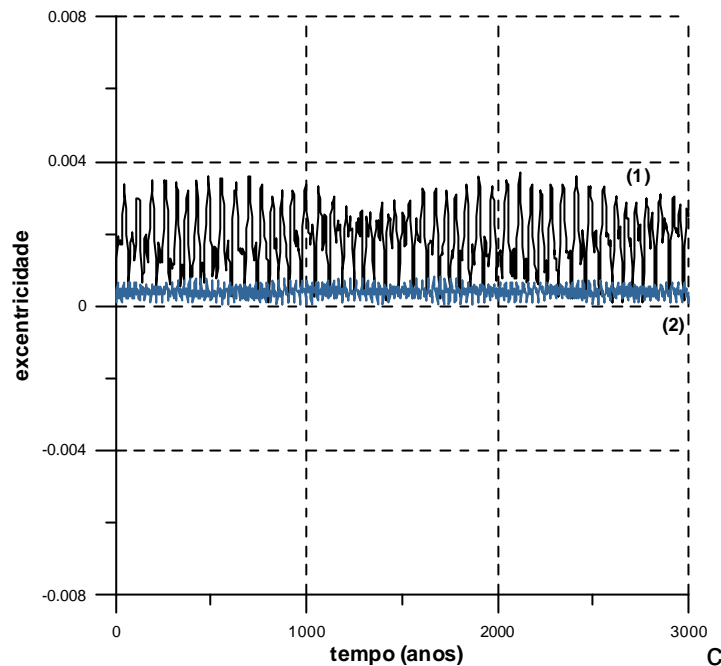


FIGURA 5.11 – (Conclusão).

Na Figura 5.11 mostramos o comportamento do ângulo ressonante, inclinação e excentricidade quando a inclinação inicial é de  $120^{\circ}$ . Mesmo considerando os efeitos com achatamento e sem achatamento do planeta mãe, observa-se pequenas diferenças no ângulo ressonante, inclinação e excentricidade. Existindo pequenas diferenças no comportamento do ângulo ressonante quando consideramos ou desprezamos os efeitos do achatamento.

## 5.7 Comentários

O modelo dado pelas integrações completas das equações de movimento, permitem uma “flexibilidade” maior com respeito às informações fornecidas pelo problema restrito circular dos três corpos. Mostramos que a presença do achatamento do primário desloca as posições dos pontos de equilíbrio com relação à sua localização previa, mas isto não altera as características da sua estabilidade linear (Sharma, 1975). Os encontros com Tritão alteram os valores da excentricidade e da inclinação, as quais podem chegar a alterar a estabilidade da órbita.



Christou (2000), encontrou que quando os semi-eixos maiores dos asteróides são próximos aos planetas internos, pode surgir a libração co-orbital. Assim, nas simulações numéricas efetuadas, para órbitas deslocadas com respeito ao semi-eixo maior e posicionadas na faixa de  $14.060R_N \leq a \leq 14.650R_N$ , mostra-se a libração do ângulo ressonante. Nessas circunstâncias, a contribuição dos efeitos perturbativos do secundário são quase nulas. Por esse motivo, o semi-eixo maior permanece quase constante, e o ângulo ressonante libra ao redor dos  $60^\circ$ . Dermott (1980) e Dermott e Murray (1981) explicaram a existência de uma certa assimetria no comportamento das variações do semi-eixo maior, ou seja, depois de um encontro existe um deslocamento  $+\delta_1$  e, depois do próximo encontro um deslocamento  $-\delta_2$ . Como  $\delta_1 \approx \delta_2$ , esta assimetria cancela os deslocamentos no semi-eixo maior. No entanto, em alguns casos as grandes variações no semi-eixo maior podem fornecer mecanismos de escape dos objetos co-orbitais.



## CAPÍTULO 6

### EVOLUÇÃO DAS ÓRBITAS NO SISTEMA NETUNO-TRITÃO

#### 6.1 Generalidades

Diversos trabalhos com o objetivo de determinar órbitas periódicas no problema restrito dos três corpos foram desenvolvidos por diversos autores (Hénon 1965, Broucke 1968 etc). O problema restrito circular dos três corpos pode ser analisado considerando também a presença do achatamento dos primários. Entre alguns dos trabalhos que pesquisaram esse problema, temos Sharma e Rao (1975) que investigam os pontos de equilíbrio colineares, os quais permanecem instáveis mesmo com a presença do achatamento. Em um outro trabalho, Subbarao e Sharma (1975), estudam a estabilidade dos pontos de equilíbrio triangulares, considerando o primário maior como achatado. Neste caso, estas são estáveis para um certo intervalo do parâmetro de massa ( $\mu$ ). Perdios, Kanavos e Markellos (1999), estudam as órbitas periódicas 3D com baixas inclinações no problema restrito dos três corpos com achatamento, através das suas bifurcações a partir do plano de órbita. Chandra e Kumar (2004) estudam a estabilidade não linear dos pontos de equilíbrio triangulares, quando o primário mais massivo é um esferóide achatado. Nesse capítulo, estudaremos a evolução das órbitas no espaço de fases usando as superfícies de seção de Poincaré considerando os casos com e sem a presença do achatamento do planeta Netuno. Sendo essa análise uma aproximação do sistema Netuno-Tritão-clone, devido a que Tritão se encontra em uma órbita altamente inclinada.

#### 6.2 Modelo Matemático

Os modelos usados no presente capítulo estão dados pelo problema restrito circular dos três corpos com e sem achatamento do primário maior.

### 6.2.1 Problema restrito circular dos três corpos sem achatamento

Consiste de duas massas  $m_1$  e  $m_2$  que se movem em órbita circular ao redor do seu centro comum de massa. Existindo uma partícula de teste que se move sobre os efeitos gravitacionais de  $m_1$  e  $m_2$ , mas sem afetar o movimento deles. A distância entre as duas massas é constante, a qual é tomada como a unidade em um sistema de unidades adimensionais. A unidade de massa é escolhida de forma tal que  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ , onde  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são as massas reduzidas definidas por  $\mu_1 = m_1 / (m_1 + m_2)$  e  $\mu_2 = m_2 / (m_1 + m_2)$ . A partir da terceira lei de Kepler e a partir da unidade de massa e distância definidas anteriormente, temos que o movimento médio do sistema de dois corpos é também a unidade, logo  $n_1 = n_2 = 1$ . No entanto, as duas massas se movem próximas do seu centro comum de massas, com velocidade angular igual à unidade e período orbital igual a  $2\pi$ . As equações de movimento no sistema girante são (Szebehely 1967, Murray e Dermott 1999):

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - x &= -\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= -y \left( \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right)\end{aligned}\tag{6.1}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}r_1^2 &= (x + \mu_2)^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x - \mu_1)^2 + y^2\end{aligned}\tag{6.2}$$

Mas, no problema restrito dos três corpos, a energia orbital e o momentum angular não são conservados, devido ao fato da partícula de teste não afetar o movimento das outras duas massas. No entanto, o sistema dinâmico tem uma integral de movimento. Seja a função  $U$  definida por:

$$U = \frac{(x^2 + y^2)}{2} + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (6.3)$$

Então a Equação (6.1) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Multiplicando a primeira parte da Equação (6.4) por  $\dot{x}$  e a segunda parte por  $\dot{y}$  e somando obtemos:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (6.5)$$

Depois de integrar:

$$2U - C_J = \dot{y}^2 + \dot{x}^2 \quad (6.6)$$

Onde  $C_J$  é uma constante de integração, sendo denominada de constante de Jacobi. Usando a Equação (6.3) podemos escrever:

$$C_J = x^2 + y^2 + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - \dot{y}^2 - \dot{x}^2 \quad (6.7)$$

Na Equação (6.7), quando  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ , temos as curvas de velocidade zero associadas com a  $C_J$ . Essas curvas definem os limites das regiões proibidas no espaço físico. A relação de massas para sistema em estudo é de  $\mu = 2.1 \times 10^{-4}$ . Isto significa que  $\mu_1 = M_N / (M_N + M_T)$  e  $\mu_2 = M_T / (M_N + M_T) = \mu$ , sendo  $m_N$  e  $m_T$  as massas de Netuno e Tritão, respectivamente. As Figuras 6.1 e 6.2 mostram

exemplos das curvas de velocidade zero correspondentes ao sistema Netuno-Tritão-clone.

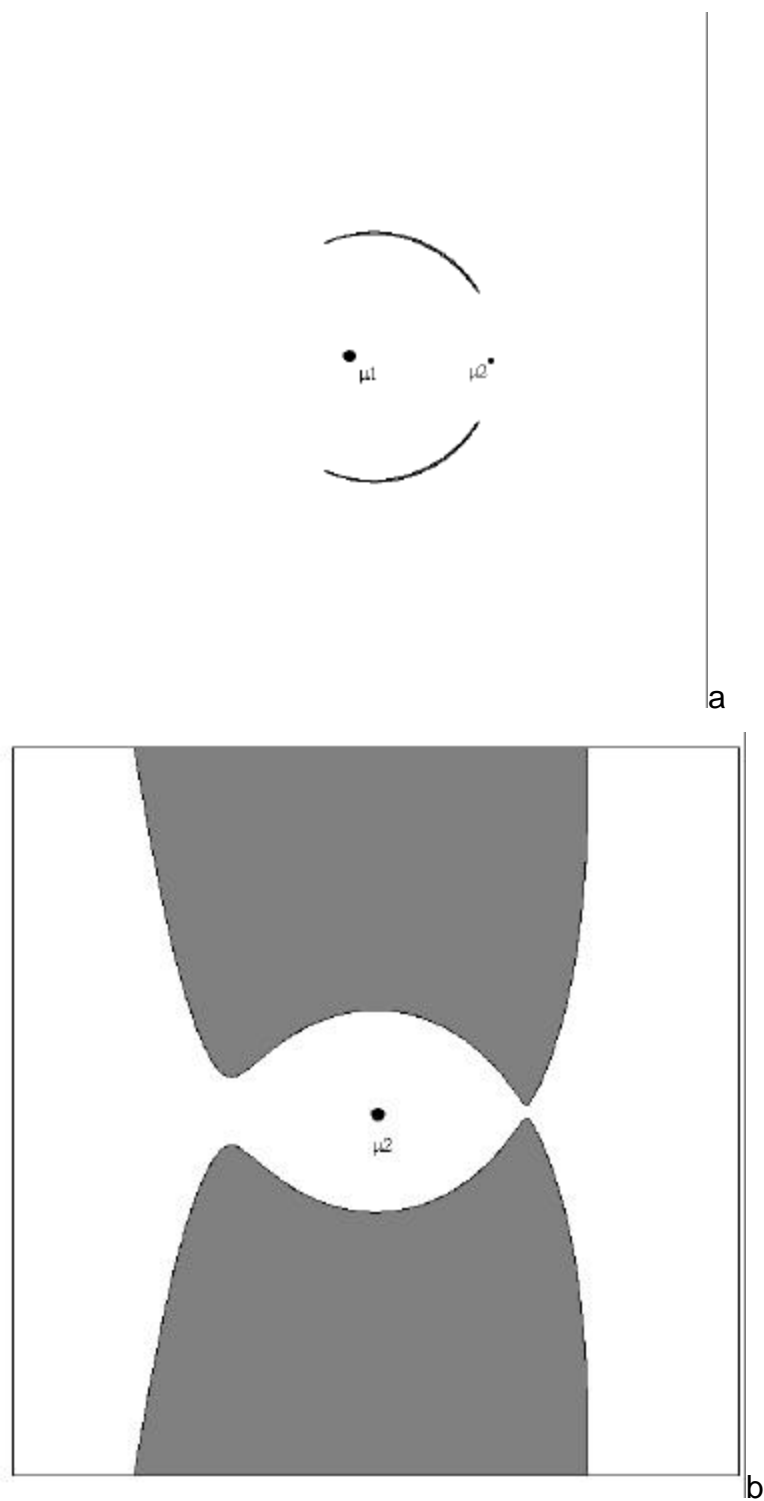


FIGURA 6.1 – Curvas de velocidade zero para valores da constante de Jacobi  $C_J$ : (a) 3.0000, (b) 3.0143. Áreas escuras são as regiões de exclusão.

