



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-14450-TDI/1141

**SIMULAÇÃO DA RESPOSTA DO DETECTOR MARIO
SCHENBERG A ONDAS GRAVITACIONAIS ORIUNDAS DE
FONTES ASTROFÍSICAS**

César Augusto Costa

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Astrofísica, orientada pelo Dr.
Odylio Denys de Aguiar, aprovada em 20 de maio de 2005.

INPE
São José dos Campos
2006

530-12:551.46

Costa, C. A.

Simulação da resposta do detector Mario Schenberg
a ondas gravitacionais oriundas de fontes astrofísicas / César
Augusto Costa. – São José dos Campos: Instituto Nacional
de Pesquisas Espaciais (INPE), 2006.

125 p.; (INPE-14450-TDI/1141)

1. Schenberg. 2. Análise de dados. 3. Filtragem. 4.
Relatividade geral. 5. Ondas gravitacionais. I. Título.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de Doutor(a) em
Astrofísica

Dr. Francisco José Jablonski


Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Odylio Denys de Aguiar


Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Stephan Stephany


Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza


Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. José Carlos Neves de Araujo


Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Rubens de Melo Marinho Júnior


Convidado(a) / IFA / SJC Campos - SP

Dr. Nel Fernandes de Oliveira Júnior


Convidado(a) / USP - São Paulo - SP


Aluno (a). César Augusto Costa

São José dos Campos, 20 de maio de 2005

Aos meus pais...

AGRADECIMENTOS

Ao Odylio pela amizade, atenção e incentivos, os quais foram essenciais para a concretização deste trabalho.

Aos docentes da Divisão de Astrofísica, que abriram as portas para uma nova forma de ver o Universo, ao esclarecerem algumas de minhas muitas dúvidas.

Aos colegas do grupo Gráviton que compartilharam comigo de suas experiências e conhecimentos.

Aos colegas de curso, com os quais compartilho a alegria desta conquista.

Às colaboradoras Nilda, Valdirene e Elaine que tanto me ajudaram durante minha estadia na DAS/INPE.

A toda a minha família, pelo amor, carinho e por compreenderem a importância deste feito.

À Cris, pela companhia, dedicação e carinho com que suportou as minhas ausências. Por ter “mais” que me ajudado a terminar este trabalho.

A todas as amizades construídas durante estes últimos anos, esperando que sejam fortalecidas a cada dia.

A todos os colaboradores do INPE, em especial os da Divisão de Astrofísicas, colegas do cotidiano, que tornam nossa presença aqui mais agradável.

À FAPESP, pelo apoio financeiro, sem o qual o trabalho seria inviabilizado.

RESUMO

A Teoria da Relatividade Geral de Einstein nos diz que as ondas gravitacionais podem excitar os modos quadrupolares de vibração de corpos elásticos. Utilizando-se deste conceito, alguns detectores de ondas gravitacionais de massa ressonante estão sendo contruídos ou em desenvolvimento. Um deles é o Mario Schenberg. Este instrumento consiste de uma esfera suspensa por isolantes vibracionais e mantida sob temperaturas criogênicas ($\sim 4.2\text{ K}$ no primeiro estágio). Transdutores eletro-mecânicos (paramétricos) são acoplados à superfície da esfera a fim de monitorarem os modos quadrupolares (além dos monopulares). Neste trabalho apresentamos um modelo computacional/matemático o qual estamos desenvolvendo através da adoção de uma teoria elástica linear. Deste modelo, obtemos as frequências de ressonância do sistema acoplado. Este sistema utiliza 6 transdutores de dois modos radiais, os quais são dispostos seguindo a configuração do Icosaedro Truncado. Utilizando-se desta configuração, obtemos um total de 17 modos de ressonância (5 da esfera e 12 dos transdutores) cujas frequências encontram-se entre $3.17 - 3.24\text{ kHz}$. Resolvemos a equação de movimento do sistema, simulamos o comportamento do detector e extraímos os dados de saída. Também, resolvemos o problema inverso e encontramos (numericamente) a função de transferência do instrumento (filtro inverso). Quando os ruídos habituais (térmico, “backaction”, de série, etc) são adicionados ao sistema, encontramos uma banda de sensibilidade de $\sim 70\text{ Hz}$. O detector apresenta $h \sim 10^{-21}\text{ Hz}^{1/2}$ centrados em 3206.3 Hz . Construimos um código computacional para determinar a direção e as polarizações da onda (solução do problema inverso) em tempo real (enquanto os dados vão sendo adquiridos), para o caso com altas razões sinal-ruído. O filtro digital utilizado é um passa-banda simples, porém a aplicação de outros filtros, como os filtros de correlação (“matched filters”), também foi avaliada. Os “dados” usados nos testes do código eram simulados, contendo tanto sinal de uma fonte como ruído instrumental. As fontes de ruídos do detector incluem o ruído térmico da antena, o “back action”, os ruídos de fase e de série e o ruído térmico das massas acopladas dos transdutores. O ruído simulado leva em conta todas estas fontes de ruído e o acoplamento antena-transdutores. A função de transferência foi calculada para a antena esférica quando seis transdutores paramétricos de dois modos estão acoplados. Finalmente, fomos capazes de checar a que distância o detector Schenberg detectaria uma fonte correspondente a um filtro de correlação específico. Aqui, apresentamos os resultados destas simulações.

SIMULING THE RESPONSE OF THE MARIO SCHENBERG DETECTOR TO GRAVITATIONAL WAVES FROM ASTROPHYSICAL SOURCES

ABSTRACT

Einstein's General Relativity tells us that gravitational waves can excite quadrupolar normal modes of elastic bodies. By using this concept, some resonant gravitational wave detectors are under construction or development. One of them is the Mario Schenberg. That instrument consists on a sphere raised by vibrational isolators and kept under cryogenic temperatures (~ 4.2 K at first step). Electro-mechanical transducer (parametric) are coupled on the sphere surface for monitoring its quadrupolar (even monopolar) modes. In this work we show a computational/mathematical model which we have been developing by adopting a linear elastic theory. From that model we obtained the resonance frequencies of the whole coupled system. Such a system uses six 2-mode transducers and follows Truncated Icosahedron arrangement. By following this configuration we obtained overall 17 resonant modes (5 from the sphere and 12 from the set of transducers) such frequencies is between 3.17 – 3.24 kHz. We solved the movement equation of such a system. We simulated the detector behavior and extracted its output data. We also solved the inverse problem and found the transfer function of this instrument (inverse filter). When usual noises (thermal, backaction, series, etc) are added we found a ~ 70 Hz bandwidth. The detector presents $h \sim 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$ centered in 3206.3 Hz. We have built a computer code for determining the source direction and the wave polarization (solution of the inverse problem) in real time acquisition for strong signal-to-noise ratio cases. The digital filter used is a simple bandpass filter, but we tried also some matched filters, which work as well. The "data" used for testing our code were simulated, they had both the source signal and detector noise. The detector noise includes the antenna thermal, back action, phase noise, series noise, and thermal from transducer coupled masses. The simulated noise takes into account all these noises and the antenna-transducers model. The detector transfer function was calculated for a spherical antenna with six two-mode parametric transducers. Finally, we were able to check up to what distance Schenberg would detect some sources for which we had the matched filter designed. Here we present the results of these simulations.

*Toda a nossa ciência, comparada com a realidade, é primitiva e infantil e,
no entanto, é a coisa mais preciosa que temos.*

(Albert Einstein, 1879-1955)

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	23
CAPÍTULO 2 – RADIAÇÃO GRAVITACIONAL	27
2.1. Radiação Gravitacional	27
2.2. Polarizações de uma Onda Gravitacional	29
2.3. Geração de Radiação Gravitacional	31
2.4. Interação da Onda Gravitacional com a Matéria	34
2.5. Projeção da Forma Transversa e sem Traço em um Sistema de Referência Arbitrário	36
CAPÍTULO 3 – FONTES ASTROFÍSICAS E DETECTORES DE RADIAÇÃO GRAVITACIONAL	39
3.1. Fontes Impulsivas ou Abruptas	40
3.1.1. Supernova	41
3.1.2. Espiralização e Coalescência de Objetos Compactos	44
3.1.3. Queda de Estrelas e Pequenos Buracos Negros no Interior de Buracos Negros Supermassivos	47
3.2. Fontes Periódicas	47
3.2.1. Pulsares de Milissegundos	47
3.2.2. Estrelas Binárias	50
3.3. Sinais Estocásticos	50
3.3.1. Sistemas Binários	51
3.3.2. Estrelas de População III	52
3.3.3. Ondas Gravitacionais Primordiais	52
3.3.4. Transição de Fase	53
3.3.5. Cordas Cósmicas	53
3.4. Detectores de Ondas Gravitacionais	54
3.4.1. Interferômetros a Laser	55
3.4.2. Detectores Tipo Massa Ressonante	58
3.4.3. Detectores Tipo Massa Ressonante Esféricos	61

3.5. Detector de Ondas Gravitacionais Mario Schenberg	64
---	----

CAPÍTULO 4 – MODELO MATEMÁTICO DO DETECTOR ESFÉRICO **67**

4.1. A Esfera Desacoplada	67
4.2. Esfera Acoplada a Ressonadores Secundários	72
4.3. Localização dos Ressonadores e Canais dos Modos	74
4.4. Solução da Equação de Movimento	76
4.5. Função de Transferência	77
4.6. Curva de Sensibilidade do Detector	77
4.7. Fontes de Ruído	78
4.7.1. Banda de Sensibilidade	81
4.8. Geração de Séries Temporais	81
4.9. Processo de Transdução: Transformação de Deslocamento em Voltagem	83
4.10. Temperatura de Ruído	85

CAPÍTULO 5 – SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO E PROCESSAMENTO DOS DADOS **87**

5.1. Determinação da Direção e das Polarizações	87
5.2. Caso Somente com Sinal	89
5.3. Caso Somente com Ruído	93
5.4. Conseqüências da Reconstrução Incompleta da Esfera	97
5.5. Máscara de Ganho	99
5.6. Relação Sinal-Ruído	100
5.7. Caso com Sinal mais Ruído	102
5.7.1. Fonte Galáctica	102
5.7.2. Fonte Próxima	103
5.7.3. Fonte Extra-Galáctica	105
5.8. Filtro de Correlação (“Matched Filter”)	108

CAPÍTULO 6 – RESULTADOS FINAIS, CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS **113**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **115**

APÊNDICE A – PROPOSTA PARA O SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE DADOS – HARDWARE/SOFTWARE **123**

A.1. Sincronização	124
A.2. Interface VXI-PCI	124

A.3. Armazenamento de Dados	124
A.4. Diagnóstico	125
A.5. Análise em Tempo Real	125

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Efeitos das polarizações h_+ e h_\times sobre um círculo de testes.	31
2.2 Sistema binário emissor de ondas gravitacionais.	34
2.3 Campo de acelerações nas polarizações $+$ e \times	35
2.4 Convenção y dos ângulos de Euler.	37
3.1 Medidas do atraso de fase do pulsar PSR1913+16	45
3.2 Forma de onda da coalescência de um sistema binário	46
3.3 Modelo simples de um detector de ondas gravitacionais.	55
3.4 Modelo simples de um interferômetro Michelson.	56
3.5 Aquisição das amplitudes complexas.	59
3.6 Fontes impulsivas de ondas gravitacionais	63
3.7 Diagrama esquemático do detector de ondas gravitacionais Mario Schenberg.	64
3.8 Diagrama esquemático do transdutor	65
4.1 Esfera em um campo de acelerações.	68
4.2 Distribuição da função característica sobre a superfície da esfera.	70
4.3 Ressonador mecânico unidimensional de dois modos acoplado à superfície da esfera.	73
4.4 Icosaedro Truncado e Disposição dos transdutores sobre a superfície da esfera.	74
4.5 Campos de simetria do icosaedro truncado.	75
4.6 Curva de sensibilidade do detector SCHENBERG e contribuições das fontes de ruído	80

4.7	Curva de sensibilidade obtida a partir das séries temporais.	83
4.8	Amplitude descrita por ressonador R_2 em uma série temporal simulada de 32 segundos.	84
4.9	Histograma dos deslocamentos de um transdutor.	84
4.10	Leitura em voltagem do transdutor	85
4.11	Histograma de temperaturas dos eventos apresentados na Figura 4.10.	86
5.1	Forma de onda de um sistema binário coalescente	90
5.2	Correlação entre os espectros do sinal de entrada e de saída (caso sem ruído)	91
5.3	Posição perpendicular à frente de onda do sinal de entrada na projeção Hammer-Aitoff	92
5.4	Curva de sensibilidade em todo o espectro observável	93
5.5	Polarização $h_+(t)$ na saída – somente ruído	94
5.6	Histogramas das amplitudes das polarizações $h_+(t)$ e $h_\times(t)$	95
5.7	Distribuição da amplitude $h(t)$	95
5.8	Amplitude espectral das polarizações - somente ruído	96
5.9	Distribuição de posições equivalentes do ruído	96
5.10	Somatória dos modos quadrupolares	97
5.11	Distribuição das amplitudes esféricas	98
5.12	Máscara de ganho	99
5.13	Distribuição de posições do ruído pós-máscara	100
5.14	Determinação da direção da fonte – $SNR \approx 122$	103
5.15	Amplitude espectral das polarizações – $SNR \approx 122$	104
5.16	Polarização $h_+(t)$ na saída – $SNR \approx 122$	104

5.17	Determinação da direção – $SNR \approx 60$	105
5.18	Amplitude espectral das polarizações – $SNR \approx 60$	106
5.19	Polarização $h_+(t)$ na saída – $SNR \approx 60$	106
5.20	Determinação da direção – $SNR \approx 30$	107
5.21	Amplitude espectral das polarizações – $SNR \approx 30$	107
5.22	Polarização $h_+(t)$ na saída – $SNR \approx 36$	108
5.23	Polarização $h_+(t)$ na saída – “Matched Filter”	110
5.24	Polarização $h_+(t)$ na saída – “Matched Filter” II	111
A.1	Esboço de um sistema de aquisição de dados para o detector Mario Schenberg, a partir do equipamento já adquirido.	123

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Expressões para os harmônicos esféricos reais Y_m	36
3.1 Amplitude máxima e frequência característica da onda gravitacional gerada pelos modos barra	43
3.2 Algumas fontes binárias de ondas gravitacionais de baixa frequência	51
3.3 Alguns detectores de barra que operam sob temperaturas criogênicas	61
3.4 Comparação entre as grandezas físicas de alguns materiais	62
4.1 Valores dos Parâmetros Físicos da esfera	71
4.2 Valores dos Parâmetros do Sistema.	81

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Desde que Albert Einstein propôs a Teoria da Relatividade Geral (TRG), em 1916, ela tem sido submetida a testes e em todos os que já foram realizados obteve êxito. Einstein mostrou que a existência da radiação gravitacional é uma consequência direta de sua teoria. Assim, quando estiverem operando em seus limites de sensibilidade, os detectores de ondas gravitacionais estarão, mais uma vez, testando sua validade. Porém, mais do que testar a Relatividade Geral, a detecção de ondas gravitacionais abrirá as portas para uma nova perspectiva no estudo do Universo, algo como um novo sentido, que ajudará a entendê-lo melhor.

