

ETAPAS INICIAS DO DESENVOLVIMENTO DE UM MÉTODO PARA DETERMINAÇÃO DE CONDUTIVIDADE TÉRMICA DE MATERIAIS ANISOTRÓPICOS

Alfredo Carlos do Prado

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – Div. de Engenharia Mecânica-Aeronáutica
Pça Marechal Eduardo Gomes, 50 - 12228-900 - São José dos Campos, SP, Brasil
alfredocarlos.prado@gmail.com

Ezio Castejon Garcia

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – Div. de Engenharia Mecânica-Aeronáutica
ezio@ita.br

Resumo. A condução de calor em sólidos é estudada geralmente em materiais isotrópicos onde a condutividade térmica não é dependente da direção. Porém, muitos materiais (naturais ou não) são ditos anisotrópicos. Destes podemos citar cristais, madeira, rochas, forjados a frio, laminados, estruturas reforçadas com fibras (de vidro, de carbono, etc). Matematicamente a condutividade térmica de isotrópico é um escalar simples. Já em anisotrópico, esta se apresenta como um tensor de segunda ordem (nove componentes). Desta forma, o estudo de trocas de calor torna-se muito dificultoso. Uma maneira adequada de tratar tais dificuldades é transformar este tensor de nove componentes, função de três coordenadas de direção, em três únicas componentes (ditas principais) com suas respectivas (e novas) direções (ditas também principais). Esta abordagem é semelhante ao estudo de tensor de tensões mecânicas em sólidos. Mesmo reduzindo o número de componentes ainda, logicamente, é necessário conhecer estas ditas principais para que haja solução do problema de troca de calor. Para tanto, este projeto propõe o desenvolvimento de um modelo matemático-experimental para determinação destas condutividades principais e de suas direções, que são obtidas pela determinação dos seus respectivos cossenos diretores.

Palavras chave: anisotropia, condutividade térmica, materiais anisotrópicos.

1. Introdução

O assunto sobre condutividade térmica anisotrópica (condutividade em materiais não homogêneos) como acontece em cristais, materiais compostos, madeiras, laminados dentre outros é de grande importância na engenharia para se saber de forma mais precisa como o calor se propaga nesses e quais são as direções preferenciais para a propagação. Hoje, o que se conhece são valores aproximados e muitos dos materiais são tratados como sendo isotrópicos. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de medição das condutividades térmicas em materiais anisotrópicos. A parte experimental é realizada em uma câmara termovácuo com ensaios em corpos de prova com fluxo de calor unidimensional (Garcia, 1987). Esta unidimensionalidade, objetivo principal do ensaio em câmara termovácuo, é obtida pela ausência de convecção (alto vácuo) e radiação térmica nula da parede destes corpos de prova (blindagem por superisolantes). Assim é obtido o fluxo de calor por condução no sentido apenas longitudinal. A unidimensionalidade, no modelo em questão, é requisito essencial na determinação das condutividades principais, e de seus eixos, em materiais anisotrópicos (Özisik et al, 1979).

A taxa de calor que atravessa o corpo de prova é gerada por meio de um aquecedor de película (“skin heater”). O fluxo de calor é unidimensional e tem direções preestabelecidas. No estudo em questão, os fluxos foram impostos nas direções dos eixos (coordenadas cartesianas). Já os gradientes de temperaturas foram medidos ao longo do corpo em todas as direções. E assim, através do embasamento teórico sobre o assunto de anisotropia chegou-se ao resultado do valor das condutividades térmicas do material.

2. Formulação Matemática

O fluxo de calor em sólidos obedece a Lei de Fourier de Condução. Em sólidos isotrópicos, a condutividade térmica é independente das direções; assim o vetor fluxo de calor, Eq. (1), é normal à linha isotérmica (gradiente normal da temperatura) que passa na posição do corpo considerado em estudo.