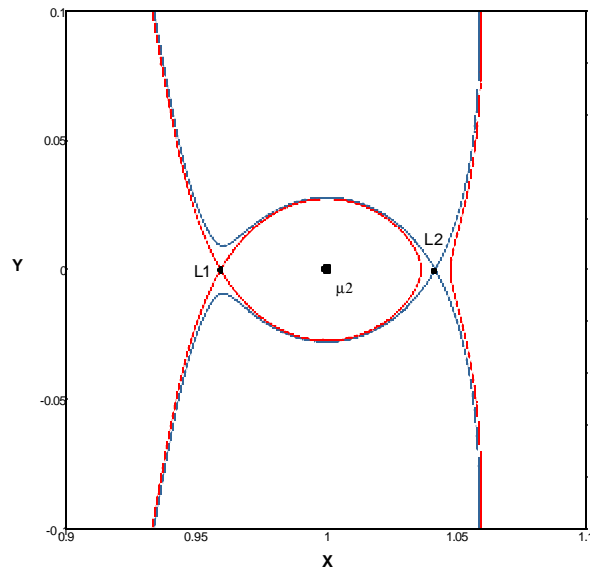


FIGURA 6.2 – Curvas de velocidade zero associadas com os pontos de equilíbrio lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$ .

### 6.2.2 Problema restrito circular dos três corpos com o primário maior achatado

Nas relações de Subbarao e Sharma (1975) é considerado que unicamente o primário maior é um esferóide achatado, cujo plano equatorial coincide com o plano de movimento. Considerando unicamente os efeitos seculares do achatamento no movimento dos primários é adotada a notação de Szebehely (1967). Como consequência à distância entre os primários não muda e pode ser considerada como a unidade. Além disso, a soma das massas dos primários é também a unidade. A unidade de tempo é escolhida de tal forma a fazer o movimento médio não perturbado e a constante gravitacional a unidade. O movimento médio perturbado " $\eta$ " é constante, mas maior que " $\eta_0$ " ( movimento médio perturbado não perturbado).

Usando variáveis adimensionais e o sistema de coordenadas sinódico  $(x, y)$ , as equações de movimento são:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y}\end{aligned}\tag{6.8}$$

Sendo:

$$\Omega = \left(\frac{n^2}{2}\right)\left[(1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2\right] + (1-\mu)/r_1 + \mu/r_2 + (1-\mu)A_1/2r_1^3\tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}r_1^2 &= (x - \mu)^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x + 1 - \mu)^2 + y^2\end{aligned}\tag{6.10}$$

e

$$\mu = m_2/m_2 + m_1$$

Considerando que  $m_1 \geq m_2$  as quais representam as massas dos primários. O movimento médio perturbado dos primários é:

$$n^2 = 1 + 3A_1/2\tag{6.11}$$

Sendo o ultimo termo devido ao achatamento. O parâmetro:

$$A_1 = (R_E^2 - R_P^2)/5R^2\tag{6.12}$$

Contem  $R_E$  e  $R_P$  que são os raios equatorial e polar (em unidades de distancia) do primário maior, e  $R$  é a distancia entre os primários. A presença de “n” nas Equações (6.8) e (6.9) é devida à modificação da força entre os primários.

Da Equação (6.8):

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C\tag{6.13}$$



Da consideração das localizações onde a velocidade da partícula é zero, podemos encontrar a constante de Jacobi, assim:

$$C_{JJ2} = n^2 \left[ (1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2 \right] + 2(1-\mu)/r_1 + 2\mu/r_2 + (1-\mu)A_1/r_1^3 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \quad (6.14)$$

### 6.3 Superfícies de Seção de Poincaré

Para determinar os elementos orbitais do clone em algum instante é necessário conhecer sua posição  $(x,y)$  e velocidade  $(\dot{x},\dot{y})$ . Isto corresponde a um ponto no espaço de fase tetradimensional. A existência da constante de Jacobi no problema restrito circular dos três corpos implica na existência de uma superfície tridimensional que representa esse espaço tetradimensional. Desta forma, para um valor fixo da constante de Jacobi (com ou sem achatamento), unicamente três das quatro quantidades são necessárias, ou seja, precisamos de  $C_J, x, y, \dot{x}$  para determinar  $\dot{y}$ . Desta forma, por definir um plano  $y = 0$  no espaço tridimensional, os valores de  $(x, \dot{x})$  podem ser obtidos cada vez que a partícula tem  $y = 0$ . A ambigüidade no sinal do  $\dot{y}$  é resolvida assumindo que o plano é cruzado quando  $\dot{y}$  positivo.

### 6.4 Análises

Nosso objetivo é estudar a estabilidade das órbitas no sistema formado por Netuno-Tritão-clone, considerando os casos com e sem achatamento de Netuno. Explicaremos a evolução do sistema através da técnica das superfícies de seção de Poincaré (Winter e Murray 1994a,b).

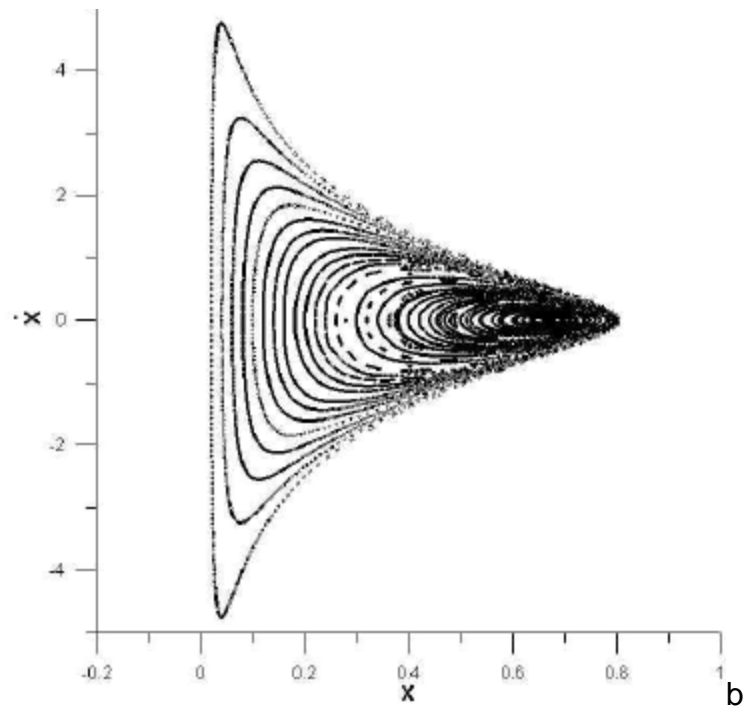
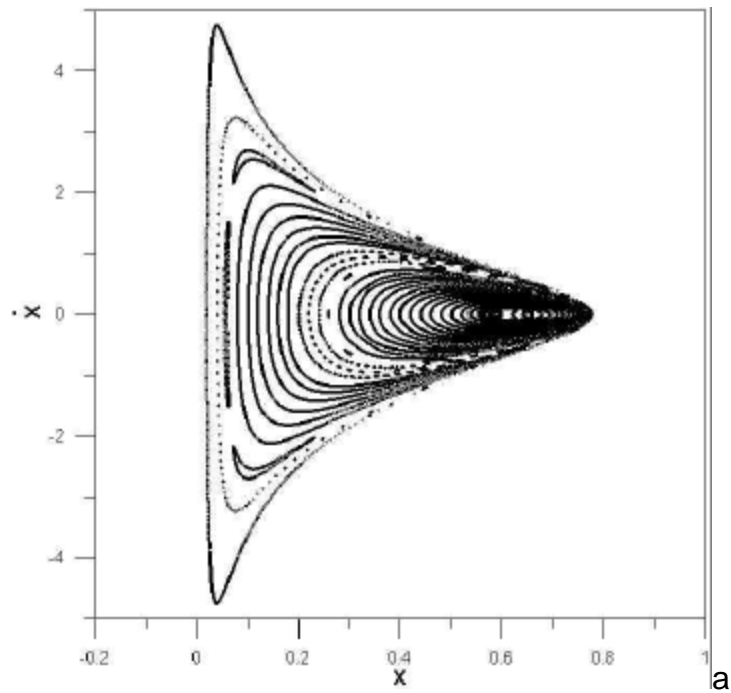


FIGURA 6.3 – Superfícies de seção de Poincaré sem achatamento para: a)  $C_J = 3.17233$ , b)  $C_J = 3.13212$ , c)  $C_J = 3.01500$  (continua).

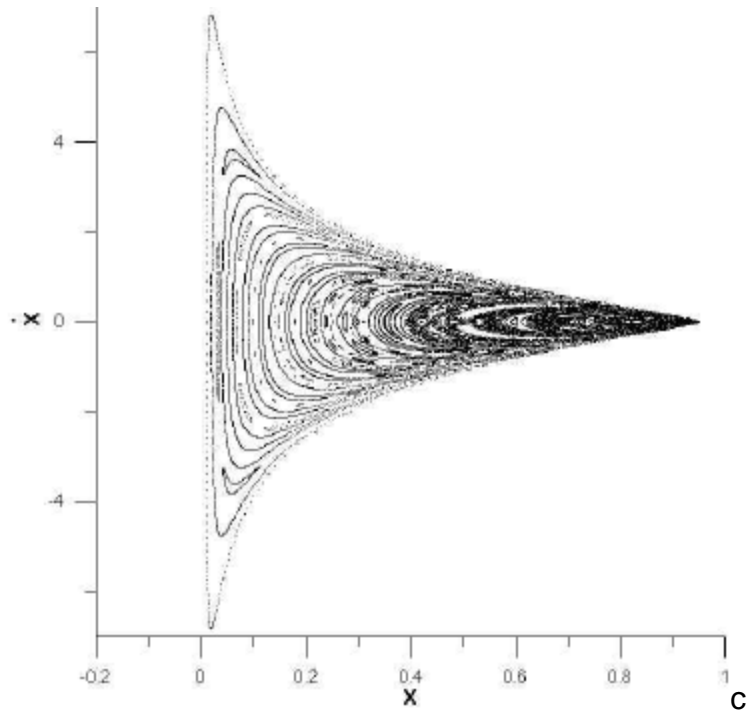


FIGURA 6.3 – (Conclusão).

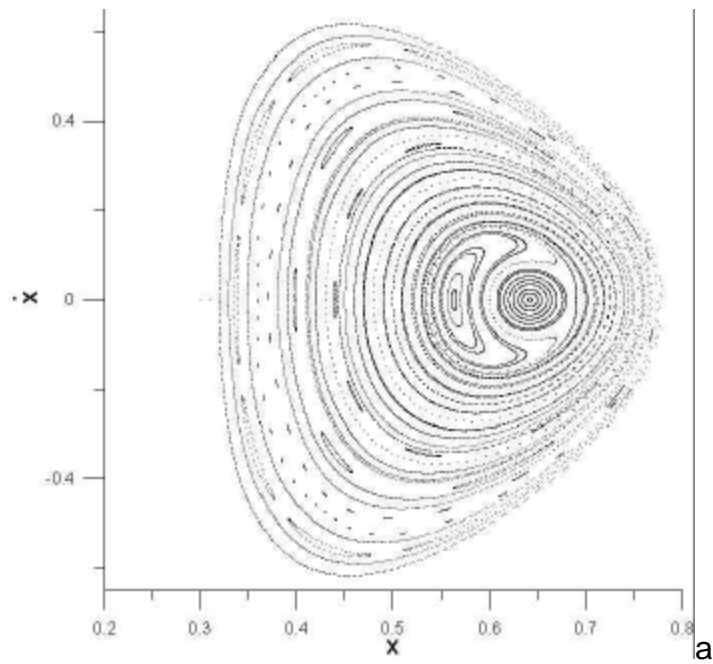


FIGURA 6.4 – Superfícies de seção de Poincaré com achatamento para: a)  $C_{JJ2} = 3.17233$ , b)  $C_{JJ2} = 3.13212$ , c)  $C_{JJ2} = 3.02054$  (continua).