A radiação gravitacional é gerada em regiões com campos gravitacionais intensos e dinâmicos. Esta característica descreve a natureza da gravidade em seu extremo, testando as previsões da teoria de gravitação de Einstein e fornece informações sobre estas fontes que não poderiam ser obtidas de outra forma. Em contraste às ondas eletromagnéticas da astronomia convencional, que emanam da incoerente superposição das emissões de cargas individuais aceleradas, as ondas gravitacionais resultam de um coerente movimento da matéria. Além disso, devido ao fato das ondas gravitacionais interagirem fracamente com a matéria, elas são capazes de “atravessarem” a mais densa matéria que as produz. Por outro lado, as ondas eletromagnéticas emergentes desta matéria são fortemente espalhadas e atenuadas pela reabsorção. Em outras palavras, enquanto as ondas eletromagnéticas oferecem uma impressão superficial (da superfície de último espalhamento) das fontes astronômicas, as ondas gravitacionais provêm do interior (altamente denso) destes objetos.

Entre os novos “insights” (tanto para a Física quanto para a Astrofísica) que o estudo das ondas gravitacionais pode trazer, temos:

- a confirmação direta da existência de buracos negros, inclusive um teste do Teorema Fundamental do Buraco Negro Sem Cabelo (“no-hair theorem”)¹;
- testes da relatividade geral sob condições de campo extremamente fortes;
- medida da velocidade de propagação do gráviton;
- informações detalhadas sobre as propriedades das estrelas de neutrons, inclu-

¹O teorema que diz que o campo gravitacional de um buraco negro é inteiramente determinado somente pela sua massa, momento angular e carga elétrica (se existir)

sive sobre suas equações de estado;

- informações sobre os estágios primordiais de evolução do Universo através da medida de ondas gravitacionais emitidas naquela época;
- estudos da fusão de galáxias através da observação dos buracos negros massivos coalescentes em seus centros;
- etc.

As ondas gravitacionais são perturbações na curvatura local do espaço-tempo, que viajam pelo espaço-tempo à velocidade da luz e excitam os modos normais de oscilação quadrupolares de corpos elásticos, por onde passam. O monitoramento destas excitações torna possível a detecção direta de ondas gravitacionais, e, conseqüentemente, a obtenção de informações sobre fontes astrofísicas emissoras de radiação gravitacional. Os instrumentos desenvolvidos com tal função são conhecidos como detectores de ondas gravitacionais.

Os primeiros detectores de ondas gravitacionais, com forma cilíndrica, ou de “barras”, foram construídos nos anos 60. Desde então, muitos avanços têm sido obtidos e a sensibilidade dos instrumentos, que estão sendo desenvolvidos, estão atingindo os patamares exigidos (previstos) para se captar sinais gerados por eventos astrofísicos. A idéia de se construir detectores esféricos ultracriogênicos tem ganhado adeptos, entre os quais destaca-se o grupo brasileiro Gráviton, que trabalha na construção de seu primeiro protótipo, o detector Mario Schenberg. Instrumentos com as características do Schenberg representam a próxima geração de detectores por massa ressonante.

Um único detector esférico será capaz de determinar tanto a direção quanto as componentes tensoriais de uma onda gravitacional incidente. Porém, a construção do detector e monitoramento dos dados, que dele podem ser obtidos, apresentam dificuldades inerentes. O número de modos normais que acoplam fortemente com uma onda gravitacional (cinco, contra apenas um apresentado pelas barras) aumenta a complexidade do sistema, quando comparado com os detectores cilíndricos. A necessidade de que sejam acoplados pelo menos cinco ressonadores secundários à superfície da esfera para monitorar as oscilações normais, gera um sistema com pelo menos uma dezena de osciladores harmônicos acoplados entre si. Tais osciladores interrelacionam-se de maneira complexa, motivo pelo qual a forma com que estas relações acontecem merece um estudo detalhado.

O objetivo central deste trabalho é a elaboração de um modelo matemático, com a finalidade de simular o comportamento mecânico do Detector de Ondas Gravitacionais

Mario Schenberg frente à excitação causada pela passagem de uma onda gravitacional. Deste modelo, pretendemos extrair dados e iniciar o processo de análise. Apresentamos um método para, a partir dos dados, extrair informações de interesse astrofísico.

Este trabalho faz, também, uma rápida revisão dos conceitos fundamentais que permeiam a radiação gravitacional e a sua detecção, a qual compreende os dois primeiros capítulos. Dando início a esta revisão, a derivação da equação de onda, a partir das equações de campo de Einstein, os processos geradores de ondas gravitacionais e seus efeitos sobre a matéria são apresentados no Capítulo 2. As características das principais fontes astrofísicas de radiação gravitacional encontradas na literatura são revistas no Capítulo 3. O capítulo apresenta um apanhado de informações básicas sobre estas fontes, com a finalidade de fornecer uma noção da sensibilidade que os detectores de ondas gravitacionais devem atingir, para obterem sucesso. Detalhes maiores sobre estas fontes e seus processos peculiares de geração de radiação gravitacional podem ser encontrados na bibliografia referenciada. O capítulo apresenta, ainda, os conceitos básicos que envolvem a detecção de ondas gravitacionais pelos instrumentos que estão sendo projetados.

O escopo principal deste trabalho envolve a utilização e adaptação de técnicas, desenvolvidas ao longo das últimas décadas, e destinadas, especificamente, à resolução do problema do detector esférico. Uma descrição detalhada da técnica utilizada para a elaboração do modelo matemático utilizado na resolução do problema proposto, é apresentada no Capítulo 4. E, finalmente, no Capítulo 5, o método que desenvolvemos para a solução do problema inverso e o tratamento inicial dos dados, que serão obtidos pelo detector de ondas gravitacionais Mario Schenberg.

CAPÍTULO 2

RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

Os primeiros ensaios sobre a possibilidade de existência da radiação gravitacional foram feitos por Heaviside, em forma de um apêndice, no seu livro “Electromagnetic Theory”, publicado em 1893. Uma década depois, outras duas publicações abordaram o assunto, uma em 1900, assinada por H. A. Lorentz, e outra de 1905, de autoria de H. Poincaré [1]. Porém, a primeira derivação da equação de onda gravitacional a ter expressão na comunidade científica foi apresentada à Academia Prussiana de Ciências (Berlim), em junho de 1916, por Albert Einstein, o qual assinou uma segunda publicação sobre o mesmo tema em janeiro de 1918.

Publicado alguns meses depois de sua Teoria da Relatividade Geral, o primeiro artigo de Einstein sobre radiação gravitacional restringia-se à emissão de ondas gravitacionais fracas (e linearizadas), que se propagariam em um espaço-tempo plano. O segundo tratava da derivação quadrupolar da radiação gravitacional [2, 3]. Nos anos seguintes, Weyl e Eddington refinariam o trabalho inicial de Einstein [4, 5].

2.1 Radiação Gravitacional

Na Relatividade Geral, a métrica $g_{\mu\nu}$ descreve o campo gravitacional como curvatura do espaço-tempo. Tal métrica se relaciona com o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ por meio de equações diferenciais de segunda ordem. Estas são representadas pelas chamadas **Equações de Campo de Einstein**¹ e dadas pela equação tensorial [2]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Nas Equação 2.1, $R_{\mu\nu}$ e $R = g^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}$ denotam, respectivamente, o tensor e o escalar de Ricci², G representa a constante de gravitação universal e c , a velocidade da luz no vácuo.

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) tende, no limite, à Gravitação Newtoniana, quando o campo gravitacional é fraco e estático (constante no tempo) e as partículas imersas neste campo movem-se lentamente ($v \ll c$). Na ausência de gravidade, o espaço-

¹Considerando-se a constante cosmológica $\Lambda = 0$, em $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$.

²É aplicada aqui a convenção de soma de Einstein, onde $R = g^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma} = \sum_{\rho,\sigma} g^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}$.

tempo é plano e caracterizado pela métrica de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Contudo, podemos supor uma situação menos restritiva, em que o campo gravitacional é fraco, mas não estático, ou seja, pode variar com o tempo. Assim, o tensor $g_{\mu\nu}$ pode ser escrito como uma deformação na métrica de Minkowski, assumindo a forma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, sendo que a deformação $h_{\mu\nu}$ possui componentes numericamente pequenas ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$). Assim, o cálculo do tensor de Ricci toma a forma

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad (2.3)$$

é simplificado, uma vez que a conexão afim apresentará a forma $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}(h_{\rho\nu,\mu} + h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\rho}) + \mathcal{O}(h^2)$ ³. Sendo $|h| \ll 1$, o termo $\mathcal{O}(h^2)$ pode ser ignorado e a equação de campo é linearizada.

O fato da equação de campo apresentar o termo $\frac{g_{\mu\nu}}{2}$ induz a definição de um $\bar{h}_{\mu\nu}$, tal que

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (2.4)$$

sendo $h = h^\rho_\rho = \eta^{\lambda\rho}h_{\lambda\rho}$. Esta representação simplificará a expressão final e facilitará os cálculos. Além disto, uma forma mais compacta da equação de campo pode ser obtida eliminando-se as ambiguidades, através da aplicação da condição (“gauge”) de Lorentz, $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$. Tais transformações não alteram as soluções da Equação 2.1, ou seja, os campos são invariantes sob tais transformações, mantendo suas características inerentes. Portanto, a utilização das mesmas não altera os resultados físicos. A Equação 2.1 assume, assim, a forma

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

ou, no vácuo, onde $T_{\mu\nu} = 0$, tem-se

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.6)$$

onde $\square^2 = -\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \nabla^2$ é o operador D’Alambertiano.

³Usamos a notação $h^{\mu\nu}{}_{,\rho} \equiv \frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x_\rho}$.

As Equações 2.5 e 2.6 representam equações tensoriais de onda, cujas soluções têm a forma $\bar{h}_{\mu\nu}(t) = A_{\mu\nu}e^{ik(z-ct)}$. Tal onda propaga-se em uma direção qualquer z , com a velocidade c , frequência angular $\omega = kc$ e número de onda k . A estas soluções ondulatórias das Equações de Campo de Einstein dá-se o nome de **ondas gravitacionais**.

Podemos observar que as próprias Equações de Campo apresentam características análogas a um oscilador harmônico, pois definindo-se o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.7)$$

podemos reescrever a Equação 2.1 como

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G}G_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Tal representação (Equação 2.8) remete a uma comparação com a Lei de Hooke, $P = Eh$, onde P , E e h representam, respectivamente, a pressão aplicada, o módulo de elasticidade do meio e a deformação linear. Por analogia, o tensor momento-energia representa a pressão aplicada sobre o espaço-tempo, a constante que multiplica o tensor de Einstein representa a rigidez do espaço-tempo e, finalmente, o tensor de Einstein representa a deformação sofrida pelo espaço-tempo (curvatura). Assim, percebe-se que o espaço-tempo não é **infinitamente** rígido, como propõe a Física Newtoniana, mas sim **extremamente** rígido ($\log E \approx 42,7$, no SI). Logo, durante a passagem de uma onda gravitacional a estrutura do espaço-tempo oscila segundo a perturbação na métrica $h_{\mu\nu}(t)$.

2.2 Polarizações de uma Onda Gravitacional

A fim de analisar o comportamento da onda é conveniente a escolha de um referencial (ct', x', y', z') , no qual um dos eixos coincida com a direção de propagação da onda. A adoção deste referencial simplifica a análise do tensor perturbação $h_{\mu\nu}$ e possibilita que o tensor perturbação torne-se transverso e sem traço (TT, de “transverse and traceless”), ou seja, a direção da oscilação evidencia-se perpendicular ao vetor da onda, tem ação nula no eixo do tempo e a amplitude da oscilação alterna-se nos demais eixos perpendiculares. Para se obter a forma TT para a perturbação é necessário que se defina um tensor $P_{\mu\nu}$, que atuará como um operador de projeção, o qual é expresso como [6]

$$P_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu. \quad (2.9)$$

Tal operador projeta vetores em um plano ortogonal ao vetor unitário n_μ , que por sua vez, também é escolhido de forma que sua direção coincida com a direção de propagação

da onda. Fazendo com que esta coincida com a direção z do sistema de referência da onda, tem-se

$$n_0 = 0 \quad , \quad n_j = \frac{k_j}{\omega}. \quad (2.10)$$

Então, as componentes transversais $h_{\mu\nu}$ são projetadas no plano da frente de onda por $P_{\mu\nu}$ e a forma TT da perturbação é obtida pela relação

$$h_{\mu\nu}^{TT} = P_{\mu}^{\rho} P_{\nu}^{\sigma} h_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} P_{\mu\nu} P^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}, \quad (2.11)$$

cujas representação matricial é

$$[\bar{h}_{\mu\nu}^{TT}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{yx} & -h_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Ao adotar-se esta configuração, o tensor de Riemann assume a forma

$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2} h_{ij,00}^{TT}, \quad (2.13)$$

ou, em particular,

$$R_{x0x0} = -R_{y0y0} = -\frac{1}{2} \ddot{h}_+ \left(t - \frac{z}{c} \right), \quad (2.14a)$$

$$R_{x0y0} = R_{y0x0} = -\frac{1}{2} \ddot{h}_\times \left(t - \frac{z}{c} \right), \quad (2.14b)$$

onde $h_{xx} = -h_{yy} \equiv h_+ = A_+ e^{-i[\omega(t-z/c)+\phi_+]}$ e $h_{xy} = h_{yx} \equiv h_\times = A_\times e^{-i[\omega(t-z/c)+\phi_\times]}$ são as amplitudes dos estados independentes de polarização da onda gravitacional. A estes chamaremos + (“mais”) e \times (“xis”), sendo que ϕ_+ e ϕ_\times representam os ângulos de fase respectivos.

Uma onda gravitacional não tem efeito sobre um único ponto, já que representa perturbações na métrica, ou seja, na forma como se mede a distância entre dois pontos. Portanto, a perturbação não gera acelerações absolutas, somente acelerações relativas. Então, é necessário utilizar-se de um sistema não-puntual, como por exemplo, de um círculo de massas de teste, para mostrar o efeito de cada uma das polarizações. O efeito de uma onda gravitacional com polarização + sobre um círculo formado por massas de teste é fazer com que o mesmo seja deformado em uma elipse que oscila entre as direções x e y , de acordo com a fase da onda. É o que é apresentado na Figura 2.1. A polarização \times tem um efeito similar, mas apresenta um ângulo de 45° em relação aos eixos x e y .

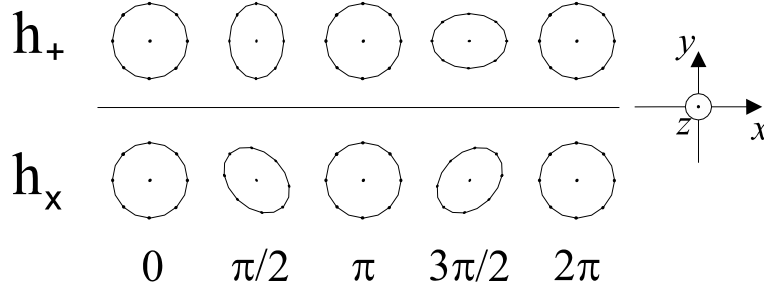


FIGURA 2.1 – Efeitos das polarizações h_+ e h_x sobre um círculo de testes. A direção da propagação da onda é perpendicular e saindo do plano do papel (ao longo do eixo z).

Se tomarmos o caso da radiação eletromagnética, este ângulo é de 90° . O campo eletromagnético também possui dois estados de polarização independentes descritos no plano, cada qual invariante sob uma rotação $\vartheta = 360^\circ$ no plano xy e sua quantização baseia-se no fóton, uma partícula com massa nula e spin $S = 1$ ($S = 360^\circ/\vartheta$). Analogamente, os estados de polarização da radiação gravitacional são invariantes sob uma rotação de 180° no plano xy (Figura 2.1). Então, a partícula a ele associada⁴, que também possui massa nula, possui spin 2.