$$q = -k \nabla T \quad (1)$$

Para sólidos anisotrópicos a situação é bastante diferente. A componente do fluxo de calor para uma dada direção “ q_x ” depende da combinação linear dos gradientes de temperatura nas direções de X , Y e Z . Desta forma, levando em conta essa consideração, as expressões gerais para os três componentes de fluxo de calor, “ q_x ”, “ q_y ” e “ q_z ”, respectivas às direções X , Y , e Z , para um dado sistema de coordenadas cartesianas, são dadas, respectivamente, como:

$$-q_x = k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2a)$$

$$-q_y = k_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2b)$$

$$-q_z = k_{31} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2c)$$

De forma resumida, a equação geral do fluxo de calor é dada por:

$$q_i = - \sum_{j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (3)$$

Portanto, para um sólido anisotrópico, o vetor fluxo de calor “ q ” não é necessariamente normal à linha isotérmica que passa na posição do corpo considerado em estudo. A condutividade térmica do sólido anisotrópico envolve nove componentes de condutividade, k_{ij} , que são as componentes do tensor k , de segunda ordem, apresentados a seguir:

$$k \equiv \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} \quad (4)$$

2.1. Coeficiente de Resistividade Térmica

Os vetores fluxos de calor “ q_x ”, “ q_y ” e “ q_z ” foram descritos como soma linear dos gradientes de temperatura nas direções dos eixos X , Y , e Z . Essas equações, por conveniência, é mais bem expressa em termos de gradientes de temperatura e como uma combinação linear das componentes dos fluxos de calor. Assim, a equação do fluxo de calor, na forma matricial em coordenadas retangulares, fica na seguinte forma:

$$- [k_{ij}] \cdot \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \right] = [q_i] \quad (5)$$

ou

$$- \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \right] = [k_{ij}]^{-1} \cdot [q_i] \quad (6)$$

Adotando “ r_{ij} ” para os elementos da matriz inversa “ $1/[k_{ij}]$ ”, as equações ficam expressas como:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = r_{11}q_x + r_{12}q_y + r_{13}q_z \quad (7a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = r_{21}q_x + r_{22}q_y + r_{23}q_z \quad (7b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = r_{31}q_x + r_{32}q_y + r_{33}q_z \quad (7c)$$

Onde “ r_{ij} ” são os coeficientes da resistividade térmica.

2.2. Fluxo de calor

Considere o cubo, Fig.1, com faces identificadas por seus respectivos vetores normais com diferentes temperaturas nas extremidades e com as superfícies laterais isoladas. Supondo não haver perdas de calor pelas laterais para as vizinhanças ($q_x = q_y = 0$) (ambiente de alto vácuo com blindagens, convecção e radiação de calor nulas), o fluxo de calor torna-se unidimensional.

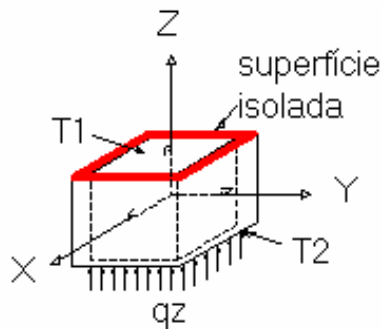


Figura 1. Cubo com faces identificadas por seus respectivos vetores normais.

Substituindo o vetor fluxo de calor “ q_z ” na direção do eixo Z nas equações anteriores. Então têm-se:

$$-\frac{\partial T}{\partial x} = r_{13} q_z \quad (08a) ; \quad -\frac{\partial T}{\partial y} = r_{23} q_z \quad (08b); \quad -\frac{\partial T}{\partial z} = r_{33} q_z \quad (08c)$$

Esse resultado implica em conhecer $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial z$ e “ q_z ” para determinar os coeficientes das resistividades térmicas r_{13} , r_{23} , e r_{33} .

No passo seguinte vamos mudar o sentido do fluxo, agora o fluxo atravessa o cubo na direção do eixo Y, e para garantir que o fluxo seja unidimensional, as superfícies a serem isoladas serão normais ao eixo X e Z. Logo $q_x = q_z = 0$ com as equações em função de “ q_y ”.

$$-\frac{\partial T}{\partial x} = r_{12} q_y \quad (08d) ; \quad -\frac{\partial T}{\partial y} = r_{22} q_y \quad (08e); \quad -\frac{\partial T}{\partial z} = r_{23} q_y \quad (08f)$$

Esse resultado implica em conhecer $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial z$ e “ q_y ” (para a taxa de calor “ q_y ” conhecida e $q_x = q_z = 0$), para determinar os coeficientes das resistividades térmicas r_{12} , r_{22} , e r_{32} .