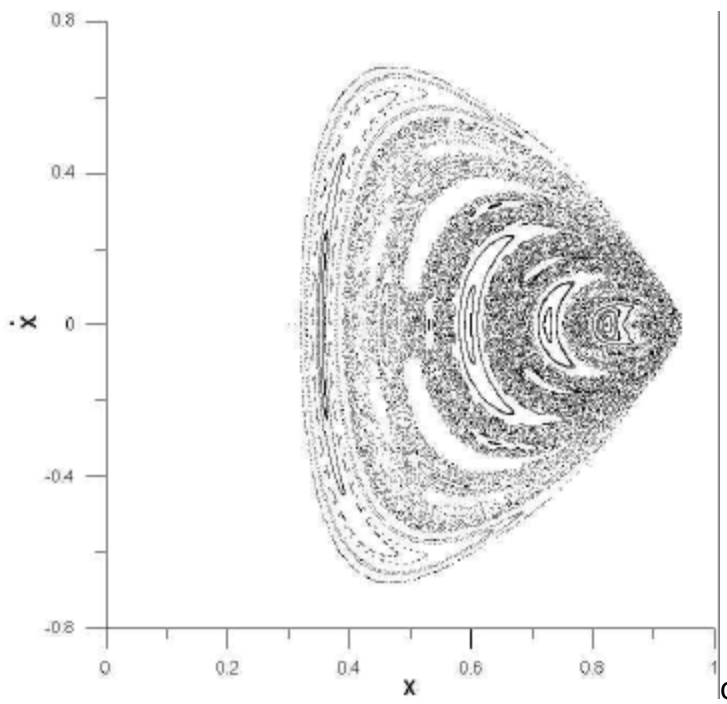
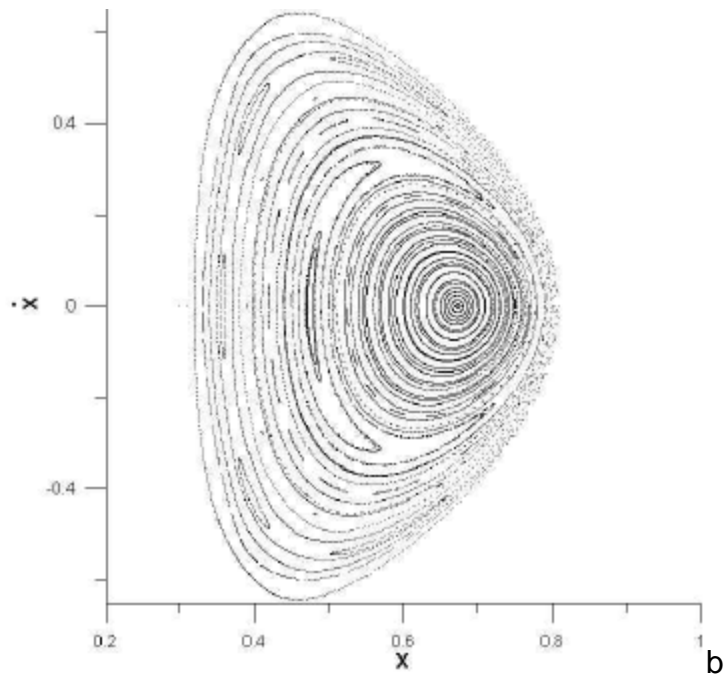


FIGURA 6.4 – (Conclusão).

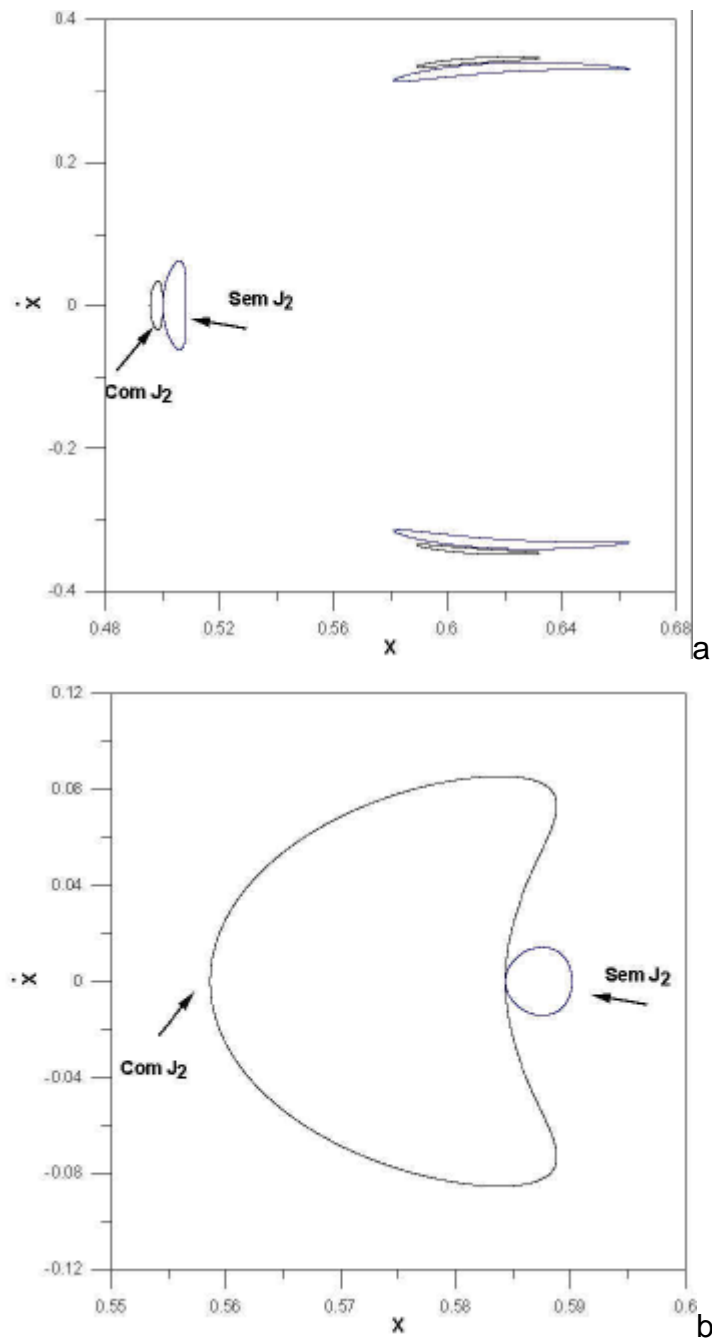


FIGURA 6.5 – Superfícies de seção de Poincaré para: a)  $x(0) = 0.5$ ,  $C_J = 3.050750$  e  $C_{JJ_2} = 3.05246$ . b)  $x(0) = 0.5843$ ,  $C_J = 3.17233$  e  $C_{JJ_2} = 3.17440$ . c)  $x(0) = 0.6167$ ,  $C_J = 3.132120$  e  $C_{JJ_2} = 3.13436$ . d)  $x(0) = 0.72$ ,  $C_J = 3.01900$  e  $C_{JJ_2} = 3.02187$  (continua).

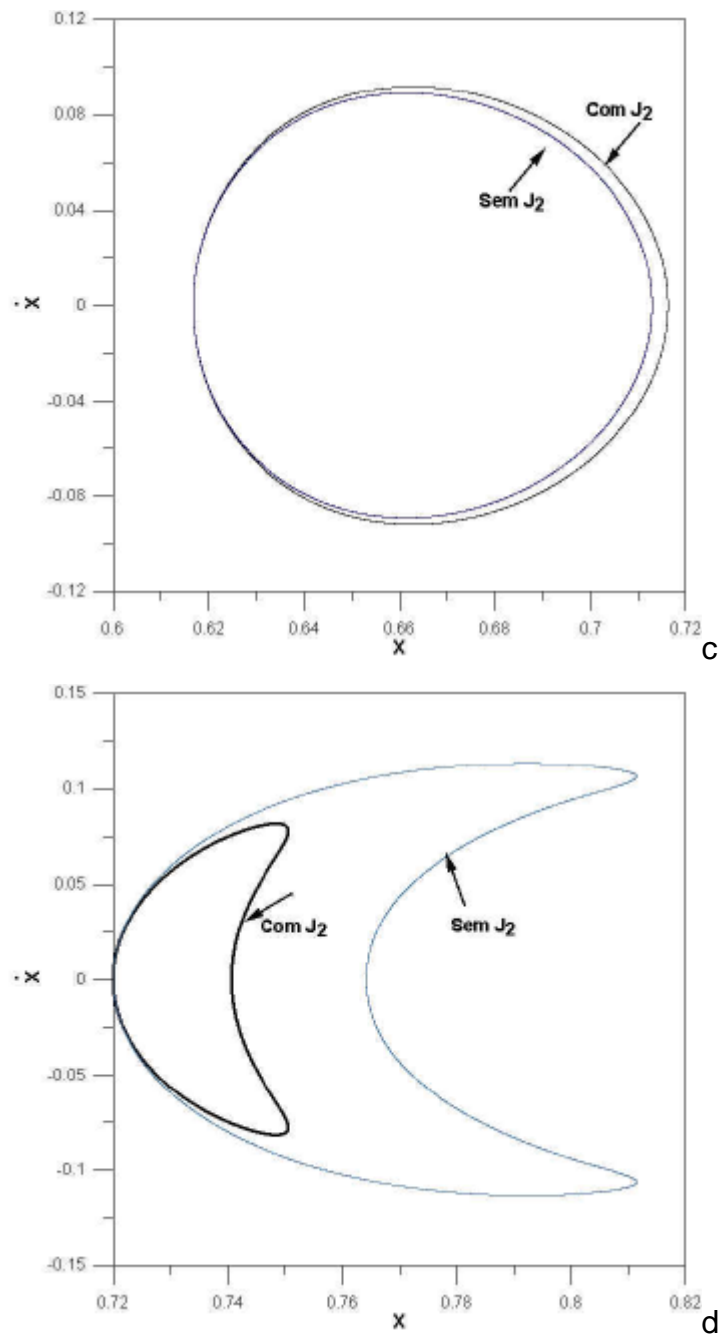


FIGURA 6.5 – (Conclusão).

As Figuras 6.3 - 6.4 foram geradas para um conjunto de condições iniciais para  $x(0)$  em passos de 0.002. Além disso, as outras condições iniciais foram  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Desta forma, consideraremos as órbitas inicialmente diretas nos sistemas de referência sinódico e sideral ( $\dot{y}(0) > 0$ ). Muitas órbitas diretas

no sistema sinódico produzem pontos sobre a superfície de seção com valores positivos para  $x$ . No entanto, pontos com valores negativos de  $x$  podem aparecer sobre a superfície de seção, devido às órbitas regulares com distância do apocentro maior que a unidade. Desta forma, trajetórias com valores de  $x$  negativos na superfície de seção serão excluídas.

**Tabela 6.1 – Condições iniciais usadas para gerar as Figuras 6.5**

$x(0)$	$\dot{x}(0)$	$y(0)$	$\dot{y}(0)$	$C_J$	$C_{JJ2}$
0.5	0	0	1.094340	3.050750	3.05246
0.5843	0	0	0.768790	3.17233	3.17440
0.6167	0	0	0.700413	3.132120	3.13436
0.72	0	0	0.526579	3.01900	3.02187

## 6.5 Comentários

Nas superfícies de seção, as trajetórias regulares definem curvas suaves que podem dar origem a ilhas. As áreas cobertas ou preenchidas por uma distribuição aleatória de pontos descrevem as trajetórias caóticas. Na superfície de seção, órbitas periódicas dão origem a pontos fixos, os quais estão no centro das ilhas de estabilidade. As órbitas caóticas estão associadas com os pontos de equilíbrio instáveis. A existência das órbitas caóticas não implica que as trajetórias não estejam limitadas. No entanto, é possível observar, ao longo das simulações que, mesmo com a expansão das regiões caóticas, ainda sobrevivem as ilhas de estabilidade. Fazendo uma inspeção das superfícies de seção encontramos que a área da região caótica incrementa-se com a diminuição da constante de Jacobi (Figuras 6.3-6.4). Isto está conectado com a mudança na curva de velocidade zero, a qual permite aproximações mais íntimas entre a partícula e o corpo perturbador, quando o valor da constante de Jacobi diminui.

As Figuras 6.5, cujas condições iniciais estão na Tabela 6.1, mesmo que possuam o mesmo conjunto de condições iniciais, elas não têm a mesma constante de Jacobi (ver Equações 6.7 e 6.14). Por tanto, o procedimento utilizado serve para mostrar como o achatamento influi na topologia das trajetórias.



## CAPÍTULO 7

### ANÁLISES DA CAPTURA GRAVITACIONAL POR TRITÃO

#### 7.1 Introdução

O fenômeno da captura gravitacional temporária tem sido analisado de diversos pontos de vista. Temos as análises utilizando o problema restrito circular dos três corpos, o problema restrito elíptico dos três corpos, problema bi-circular, etc.

Tanikawa (1983), mostrou que a probabilidade de captura permanente com mecanismos puramente gravitacionais é zero. Em consequência, alguns mecanismos não gravitacionais de captura foram propostos. Uma revisão destes pode ser encontrado no trabalho de Pollack, Burns e Tauber (1979). Desta forma, eles propuseram um mecanismo de arrasto por gás para facilitar o mecanismo de captura permanente.

Heppenheimer (1975), Heppenheimer e Porco (1977), estudam a captura nos pontos de libração, do ponto de vista do problema restrito dos três corpos. Determinam uma estimativa de tempo na qual o corpo permanece capturado, analisando também a importância da mudança na massa dos primários nos processos de captura. Consideram também os efeitos do arrasto de uma nebulosa. Além disso, existe uma série de trabalhos de Carusi e colaboradores com respeito à captura temporária de pequenos corpos por Júpiter (Carusi e Pozzi 1978, Carussi e Vasecchi 1980a,b). Huang e Innanen (1983), analisam as regiões de estabilidade e captura para satélites jovianos retrógrados, usando o diagrama de Henón e o modelo do problema restrito dos três corpos. Estudam as diversas probabilidades de captura temporária por Júpiter.