2.3 Geração de Radiação Gravitacional

Similarmente à radiação eletromagnética, a radiação gravitacional também é produzida por “cargas” aceleradas, sendo que, no caso gravitacional, as “cargas” são dadas pelas massas. Ao considerar-se um sistema gerador de ondas gravitacionais, para um observador localizado em um ponto longe o suficiente do mesmo, a Equação 2.5 apresenta soluções com a forma

$$h_{\mu\nu}(t) = \frac{4G}{rc^4} \int T_{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c} \right) d^3x, \quad (2.15)$$

onde r é a distância entre o ponto onde deseja-se estimar $h_{\mu\nu}$ e a fonte geradora da radiação gravitacional, x_μ é o sistema de referências adotado e o termo $(t - \frac{r}{c})$ denota o tempo retardado [6]. Ao admitir-se que a fonte possui densidade de repouso ρ_0 e é não-relativística ($v \ll c$), obtém-se, por uma aproximação Newtoniana, que

$$T_{00} \approx \rho_0 c^2 + \rho_0 \frac{v^2}{2} \quad (2.16a)$$

e

$$T_{ij} \approx \rho_0 v_i v_j. \quad (2.16b)$$

⁴Apesar de não ter sido detectado (ainda) e nem quantizado, analogias com o campo eletromagnético geram esta “evidência teórica” sobre a existência de um bóson associado ao campo gravitacional – o **gráviton**.

Supondo que as acelerações relativas internas do sistema são pequenas, torna-se válida, também, a aproximação

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int T_{00} x_i x_j d^3 x \right) \approx 2c^2 \int T_{ij} d^3 x. \quad (2.17)$$

Então, neste caso,

$$h_{ij}(t) = \frac{2G}{rc^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \rho_0 x_i x_j d^3 x \right), \quad (2.18)$$

onde o termo entre parênteses é definido como o momento quadrupolar I_{ij} da densidade de energia da fonte.

Quando se opta por adotar a forma TT é necessário, para que seja mantida a consistência das relações, que o momento quadrupolar siga o mesmo padrão. Para tanto, pode-se, inicialmente, tomar o momento quadrupolar reduzido, definido por

$$I_{ij} = \int T_{00} (x_i x_j - \delta_{ij} x_k^2) d^3 x. \quad (2.19)$$

Supondo um vetor \mathbf{d} transverso à direção \mathbf{r} que liga o observador à fonte, definido como $d_i^T \equiv P_{ij} d_j$, pode ser obtida a forma TT do momento quadrupolar, expressa como

$$I_{ij}^{TT} = P_{il} P_{jm} I_{lm} - \frac{P_{ij} P_{lm} I_{lm}}{2}. \quad (2.20)$$

E, portanto,

$$h_{ij}(t) = \frac{2G}{rc^4} \ddot{I}_{ij}^{TT} \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (2.21)$$

Uma onda gravitacional carrega energia que é utilizada para deformar o espaço-tempo. Então, a Equação 2.8 deve ser modificada quando há a presença de radiação gravitacional, no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$), assumindo a forma

$$G_{\mu\nu} - \frac{8\pi G}{c^4} t_{\mu\nu} = 0. \quad (2.22)$$

onde $t_{\mu\nu}$ corresponde ao tensor momento-energia carregado pela onda gravitacional, que, por sua vez pode ser representado segundo seu termo espacial

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{OG}. \quad (2.23)$$

onde $G_{\mu\nu}^{OG}$ refere-se a contribuição da deformação causada pela onda à curvatura da métrica local. Calculando o valor do tensor $t_{\mu\nu}$, através das expressões 2.3, 2.7 e 2.23,

obtem-se

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle. \quad (2.24)$$

E, o fluxo de energia é dado por $F = ct_{00}$, chega-se a [6]

$$F^{OG} = \frac{c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle, \quad (2.25a)$$

ou

$$F^{OG} = \frac{c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle = \frac{G}{8\pi r^2 c^5} \langle \ddot{I}_{ij}^{TT} \ddot{I}_{ij}^{TT} \rangle. \quad (2.25b)$$

A Equação 2.25b indica que se $\ddot{I}_{ij} \neq 0$ haverá fluxo de radiação gravitacional, sendo esta a condição necessária e suficiente para que um sistema físico emita ondas gravitacionais.

De 2.25b pode-se deduzir a luminosidade isotrópica da fonte, chegando-se a

$$L^{OG} = r^2 \int F^{OG} d\Omega = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{I}_{ij}^{TT} \ddot{I}_{ij}^{TT} \rangle. \quad (2.26)$$

Como exemplo da geração de radiação gravitacional, pode-se supor um sistema composto por duas massas pontuais, M_1 e M_2 , em órbita circular com raio a , uma em torno da outra, sendo a_1 e a_2 as distâncias respectivas entre as massas e o centro de massa (0) do sistema, como mostra a Figura 2.2. Tem-se que $M_1 a_1 = M_2 a_2 = \mu a$, onde $a = a_1 + a_2$ e $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$, a massa reduzida do sistema, e que $M_1 a_1^2 + M_2 a_2^2 = \mu a^2$. Então,

$$I_{xx} = -I_{yy} = \frac{1}{2} \mu a^2 \cos(2\phi) + \text{constante} \quad (2.27a)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \frac{1}{2} \mu a^2 \sin(2\phi) + \text{constante} \quad (2.27b)$$

$$I_{zz} = 0 \quad (2.27c)$$

onde $\phi = \omega_{\text{orb}} t$, sendo ω_{orb} a velocidade angular orbital. Substituindo-se as Equações 2.27 em 2.26, obtém-se

$$L^{OG} = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \omega_{\text{orb}}^6 \mu^2 a^4. \quad (2.28)$$

É fácil perceber que o fator $\frac{G}{c^5}$ torna um valor numérico para a luminosidade, no espectro gravitacional, bastante reduzido ($\log \frac{G}{c^5} \approx -52,6$, no SI). Contudo, é possível mostrar que sob condições especiais, esta emissão pode ter um valor expressivo. Pode-se supor um sistema cujas dimensões estejam próximas ao raio de Schwarzschild,

$$r_{\text{Sch}} \approx \frac{2GM}{c^2} \rightarrow M \approx \frac{r_{\text{Sch}} c^2}{2G}$$

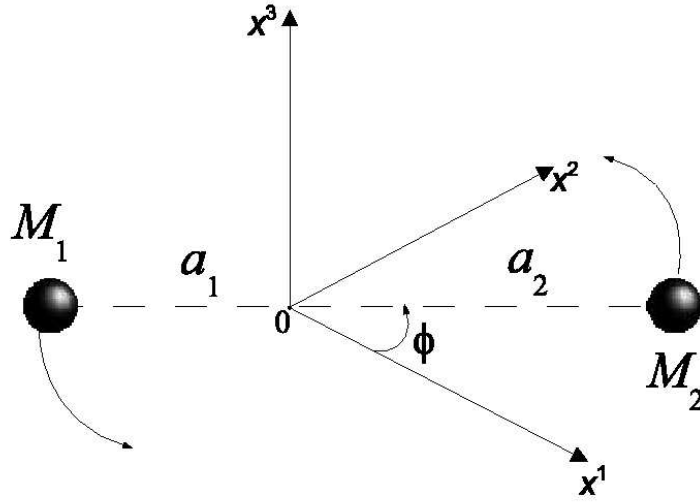


FIGURA 2.2 – Sistema binário emissor de ondas gravitacionais.

como, por exemplo, tomando $a = 2r_{\text{Sch}}$. Fazendo $\mu = M/2$ e $\omega = v/r_{\text{Sch}}$, a Equação 2.28 fica

$$L^{OG} \approx \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \left(\frac{v}{c}\right)^6. \quad (2.29)$$

Nota-se que sistemas com características semelhantes às sugeridas para obter-se 2.29 fazem com que o fator, que outrora reduzia a luminosidade, seja invertido. Desta forma, fontes cujas dimensões aproximem-se de seus raios gravitacionais (r_{Sch}) convertem uma quantidade considerável de energia em forma de energia gravitacional. Uma visão mais detalhada dos sistemas astrofísicos com estas características será apresentada no Capítulo 3.

2.4 Interação da Onda Gravitacional com a Matéria

Uma onda gravitacional deforma o espaço-tempo e, para isto, fornece energia para o mesmo. Quando uma onda gravitacional passa, ela produz um campo de densidade de forças f_j sobre um determinado material, localizado em uma posição x_j , excitando seus modos quadrupolares. Este campo é representado pela expressão

$$f_j^{OG} = \frac{1}{2} \rho \sum_j \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t^2} x_j, \quad (2.30)$$

onde ρ é a densidade do meio através do qual passa a onda gravitacional.

Tais forças estão relacionadas ao efeito de maré causado pela onda gravitacional, cujo campo de acelerações referente às polarizações é mostrado na Figura 2.3.

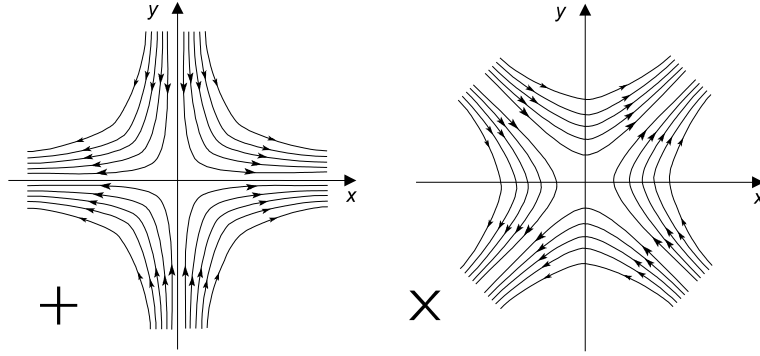


FIGURA 2.3 – Campo de acelerações nas polarizações + e ×.

Pode-se representar este campo de densidade de forças como um gradiente de um potencial escalar, $\Phi(\mathbf{x}, t)$, assumindo a forma

$$f_i^{OG}(\mathbf{x}, t) = \nabla_i \Phi(\mathbf{x}, t) = \nabla_i \left(\sum_{j,k} \frac{1}{4} \rho x_j \ddot{h}_{jk}(t) x_k \right). \quad (2.31)$$

A Equação 2.31 mostra que existe uma dependência espacial quadrática entre o campo de força gravitacional e o potencial escalar. Uma alternativa para contornar as dificuldades na resolução do problema, decorrentes desta dependência, é a utilização de uma representação adequada, onde a mesma possa ser separada em partes radiais e angulares. A decomposição em harmônicos esféricos aparece com uma solução conveniente. O produto pode ser expresso em termos de harmônicos esféricos Y_{lm} de ordem l e grau m . Sendo que apenas os harmônicos esféricos com $l = 0$ e $l \geq 2$ - que representam os modos monopulares, quadrupolares, octopolares, etc - podem ser excitados por uma onda gravitacional em qualquer que seja a teoria métrica de gravitação considerada [7]. A Teoria da Relatividade Geral (TRG) prevê que somente os modos multipolares, a partir dos quadrupolares, são excitados⁵ por ondas gravitacionais. Neste trabalho, a atenção será voltada aos modos quadrupolares, uma vez que, na TRG, os modos de ordem $l > 2$ contribuem com uma parcela de energia menor que duas ordens de magnitude [8].

Aos harmônicos esféricos quadrupolares são associados $m = -2, \dots, 2$ modos normais de oscilação, os quais são denotados por $Y_{2m}(\theta, \phi)$. Tais harmônicos esféricos são representados por números complexos [9] mas, quando convenientemente combinados (mantendo a ortogonalidade entre os mesmos), conduzem aos harmônicos esféricos reais. Para facilitar a notação, a partir de agora representaremos $Y_{2m}(\theta, \phi)$ simplesmente por $Y_m(\theta, \phi)$, com $m = 1, \dots, 5$, uma vez que analisaremos apenas os efeitos quadrupolares ($l = 2$) de uma

⁵Devido à Lei de Conservação do Momento e ao fato de não existirem massas negativas, não existem monopolo nem dipolo gravitacional.

onda gravitacional.

As expressões para os harmônicos esféricos reais, bem como as combinações necessárias para obtê-los encontram-se na Tabela 2.1, nos sistemas de coordenadas cartesianas e esféricas.

TABELA 2.1 – Expressões para os harmônicos esféricos reais Y_m .

Harmônico Esférico Y_m	Dependência linear em Y_{2m}	Coordenadas Cartesianas	Coordenadas Esféricas
Y_1	$\sqrt{\frac{1}{2}}(Y_{22} + Y_{2-2})$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \frac{(x^2 - y^2)}{r^2}$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \sin^2 \theta \cos 2\phi$
Y_2	$\sqrt{\frac{1}{2}}i(Y_{2-2} - Y_{22})$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \frac{2xy}{r^2}$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \sin^2 \theta \sin 2\phi$
Y_3	$\sqrt{\frac{1}{2}}i(Y_{21} + Y_{2-1})$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \frac{2yz}{r^2}$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \sin 2\theta \sin \phi$
Y_4	$\sqrt{\frac{1}{2}}(Y_{2-1} - Y_{21})$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \frac{2xy}{r^2}$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \sin 2\theta \cos \phi$
Y_5	Y_{20}	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \frac{(3z^2 - r^2)}{r^2\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{\sqrt{3}}$

É natural procurar por uma expressão alternativa para representar o potencial escalar em um dado sistema de referências em termos desta expansão angular, a fim de projetá-lo nos harmônicos esféricos. Podemos, desta forma, representar o potencial escalar (em coordenadas esféricas) como

$$\Phi(\mathbf{r}, \theta, \phi, t) = \sqrt{\frac{\pi}{15}} \rho r^2 \sum_m \ddot{h}_m(t) Y_m(\theta, \phi), \quad (2.32)$$

onde $h_m(t)$ representa as amplitudes das deformações projetadas nos harmônicos esféricos Y_m (ou, simplesmente, **amplitudes esféricas**), e r , a distância ao centro do sistema de referência. A escolha deste sistema de referências arbitrário possibilita a realização desta projeção.

2.5 Projeção da Forma Transversa e sem Traço em um Sistema de Referência Arbitrário

Como visto anteriormente, uma onda gravitacional passante gera uma perturbação na métrica $h_{\mu\nu}(t)$, que possui, no referencial da onda, uma forma transversa e sem traço, representada pela Equação 2.12. Esta expressão pode ser reescrita na forma matricial

como

$$\mathbf{H}'(t) \equiv h_{ij}(t) = \begin{pmatrix} h_+(t) & h_\times(t) & 0 \\ h_\times(t) & -h_+(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

uma vez que a componente temporal da métrica não sofre deformação pela passagem de uma onda gravitacional (independente do referencial inercial adotado), ela pode ser bem representada apenas pelas componentes espaciais.

A transformação da perturbação na métrica, para um sistema de referência arbitrariamente escolhido, é realizada por uma rotação apropriada dos eixos de referência. Optamos por realizar esta transformação através da convenção *y* para os ângulos de Euler [9].

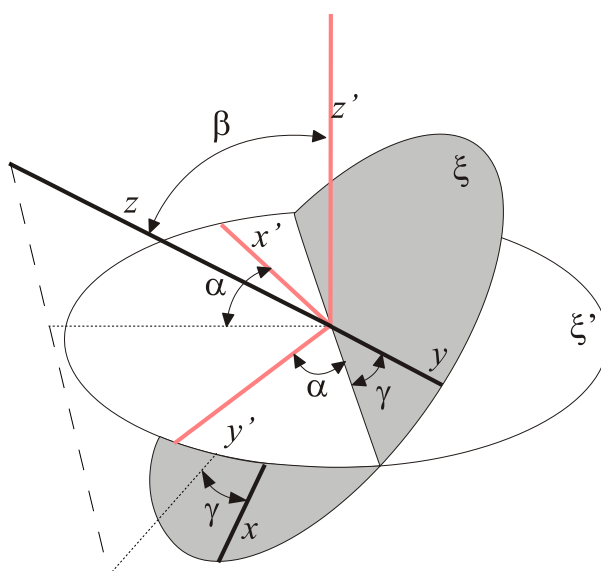


FIGURA 2.4 – Convenção *y* dos ângulos de Euler.