Analogamente, repetimos o procedimento para $q_y = q_z = 0$ e aplicaremos “ q_x ”, com as equações em função de “ q_x ” que são:

$$-\frac{\partial T}{\partial x} = r_{11} q_x \quad (08g); \quad -\frac{\partial T}{\partial y} = r_{12} q_x \quad (08h); \quad -\frac{\partial T}{\partial z} = r_{13} q_x \quad (08i)$$

Esse resultado implica em conhecer $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial z$ e “ q_x ” (para a taxa de calor q_x conhecido e $q_y = q_z = 0$), para determinar os coeficientes da resistividade térmica r_{11} , r_{21} , e r_{31} .

Agora foram levantados os nove elementos coeficientes da resistividade térmica da matriz do tensor que são eles:

$$r \equiv \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} \quad (09)$$

Lembrando que a matriz inversa de $[r]$, $1/[r]$ é a própria matriz do tenso k , de componentes k_{ij} . Onde, os coeficientes k_{ij} são as condutividades térmicas que pretendemos obter como parte objeto do nosso trabalho, e são

determinados em relação dos r_{ij} pelo processo da inversão de matrizes, desde que $r_{ij} = r_{ji}$, condição requerida da reciprocidade dos coeficientes da resistividade térmica anisotrópica.

$$r_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} / \Delta \quad (10)$$

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} \quad (11)$$

A parcela a_{ij} é obtida pela matriz do determinante, Δ , excluindo a linha i e a coluna j , como no caso da relação da reciprocidade dos coeficientes da resistividade térmica anisotrópica $r_{ij} = r_{ji}$, a condutividade térmica anisotrópica também obedece os mesmos princípios, $k_{ij} = k_{ji}$. A seguir é ilustrado exemplo da aplicação da equação $r_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} / \Delta$:

$$k_{12} = (-1)^3 \frac{\begin{vmatrix} r_{21} & r_{23} \\ r_{31} & r_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{r_{23}r_{31} - r_{21}r_{33}}{\Delta} \quad (12)$$

2.3. Determinação das condutividades principais

As condutividades principais k_1 , k_2 , e k_3 de um sólido anisotrópico podem ser determinadas através dos coeficientes das condutividades, k_{ij} , de um sistema de coordenadas retangulares X , Y , e Z previamente estabelecido. E, são autovalores, λ , empregado na transformação para a matriz diagonal.

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \lambda & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} - \lambda & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

Ao resolver o determinante desta matriz, obtemos uma equação do terceiro grau com três raízes, que são valores distintos para λ_1 , λ_2 , e λ_3 . Os autovalores λ estão diretamente relacionados com os valores das condutividades principais k_1 , k_2 , e k_3 , na forma:

$$\lambda_1 = k_1; \quad \lambda_2 = k_2; \quad \lambda_3 = k_3 \quad (14)$$

3. Arranjo Experimental

Para o estudo em questão foi utilizado um corpo de prova de material “celeron” (denominação comercial). “O Celeron é um laminado industrial, duro e denso, fabricado através de aplicação de calor e pressão em camadas de tecido de algodão impregnadas com resinas sintéticas (fenólicas). Quando o calor e a pressão são aplicados simultaneamente às camadas, uma reação química (polimerização) ocorre, aglomerando as camadas em uma massa sólida e compacta. Sua condutividade térmica é de 0,35 W/m°C (www.vick.com.br).

O corpo de prova possui formato cúbico de 24mm de aresta, com furos de 1mm de diâmetro para fixação dos termopares espaçados, com 6mm entre centros, sendo cinco termopares sobre o eixo X , quatro sobre o eixo Y , e quatro sobre o eixo Z . O termopar sobre o eixo X na posição da origem é comum para os três eixos; assim, tem-se um total de treze termopares fixado no corpo de prova. Foram realizadas cinco medidas de temperaturas (ou ensaios) para cada eixo. Figura 2 apresenta tal corpo de prova instrumentado com o aquecedor de película (“skin heater”) colado no topo deste corpo. Esta fig. 2 também apresenta os termopares instalados neste corpo de prova. Sob tal, está o sumidouro da câmara (uma serpentina do sistema de refrigeração). Envolvendo a parede interna da câmara, é apresentada parte da blindagem contra radiação térmica (superisolante).