No entanto, como temos apresentado brevemente os estudos sobre o tema, foram inicialmente utilizados para explicar a captura dos satélites planetários. Foi somente na década de 90 que se iniciaram os estudos desse fenômeno na redução de consumo de combustível em um problema de transferência orbital entre dois corpos (Belbruno, 1990 e Miller e Belbruno, 1991). Os estudos sobre o assunto demonstram que esta pode ser a forma mais econômica de enviar material e suprimentos para a Lua e, talvez, a outros planetas do sistema solar. Belbruno e Miller aplicaram o mecanismo da captura gravitacional temporária em uma trajetória de transferência Terra-Lua. Os resultados mostraram uma economia de combustível, em relação às transferências do tipo de Hohmann, ao custo de um tempo maior para a transferência (Belbruno, 1990; Miller e Belbruno, 1991). Eles introduziram um conceito chamado limite de estabilidade fraca (ou limite nebuloso) para deduzir uma esfera de influência gravitacional mais realista em relação à esfera de influência clássica. O fenômeno de captura em sistemas de três corpos é importante porque a maioria dos sistemas que são estudados se baseiam em três corpos, como no caso da Terra, Lua e um veículo espacial, ou ainda o Sol, um planeta e um veículo espacial, etc. Yamakawa (1992) estuda os mecanismos de captura pela Lua, aplicada à trajetória de veículos espaciais no sistema Terra-Lua com um mínimo consumo de  $\Delta V$  para uma inserção em órbita lunar. Usando o ponto de vista da variação da energia dos dois corpos, o mecanismo de captura gravitacional é mostrado de forma qualitativa e quantitativa, desenvolvendo as trajetórias de transferência Terra-Lua as quais são seguidas pela captura gravitacional.

Vieira Neto e Winter (2001) estudam o problema da captura gravitacional temporária no sistema Sol-Urano-partícula, fazendo uma análise sistemática do conjunto de condições iniciais, assim como uma medida da duração do tempo de captura. Astakhov e Farrelly (2004), analisam a captura e escape no problema restrito elíptico dos três corpos. Propõem que as partículas podem ingressar em regiões caóticas as quais tendem a prolongar a sua estadia no

interior da esfera de Hill do planeta, induzindo à captura assistida. No seu trabalho, mostram que esse mecanismo sobrevive às perturbações devidas a elípticidade da órbita do planeta. No presente capítulo nosso objetivo é encontrar a dependência da variação das condições iniciais para a captura gravitacional com o valor da constante de Jacobi.

## 7.2 Modelo Matemático e Metodologia

A captura gravitacional balística é uma característica de alguns sistemas dinâmicos, como é o caso do problema restrito circular dos três corpos aqui considerado. A idéia básica é que o veículo espacial pode mudar sua trajetória a partir de uma órbita hiperbólica (energia positiva) ao redor de um corpo celeste para uma órbita elíptica (energia negativa), sem o uso de algum sistema propulsivo. A perturbação do terceiro corpo é a força responsável por esta modificação da órbita do veículo espacial. Para os propósitos práticos do estudo de trajetórias de veículos espaciais, é possível estudar esse problema considerando o comportamento da energia dos dois corpos do veículo espacial com respeito à Lua. Uma grandeza denominada de  $E_2$  (Yamakawa 1992, Belbruno 2004), que é duas vezes a energia total de um sistema de dois corpos, é definida com respeito ao primário mais próximo por:

$$E_2 = V^2 - 2\mu/r \quad (7.1)$$

Sendo  $V$  a velocidade do veículo espacial relativa ao primário próximo,  $r$  a distância do veículo espacial a esse primário, e  $\mu$  o parâmetro gravitacional do primário próximo. A partir do valor de  $E_2$  é possível conhecer se a órbita é elíptica ( $E_2 < 0$ ), parabólica ( $E_2 = 0$ ) ou hiperbólica ( $E_2 > 0$ ) com respeito a Tritão. Para as simulações numéricas, o modelo usado é o do problema restrito dos três corpos, o qual será aplicado ao sistema formado por Netuno – Tritão - veículo espacial, estando as unidades no sistema canônico. Usamos o sistema de coordenadas giratórias (Szebehely, 1967), ver Equações 6.1 – 6.7.

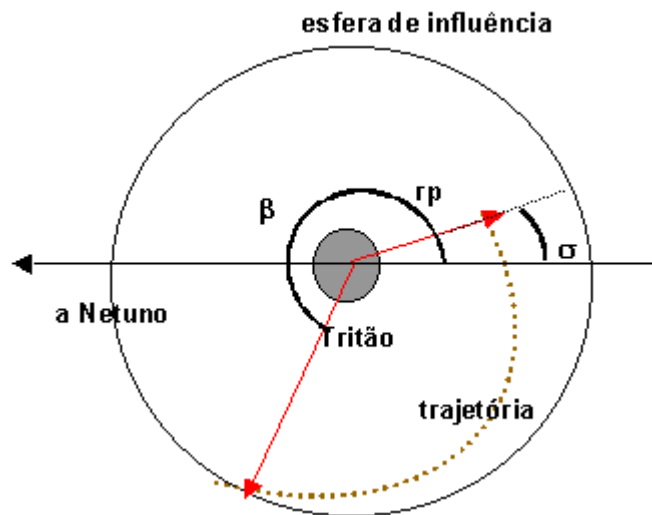


FIGURA 7.1 – Parâmetros da captura gravitacional balística.

A metodologia a ser utilizada para encontrar as trajetórias consiste em começar a integração numérica no ponto em que o veículo espacial está mais próximo de Tritão. Nesse ponto, um certo valor negativo de  $E_2$  é dado ao veículo espacial, sendo que a velocidade computada deve estar em concordância com a Equação (7.1). A distância  $r$  é conhecida e o vetor velocidade tem componente radial nula. Desta forma, o veículo espacial começa o seu movimento próximo de Tritão e, com um tempo de integração negativo na propagação numérica da trajetória, pode-se determinar o movimento antes da aproximação. As condições finais da trajetória são convertidas em condições iniciais ao estudar o problema. Os principais parâmetros da trajetória são:  $r_p$  = Distância pericêntrica,  $\sigma$  = Ângulo que especifica a posição do periápside,  $\beta$  = Posição do ângulo de entrada que especifica o ponto onde o veículo espacial atinge à esfera de influência do Tritão. Na Figura 7.1, mostramos uma captura direta (sentido contrário ao do relógio), sendo uma captura retrógrada no sentido de giro do relógio. As condições iniciais no sistema fixo são obtidas a partir de  $\sigma$  e  $r_p$ , da seguinte forma:

Seja a posição e velocidade inicial do veículo espacial com respeito a Tritão:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{v/e \rightarrow T} &= \{ r_p \cos \sigma, r_p \operatorname{sen} \sigma \} \\ \vec{V}_{v/e \rightarrow T} &= \{ -V \operatorname{sen} \sigma, V \cos \sigma \}\end{aligned}\quad (7.2)$$

A posição e velocidade de Tritão com respeito ao sistema inercial de referência são:

$$\begin{aligned}\vec{r}_T &= \{ \mu_1 \cos(nt), \mu_1 \operatorname{sen}(nt) \} \\ \vec{V}_T &= \{ -n\mu_1 \operatorname{sen}(nt), n\mu_1 \cos(nt) \}\end{aligned}\quad (7.3)$$

Então, a posição e velocidade do veículo espacial com respeito ao sistema fixo serão:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_{v/e \rightarrow T} + \vec{r}_T \\ \vec{V} &= \vec{V}_{v/e \rightarrow T} + \vec{V}_T\end{aligned}\quad (7.4)$$

Escrevendo as componentes da Equação (7.4) teremos:

$$\begin{aligned}\xi(t) &= r_p \cos \sigma + \mu_1 \cos(nt) \\ \eta(t) &= r_p \operatorname{sen} \sigma + \mu_1 \operatorname{sen}(nt) \\ \dot{\xi}(t) &= -V \operatorname{sen} \sigma - n\mu_1 \operatorname{sen}(nt) \\ \dot{\eta}(t) &= V \cos \sigma + n\mu_1 \cos(nt)\end{aligned}\quad (7.5)$$

Lembrando que  $n = 1$ , então para  $t = 0$  teremos:

$$\begin{aligned}\xi(0) &= r_p \cos \sigma + \mu_1 \\ \eta(0) &= r_p \operatorname{sen} \sigma \\ \dot{\xi}(0) &= -V \operatorname{sen} \sigma \\ \dot{\eta}(0) &= V \cos \sigma + \mu_1\end{aligned}\quad (7.6)$$

### 7.3 Análises

Das curvas de velocidade zero (Figuras 6.1-6.2) observamos que, para alguns valores da constante de Jacobi, essas curvas formam “pescoços” que permitem a comunicação entre as regiões que orbitam Netuno e Tritão. Desta forma, é possível a captura ou escape de Tritão. Isto é consequência da “disputa” gravitacional entre Tritão e Netuno. A esfera de influência aqui usada não corresponde ao valor clássico fornecido pelo problema restrito dos três corpos (raio esfera de influência  $\approx (\mu_2)^{2/5}$ ). Usaremos de forma prática o valor fornecido por Yamakawa (1992) para o sistema Terra-Lua (raio da esfera de influência =  $10^5$  km). Variamos ligeiramente esse valor para ver a sua influência no processo de captura gravitacional. Os valores que serão utilizados aqui estão mostrados na Tabela 7.1.

**Tabela 7.1. Valores para Tritão**

Condição	Esfera de influência ( $\times 10^3$ km)	Raio de Tritão ( $\times 10^3$ km)	Altitude do pericentro ( $\times 10^3$ km)
I	80	1.353	1
II	100	1.353	0.1
III	100	1.353	0.05

Quando graficamos os valores de  $\sigma$  vs  $C_J$  para diversos valores iniciais da energia de dois corpos, em todos os casos encontramos diversas regiões de exclusão onde não é possível a captura gravitacional. As Figuras 7.2-7.4 mostram diversos valores iniciais para a energia dos dois corpos assumidos para o processo da captura. A probabilidade da captura gravitacional decresce com o acréscimo (em valor absoluto) da energia inicial e com o incremento da constante de Jacobi, sendo esse fato observado na faixa de valores considerados.