A Figura 2.4 mostra esta convenção, sendo β , o ângulo entre os eixos z e z' , α , o ângulo entre o eixo x' e a projeção do eixo z sobre o plano ξ' e, finalmente, γ , o ângulo entre o eixo y e a reta de intersecção entre os dois planos. O sistema de referência primado representa o referencial da onda. As polarizações atuam sobre o plano ξ' e a direção de propagação da onda coincide com o eixo z' .

A transformação entre os sistemas de referência será, então, dada pela matriz

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha & \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha & -\cos \gamma \sin \beta \\ -\sin \gamma \cos \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha & -\sin \gamma \cos \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \sin \beta \\ \sin \beta \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha & \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

A matriz \mathbf{R} é ortogonal e pode ser considerada uma matriz de rotação. Portanto, a matriz \mathbf{R} rotaciona o plano da onda para o referencial através da operação

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{R}\mathbf{H}'(t)\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} h_1(t) - \frac{1}{\sqrt{3}}h_5(t) & h_2(t) & h_4(t) \\ h_2(t) & -h_1(t) - \frac{1}{\sqrt{3}}h_5(t) & h_3(t) \\ h_4(t) & h_3(t) & \frac{2}{\sqrt{3}}h_5(t) \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

onde R^T é a transposta de R e a matriz $\mathbf{H}(t)$ tem como componentes as amplitudes $h_m(t)$ relativas aos harmônicos esféricos Y_m .

Podemos ajustar o sistema de referências não-primado de tal forma que $\alpha = 0$, assim, as amplitudes esféricas podem ser expressas como

$$h_1(t) = h_+(t)\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \beta) \cos 2\gamma + h_\times(t) \cos \beta \sin 2\gamma, \quad (2.36a)$$

$$h_2(t) = -h_+(t)\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \beta) \sin 2\gamma + h_\times(t) \cos \beta \cos 2\gamma, \quad (2.36b)$$

$$h_3(t) = -h_+(t)\frac{1}{2} \sin 2\beta \sin \gamma + h_\times(t) \sin \beta \cos \gamma, \quad (2.36c)$$

$$h_4(t) = h_+(t)\frac{1}{2} \sin 2\beta \cos \gamma + h_\times(t) \sin \beta \sin \gamma, \quad (2.36d)$$

$$h_5(t) = h_+(t)\frac{1}{2}\sqrt{3} \sin^2 \beta. \quad (2.36e)$$

Estenderemos a discussão sobre os efeitos de projeção das amplitudes no Capítulo 5.

CAPÍTULO 3

FONTES ASTROFÍSICAS E DETECTORES DE RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

Alguns sistemas astrofísicos aparecem como fortes candidatos a serem observados no espectro das ondas gravitacionais, por possuírem as características mencionadas na Seção 2.3. Tais fontes são caracterizadas basicamente pela amplitude h nas duas polarizações ($h^2 = h_+^2 + h_\times^2$) e pelo fluxo F^{OG} detectado na Terra, ou ainda pela luminosidade L^{OG} , que denota a taxa de energia que o sistema converte em radiação gravitacional. Presumindo-se uma fonte que irradia ondas gravitacionais isotropicamente, obtém-se a relação

$$L^{\text{OG}} = 4\pi r^2 F^{\text{OG}}. \quad (3.1)$$

E, por sua vez o fluxo de radiação gravitacional que banha um detector alojado em um laboratório situado na Terra é dado por [10]

$$F^{\text{OG}} \approx 30 \left(\frac{f}{10^3 \text{ Hz}} \right)^2 \left(\frac{h}{10^{-20}} \right)^2 \text{ Wm}^{-2}. \quad (3.2)$$

Eventos ocorridos a distâncias mais próximas que o centro do aglomerado de galáxias de Virgo, que correspondam a $h \sim 10^{-21}$, e na frequência de 1 kHz, apresentam um fluxo aproximado de $0,3 \text{ Wm}^{-2}$. Isto corresponde a cerca de 10^{20} vezes o fluxo apresentado por fontes astrofísicas típicas em rádio [11]. Porém, verifica-se que somente eventos de curta duração podem liberar energia suficiente para atingir tais valores. Assim, mostra-se útil uma classificação para as fontes astrofísicas de radiação gravitacional baseada em seus comportamentos temporais. Elas costumam ser classificadas em três grupos distintos, que implicarão métodos diferenciados de processamento e extração do sinal.

O primeiro grupo abrange as **fontes impulsivas** ou **abruptas**, ou ainda **sinais “bursts”**, e ocupa uma larga região do espectro das ondas gravitacionais. Seus representantes caracterizam-se pela curta duração dos eventos geradores de radiação gravitacional, e por possuírem poucos ciclos coerentes. Este grupo envolve eventos como a coalescência de sistemas binários formados por objetos compactos e a formação de buracos negros e estrelas de nêutrons através de supernovas.

O segundo grupo é composto pelas chamadas **fontes de banda fina**, ou **de sinais contínuos**, ou ainda denominadas **fontes periódicas**. Este grupo inclui estrelas de nêutrons axi-assimétricas (não simétricas axialmente), em particular pulsares com altas

taxas de rotação, estrelas de nêutrons que estão acretando matéria, e sistemas binários distantes da coalescência. Normalmente, estas fontes apresentam-se mais fracas do que as impulsivas, porém, a possibilidade de se integrar o sinal ao longo do tempo apresenta-se como uma vantagem, no que diz respeito a extração de sinal do ruído.

O terceiro grupo é composto pelo “**stochastic background**”, ou **fontes estocásticas**. Estes sinais são provenientes, por exemplo, do efeito integrado de fontes periódicas fracas em nossa Galáxia, de sinais impulsivos oriundos de grandes distâncias, ou ainda, de processos cosmológicos ocorridos nos primeiros instantes do Universo. Caracterizam-se por uma distribuição aleatória de sinais, cuja extração do sinal imerso no ruído instrumental de um detector é extremamente laboriosa.

Neste capítulo serão descritas algumas fontes representativas de cada um dos três grupos.

3.1 Fontes Impulsivas ou Abruptas

Este grupo de fontes pode ser subdividido em duas classes: *normais*, que apresentam um h_{ij}^{TT} nulo antes do evento e seu valor retorna a zero após o término do mesmo, e *com memória*, quando h_{ij}^{TT} é inicialmente nulo, e, após o evento, mantém um valor constante não-nulo Δh_{ij}^{TT} .

Uma fonte impulsiva tem frequência característica, f_c , dependente do tempo de duração, τ_c , do fenômeno gerador, dada por

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau_c}, \quad (3.3)$$

e que representa a frequência onde ocorre o pico na distribuição espectral. A amplitude característica, h_c , que se refere à amplitude da onda que banha um detector, na frequência f_c , pode ser estimada ao considerar-se que o “pulso” é aproximadamente gaussiano, obtendo-se [12]

$$h_c \simeq 2,7 \times 10^{-20} \left(\frac{\Delta E^{\text{OG}}}{M_{\odot} c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 \text{ kHz}}{f_c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{10 \text{ Mpc}}{r} \right), \quad (3.4)$$

onde 10 Mpc representa a distância ao Aglomerado de Galáxias Virgo (assumindo, $H_0 = 100 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para a constante de Hubble), e ΔE^{OG} a energia convertida em radiação gravitacional.

Os valores tanto da quantidade de energia emitida em forma de ondas gravitacionais quanto da frequência característica dependem de propriedades inerentes ao sistema. Por-

tanto, diferentes tipos de eventos astrofísicos preenchem diferentes regiões do espectro, cada um deles com diferentes formas de onda. Então, faz-se necessária uma rápida explanação sobre os mais importantes candidatos à detecção, pertencentes a este grupo, e suas características fundamentais.

3.1.1 Supernova

Acredita-se, com um alto grau de confiança, que uma supernova do tipo II seja proveniente do colapso gravitacional de estrelas massivas e evoluídas em objetos compactos como uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. O núcleo (se ele for suficientemente assimétrico) tem massa dinâmica suficiente para ser uma fonte de radiação gravitacional. Contudo, os processos físicos do colapso à formação de um objeto compacto não são totalmente conhecidos. Observações deste tipo de evento em nossa galáxia, aliada aos neutrinos e sinais ópticos podem acrescentar entendimento dos processos envolvidos no colapso.

Supernovas do tipo I, por sua vez, são decorrentes de explosões nucleares ocorridas na superfície de uma estrela anã branca em um sistema binário, sobre a qual a companheira deposita material, sendo que a anã branca pode, ou não, colapsar para uma estrela de nêutrons.

Porém, ambos os eventos são raros. A taxa de ocorrência observacional destes eventos em nossa galáxia é de uma do tipo I e uma do tipo II a cada 30 – 40 anos. Enquanto que, se a distância de rastreamento é ampliada ao aglomerado de Virgo, a taxa de ocorrência destes eventos sobe para uma por ano (eventos/ano $\propto r^3$).

A energia máxima que pode ser liberada por uma supernova é

$$\Delta E^{OG} = 0,3Mc^2, \quad (3.5)$$

mas, normalmente, apenas uma pequena fração desta energia é emitida em ondas gravitacionais durante e pouco tempo após o colapso. E, mesmo que a maior parte desta energia seja convertida em radiação gravitacional, a Equação 3.4 prevê resultados como $h_c \sim 10^{-22}$ para $r \sim 10$ Mpc [13, 14]. Isto mostra que mesmo eventos desta natureza produzem ondas com amplitudes bastante pequenas, minimizando as chances de detecção.

Um indicador de detectabilidade destes fenômenos – mais importante que a quantidade de energia irradiada em forma de ondas gravitacionais – é a razão sinal-ruído, dada por

$$\frac{S}{N} = \frac{h_c}{h_N(f_c)}, \quad (3.6)$$

onde $h_N(f_c)$ corresponde à amplitude do ruído na frequência f_c . Portanto, ao reduzir-se o valor de $h_N(f_c)$ a níveis menores que h_c torna-se possível a detecção de ondas gravitacionais oriundas de fontes distantes.

Ruffini e Wheeler listaram alguns dos processos que contribuem para a geração de radiação gravitacional em uma supernova [15]

- a) A implosão inicial da estrela deve ser assimétrica, quanto maior o coeficiente de assimetria maior será o momento quadrupolar da fonte;
- b) Fragmentação do núcleo em grandes pedaços devido à rotação e ao alto grau de achatamento durante o colapso. O achatamento, decorrente de um colapso assimétrico, pode excitar os modos da estrela de nêutrons, ou do buraco negro formado a partir da supernova;
- c) Órbitas subseqüentes de um pedaço em torno do outro. Fragmentos orbitando entre si geram um valor $\Delta h_{ij}^{TT} \neq 0$, caracterizando um sinal impulsivo com memória;
- d) Coalescência e colisão dos pedaços, criando uma cadeia de eventos e fazendo com que mais momento angular seja carregado para fora do sistema pelas ondas gravitacionais;
- e) O surgimento de estrela(s) de nêutrons fora do núcleo ou nos pedaços.

Considerando uma estrela de nêutrons recém-formada com alta taxa de rotação, e modelada como um elipsóide axi-assimétrico, Lai e Shapiro mostraram que a amplitude característica da onda gravitacional durante a evolução de um esferóide de Maclaurin para um elipsóide de Dedekind é dada (com 20% de precisão) por

$$h_c \sim 1,8 \times 10^{-22} \left(\frac{10 \text{ Mpc}}{R} \right) \left(\frac{M}{10M_\odot} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{r}{10 \text{ km}} \right) f^{\frac{1}{2}}, \quad (3.7)$$

sendo R e M o raio e a massa da estrela, respectivamente, e r a distância entre a fonte e o detector [16]. Durante o colapso gravitacional podem ocorrer instabilidades dinâmicas axi-assimétricas que acarretam deformações na estrela recém-formada, achatando-a e fazendo com que esta perca massa e momento angular. Tais instabilidades afetam os modos $e^{\pm 2i\phi}$, chamados de “modos barra”, que são comumente parametrizados por $\beta \equiv K/|U|$, onde K e U representam, respectivamente, a energia cinética de rotação e a energia potencial gravitacional [17]. Modelos que utilizam $\beta_i \gtrsim 0,28$ mostram que (4 – 21)% e (14 – 62)%

TABELA 3.1 – Amplitude máxima e frequência característica da onda gravitacional gerada pelos modos barra em estrelas de nêutrons recém-formadas, para dois valores representativos dos raios equatoriais.

R_{eq}	10 km	20 km
$\max h _{VL}$	$(5 - 6) \times 10^{-19}$	$(2 - 3) \times 10^{-19}$
$\max h _{GL}$	$(8 - 9) \times 10^{-21}$	$(4 - 5) \times 10^{-21}$
$\max h _{AV}$	$(4 - 5) \times 10^{-22}$	$(2 - 3) \times 10^{-22}$
f_c (Hz)	(3000 – 3500)	(1100 – 1300)

A massa do núcleo adotada é $M = 1,4M_{\odot}$. As amplitudes máximas são obtidas através da consideração de fontes localizadas na Via Láctea (VL), no Grupo Local (GL) e no Aglomerado de Virgo (AV). Os limites inferior e superior devem-se aos valores adotados para o parâmetro de energia inicial $\beta_i \sim 0,28$ e $\beta_i \sim 0,34$, respectivamente.

FONTE: Houser (1994).

da massa e do momento angular, respectivamente, podem ser expelidos pelo(s) braço(s) espiral(is) [18]. Tanto a duração do evento quanto a amplitude e a frequência característica do sinal gravitacional são sensíveis ao parâmetro β_i . Em objetos com frequências de rotação elevadas, é esperado que durante a fase elipsoidal jacobiana, a amplitude característica pode ser estimada por

$$h_c \sim 2,7 \times 10^{-20} \left(\frac{10 \text{ Mpc}}{R} \right) \left(\frac{M}{1,4M_{\odot}} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{r}{10 \text{ km}} \right) f^{-\frac{1}{5}}. \quad (3.8)$$

Como pode ser percebido pela análise da Tabela 3.1 e pela Equação 3.8, supernovas que resultam em estrelas de nêutrons com altas taxas de rotação podem aparecer como fontes intensas de radiação gravitacional. Mas, como foi apresentado no início desta seção, estes eventos raramente ocorrem nos limites de nossa galáxia. Então, para que alguns destes eventos possam ser detectados no decorrer de um ano, a sensibilidade dos detectores atuais deve atingir $h \lesssim 10^{-22}$.

Levando-se em conta que os colapsos gravitacionais podem também formar buracos negros, o tempo de duração destes eventos pode ser estimado com mais precisão. Assumindo-se que o tempo característico, associado à emissão de radiação gravitacional, é dado pelo tempo que a onda gravitacional leva para viajar uma distância $d = 2r_{Sch}$, em uma região com um campo gravitacional intenso, obtém-se

$$\tau_c \equiv \frac{d}{c} = \frac{4GM}{c^3}. \quad (3.9)$$

A Equação 3.9 implica (por 3.3) que ondas gravitacionais produzidas neste tipo de evento devem ter frequência característica

$$f_c = \frac{c^3}{8\pi GM} \sim 1,3 \times 10^4 \left(\frac{M_\odot}{M} \right). \quad (3.10)$$

Assim, buracos negros com massas $M \lesssim M_\odot$ devem irradiar energia gravitacional em frequências na faixa de kiloHertz.