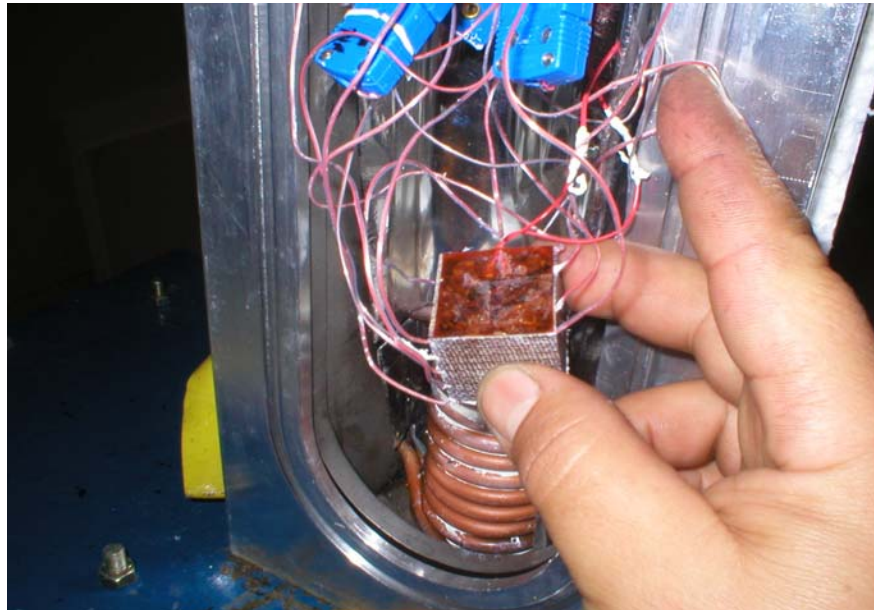


Figura 2. Corpo de Prova instrumentado com o aquecedor de película (“*skin heater*”) e termopares, e serpentina do sistema de refrigeração (sumidouro da câmara).

Figura 3 apresenta uma vista geral do aparato experimental: sobre a bancada de teste, à esquerda, está a câmara de alto vácuo, do lado direito a esta da câmara, está a fonte de alimentação de energia elétrica do aquecedor de película (“*skin heater*”), e os termopares a serem conectados ao medidor de temperatura. À frente estão os dois multímetros utilizados na medição da voltagem e a corrente para a alimentação do aquecedor de película (imposição da taxa de calor).



Figura 3. Vista geral do aparato experimental.

A figura 4 apresenta o sistema de bombeamento e medição de vácuo, e o sumidouro de calor da câmara. Localizado em uma bancada menor ao lado esquerdo da bancada de teste está o medidor eletrônico de vácuo e a bomba mecânica, esta é interligada pela mangueira de vácuo à bomba difusora, localizada na parte inferior da bancada de teste, presa sob o tampo da bancada. Sob a bancada de teste está também, o sistema de refrigeração do sumidouro.



Figura 4. Sistema de bombeamento e medição de vácuo e o sumidouro de calor da câmara.

3.1. Valores Obtidos Experimentalmente.

Tabela 1 são mostrados valores médios obtidos numa série de doze de medidas, com as incertezas de $\pm 0,0005$ m para as medidas de comprimento de posição, de $\pm 0,6^\circ\text{C}$ para as medidas de temperatura e de $\pm 12 \text{ W/m}^2$ para as medidas de fluxos, com a probabilidade de dois desvios padrões (nível de confiança de 20:1).

Tabela 1 – Valores médios da série de doze medidas de temperatura.