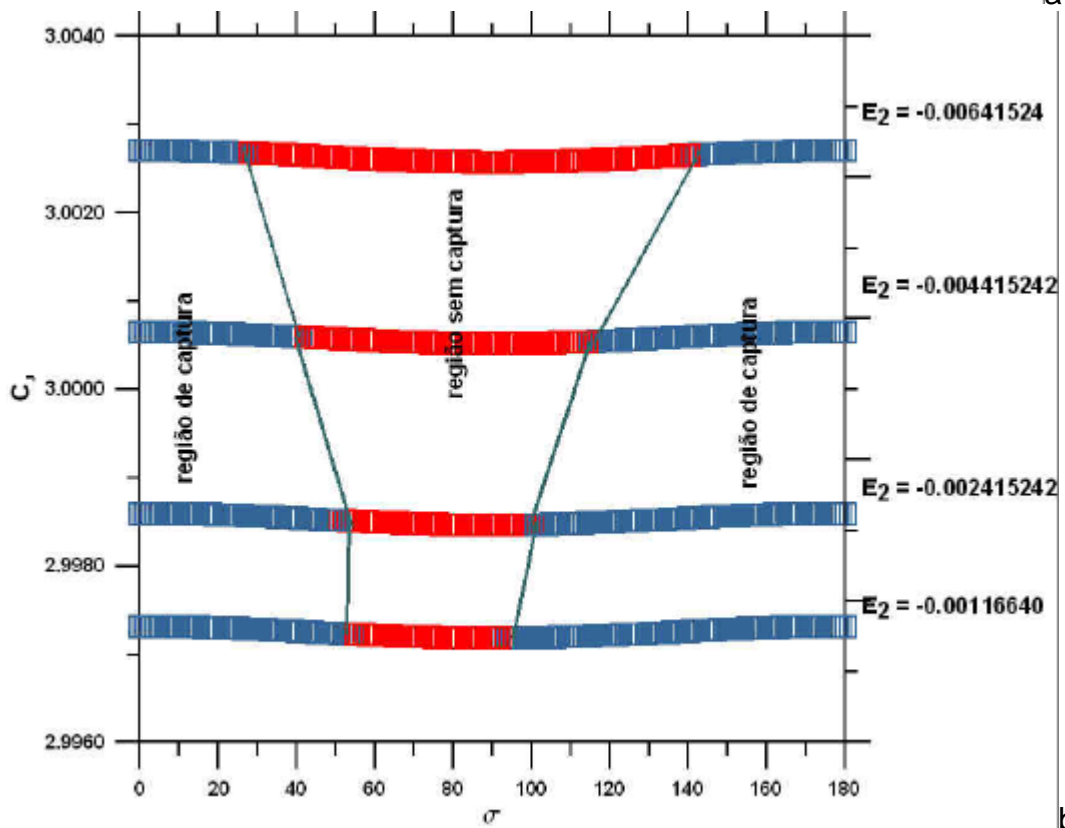
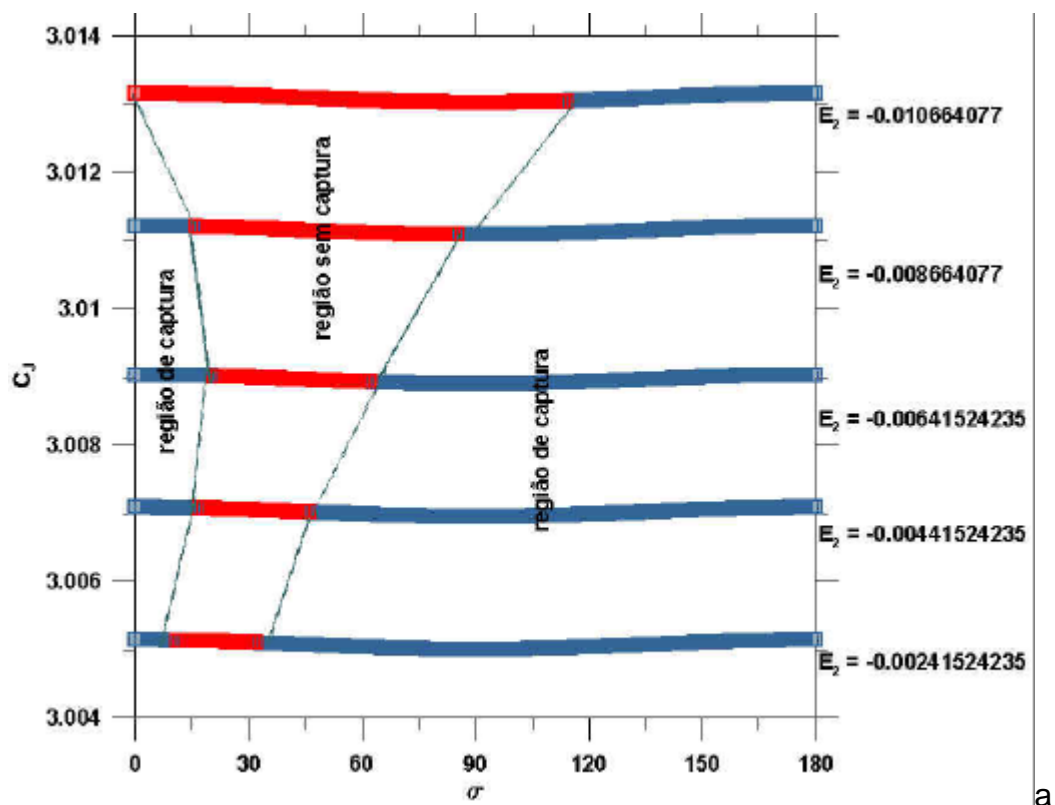


FIGURA 7.2 –  $\sigma$  vs  $C_J$  para a condição I. (a) órbitas diretas, (b) órbitas retrógradas.

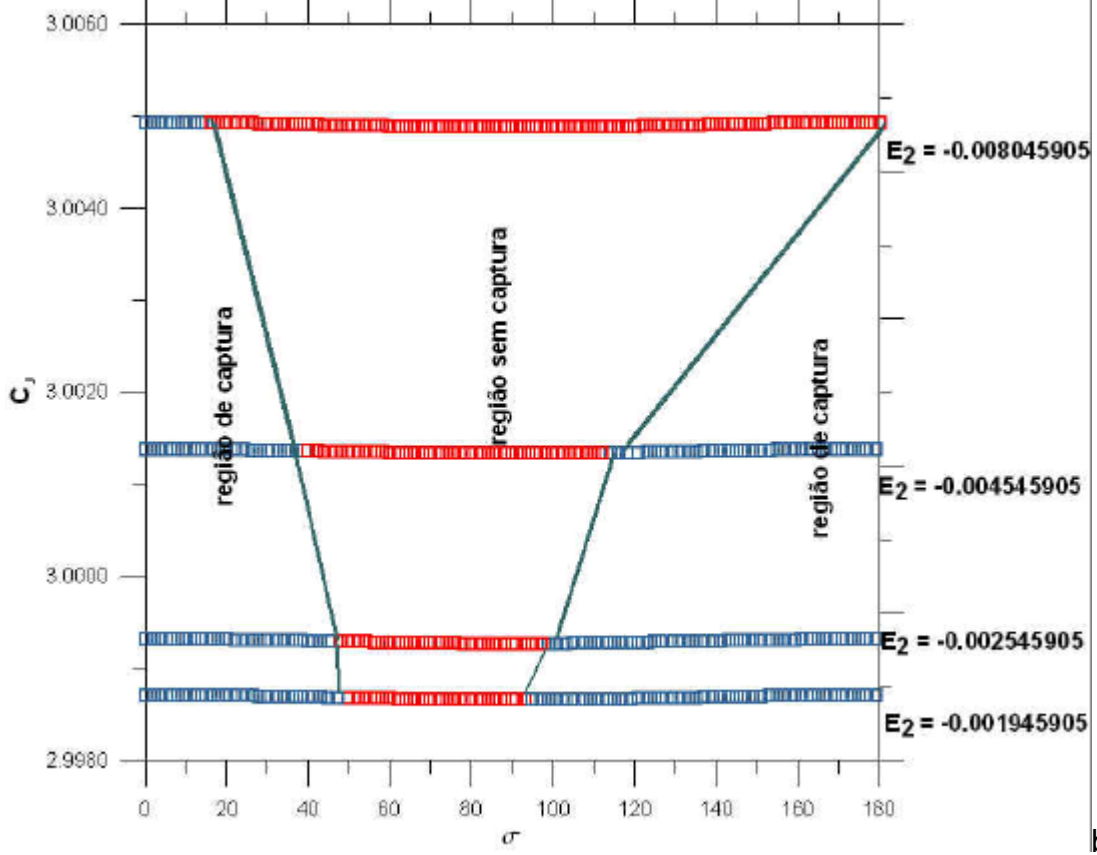
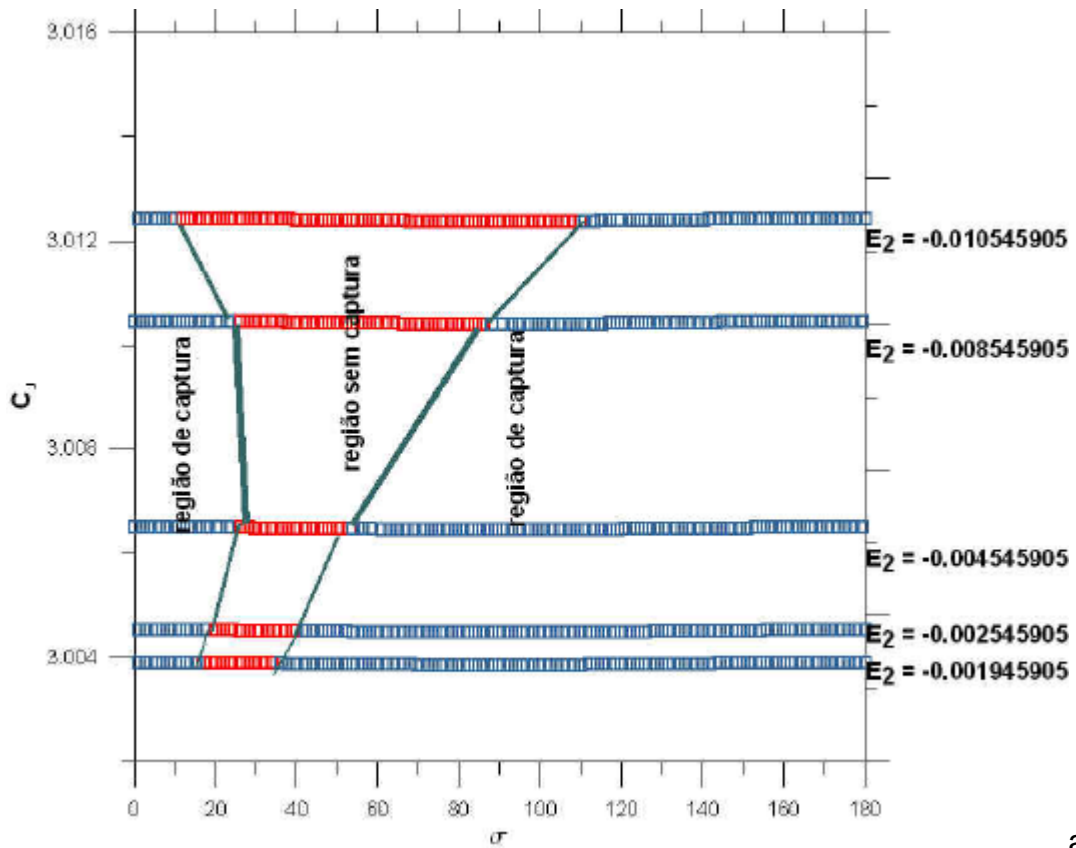
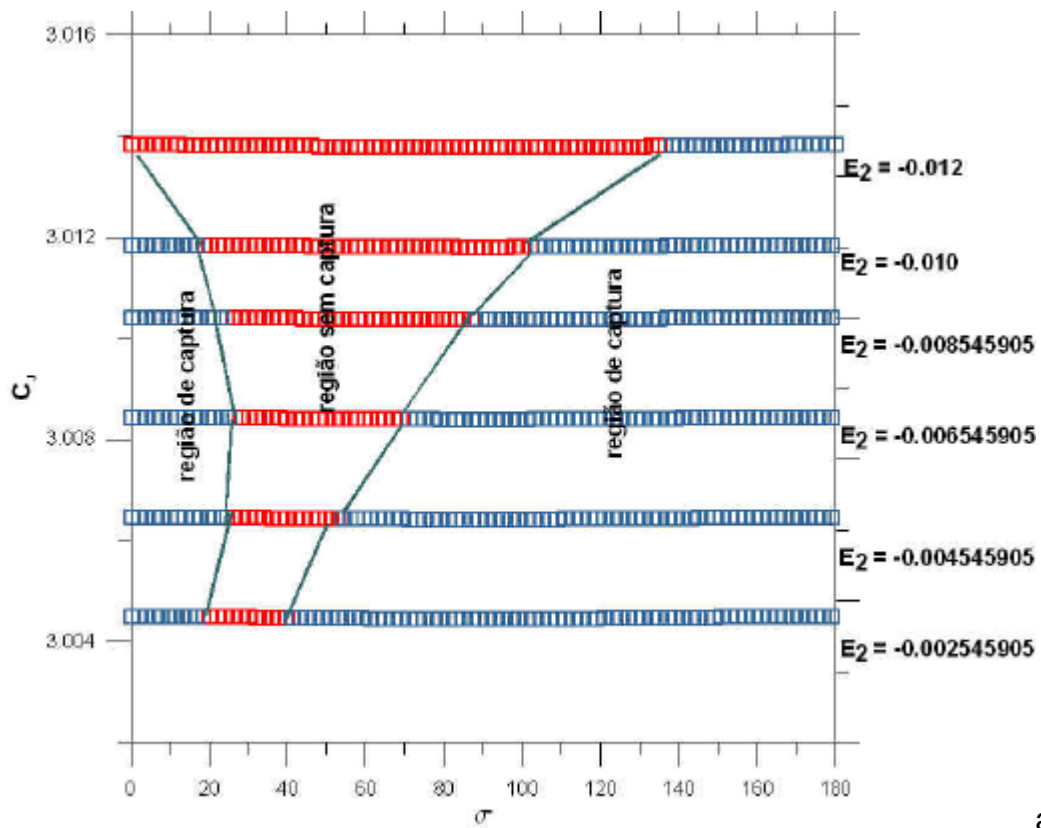
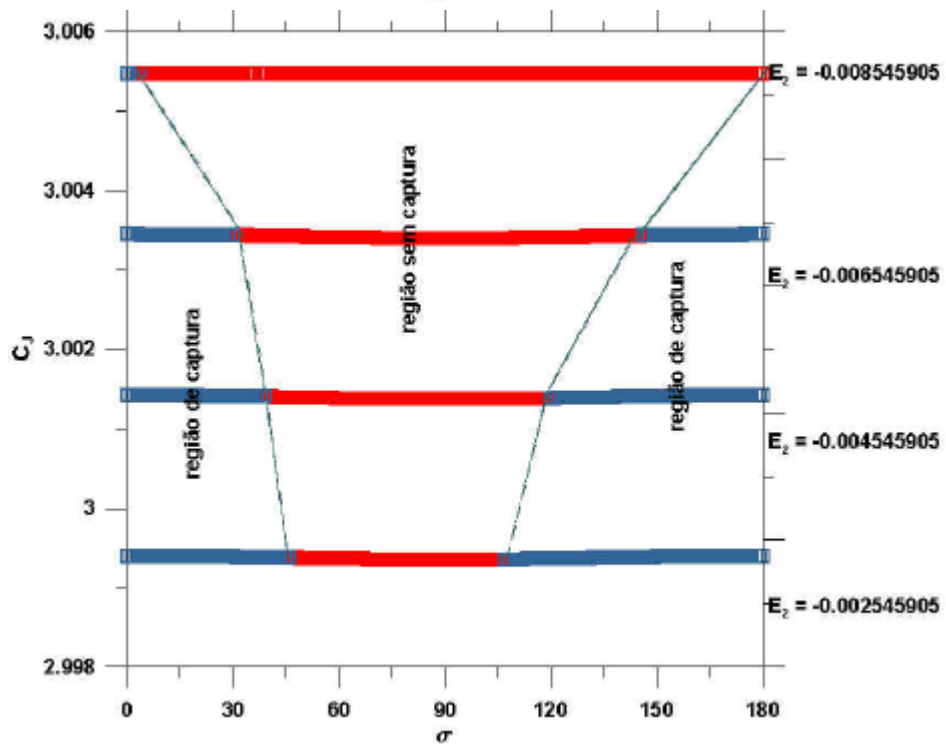


FIGURA 7.3 –  $\sigma$  vs  $C_J$  para a condição II. (a) órbitas diretas, (b) órbitas retrógradas.





a



b

FIGURA 7.4 –  $\sigma$  vs  $C_J$  para a condição III. (a) órbitas diretas, (b) órbitas retrógradas.