A amplitude característica da onda gravitacional emitida no colapso gerador de um buraco negro também depende de quão assimétrico é o colapso. Mas, tanto o grau de assimetria quanto a frequência de ocorrência deste tipo de colapso não são completamente conhecidos. Estima-se que a taxa de formação de buracos negros com baixa massa é de, aproximadamente, 1/3 da taxa de formação de estrela de nêutrons. Assim, colapsos que gerem buracos negros com massa da ordem de $10^6 M_\odot$ só têm ocorrência prevista em núcleos galácticos e a uma taxa de poucos por ano dentro do Universo observado. Já a amplitude característica pode ser estimada por

$$h_c \sim 5 \times 10^{-21} \left(\frac{1 \text{ kHz}}{f_c} \right) \left(\frac{10 \text{ Mpc}}{r} \right) \left(\frac{\epsilon}{10^{-3}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.11)$$

onde $\epsilon = \Delta E_{OG}/M_\odot c^2$ é a eficiência da conversão de energia em radiação gravitacional. Para colapsos axissimétricos, o valor de ϵ provavelmente não excede 7×10^{-4} . Então, colapsos ocorridos nos limites do aglomerado de Virgo apresentariam uma amplitude da ordem de 10^{-21} na Terra.

Por ser impossível se obter informações após o colapso através do espectro eletromagnético (a menos da existência de disco de acreção), o que se sabe destes objetos é puramente teórico. O advento da astrofísica de ondas gravitacionais poderá trazer informações jamais obtidas sobre tais objetos.

3.1.2 Espiração e Coalescência de Objetos Compactos

Existem inúmeros sistemas binários espalhados nas variadas escalas do Universo. Alguns destes sistemas devem ser formados por objetos compactos como estrelas de nêutrons e buracos negros. E, se seus componentes estiverem bastante próximos um do outro, o sistema coalescerá “rapidamente” por perder energia pela emissão de radiação gravitacional. Isto foi provado por Taylor e Hulse, quando utilizaram-se da emissão de ondas gravitacionais para explicar o decaimento do período orbital do pulsar binário PSR1913+16 [19]. Este pulsar, estudado desde 1975, apresenta uma taxa de decaimento do período

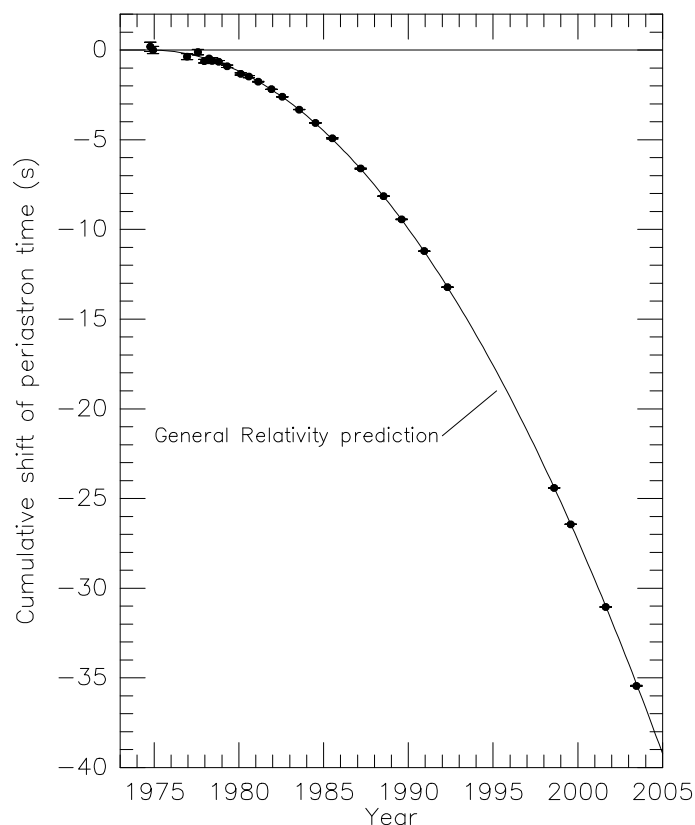


FIGURA 3.1 – Medidas do atraso de fase do pulsar PSR1913+16. A linha curva representa a previsão da Relatividade Geral.

FONTE: Weisberg e Taylor (2004).

orbital consistente com as previsões da Teoria da Relatividade Geral, para a emissão de ondas gravitacionais $d\tau/dt = -2,4 \times 10^{-12}$. Segundo esta taxa de decaimento, o sistema irá coalescer daqui a $3,5 \times 10^8$ anos. A Figura 3.1 mostra o decaimento do período da órbita expressa pelo atraso de fase acumulado em segundos. A linha curva refere-se ao previsto pelo Relatividade Geral, e a linha horizontal corresponde ao atraso nulo.

As observações do pulsar binário PSR1913+16 forneceram informações sem precedentes sobre as ondas gravitacionais. Os parâmetros orbitais do sistema binário, incluindo as massas do pulsar e de sua companheira, puderam ser determinados. Outras interessantes aplicações dos dados têm também sido exploradas, como por exemplo, a determinação do limite superior para a densidade de energia de um fundo de ondas gravitacionais de frequência muito baixa.

Sistemas binários compactos emitem ondas gravitacionais periódicas, cujas frequências varrem o espectro até atingirem seus valores máximos quando estão próximos à coalescência, sendo [12, 20]

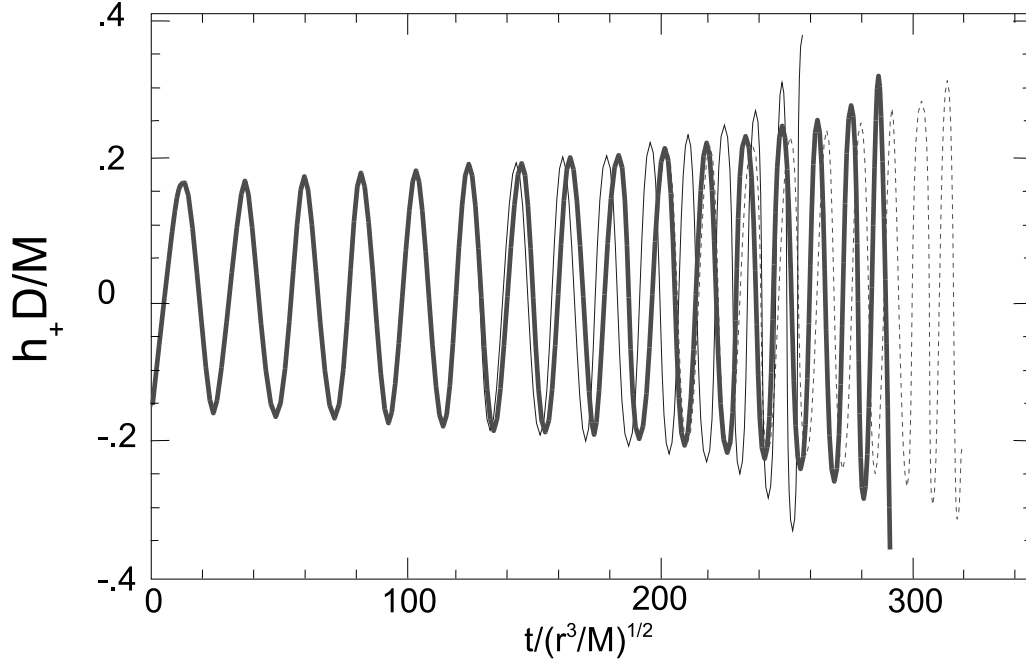


FIGURA 3.2 – Forma de onda da coalescência de um sistema binário formado por estrelas de nêutron, onde D representa o momento de quadrupolo reduzido. Na linha fina assume-se uma viscosidade cinética $\nu_c = \frac{1}{2} (M/r)^{1/2}$. Na linha pontilhada, consideram-se massas pontuais. FONTE: Ju (2000).

- $f_{max} \simeq 1 \text{ kHz}$ para estrelas de neutrons;
- $f_{max} \simeq \frac{10 \text{ kHz}}{M_1/M_\odot}$ para buracos negros com massas M_1 .

Já a amplitude característica da onda na fase de espiralação é

$$h_c \sim 4,1 \times 10^{-22} \left(\frac{\mu}{M_\odot} \right) \left(\frac{100 \text{ Mpc}}{r} \right) \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f_c} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad (3.12)$$

onde M e μ são, respectivamente, a massa total e a massa reduzida do sistema.

Lai e Shapiro mostraram que a interação gravitacional entre duas estrelas de nêutrons pode causar instabilidades hidrodinâmicas, que aceleram significativamente a coalescência dos objetos quando estes se encontram suficientemente próximos um do outro [16]. O modelo, que leva em conta a hidrodinâmica dissipativa do sistema, prevê redução no tempo de coalescência e aumento da amplitude h em sistemas com viscosidade não-nula, como mostra a Figura 3.2 [10].

A taxa de ocorrência deste tipo de sistema é muito pequena. Uma estimativa mais otimista foi apresentada por Tutukov e por Yamaoka (1993). Utilizando-se de modelos de

evolução estelar, mostraram que a taxa a uma distância de 200 Mpc gira em torno de 100/ano [21, 22].

3.1.3 Queda de Estrelas e Pequenos Buracos Negros no Interior de Buracos Negros Supermassivos

Observações recentes dão indícios da existência de buracos negros supermassivos ($M \geq 10^6 M_\odot$) no centro das galáxias. Um exemplo provável é NGC 3115, cujos sinais observacionais sugerem a existência de um buraco negro com massa $M \sim 2 \times 10^9 M_\odot$ no seu interior [23]. Existe, portanto, a possibilidade de que os mesmos sofram acreção de matéria, aumentando suas dimensões em escalas de tempo da ordem de 10^8 anos. Alguns objetos podem orbitar próximos o suficiente, a tal ponto de transferirem matéria, ou mesmo podem mergulhar dentro dos buracos negros, ou ainda serem espalhados pela forte aceleração do campo gravitacional (efeito catapulta). Em um raio $r \sim 10$ Mpc temos uma probabilidade considerável de que existam galáxias que apresentem estas características.

A forma de onda emitida por uma estrela ou um pequeno buraco negro que “ricocheteia”, ou mergulha em um buraco negro supermassivo pode ser modelada com bastante precisão utilizando-se formalismo de perturbação. A frequência e a amplitude característica da onda gerada, segundo este modelo, são dadas, respectivamente, por

$$f_c \simeq \frac{1}{20M_1} = \left(\frac{10^8 M_\odot}{M_1} \right) \times 10^{-4} \text{ Hz} \quad (3.13)$$

e

$$h_c \simeq \frac{M_2}{2r} = 2 \times 10^{-21} \left(\frac{M_2}{M_\odot} \right) \left(\frac{10 \text{ Mpc}}{r} \right), \quad (3.14)$$

onde M_1 é a massa do buraco negro supermassivo e M_2 é a massa do corpo em queda.

3.2 Fontes Periódicas

As ondas gravitacionais originárias de sistemas periódicos são caracterizadas pelo conjunto discreto de frequências (Δf pequeno). Como exemplos de fontes periódicas podemos citar estrelas de nêutrons axi-assimétricas (especialmente pulsares com períodos de rotação na faixa de milissegundos) e sistemas binários distantes da coalescência.

3.2.1 Pulsares de Milissegundos

Um pulsar axi-assimétrico emite radiação gravitacional em duas vezes sua frequência de rotação ($f_c = 2f_{orb}$). Se o pulsar estiver precessionando, então ele pode estar emitindo tanto na frequência de rotação como no seu dobro.

Os pulsares de milissegundos são caracterizados pela alta taxa de rotação e pelo baixo campo magnético superficial (10^8 G contra 10^{12} G para pulsares ordinários). Normalmente, os pulsares novos possuem períodos na ordem de segundos, porém, não há nada que proíba um pulsar de “nascer” com alta taxa de rotação (acredita-se que o pulsar de Carangueijo tenha “nascido” com um período de 16 ms) [24]. O discurso padrão é de que pulsares de milissegundos sejam pulsares velhos que diminuíram seus períodos de rotação pela acreção de matéria despejada por uma companheira.

A taxa de acreção é limitada pela pressão de radiação da estrela acreadora, e supõe-se ser necessário em torno de 10^8 anos para um pulsar acretar matéria suficiente para diminuir seu período para a ordem de milissegundos. Isto implica uma companheira de baixa massa ($M \sim 1M_{\odot}$), visto que uma companheira de massa significativamente maior evoluiria rapidamente, e não haveria tempo suficiente para que uma estrela de nêutrons atingisse uma taxa de rotação maior.

A acreção de matéria na estrela de nêutrons produz raios-X que têm sido detectados. Recentemente, têm sido diretamente observados pulsares de milissegundos em sistemas LMXB (sistemas binários com baixa massa emissores de raios-X), dando suporte experimental à hipótese de aumento da taxa de rotação por acreção de matéria [25].

A questão da baixa intensidade do campo magnético dos pulsares de milissegundos permanece um mistério. É possível que a acreção de matéria acarrete a redução do campo, mas nem todas as observações de pulsares de milissegundos sustentam esta hipótese.

Desvios de simetria nestes objetos podem ser produzidos por diversos fatores, entre eles:

- a) A história de formação da estrela de nêutrons. É possível que o colapso tenha sido assimétrico, causando deformidades no objeto remanescente.
- b) O campo magnético da estrela pode ser suficientemente intenso, exercendo pressão magnética para distorcê-la significativamente.
- c) O período de rotação é maior que o período crítico¹.

A amplitude característica depende da polarização da onda, que, por sua vez, está ligada à orientação do plano de rotação do pulsar em relação ao plano do céu, e pode ser

¹O período crítico de rotação depende da estrutura da estrela e da dependência entre a temperatura e a viscosidade, e corresponde ao período máximo que o objeto pode ter para que seja mantida a simetria.

estimada pela expressão

$$h_c \equiv \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \langle |h_+(\alpha, \beta, r)|^2 + |h_\times(\alpha, \beta, r)|^2 \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

onde α e β são os ângulos entre o plano de rotação e a linha de visada. Utilizando-se do formalismo para movimentos não-relativísticos, obtém-se

$$h_+ = 2(1 + \cos^2\alpha) \frac{(I_{xx} - I_{yy})(\pi f)^2}{r} \quad (3.16a)$$

e

$$h_\times = 4 \frac{(I_{xx} - I_{yy})(\pi f)^2}{r} \cos\alpha, \quad (3.16b)$$

onde I_{xx} e I_{yy} são as componentes do momento quadrupolar ao longo dos eixos principais no plano equatorial da estrela de nêutrons e α , o ângulo entre o eixo de rotação e a linha do sinal. Assim, 3.15 nos dá

$$h_c \approx 7.7 \times 10^{-20} \epsilon \left(\frac{I_{zz}}{10^{45} \text{ gcm}^2} \right) \left(\frac{f_c}{1 \text{ kHz}} \right)^2 \left(\frac{10 \text{ kpc}}{r_0} \right), \quad (3.17)$$

onde I_{zz} é o momento de inércia da estrela em relação ao seu eixo de rotação, e

$$\epsilon \equiv \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \quad (3.18)$$

é sua elipcidade no plano equatorial. Tal valor é de difícil estimativa, não havendo modo de determiná-lo observacionalmente. Estimativas teóricas prevêm valores entre 10^{-6} e 10^{-2} , variando de acordo com a velocidade de rotação e a existência de fenômenos sísmicos na estrela (os “starquakes”, ou “estrelamotos”, que são provenientes de acomodações do material estelar). Estrelas de nêutrons com massas $M \sim 1,4 M_\odot$ possuem $I_{zz} \simeq 0,3 - 3,0 \times 10^{45} \text{ gcm}^2$, dependendo da equação de estado destas massas.