Posição (X ; Y ; Z)	Medidas das temperaturas		
	Fluxo unidirecional		
	$q_x=5620$ $q_y=0$ $q_z=0$	$q_y=5620$ $q_x=0$ $q_z=0$	$q_z=5620$ $q_x=0$ $q_y=0$
(0 ; 0,012 ; 0,012)	-9,4	73,2	39,1
(0,006 ; 0,012 ; 0,012)	29,1	81,3	35,8
(0,012 ; 0,012 ; 0,012)	53,8	85,5	29,2
(0,018 ; 0,012 ; 0,012)	83,5	81,8	30,1
(0,024 ; 0,012 ; 0,012)	131,8	66,7	43,8
(0,012 ; 0 ; 0,012)	37,3	-4,2	64,8
(0,012 ; 0,006 ; 0,012)	23,7	28,6	81,6
(0,012 ; 0,012 ; 0,012)	53,8	85,5	29,2
(0,012 ; 0,018 ; 0,012)	17,3	84,3	85,7
(0,012 ; 0,024 ; 0,012)	31,4	130,3	80,5
(0,012 ; 0,012 ; 0)	68,5	33,4	-11,3
(0,012 ; 0,012 ; 0,006)	83,8	31,3	27,7
(0,012 ; 0,012 ; 0,012)	53,8	85,5	29,2
(0,012 ; 0,012 ; 0,018)	79,4	22,9	82,6
(0,012 ; 0,012 ; 0,024)	61,3	33,7	124,4

3.2. Substituição dos Valores de Temperatura na Formulação Teórica para o Cálculo das Resistividades Térmicas.

Seguindo as formulações apresentadas pelas Eq. 8a até 8i, as funções polinomiais correspondentes (obtidas pelo método de interpolação de Lagrange) que representam as variações são descritas na Tab. 2, os quais foram obtidas a partir dos valores da Tab.1.

Tabela 2 - Funções polinomiais que representam as variações temperatura com o comprimento.

(08 a)	q_x	$T = -189686214 x^4 + 21334877 x^3 - 527894 x^2 + 8856,94 x - 9,4$
(08 b)		$T = 731417811 y^4 - 348418210 y^3 + 5035301 y^2 - 2151,27 y + 37,3$
(08 c)		$T = -6436471193 z^4 - 309567901 z^3 - 4579398 z^2 - 20272,22 z + 68,5$
(08 d)	q_y	$T = -16075102,88 x^4 - 3665123,5 x^3 + 7754,63 x^2 + 1431,94 x + 73,2$
(08 e)		$T = 6028163580 y^4 - 280439815 y^3 + 3663542 y^2 - 8920,833 y - 4,2$
(08 f)		$T = 11680169753 z^4 - 554050926 z^3 + 7811458 z^2 - 29795,83 z + 33,4$
(08 g)	q_z	$T = -176826131,1 x^4 + 14699074 x^3 - 265856 x^2 + 554,17 x + 39,1$
(08 h)		$T = -11210776749 y^4 - 5410108002 y^3 - 7874190 y^2 - 32990,28 y + 64,8$
(08 i)		$T = -4915766461 z^4 + 245949074 z^3 - 3709144 z^2 - 20962,5 z + 68,5$

3.3. Substituição dos valores nas equações 8a até 8i, 9, 11 e 12 na determinação das condutividades principais.

Substituindo as equações da Tab. 2 nas Eq. 8a até 8i, e resolvendo suas derivadas, encontramos os coeficientes das resistividades térmicas anisotrópica r_{ij} , apresentados na quinta coluna da Tab. 3. Os valores de r_{ij} , substituídos na matriz (Eq 9), e invertendo esta, obtêm-se o tensor da resistividade térmica anisotrópica r (Eq 12). Assim, invertendo esta matriz r , é obtida a matriz dos coeficientes de condutividade térmica anisotrópico que envolve nove componentes de condutividade, k_{ij} , os quais que são as componentes do tensor k , de segunda ordem, apresentado na matriz (Eq 4). Equação 13 fornece os autovalores, λ , (Eq.14), que são os valores das condutividades térmicas principais que é o objeto de estudo deste trabalho (apresentado na oitava coluna da Tab. 3).

Tabela 3a- Valores dos coeficientes das resistividades térmicas anisotrópicas r_{ij} em função da posição (central do corpo de prova).