O processo da captura gravitacional satisfaz as condições impostas, que  $E_2$  em relação a Tritão seja negativo no pericentro e que a distância entre Tritão e o veículo espacial exceda os  $10^5$ km ou  $8 \times 10^4$ km, antes de completar os 50 dias sem colisão com Tritão (para mais detalhes ver Yamakawa, 1992 e Vieira Neto, 1999). As Figuras 7.5-7.8 foram geradas para a condição II e considerando que a energia inicial é de  $-0.00454$  (unidades canônicas). Essas figuras mostram órbitas no sistema fixo, sistema girante e a energia ( $E_2$ ) vs tempo. As órbitas de captura mostram a mudança no sinal de  $E_2$ , isto é, de valores negativos passam a positivos. Quando  $\sigma$  está no intervalo de  $[0^0, 20^0]$  para as órbitas diretas, o tempo necessário para a captura (mudança de sinal) está entre os 8 a 13 dias (Figura 7.5c). No intervalo  $[60^0, 120^0]$  para as órbitas diretas o tempo está entre os 5.5 e 8.2 dias (Figura 7.6c). Para as órbitas retrógradas, para  $\sigma$  no intervalo  $[0^0, 30^0]$  o tempo de captura está entre os 9.8 e 20 dias, mas no intervalo  $[120^0, 170^0]$ , o tempo está entre os 12 e 14 dias.

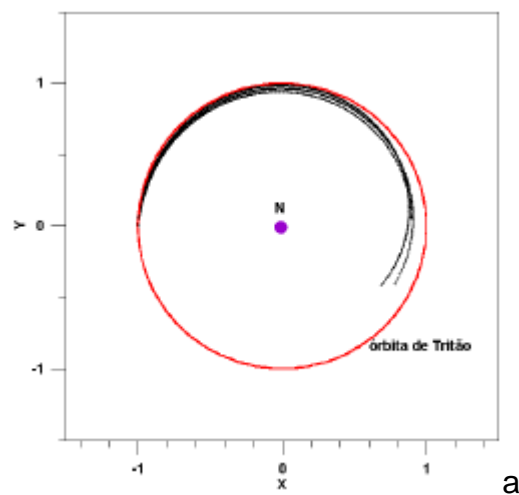


FIGURA 7.5 – Órbita de captura da condição II considerando  $\sigma$  no intervalo  $[0^0, 20^0]$  para órbitas diretas. a) Sistema fixo, (b) Sistema girante, (c)  $E_2$  vs tempo (continua).

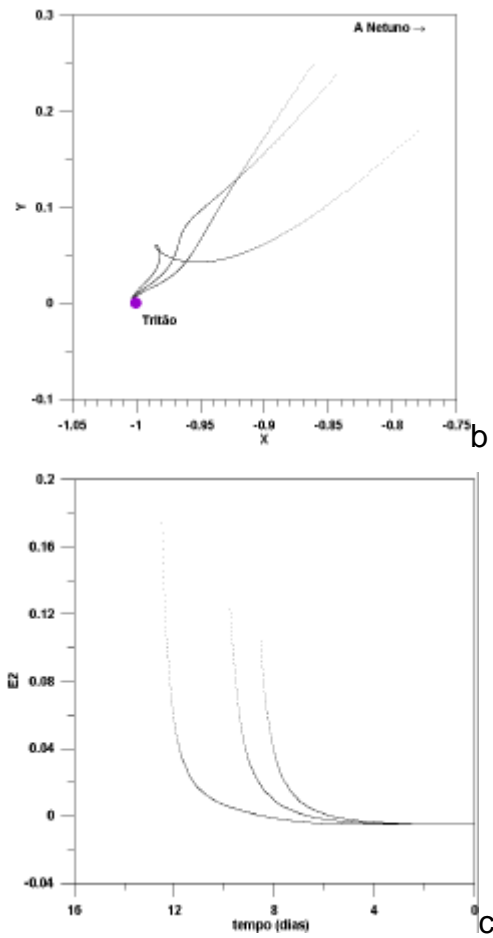


FIGURA 7.5 – (Conclusão).

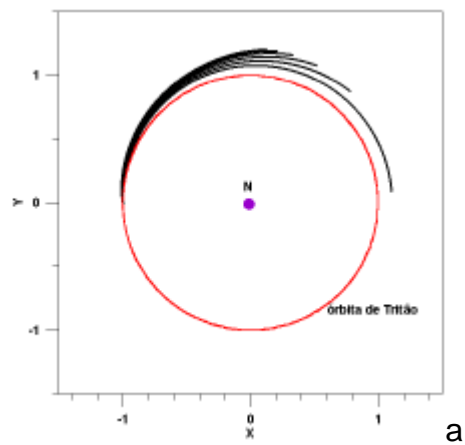


FIGURA 7.6 – Órbita de captura da condição II considerando  $\sigma$  no intervalo  $[60^{\circ}, 120^{\circ}]$  para órbitas diretas. (a) Sistema fixo, (b) Sistema girante, (c)  $E_2$  vs tempo (continua).

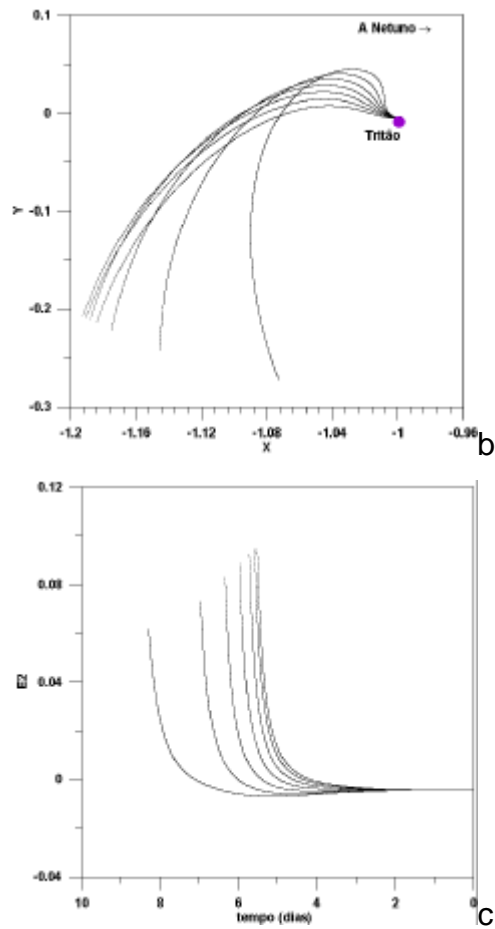


FIGURA 7.6 – (Conclusão).

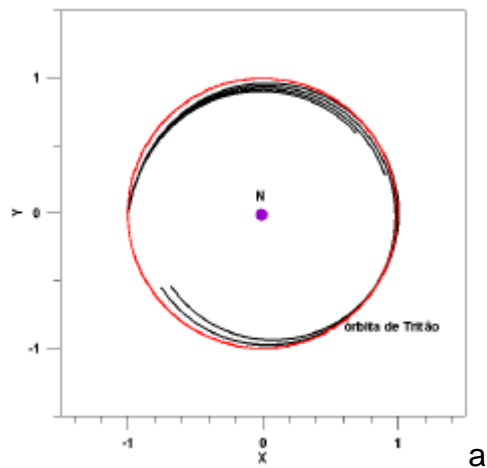


FIGURA 7.7 – Órbita de captura da condição II considerando  $\sigma$  no intervalo  $[0^0, 30^0]$  para órbitas retrógradas. (a) Sistema fixo, (b) Sistema girante, (c)  $E_2$  vs tempo (continua).

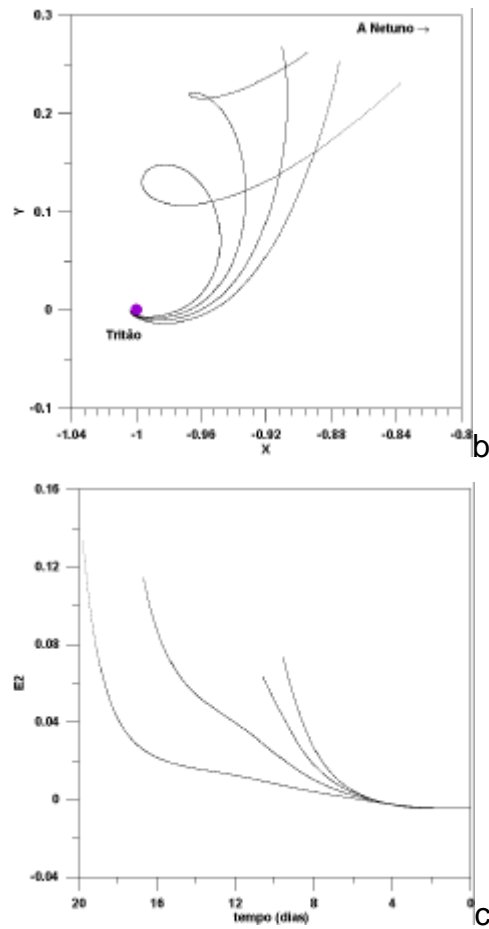


FIGURA 7.7 – (Conclusão).

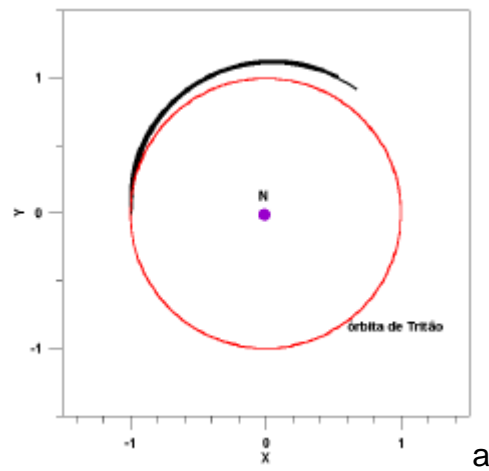


FIGURA 7.8 – Órbita de captura da condição II considerando  $\sigma$  no intervalo  $[120^0, 170^0]$  para órbitas retrógradas. (a) Sistema fixo, (b) Sistema girante, (c)  $E_2$  vs tempo (continua).