São conhecidas, atualmente, algumas estrelas de nêutrons que acretam matéria em sistemas binários, apresentando desta forma assimetria axial. A energia irradiada sob a forma de ondas gravitacionais e de raio-X devem ser proporcionais à taxa de acreção e, conseqüentemente, a amplitude característica das ondas gravitacionais é proporcional à raiz quadrada do fluxo em raio-X

$$h_c \simeq 2 \times 10^{-27} \left(\frac{300 \text{ Hz}}{f_c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{F_X}{10^{-8} \text{ ergcm}^2\text{s}^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.19)$$

onde F_X representa o fluxo em raio-X recebido na Terra.

Se uma estrela está reduzindo o valor do seu período de rotação devido a emissão de ondas gravitacionais, a amplitude máxima recebida na Terra será dada por

$$h_{\max} = \frac{4G}{c^4} \frac{f^2}{r} I\epsilon \sim \left(\frac{\dot{E}_{OG}}{1,6 \times 10^{38} \text{ ergs}^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{f_c r}. \quad (3.20)$$

Introduzindo valores observacionais para pulsares de milissegundos na Equação 3.20, chegou-se a um dos melhores candidatos a observação, o pulsar PSR1957+20, que apresenta $P = 1,6 \text{ ms}$, $\dot{P} = 1,6 \times 10^{-20}$ e $r = 1,5 \text{ kpc}$, conduz a um $h_{\max} = 1,6 \times 10^{-27}$.

3.2.2 Estrelas Binárias

Sistemas binários emitem radiação gravitacional com frequências extremamente baixas e são as fontes de ondas gravitacionais mais estudadas. É possível, utilizando-se de medidas da massa e de parâmetros orbitais, estimar a distância entre as estrelas e, desta forma, calcular com precisão a emissão de ondas gravitacionais. Verbunt calculou a densidade numérica de alguns sistemas binários que apresentam períodos curtos [26]. A Tabela 3.2 mostra alguns sistemas binários, com as respectivas massa M e m , frequência orbital e amplitude aproximada da onda gravitacional.

Excentricidades na órbita geram ondas com linhas espectrais igualmente espaçadas, cujo harmônico dominante encontra-se na frequência (assim como os pulsares de milissegundos) igual ao dobro da frequência orbital e que apresenta amplitude característica

$$h_c = 8 \left(\frac{2}{15} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu}{r} (\pi M f_c)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.21)$$

onde M e μ são a massa total e reduzida do sistema, respectivamente.

3.3 Sinais Estocásticos

Os sinais de caráter estocástico podem ser imaginados como um ruído de fundo gravitacional. As emissões, oriundas de uma distribuição estatística de fontes, fazem com que o espaço-tempo não seja completamente “liso”, mas apresente pequenas “rugosidades” que se deslocam perturbando a métrica local segundo um

$$h_{jk}^{TT}(t, x^l) = \sum_K h_{Kjk}^{TT}(t, x^l), \quad (3.22)$$

TABELA 3.2 – Algumas fontes binárias de ondas gravitacionais de baixa frequência.

Tipo	Densidade	$d(pc)$	M/M_{\odot}	m/M_{\odot}	f	h
WUMa (0,3-0,6 M_{\odot})	$2 \times 10^{-4} \text{ pc}^{-3}$	15	0,6	0,3	$10^{-4,0}$	$10^{-20,4}$
WUMa (0,1-0,3 M_{\odot})	$2 \times 10^{-4} \text{ pc}^{-3}$	15	0,3	0,1	$10^{-3,7}$	$10^{-20,7}$
Variáveis Cataclísmicas	10^{-5} pc^{-3}	45	0,3	0,6	$10^{-3,7}$	$10^{-20,7}$
DD		100	0,04	0,6	$10^{-2,7}$	$10^{-21,2}$
LMXB	30	1000	0,4	1,4	$10^{-3,8}$	$10^{-21,7}$
Pulsares LMB		1300	0,03	1,4	$10^{-3,8}$	$10^{-21,7}$
HMXB	1	10000	4,0	1,4	$10^{-3,9}$	$10^{-20,8}$
EN-EN	$< 10^{-5}$	500	1,4	1,4	$10^{-3,7}$	$10^{-20,8}$
BAG		8100	0,06	1,4	$10^{-2,5}$	$10^{-22,3}$

- WUMa - Binárias de Ursa Maior W
- DD - Duplas Degeneradas (AM CVn)
- LMXB - Binárias de baixa massa que emitem raios-X ($P_b < 2 \times 10^{-4} \text{ s}$)
- LMB - Binárias de baixa massa (PSR2051-08)
- HMXB - Binárias de alta massa que emitem raios-X (Cyg X-3)
- EN-EN - Pulsares binários de estrelas de nêutrons (PSR1913+16)
- BAG - Binárias em aglomerados globulares (4U1820-30)

FONTE: Ju (2000).

onde o índice K indica o modo do campo. Ou seja, a amplitude de onda associada a uma determinada posição x^i e a um modo K é levada em conta como um processo randômico, e portanto estatístico. A amplitude total neste ponto x^i é, então, a somatória das amplitudes em todos os modos K 's. As amplitudes nos modos K 's seriam expressas como

$$h_{Kjk}^{TT} = h_K(t, x^i) e_{jk}^K, \quad (3.23)$$

onde h_K é uma função de onda escalar e e_{jk}^K representa um vetor constante de polarização, cujo é convencionalmente normalizado na forma $e_{jk}^K e_{jk}^K = 2$, em coordenadas Cartesianas.

Como mencionado inicialmente, estes sinais são oriundos de fontes periódicas fracas em nossa Galáxia; de sinais impulsivos ocorridos a grandes distâncias; de processos cosmológicos ocorridos nos primeiros instantes do Universo, dentre outras fontes. Algumas delas são apresentadas a seguir.

3.3.1 Sistemas Binários

A radiação gravitacional proveniente dos inúmeros sistemas binários na nossa e em outras galáxias contribui para o fundo estocástico, na região de frequência $f \lesssim 0,03 \text{ Hz}$. A con-

tribuição de todas as outras galáxias porém, deve ser menor do que 15% da contribuição da Via Láctea.

Qualquer fonte impulsiva que tenha amplitude menor que a amplitude do fundo causado pelas fontes periódicas torna-se imersa no ruído, o que transforma-se em um obstáculo difícil de se contornar na busca de fontes impulsivas na faixa de frequência $0,03 \text{ Hz} \lesssim f \lesssim 10^{-5} \text{ Hz}$.

3.3.2 Estrelas de População III

Considerando-se a existência de uma população pré-galáctica de estrelas supermassivas (a chamada População III), que devem ter desaparecido em meio a eventos violentos, envolvendo colapsos em estrelas de nêutrons e buracos negros, é natural imaginar que tais eventos tenham produzido ondas gravitacionais. Estas supernovas pré-galácticas podem ter criado um fundo estocástico isotrópico com amplitudes $h_c \lesssim 10^{-22}$, em frequências $f_c \sim 50 \text{ Hz}$ [27].

3.3.3 Ondas Gravitacionais Primordiais

As ondas gravitacionais primordiais, ou cosmológicas, podem ser comparadas à radiação cósmica de fundo, pois ambas são originárias do período do último espalhamento de suas partículas (grávitons e fótons, respectivamente) pela matéria. Porém, a interação das ondas gravitacionais com a matéria é muito menor, e portanto elas são provavelmente $\sim 10^5$ anos mais antigas, ou em outras palavras, sofreram o último espalhamento em $z \sim 10^{30}$ (próximo ao tempo de Planck, $\sim 10^{-43} \text{ s}$). Desta forma, as ondas gravitacionais primordiais transportam informações sobre os momentos iniciais do Universo, e de sua estrutura inicial.

É difícil especular sobre a amplitude deste tipo de sinal estocástico por não conhecer-se a física que era válida neste período, podendo, inclusive, a frequência característica da radiação gravitacional ter sido deslocada (“shiftada”) e encontrar-se, hoje, no regime das microondas. Ou ainda, ter sofrido ganhos em amplitude por interferência construtiva (amplificação paramétrica).

Considerando que o Universo apresentava uma inomogenidade inicial na amplitude, h_g , a amplitude, hoje, em uma determinada frequência f , seria grosseiramente dada por

$$h \sim 10^{-20} \frac{h_g}{f}, \quad (3.24)$$

apresentando valores da ordem de 10^{-28} para $f \sim 1 \text{ kHz}$, e 10^{-21} para $f \sim 10^{-4} \text{ Hz}$.

3.3.4 Transição de Fase

Na fase inicial da expansão do Universo é possível que tenham ocorrido transições de fase de primeira ordem associadas às interações da QCD (“Quantum Chromodynamics”) e às interações eletrofracas. Em cada uma destas transições de fase, a fase original é super-resfriada, devido a expansão cosmológica, a uma temperatura abaixo da temperatura de equilíbrio da nova fase. Assim, bolhas da nova fase surgem em pontos isolados e expandem a taxas próximas à velocidade da luz, até o ponto em que comprimem a fase original suficientemente para que as duas coexistam em equilíbrio. Estudos mostram que este processo pode produzir ondas gravitacionais diretamente pela expansão da bolha, pela subsequente onda de som que ela gera e pela inomogeneidade associada com as duas fases coexistindo.

É difícil estimar a amplitude destas ondas dado o desconhecimento da topologia inicial do Universo, apesar de se ter consciência que possuam um limite superior razoável. Porém, pode-se estimar as frequências características máximas que apresentam hoje, obtendo-se

$$f_{max} \sim 2 \times 10^{-7} \left(\frac{kT}{1 \text{ GeV}} \right) \text{ Hz}, \quad (3.25)$$

onde T é a temperatura da transição de fase.

3.3.5 Cordas Cósmicas

Antes das transições de fase da QCD e das interações eletrofracas terem ocorrido, é possível que tenham havido transições associadas às interações da Grande Unificação. E, estas transições podem ter criado *cordas cósmicas*, ou seja, defeitos topológicos unidimensionais no vácuo (algo como buracos negros filamentosos).

O aparecimento destes defeitos pode ter ocorrido em um instante muito próximo a singularidade inicial. E com a expansão do horizonte do Universo, sua vibração atingiu taxas próximas à velocidade da luz. A interação entre as cordas gerou “loops”, que poderiam ter promovido a formação de galáxias e aglomerados de galáxias, enquanto decaíam por emissão de ondas gravitacionais. Porém, a teoria ou modelo de formação de estruturas via cordas cósmicas não é consistente com as observações da radiação cósmica de fundo.

Vachaspati e Vilenkin, estimaram que, para o caso de as cordas não serem supercondutoras, a razão entre a densidade de energia por unidade logarítmica de frequência e a

densidade de energia crítica é dada por [28]

$$\Omega_{OG}(f) \sim 10^{-7} \left(\frac{G\mu}{10^{-6}} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ para frequências, } f \gtrsim 10^{-8} \left(\frac{10^{-6}}{G\mu} \right) \text{ Hz}, \quad (3.26)$$

onde $\mu \sim M/l$ representa a massa por unidade de comprimento, l . Valores de $G\mu$ inferiores 10^{-6} levam a complicações no modelo das cordas cósmicas não supercondutoras para a formação de galáxias. Observações futuras de ondas gravitacionais podem conduzir à estimativa de Ω_{OG} , e conseqüentemente, ao valor de $G\mu$.

Para cada uma das fontes mencionadas, existem métodos diferentes para a construção de detectores e o respectivo tratamento dos dados.

3.4 Detectores de Ondas Gravitacionais

Em 1960, Joseph Weber mostrou que as ondas gravitacionais poderiam ser detectadas utilizando-se medidas do tensor de Riemann, através do monitoramento de movimentos relativos entre massas pontuais [29]. Desde então, a comunidade científica tem trabalhado no desenvolvimento de sensores capazes de medir os deslocamentos causados pelo efeito de maré de uma onda gravitacional. Estes instrumentos são conhecidos como detectores de ondas gravitacionais.

Um grande número de detectores de ondas gravitacionais, envolvendo tecnologias das mais simples às mais sofisticadas podem ser encontrados na literatura. Esta seção discutirá apenas algumas características de um grupo, denominado **detectores mecânicos**. Um detector mecânico de ondas gravitacionais pode ser representado, simplificadaamente, por duas massas ligadas por molas, e separadas por um comprimento L_0 , como mostra a Figura 3.3.

Quando uma onda gravitacional passa pelo círculo (linha cheia), distorce-o (linha pontilhada), depositando energia sobre a mola e fazendo com que ambas as massas desloquem-se por uma distância $\Delta L = \frac{1}{2}hL$, relativa ao centro do círculo, onde h é a amplitude da onda gravitacional. Assim, o monitoramento dos deslocamentos relativos fornece informações sobre uma onda gravitacional que passa pelo detector. Os detectores mecânicos, por sua vez, são classificados como interferômetros e detectores tipo massa ressonante.

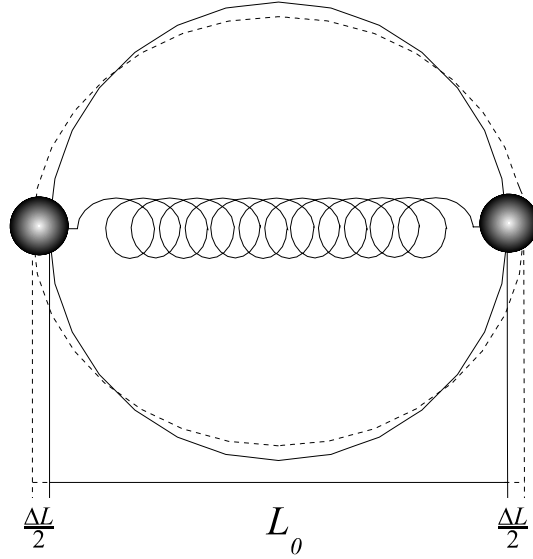


FIGURA 3.3 – Modelo simples de um detector de ondas gravitacionais.

3.4.1 Interferômetros a Laser

Esta classe baseia-se no princípio idealizado por Gertsenshtein e Pustovoit, em 1962, e também sugerido por Weber, apesar de nunca ter publicado sua sugestão [30]. Os interferômetros Michelson, conhecidos há um longo tempo por sua sensibilidade às mudanças nos comprimentos de seus braços, são aplicados na construção destes detectores.

O interferômetro Michelson consiste de três massas de teste livres - um separador de feixe e dois espelhos dispostos formando um ângulo reto entre si, conforme mostra a Figura 3.4. Quando uma onda gravitacional atravessa o sistema cria um deslocamento relativo entre as massas de teste, os espelhos. A variação de distância entre os espelhos é lida pelo foto-detector como uma variação de intensidade, fornecendo informações sobre a onda gravitacional.