Eq.	Posição	DT/DX	Valores de r_{ij}		Valores de k_{ij}		autovalores, λ_i
(08 a)	(0,012 ; 0,012 ; 0,012)	-5124	r_{11}	0,912	k_{11}	0,47277	λ_1 0,001
(08 b)	(0,012 ; 0,012 ; 0,012)	149888	r_{12}	-26,670	k_{12}	0,5141	
(08 c)	(0,012 ; 0,012 ; 0,012)	-134122	r_{13}	23,865	k_{13}	0,57978	
(08 d)	(0,012 ; 0,012 ; 0,012)	1729	r_{21}	-0,308	k_{21}	-0,0166	λ_2 0,460
(08 e)	(0,012 ; 0,012 ; 0,012)	125471	r_{22}	-22,326	k_{22}	-0,0047	
(08 f)	(0,012 ; 0,012 ; 0,012)	238413	r_{23}	-42,422	k_{23}	0,01092	
(08 g)	(0,012 ; 0,012 ; 0,012)	-7049	r_{31}	1,254	k_{31}	0,0053	λ_3 -0,002
(08 h)	(0,012 ; 0,012 ; 0,012)	-233479	r_{32}	41,544	k_{32}	-0,0248	
(08 i)	(0,012 ; 0,012 ; 0,012)	-102035	r_{33}	18,156	k_{33}	-0,0099	
			$k_1 = 0,001 W/m^{\circ}C$		$k_2 = 0,460 W/m^{\circ}C$		$k_3 = -0,002/m^{\circ}C$

Tabela 3b - Valores dos coeficientes das resistividades térmicas anisotrópicas r_{ij} em função da posição.

Eq.	Posição	DT/DX	Valores de r_{ij}		Valores de k_{ij}		autovalores,
(08 a)	(0,024 ; 0,012 ; 0,012)	9896	r_{11}	-1,761	k_{11}	-0,473436	λ_1 0,430
(08 b)	(0,024 ; 0,012 ; 0,012)	22557	r_{12}	-4,014	k_{12}	-0,365874	
(08 c)	(0,024 ; 0,012 ; 0,012)	-20517	r_{13}	3,651	k_{13}	0,663734	
(08 d)	(0,012 ; 0,024 ; 0,012)	-3640	r_{21}	0,648	k_{21}	-0,0523176	λ_2 -0,193
(08 e)	(0,012 ; 0,024 ; 0,012)	25263	r_{22}	-4,495	k_{22}	-0,0163713	
(08 f)	(0,012 ; 0,024 ; 0,012)	33621	r_{23}	-5,982	k_{23}	0,134141	
(08 g)	(0,012 ; 0,012 ; 0,024)	3415	r_{31}	-0,608	k_{31}	-0,0119499	λ_3 -0,038
(08 h)	(0,012 ; 0,012 ; 0,024)	-30015	r_{32}	5,341	k_{32}	-0,194472	
(08 i)	(0,012 ; 0,012 ; 0,024)	-3899	r_{33}	0,694	k_{33}	-0,172659	
			$k_1 = 0,430 W/m^{\circ}C$		$k_2 = -0,193 W/m^{\circ}C$		$k_3 = -0,038 W/m^{\circ}C$

4. Conclusões e comentário.

Tabelas 3a e 3b apresentam valores das condutividades térmicas anisotrópicas: $\lambda_1 = k_1$, $\lambda_2 = k_2$ e $\lambda_3 = k_3$. Como esperado para sólidos anisotrópicos, estas condutividades sofrem variações com a posição.

Vale comentar que a condutividade é uma grandeza física positiva, embora, alguns autovalores, λ_i , aparecem nas Tab. 3_a e 3_b com sinal negativo. Isto é explicado pela inversão no sentido do fluxo de calor.

Os valores das condutividades térmicas anisotrópicas apresentadas nas Tab. 3_a e 3_b são compatíveis com o valor (como material isotrópico) fornecido pelo fabricante (www.vick.com.br) do material ($0,35 W/m^{\circ}C$).

Este trabalho ainda está em andamento. Conclusões mais refinadas serão apresentadas posteriormente em novas publicações.

5. Referências.

- Carnahan, H.A.B., Luther, J.O., 1969, “Applied Numerical Methods”, John Wiley & Sons, New York, pp 1 – 68.
Garcia, E. C., 1987 “Desenvolvimento de Um Aparato Experimental Para Medidas de Condutividades Térmicas de Materiais Sólidos e de Resistência de Contato”, Tese do Mestrado, ITA, 103p.
Özisik, M.N., 1979, “Heat Conduction”, John Wiley & Sons, pp 611 – 650.
www.quickmath.com.
www.vick.com.br/vick/produto/celeron.