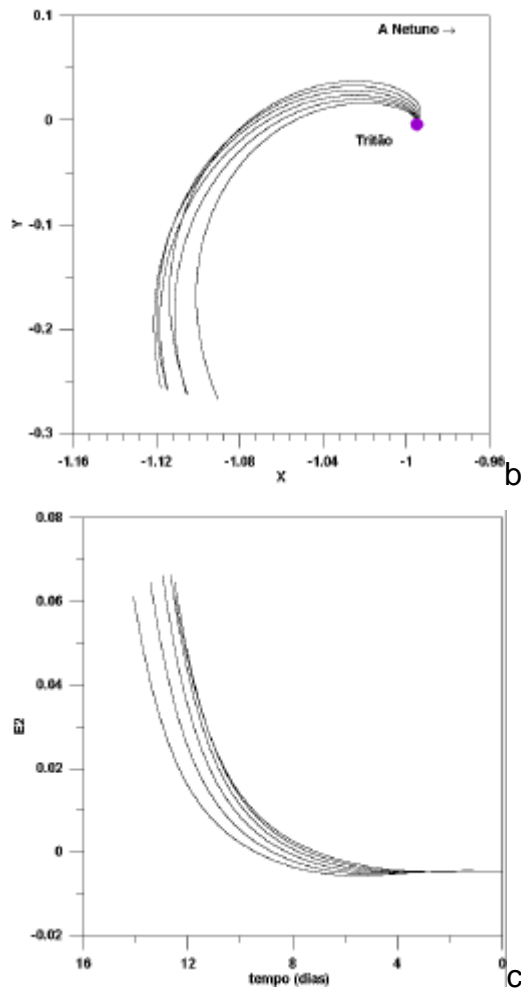


FIGURA 7.8 – (Conclusão).

#### 7.4. Comentários

A captura balística é um método eficiente de colocar um veículo espacial em órbita ao redor do secundário (Tritão). Através das perturbações do terceiro corpo, uma única manobra é necessária para enviarmos, um veículo espacial desde uma órbita próxima ao primário (Netuno), a um ponto onde o veículo espacial é capturado ou ingressa em uma órbita elíptica ao redor do Tritão, sendo esta captura temporária. O veículo espacial se aproxima de Tritão em uma órbita hiperbólica, mas a perturbação do terceiro corpo (Netuno) decresce a energia, o que traz como consequência que a órbita seja uma elipse nas proximidades de Tritão. No entanto, essa mesma perturbação eventualmente

faz com que o veículo espacial ganhe energia e escape da esfera de influência de Tritão.

Assim, neste capítulo analisamos a mudança de energia de dois corpos e a sua influência nos processos de captura gravitacional temporária. Encontramos diversas falhas que mostram um compromisso entre o ângulo que define a posição do pericentro ( $\sigma$ ) e a energia dos dois corpos ( $E_2$ ). Yamakawa (1992) dá uma estimativa das variações da energia de dois corpos e da constante de Jacobi como função do parâmetro de massa  $\mu_2$ . No entanto, existe uma pequena diferença com os valores teóricos desenvolvidos por Prado (2002) e os valores usados por Yamakawa (1992) para o sistema Terra-Lua. Essas diferenças são devidas aos diferentes valores usados para o raio da esfera de influência e para a distância pericêntrica o qual mostra o predomínio deles nos valores de  $E_2$ . Por outro lado, para o sistema que temos estudado, devido à perturbação de Netuno, os valores de  $E_2$  são elevados quando comparados aos valores do sistema Terra-Lua.





## CAPÍTULO 8

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

#### 8.1 Introdução

Neste capítulo nós fazemos alguns comentários respeito ao trabalho aqui apresentado. Discutimos alguns dos principais pontos e propomos alguns itens de interesse para futuros trabalhos.

#### 8.2 Conclusões

No capítulo 2, dois importantes parâmetros, o  $\Delta V$  de lançamento e a velocidade no infinito  $V_\infty$  próxima de Netuno, são considerados como uma função da data de lançamento e do tempo de vôo. Estes dois parâmetros determinam o consumo de combustível desde uma órbita LEO e o frenado próximo de Netuno, respectivamente. O  $\Delta V$  foi considerado o parâmetro mais importante. A opção EJM sem frenado fornece os melhores valores ótimos do  $\Delta V$  total para uma transferência cuja duração seja menor que 13.8 anos. Esta opção também determina valores baixos para o  $V_\infty$ . Para grandes tempos de transferência, a opção EVEJMN é ótima em termos do mínimo  $\Delta V$ , no entanto  $V_\infty$  é alto nesta opção. Para as opções com frenado a o esquema de transferência EJM tem um comportamento ótimo no consumo de combustível comparado às demais opções para um tempo de vôo entre 12 e 17 anos. Mas para tempos de vôo entre os 17-18 anos a opção EVEJMN fornece os menores consumos de combustível, quando comparadas às outras opções.

No capítulo 3, para as manobras que visam fazer do veículo espacial um satélite de Tritão, mostra-se a proporcionalidade direta entre o  $\Delta V$  e  $V_\infty$  nas

proximidades de Netuno. Pequenas mudanças no raio do pericentro não trazem significativas mudanças ao consumo de combustível, mas elevados valores do raio do apocentro minimizam o consumo de combustível, sendo uma desvantagem o tempo investido na manobra. No caso da transferência direta a Tritão, encontramos certos intervalos onde o ângulo  $\rho$  nos fornece o mínimo consumo de combustível em uma missão de sobrevôo a Tritão. Em geral, as manobras que visam fazer do veículo espacial um satélite de Tritão, quando comparadas às transferências diretas, nos fornecem mínimos valores do  $\Delta V$ .

No capítulo 4, nota-se que quando  $I \geq 39^\circ$  e  $I \leq 141^\circ$  existe a possibilidade de acontecer a ressonância de Kozai. Assim o satélite pode sofrer grandes variações da excentricidade. Porém, no problema estudado aqui, temos o efeito adicional do achatamento. Então, mesmo que o satélite esteja na faixa de  $39^\circ \leq I \leq 141^\circ$ , se o achatamento for incluído, variações significativas da excentricidade podem ser atenuadas. Desta forma, satélites localizados em regiões onde os efeitos do achatamento são predominantes, praticamente mantêm a sua original excentricidade e inclinação.

No capítulo 5, as órbitas “tadpole” e “horseshoe” são descritas pela solução completa das equações de movimento, sem usar modelos truncados ou outros tipos de aproximações. Analisamos, principalmente, a variação do ângulo ressonante  $\Delta\lambda$ , como consequência da mudança na excentricidade, inclinação e semi-eixo maior.

No capítulo 6 estudamos as superfícies de seção de Poincaré do sistema Netuno-Tritão-clone, mediante o modelo do problema restrito circular planar dos três corpos, o qual nos fornece uma aproximação do sistema mencionado. Fazendo uma inspeção das superfícies de seção, encontramos que a região caótica incrementa-se com a diminuição da constante de Jacobi. Isto está conectado com a mudança na curva de velocidade zero, a qual permite aproximações mais íntimas entre a partícula e o perturbador, quando o valor da

constante de Jacobi diminui. O efeito do achatamento muda a topologia do espaço de fase. Assim, as ilhas de estabilidade são modificadas quando consideramos o efeito do achatamento.

No capítulo 7, analisamos a captura gravitacional temporária considerando a mudança da energia de dois corpos. Como consequência, aparecem diversas falhas que mostram um compromisso entre o ângulo que define a posição do pericentro ( $\sigma$ ) e a energia de dois corpos ( $E_2$ ). Por outro lado, devido a perturbação de Netuno, os valores de  $E_2$  são elevados quando comparados aos valores do sistema Terra-Lua. Assim, do ponto de vista gravitacional, as forças perturbadoras que atuam no veículo espacial são principalmente a atração gravitacional de Netuno e a força centrífuga, mas essas forças desaceleram o veículo espacial, sendo um efeito equivalente a aplicar uma propulsão contínua no veículo espacial.

### **8.3 Proposta para Futuros Trabalhos**

Devido a que o nosso trabalho fornece diversas informações nas áreas da mecânica celeste e da engenharia aeroespacial, consideramos que alguns pontos de interesse para futuros trabalhos são:

1. Analisar os diversos esquemas de transferência da Terra a Netuno, combinadas com manobras de propulsão contínua, com o objetivo de reduzir o tempo de voo.
2. Inovar as diversas manobras ao redor de Netuno e Tritão, considerando manobras de aerobraking nas suas atmosferas.
3. Aproveitar as manobras aqui sugeridas para lançar diversos sensores à superfície de Netuno e Tritão, com o objetivo de receber informações com respeito à atmosfera e a superfície, e enviar os dados ao veículo espacial que está orbitando esses corpos.

4. Aproveitar a viagem ao sistema de Netuno para estudar diversos asteróides que se encontram no cinturão principal.
5. Analisar a dinâmica do pouso de um orbitador espacial em Netuno e/ou Tritão.
6. Obter uma análise mais detalhada da região entre os  $4.67R_N$ - $14.325R_N$ , com o objetivo de tentar explicar as possíveis causas dinâmicas da ausência de satélites naturais, arcos, anéis ou pequenos corpos orbitando Netuno.
7. Ver as possíveis vantagens ou desvantagens da viagem entre os pontos de equilíbrio lagrangianos e Netuno e/ou Tritão.
8. Estudo da dinâmica em volta dos pontos de equilíbrio Lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$  do sistema Netuno-Tritão-veículo espacial utilizando a normalização de Birkhoff, para pesquisar a influência do achatamento nessas regiões.
9. Analisar outras opções de transferências no sistema Netuno-Tritão. Assim, temos desenvolvimentos de órbitas periódicas, desenvolvimento de órbitas halo, transferências entre órbitas halo, transferência desde uma órbita de baixa altitude ao redor de Netuno a uma órbita halo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Astakhov, S. A.; Farrelly, D. Capture and escape in the elliptic restricted three-body problem. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 354, Issue 4, p. 971-979, 2004.

Battin, R. H. **In Introduction to the mathematics and methods of astrodynamics**. New York: American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Inc, 1987. 796p.

Belbruno, E. A. Examples of the nonlinear dynamics of ballistic capture and escape in the Earth-Moon system. In: annual AIAA Astrodynamics Conference, August 1990, Oregon, EE.UU. **Proceedings**...Oregon: AIAA, 1990. p. 179-184. (AIAA Paper 90-2896).

Belbruno, E. A. **Capture dynamics and chaotic motions in celestial mechanics**. Princeton: Book published by Princeton University Press, 2004. 211p.

Belton, M.; Delamere, A. Low cost missions to explore the diversity of near Earth objects. In: Asteroids, Comets, Meteors, 24-28 Jun. 1991, Arizona, EE.UU. **Proceedings**...Houston: Lunar and Planetary Institute, 1992. p. 49-55.

Borderies, N. Properties of possible polar rings around Neptune. **Icarus**, v. 77, n.1, p. 135-147, 1989.

Broucke, R. A. **Periodic orbits in the restricted three-body problem with Earth-Moon masses**. Pasadena: Jet Propulsion Laboratory, 1968. 92 p. (NASA-Technical Report 32-1168)

Brumberg, V. A.; Evdokimova, L. S.; Kochina, N. G. Analytical methods for the orbits of artificial satellites of the Moon. **Celestial Mechanics**, v. 3, p. 197-221, 1970.

Carusi, A.; Pozzi, F. Planetary close encounters between Jupiter and about 3000 fictitious minor bodies. **The Moon and the Planets**, v. 19, p. 71-87, 1978.

Carusi, A.; Valsechi, G. Planetary Close Encounters - Importance of Nearly Tangent Orbits. **The Moon and the Moon Planets**, v. 22, p. 113-124, 1980a.

Carusi, A.; Valsechi, G. Effects of a Close Encounter with Jupiter on Different Populations of Planet-Crossing Objects. **The Moon and the Planets**, v. 22, p. 133-139, 1980b.

- Carruba, V.; Nesvorny, D.; Burns, J.; Cuk, M.; Tsiganis, K. Chaos and the effects of planetary migration on the orbit of S/2000 S5 Kiviuq. **The Astronomical Journal**, v. 128, n 4, p. 1899-1915, 2004.
- Chandra, N.; Kumar, R. Effect of oblateness on the non-linear stability of the triangular libration points of the restricted three-body problem in the presence of resonances. **Astrophysics and Space Science**, v. 291, Issue 1, p. 1-19, 2004.
- Chyba, C. F.; Jankowski, D. G.; Nicholson, P. D. Tidal evolution in the Neptune-Triton system. **Astronomy and Astrophysics**, v. 219, n. 1-2, p. L23-L26, 1989.
- Christou, A.A. A Numerical survey of transient co-orbitals of the terrestrial planets. **Icarus**, v. 144, Issue 1, p. 1-20, 2000.
- D'Amario, L. A.; Byrnes, D. V.; Stanford, R. H. A New method for optimizing multiple-flyby trajectories. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 4, n. 6, p. 591-596, 1981.
- Dermott, S. F.; Gold, T.; Sinclair, A. T. The rings of Uranus - nature and origin. **Astronomical Journal**, v. 84, n.8, p. 1225-1235, 1979.
- Dermott, S. F.; Murray, C.; Sinclair, A. T. The narrow rings of Jupiter, Saturn and Uranus. **Nature**, v. 284, p. 309-313, 1980.
- Dermott, S.F.; Murray, C.D. The dynamics of tadpole and horseshoe orbits I. Theory. **Icarus**, v. 48, Issue. 1, p. 1-11, 1981a.
- Dermott, S.F.; Murray, C.D. The dynamics of tadpole and horseshoe orbits II. The coorbital satellites of Saturn. **Icarus**, v. 48, Issue. 1, p. 12-22, 1981b.
- Dobrovolskis, A. R. Where are the rings of Neptune?. **Icarus**, v. 43, Issue. 2, p. 222-226, 1980.
- Dobrovolskis, A. R.; Borderies, N. J. Stability of polar rings around Neptune. **Icarus**, v. 81, n.1, p. 135-147, 1989a.
- Dobrovolskis, A. R.; Steiman-Cameron, T. Y.; Borderies, N. J. Neptune may have Polar Rings. **Geophysical Research Letters**, v. 16, n.8, p. 949-952, 1989b.
- Farquhar, R.; Muhonen, D.; Church, L. Trajectories and orbital maneuvers for the ISEE-3/ICE comet mission. **The Journal of the Astronautical Sciences**, v. 33, n. 3, p. 235-254, 1985.