Como exemplo, pode-se supor uma onda gravitacional que se propaga perpendicularmente ao plano do papel, e com uma polarização paralela aos braços do interferômetro. A passagem da onda gravitacional faz com que o comprimento de um dos braços diminua, enquanto o do outro aumenta, durante metade do período da onda. Na segunda metade do período, a alongação e a contração se reverte. Esta alongação-contração causa uma mudança de fase no feixe de laser, ΔF , devido à variação no caminho óptico, $\Delta L = \Delta L_2 - \Delta L_1$, que é dada por

$$\Delta F = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda}, \quad (3.27)$$

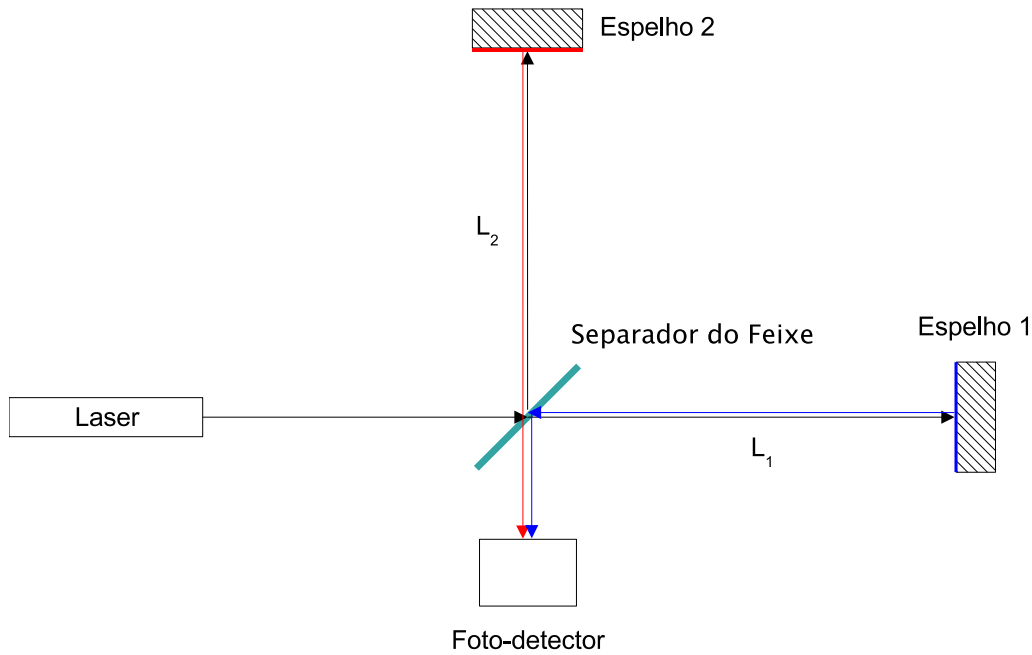


FIGURA 3.4 – Modelo simples de um interferômetro Michelson.

onde λ representa o comprimento de onda do laser. A variação do caminho óptico é proporcional aos comprimentos dos braços somados, L , e dado por

$$\Delta L = hL, \quad (3.28)$$

sendo que são, geralmente, sensíveis à combinação linear de ambas as polarizações da onda gravitacional, e h pode ser representado por

$$h = F_+ h_+ + F_x h_x, \quad (3.29)$$

onde os coeficiente F_+ e F_x dependem de fatores como a direção da fonte e a orientação do interferômetro.

Parece claro pela Equação 3.28 que a intensificação do sinal, ΔL , pode ser obtida pelo aumento do comprimento dos braços do interferômetro. Contudo, existe um comprimento ótimo, pois comprimentos superiores farão com que o sinal gravitacional seja percebido pelas massas durante um tempo menor que o tempo de viagem da luz, tornando-se imperceptível. Assim, o comprimento ótimo é dado por

$$L_{ot} = \frac{c}{2f^{OG}} \quad (3.30)$$

onde f^{OG} representa a frequência do sinal gravitacional que se pretende captar. Ao

comprimento ótimo corresponderá uma frequência característica, em que se encontrará o pico de sensibilidade do detector. Por exemplo, para se captar sinais em 1 kHz, o caminho óptico deveria ser de aproximadamente 150 km. Comprimentos desta ordem são praticamente impossíveis de serem obtidos na Terra, devido à sua curvatura. Porém, comprimentos na ordem de até poucos quilômetros são possíveis, nos quais o feixe pode sofrer várias reflexões aumentando desta forma o caminho óptico até o comprimento ideal.

Três interferômetros com braços longos, baseados na Terra, estão construídos

- O “Laser Interferometric Gravitational Waves Laboratory”(LIGO), nos Estados Unidos, já construído e que conta com dois instrumentos com braços de 4 km, um em Hanford e outro em Livingstone (<http://www.ligo.caltech.edu>).
- O VIRGO, projeto ítalo-francês que prevê a construção de um interferômetro a laser, cujos braços terão 3 km de comprimento, em Casina, próximo a Pisa/Itália (<http://www.virgo.infn.it>).

Outros detectores de braços curtos são:

- O projeto GEO, com braços de 600 m, sob construção em Hannover, a partir de uma cooperação entre Alemanha e Inglaterra (<http://www.geo600.uni-hannover.de>);
- O TAMA, em Tóquio, com 300 m, que já se encontra em operação (<http://tamago.mtk.nao.ac.jp>).

E ainda, o AIGO (“Australian International Gravitational Observatory”) que está sendo construído em Gingin (Austrália, <http://www.gravity.uwa.edu.au/AIGO/AIGO.html>) com dois braços de 4 km.

Todos estes detectores utilizam feixes de laser que percorrem os comprimentos dos seus braços por tubos mantidos sob vácuo. E sua sensibilidade é limitada pela gama de fontes de ruído como, por exemplo, o ruído térmico interno dos espelhos, ruídos sísmicos, ruídos causados pela pressão de radiação exercida pelo laser sobre os espelhos, ruídos de frequência inerentes do laser, ruídos provenientes do sistema de controle do instrumento, ruídos de refração causada pelo gás residual, entre outros.

Há ainda um ambicioso projeto da NASA/ESA, pretendendo a construção de um interferômetro a laser, que permanecerá em uma órbita especial em torno do Sol, o “Laser

Interferometer Space Antenna” (LISA, <http://lisa.jpl.nasa.gov>). Tal instrumento terá braços com 5×10^6 km (1/30 UA) de comprimento e será sensível a ondas gravitacionais de frequência muito baixa.

A faixa de sensibilidade dos interferômetros a laser é ampla e abrange frequências de poucos Hertz a algumas dezenas de kiloHertz, cobrindo um grande apanhado de fontes astrofísicas de radiação gravitacional.

3.4.2 Detectores Tipo Massa Ressonante

Os detectores tipo massa ressonante são instrumentos desenvolvidos para medir sinais acústicos induzidos pelo acoplamento de ondas gravitacionais com a matéria. E, portanto, são caracterizados por algumas propriedades acústicas do material do qual são construídos.

3.4.2.1 Características Acústicas dos Materiais

Se o material possuir um fator de qualidade mecânica alto ($Q_m = \omega_m \tau_m > 10^6$), sendo ω_m , a frequência de ressonância, e, τ_m , o tempo de decaimento das oscilações no modo m , permanecerá oscilando por um longo tempo após a passagem da onda gravitacional, “memorizando” seus efeitos. Assim, quanto maior o valor de Q , maior será o tempo disponível para se inferir a ação da onda gravitacional. Novos materiais oferecem a perspectiva de se atingir valores altos para o Q mecânico (vide Tabela 3.4), que podem ser incrementados significativamente na preparação e suspensão do detector.

A quantidade de energia absorvida depende da densidade, ρ , e da velocidade do som, v_s , do material (que, para as barras, $\sim \rho v_s^3$). O acoplamento entre a onda gravitacional e o detector pode ser maximizado combinando-se valores de ρ e v_s . Além disso, altos valores de Q fazem com que o sistema aproxime-se de um oscilador harmônico ideal, minimizando perdas acústicas (Q^{-1}), e desta forma torna-se possível prever seu movimento frente à excitação causada por uma onda gravitacional. A importância do Q ainda abrange a questão da amplitude das vibrações térmicas do corpo. Em detectores com altos Q s, e, conseqüentemente, com baixas perdas acústicas, a energia destas oscilações é diminuída em um fator τ_i/τ_m , onde τ_i é o tempo de integração do sinal. Assim, variações no estado de vibração do detector devido à agitação térmica são lentas segundo τ_m .

Além do material com que é confeccionado, a forma do detector também fornece-lhe características próprias.

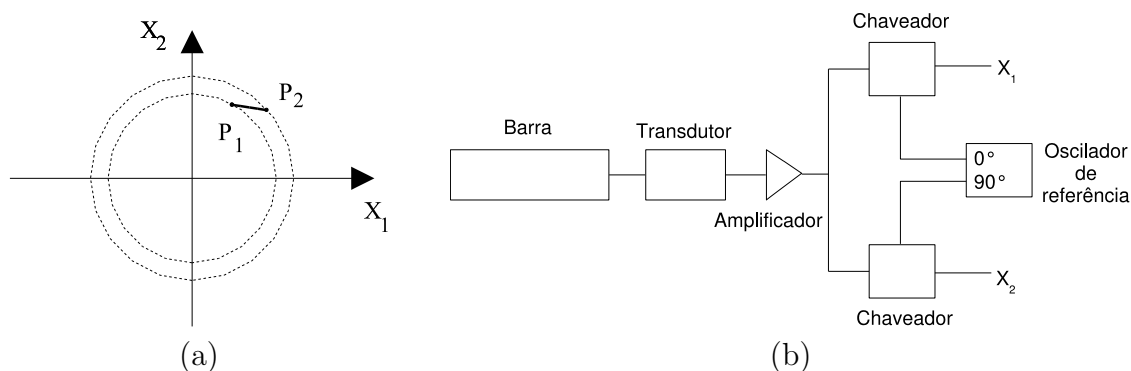


FIGURA 3.5 – (a) Esquema do monitoramento da amplitude complexa. (b) Esquema para aquisição dos valores de X_1 e X_2 .

3.4.2.2 Detectores Tipo Barra

Ainda nos anos 60, Weber iniciou a construção do primeiro detector de ondas gravitacionais. Seu trabalho pioneiro consistia de uma barra de alumínio horizontal sustentada por um cabo de titânio que passava pela sua semi-circunferência inferior central. A barra era envolta por uma campânula metálica que a mantinha sob vácuo, e à temperatura ambiente [31]. Da mesma forma que o modelo apresentado na Figura 3.3, uma onda gravitacional, ao passar, realiza trabalho mecânico sobre a barra. Esta, por sua vez, armazena a energia em seu modo normal quadrupolar e passa a oscilar. Sobre a barra, eram colados cristais piezoelétricos sensíveis às deformações por ela sofridas. Em 1969, Weber conseguiu que seu detector fosse sensível a variações de comprimento com amplitudes $h \sim 10^{-16}$. Operando com dois detectores, um no Argonne National Laboratory e outro em Maryland, ele afirmou ter obtido coincidências entre os dados fornecidos pelos dois instrumentos [32]. Outros grupos tentaram repetir o experimento de Weber, mas não obtiveram sucesso. Mais tarde, os cristais piezoelétricos foram substituídos por transdutores supercondutores, que também convertem os sinais mecânicos em elétricos.

Uma onda gravitacional, ao passar pelo detector, deposita energia, mudando a amplitude e/ou a fase do movimento do modo normal longitudinal de vibração da barra.

3.4.2.3 Monitoramento do Modo Fundamental de Oscilação da Barra

É conveniente descrever o estado do modo fundamental de oscilação da barra por meio de coordenadas

$$X_1 = A \cos \phi, \quad (3.31a)$$

$$X_2 = A \sin \phi, \quad (3.31b)$$

onde $A = |P| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ define a amplitude, e $\phi = \omega t = \tan^{-1}(X_2/X_1)$, a fase. Assim, o estado do detector, no instante inicial, t_1 , é representado pelo ponto no plano X_1 e X_2 , conforme mostra a Figura 3.5a. Ao ser excitado por uma onda gravitacional, o estado do modo passa para uma posição P_2 . A direção deste movimento depende das variações, ΔX_1 e ΔX_2 , que fornecem informações sobre a fase e a amplitude relativas da onda gravitacional e da barra. O monitoramento dos valores de X_1 e X_2 é realizado utilizando-se dois chaveadores (amplificadores “lock-in’s”, ou PSDs), segundo a configuração apresentada na Figura 3.5b, que separam o sinal em fase (0°) e em quadratura (90°), a partir de um oscilador de referência, do qual se conhece a frequência. Estas medidas estão condicionadas ao Princípio da Incerteza de Heisenberg, que assume a forma

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{2\hbar}{M\omega} \quad (3.32)$$

onde M é a massa da barra, $\omega = \pi v_s/L$, sua frequência angular e \hbar a constante de Plack reduzida [33]. Assim, o produto entre estas variações ΔX_1 e ΔX_2 limita a precisão que pode se atingir em suas medidas e, conseqüentemente, apresenta-se como um **limite quântico**, que representa uma barreira inevitável (porém, contornável até certo ponto) nas medidas de ΔL para os detectores que serão construídos futuramente [34].

A partir dos anos 70, foram sugeridas algumas melhorias ao desenho original de Weber. Entre elas podem ser mencionadas:

- a) resfriamento da antena à temperatura do hélio líquido (4 K), com o objetivo de reduzir o movimento térmico browniano;
- b) a implantação de um sistema de isolamento vibracional elaborado para reduzir/eliminar movimentos de natureza sísmica;
- c) a utilização de transdutores ressonantes com baixo ruído de amplificação conectados à extremidade da barra, com a finalidade de converter vibrações mecânicas em sinais eletrônicos, substituindo os cristais piezelétricos utilizados por Weber.

Alguns detectores que estão sendo desenvolvidos nesta linha operacional são apresentados na Tabela 3.3. As frequências de sensibilidade destes detectores estão dentro da faixa preenchida por fontes periódicas, principalmente pulsares de milissegundos e sistemas binários envolvendo estrelas de neutrons e de possíveis colapsos de estrelas massivas em buracos negros. A sensibilidade do detector à um sinal gravitacional está condicionada ao ângulo entre a direção de propagação da onda e o eixo central do detector, apresentando

TABELA 3.3 – Alguns detectores de barra que operam sob temperaturas criogênicas.

Antena	Localização	Material	Temperatura de operação	Frequência (Hz)	Sensibilidade (h adimensional)
ALLEGRO	Baton Rouge	Al	4 K	900	7×10^{-19}
EXPLORER	CERN	Al	2 K	900	7×10^{-19}
NIOBE	Perth	Nb	5 K	700	5×10^{-19}
NAUTILUS	Frascati	Al	100 mK	900	6×10^{-19}
AURIGA	Legnaro	Al	100 mK	900	3×10^{-19}

FONTE: Ju (2000).

valor máximo quando a incidência é perpendicular. Sua eficiência é determinada pela fração de energia da onda que é convertida em energia acústica dentro da barra. Quanto maior for esta fração mais eficiente é o detector.

O acoplamento com as ondas gravitacionais depende de sua seção de choque, cuja noção foi introduzida por Weber e pode ser expressa de inúmeras formas [8]. A expressão que descreve a seção de choque de um detector de barra, integrada em frequência, é dada por [35]

$$\int \sigma df = \frac{8GM}{\pi c} \left(\frac{v_s}{c}\right)^2 m^2 \text{ Hz.} \quad (3.33)$$

A Equação 3.33 deixa claro que para se obter uma alta sensibilidade é necessário que o detector seja tão massivo quanto possível e que seja confeccionado com um material com alta velocidade do som (veja Tabela 3.4). Por esta razão, muitos dos detectores apresentados na Tabela 3.3 são de alumínio. A seção de choque pode, ainda, ser incrementada por mudanças na geometria do detector.