Flandro, G. A. Fast reconnaissance missions to the outer solar system utilizing energy derived from the gravitational field of Jupiter. **Astronautica Acta**, v. 12, n. 4, p. 329-337, 1966.

Foryta, D.; Sicardy, B. The Dynamics of the Neptunian Adams Ring's Arcs. **Icarus**, v. 123, Issue. 1, p. 129-167, 1996.

Giacaglia, G. E. O. **Lunar perturbations on artificial satellites of the earth**. Cambridge: Smithsonian Astrophysical Observatory, 1973. 59 p. ( Special Report 352)

Giacaglia, G. E. O.; Murphy, J. P.; Felsentreger, T. L. A semi-analytical theory for the motion of a lunar satellite. **Celestial Mechanics**, v. 3, p. 3-66, 1970.

Goldreich, P.; Murray, N.; Longaretti, P.; Banfield, D. Neptune's story. **Science**, v. 245, n. 1-2, p. 500-504, 1989.

Hammel, H. B.; Baines, K. H.; Cuzzi, J. D.; de Pater, I.; Grundy, W. M.; Lockwood, G. W.; Perry, J.; Rages, K. A.; Spilker, T.; Stansberry, J. A. Exploration of the Neptune System 2003-2013. **Astronomical Society of Pacific Conferences**, v. 272, p. 297-322, 2002.

Harris, A. W. **Physical properties of Neptune and Triton inferred from the orbit of Triton, in Uranus and Neptune**. Pasadena: Jet Propulsion Laboratory, 1984. 16p (NASA CP-2230)

Hénon, M. Exploration numérique du problème restreint. II. Masses égales, stabilité des orbites périodiques. **Ann. Astrophys**, v. 28, n. 6, p. 992-1007, 1965.

Heppenheimer, T. A. On the presumed capture origin of Jupiter's outer satellites. **Icarus**, v. 24, Issue. 2, p. 172-180, 1975.

Heppenheimer, T. A.; Porco, C. New contributions to the problem of capture. **Icarus**, v. 30, Issue. 2, p. 385-401, 1977.

Hollister, W. M.; Prussing, J. E. Optimum transfer to Mars via Venus. **Astronautica Acta**, v. 12, n. 2, p. 169-179, 1966.

Holman, M. J.; Kavelaars, J.; Grav, T.; Gladman, B. J.; Fraser, W. C.; Milisavljevic, D.; Nicholson, P. D.; Burns, J. A.; Carruba, V.; Petit, J. M.; Rousselot, P.; Mousis, O.; Marsden, B. G.; Jacobson, R. A. Discovery of five irregular moons of Neptune. **Nature**, v. 230, p. 865-867, 2004.

Huang, T. Y.; Innanen, K. A. The gravitational escape/capture of planetary satellites. **The Astronomical Journal**, v. 88, n 10, p. 1537-1548, 1983.

Kaula, W.M.; Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite. **The Astronomical Journal**, v. 67, n. 5, p. 300–303, 1962.

Kinoshita, H.; Nakai, H. Secular perturbations of fictitious satellites of Uranus. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 52, n. 3, p. 293-303, 1991.

Kozai, Y. **On the effects of the Sun and Moon upon the motion of a close Earth satellite**. Cambridge: Smithsonian Astrophysical Observatory, 1959. 59 p. (Special Report 22)

Kozai, Y. Secular perturbations of asteroids with high inclinations and eccentricities. **Astronomical Journal**, v. 67, n. 9, p. 591-598, 1962.

Kozai, Y. Motion of a Lunar Orbiter, **Publications of the Astronomical Society of Japan**, v. 15, n. 3, p. 301-312, 1963.

Kozai, Y. **A new method to compute lunisolar perturbations in satellite motions**. Cambridge: Smithsonian Astrophysical Observatory, 1973. 28p. (Special Report 349)

Labunsky, A. V.; Papkov, O. V.; Sukhanov, K. G. **Multiple gravity assist interplanetary trajectories**. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1998. 285p.

Longuski, J. M.; Williams, S. N. The last grand tour opportunity to Pluto. **The Journal of the Astronautical Sciences**, v. 39, n. 3, p. 359-365, 1991.

Miller, J. K.; Belbruno, E. A. A method for the construction of a Lunar transfer trajectory using ballistic capture. In 1st AAS/AIAA Annual Spaceflight Mechanics Meeting, Feb 1991, Houston, EE.UU. **Proceedings...** Houston: Spaceflight mechanics, 1991. p. 97-109. (AAS Paper 91-100)

Muhonen, D.; Davis, S.; Dunham, D. Alternative gravity-assist sequences for the ISEE-3 escape trajectory. **The Journal of the Astronautical Sciences**, v. 33, n. 3, p. 255-273, 1985.

Murray, C. D.; Dermott, S. F. **Solar system dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 591p.

Nascimento, Clair do. **Possíveis conseqüências na evolução de Tritão em queda**. 2003. 93 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – UNESP, Rio Claro. 2003.



Owen Jr, W. M.; Vaughan, R. M.; Synnott, S. P. Orbit of the six new satellites of Neptune. **The Astronomical Journal**, v. 101, n.4, p. 1511-1515, 1991.

Peralta, F.; Flanagan, S. Cassini interplanetary trajectory design. **Control Eng. Practice**, v. 3, n. 11, p. 1603-1610, 1995.

Perdios, E. A.; Kanavos, S. S.; Markellos, V. V. Bifurcações of plane to 3D periodic orbits in the restricted three-body problem with oblateness. **Astrophysics and Space Sciences**, v. 262, n. 1, p. 75-87, 1999.

Pollack, J. B.; Burns, J.A.; Tauber, M. E. Gas drag in primordial circumplanetary envelopes - A mechanism for satellite capture, **Icarus**, v. 37, Issue 3, p. 587-611, 1979.

Porco, C. An explanation for Neptune's Ring Arcs. **Sciences**, v. 253, n. 5023, p. 995-1001, 1991.

Prado, A.F.B.A. Numerical study and analytical estimation of forces acting in ballistic gravitational capture. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 25, n. 2, p. 368-375, 2002.

Rabe, E. Determination and survey of periodic Trojan orbits in the restricted problem of three bodies. **Astronomical Journal**, v. 66, n. 9, p. 500-513, 1961.

Sharma, R. K.; Rao, P. V. S. Collinear equilibria and their characteristic exponents in the restricted three-body problem when the primaries are oblate spheroids, **Celestial Mechanics**, v. 12, p. 189-201. 1975.

Sinclair, A. Perturbations on the orbits of companions of the satellites of Saturn, **Astronomy and Astrophysics**, v. 136, n. 1, p. 161-166, 1984.

Sims, J. A.; Longuski, J. M.; Patel, M. R. Aerogravity-assist trajectories to the outer planets. **Acta Astronautica**, v. 35, Issue 3-4, p. 297-306, 1995.

Sims, J. A.; Staugler, A. J.; Longuski, J. M. Trajectory options to Pluto via gravity assists from Venus, Mars, and Jupiter. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 34, n. 3, p. 347-353, 1997.

Solórzano, C.R.H.; Sukhanov, A.A.; Prado, A.F.B.A. Optimization of Transfers to Neptune, **Journal of the Nonlinear Dynamics and System Theory**, 2006a. Aceito.

Solórzano, C.R.H.; Sukhanov, A.A.; Prado, A.F.B.A. Analysis of Trajectories to Neptune Using Gravity Assists. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 122, p. 447-457, 2006b.

Solórzano, C.R.H.; Prado, A.F.B.A. Third body perturbation using single averaged model: Lunisolar perturbation, **Journal of the Nonlinear Dynamics and System Theory**, 2006. Aceito.

Solórzano, C.R.H.; Sukhanov, A.A.; Prado, A.F.B.A. Close approach to Neptune Using Gravity Assists. In: 56<sup>th</sup> International Astronautical Congress (IAC), October 17-21 2005, Fukuoka, Japon. **Proceedings...** 1 CD-ROM sem numeração (IAC-05-C1.P.23)

Stern, S. A. **Future Neptune and Triton Missions**. [ mensagem pessoal]. Mensagem recebida por <renato@dem.inpe.br> de <alan@boulder.swri.edu> em 07 fev. 2005.

Striepe, S. A.; Braun, R. D. Effects of a Venus swingby periapsis burn during an Earth-Mars trajectory. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 39, n 3, p. 299-312, 1991.

Subbarao, P. V.; Sharma, R. K. A note on the stability of the triangular points of equilibrium in the restricted three-body problem. **Astronomy and Astrophysics**, v 43, n. 3, p. 381-383, 1975.

Swenson, B. L. Neptune atmospheric probe mission. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 39, n. 3, p. 299-312, 1992.

Szebehely, V. **Theory of orbits: The restricted problem of three bodies**. New York: Academic Press Inc., 1967. 667p.

Tanikawa, K. Impossibility of the capture of retrograde satellites in the restricted three-body problem. **Celestial Mechanics**, v. 29, p. 367-402, 1983.

Taylor, D. B. Horseshoe periodic orbits in the restricted problem of three bodies for a Sun-Jupiter mass ratio. **Astronomy and Astrophysics**, v. 103, n. 2, p. 288-294, 1981.

Veillet, C.; Bois. E. 1982-1984 observations of Neried - New orbital determination. **Astronomy and Astrophysics**, v.189, n. 1-2, p. 303-305, 1988.

Veverka, J.; Robinson, M.; Thomas, P.; Murchie, S.; Bell, J. F.; Izenberg, N.; Chapman, C.; Harch, A.; Bell, M.; Carcich, B.; Cheng, A.; Clark, B.; Domingue, D.; Dunham, D.; Farquhar, R.; Gaffey, M. J.; Hawkins, E.; Joseph, J.; Kirk, R.; Li, H.; Lucey, P.; Malin, M.; Martin, P.; McFadden, L.; Merline, W. J.; Miller, J. K.; Owen, W. M.; Peterson, C.; Prockter, L.; Warren, J.; Wellnitz, D.; Williams, B. G.; Yeomans, D. K. NEAR at Eros: Imaging and Spectral Results. **Science**, v. 289, Issue 5487, p. 2088-2097, 2000.

Vieira Neto, E. **Estudo numérico da captura gravitacional temporária utilizando o problema restrito dos três corpos**. 1999. 224p. (INPE-7033-TDI/663). Teses (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espacial) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 1999.

Vieira Neto, E; Winter O.C. Time Analysis for Temporary Gravitational Capture: Satellites of Uranus. **Astronomical Journal**, v. 122, Issue 1, p. 440-448, 2001.

Winter O.C; Murray, C.D. **Atlas of the planar, circular, restricted three-body problem. I. Internal orbits**. London: Queen Mary and Westfield College, 1994a. 8p. (QMW Math Notes N16)

Winter O.C; Murray, C.D. **Atlas of the planar, circular, restricted three-body problem. II. External orbits**. London: Queen Mary and Westfield College, 1994b. 8p. (QMW Math Notes N16)

Yamakawa, H. **On Earth-Moon transfer trajectory with gravitational capture**. 1992. 223p. Ph.D. dissertation - Dept. of Aeronautics, Univ. of Tokyo, Tokyo. 1992.

Yoder, C.; Colombo, G.; Synnott, S.; Yoder, K. Theory of motion of Saturn's coorbital satellites. **Icarus**, v. 53, Issue 3, p. 431-443, 1983.

Yokoyama, T. Possible effects of secular resonances in Phobos and Triton. **Planetary and Space Science**, v. 50, Issue 1, p. 63-77, 2002.

Yokoyama, T.; Santos, M.; Cardin, G.; Winter O.C. On the orbits of the outer satellites of Jupiter. **Astronomy and Astrophysics**, v. 401, n. 2, p. 763-772, 2003.