3.4.3 Detectores Tipo Massa Ressonante Esféricos

Os detectores de massa ressonante com forma esférica vem sendo estudados intensivamente por Coccia e Lobo [36, 37, 38, 39], Johnson e Merkwitz [40, 41, 42, 43] e Harry e Stevenson [44, 45], entre outros.

Esta classe de detectores consiste de uma massa esférica (ou tão aproximada à esfera quanto possível) onde são acoplados cinco ou mais transdutores ressonantes, que monitoram, simultaneamente, os cinco modos quadrupolares fundamentais e, ainda, podem

TABELA 3.4 – Comparação entre as grandezas físicas de alguns materiais*.

Material	$\rho(10^3 \text{ kg/m}^3)$	Q	$v_s(10^3 \text{ m/s})$
Alumínio 6061	2,7	5×10^6	5,1
Alumínio 5056	2,7	7×10^7	5,1
Nióbio	8,6	$2,3 \times 10^8$	3,4
Silício	2,3	2×10^9	8,5
Safira	4,0	3×10^9	9,4
Chumbo	11,4		1,1
Tungstênio	18,8		4,3
Cobre(94%)/Alumínio(6%)	8,0	2×10^7	4,6

* Valores estimados a temperatura ambiente.

FONTE: Ju (2000).

monitorar seu modo monopolar. Isto faz com que as esferas apresentem uma vantagem adicional às barras, a de possuírem sensibilidade omnidirecional, ou seja, são igualmente sensíveis a todas as direções e polarizações de onda.

Wagoner e Paik (1976) determinaram a seção de choque integrada de uma esfera em relação a um sinal gravitacional [46], ela possibilita determinar a quantidade de energia depositada no modo m , por um pulso de duração $\tau \ll 2\pi Q_S/\omega_m$, que é representada por $\mathcal{E}_\nu \int \sigma df$, sendo \mathcal{E}_ν a quantidade de energia por unidade de área por unidade de frequência. Para a TRG e somando sobre os cinco modos quadrupolares eles obtiveram

$$\int \sigma df = \frac{16\pi^2 G}{15c^3} m_S R^2 \omega_0^2 (\alpha(R) + 3\beta(R))^2, \quad (3.34)$$

em que m_S é a massa da esfera, R seu raio e $\alpha(R)$ e $\beta(R)$ são parâmetros que dependem das propriedades elásticas do material com que a esfera foi usinada, e que serão discutidos no próximo Capítulo.

Valores típicos para $\int \sigma df \sim 10^{-19} \text{ Hz m}^2$, representam cerca de 56 vezes a seção de choque para um cilindro de mesma massa (obtida da razão entre 3.34 e 3.33), comprovando a maior sensibilidade da esfera às ondas gravitacionais.

Dois destes detectores estão sendo construídos, em uma colaboração internacional: o detector **Mario Schenberg**, do grupo brasileiro **Gráviton**, e o **Mini-GRAIL**, da Holanda. Com estes detectores pretende-se atingir sensibilidades capazes de captar sinais

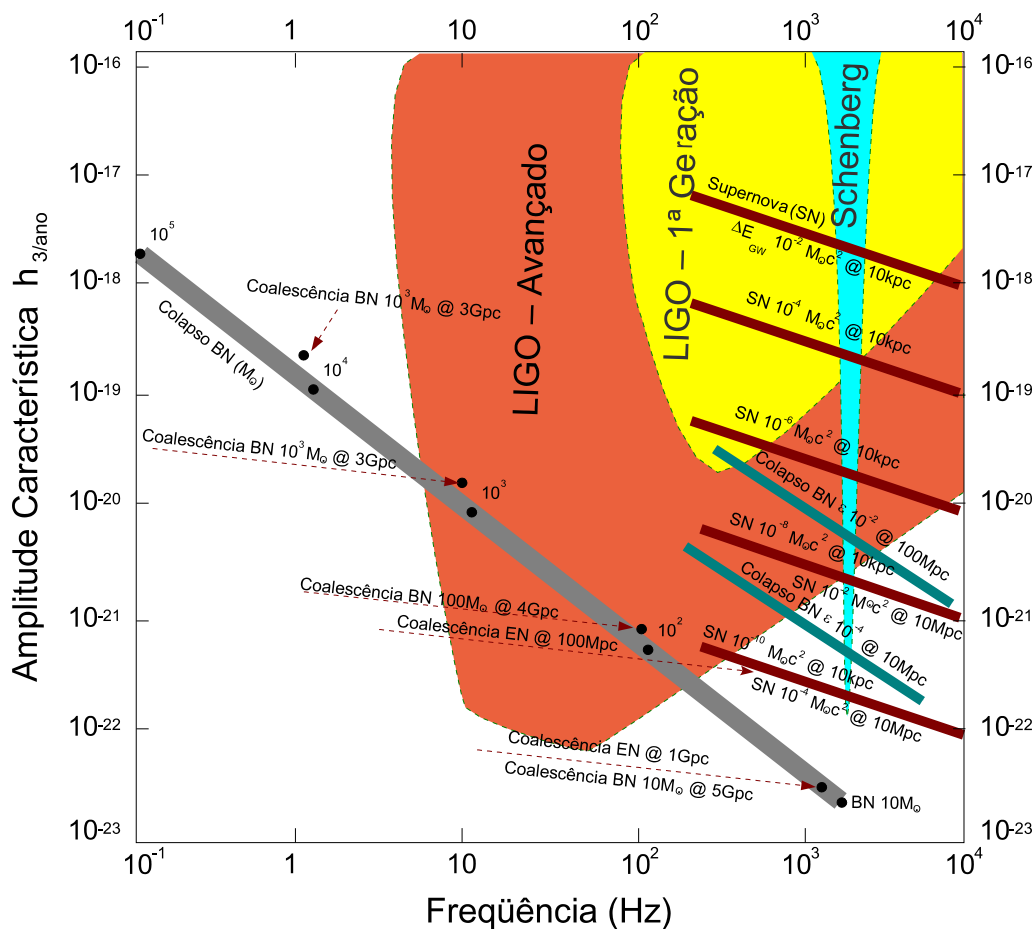


FIGURA 3.6 – Fontes impulsivas de ondas gravitacionais, mostrando a faixa dos possíveis sinais e a região de sensibilidade de alguns detectores.
 FONTE: Adaptada de Thorne (1989).

gravitacionais com $h \sim 10^{-21}$, operando na faixa de alguns kiloHertz.

Algumas fontes astrofísicas previstas nesta faixa de frequência e suas amplitudes características são apresentadas na Figura 3.6. A grandeza $h_{3/\text{ano}}$ indica a amplitude mínima (envolvendo a escala de distância mínima) em que é possível se ter, pelo menos, três eventos do tipo por ano. A figura também compara a sensibilidade esperada do detector Schenberg e a do LIGO, em suas duas fases de operação.

A primeira fase do Projeto Gráviton é a construção e operação do detector esférico de ondas gravitacionais Mario **Schenberg**. O instrumento está sendo construído no Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IF/USP) e os primeiros testes devem ser realizados em 2005. O trabalho é financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e conta com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento

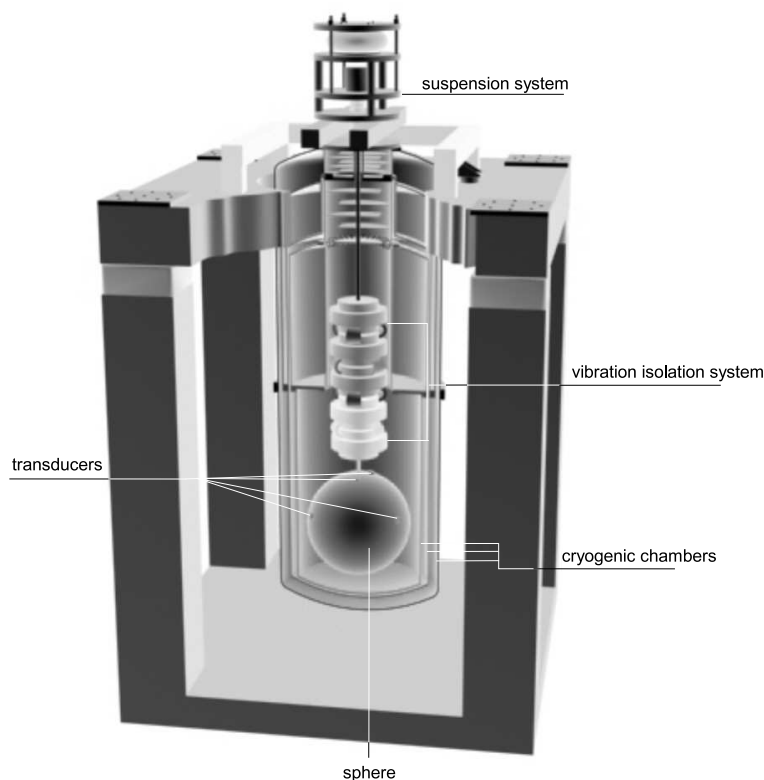


FIGURA 3.7 – Diagrama esquemático do detector de ondas gravitacionais Mario Schenberg.

de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, órgão do Ministério da Ciência e Tecnologia (INPE/MCT) [47, 48], além da colaboração de vários grupos de pesquisa ao redor do mundo.

3.5 Detector de Ondas Gravitacionais Mario Schenberg

O detector **Schenberg** consiste de uma antena esférica, com 65 cm de diâmetro e 1150 kg, confeccionada em uma liga de cobre e alumínio [Cu(94%)Al(6%)]. O sistema é suspenso por um sistema de isolamento vibracional, capaz de atenuar vibrações externas em cerca de 300 dB [49]. O instrumento será mantido a temperaturas ultra-baixas (~ 1 mK) por câmaras criogênicas (“dewars”), resfriadas por um refrigerador por diluição [50]. A Figura 3.7 mostra um diagrama esquemático do detector Schenberg.

À superfície da esfera serão acoplados sensores eletro-mecânicos (transdutores) que monitorarão vibrações dos modos normais quadrupolares/monopolares da esfera. Estes transdutores serão do tipo paramétricos [51, 52] e compostos por dois modos mecânicos radiais,

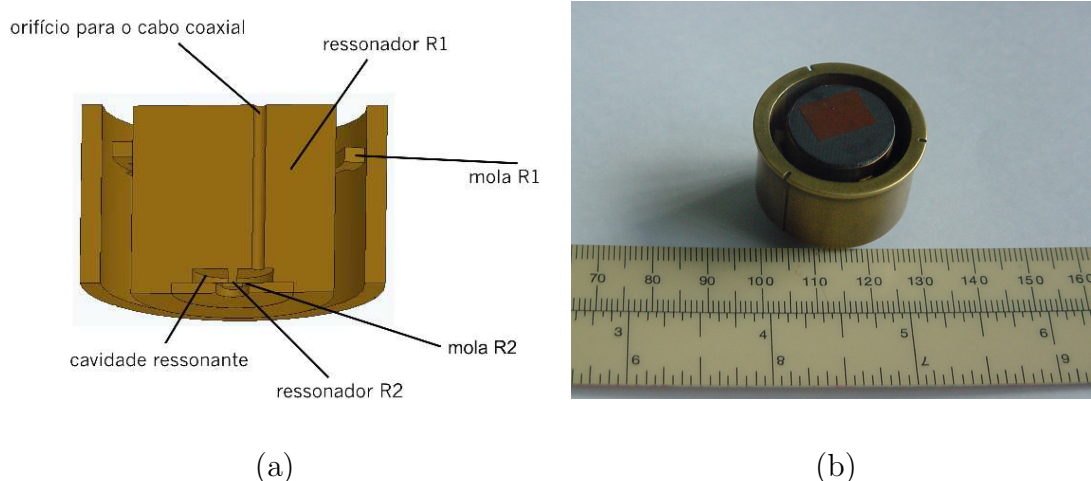


FIGURA 3.8 – (a) Diagrama esquemático do transdutor que será usado no detector Schenberg. O corte transversal mostra as massas intermediária (R_1) e final (R_2). A massa R_2 oscila dentro da cavidade ressonante de microondas. (b) Transdutor com a antena “micro-strip”. O transdutor tem 30 mm de diâmetro e cerca de 54 g.

conforme mostra a Figura 3.8.a (ressonadores R_1 e R_2). Os modos mecânicos do transdutor servem como transformadores de impedância, eles amplificam o sinal ($\sim 5000\times$) fazendo com que uma pequena vibração na superfície da esfera se transforme em um grande deslocamento na última massa (R_2).

A massa R_2 oscila dentro de uma cavidade reentrante fechada (“klystron”) na qual é bombeado um sinal eletromagnético em microondas, gerado por uma portadora com baixo ruído de fase (com frequência $f_p \sim 10$ GHz, banda “X”) [53].

O sinal de microondas é transmitido ao transdutor por duas antenas “micro-strip”, uma delas soldada à superfície do transdutor. Ele é conduzido por um cabo coaxial através de um orifício até a cavidade reentrante. A Figura 3.8.b mostra um dos transdutores já usinado, com a antena “micro-strip” soldada à superfície.

Variações nas dimensões da cavidade, causadas pelo deslocamento da massa R_2 , geram uma variação na frequência de ressonância da cavidade que é lida como uma modulação de voltagem. Assim, vibrações na esfera, provocadas pela passagem de ondas gravitacionais, modulam a frequência ressonante do transdutor, o qual, por sua vez, modula o sinal do oscilador, produzindo bandas laterais, distantes da frequência da portadora a frequência de oscilação da massa R_2 . As bandas laterais e o sinal da portadora voltam, então, para um circulador, e deste para o supressor da portadora, onde o sinal da portadora é suprimido o suficiente (< -80 dBm) para permitir um funcionamento ótimo do pré-amplificador criogênico (HEMT).

O sinal modulado é misturado em um “mixer” com o sinal do oscilador, para se obter o sinal elétrico na frequência do ressonador mecânico. Este sinal é amplificado e pode ser, então, analisado, em busca da presença de ondas gravitacionais.

Dedicaremos o próximo Capítulo a pormenorizar as características mecânicas dos detectores esféricos, em especial o caso do Detector Mario Schenberg.

CAPÍTULO 4

MODELO MATEMÁTICO DO DETECTOR ESFÉRICO

A construção de um detector esférico foi inicialmente sugerida por Robert L. Forward, no início dos anos 70 [54]. Ele concebeu uma esfera sobre a qual seriam anexados transdutores eletro-mecânicos, os quais mediriam deformações sofridas pela esfera, decorrentes da excitação de seus modos normais de oscilação, eventualmente devido à passagem de uma onda gravitacional. Estes transdutores seriam dispostos de forma a serem dependentes entre si e, desta forma, impossibilitariam ambiguidades na determinação da direção de origem da radiação gravitacional.

Pouco tempo depois, Ashby e Dreitlein realizaram uma descrição do problema da esfera encontrando as expressões necessárias para sua solução [55]. Logo, Wagoner e Paik apresentaram valores numéricos para os parâmetros das equações sugeridas por Ashby e Dreitlein [46].

Durante mais de uma década, com detectores de barra operando e pelas dificuldades tecnológicas que envolvem o funcionamento de um detector esférico, o assunto permaneceu inerte. Mas, no início da década de 1990, alguns grupos optaram por esta configuração e, desde então, têm direcionado seus esforços para a solução do problema.

Neste capítulo, pretendemos apresentar o modelo do detector esférico de massa ressonante. A Seção 4.1 apresenta o modelo da esfera isolada e como foram calculados os parâmetros referentes ao comportamento elástico da mesma. A seção seguinte expõe como abordar o problema quando são acoplados ressonadores secundários sobre sua superfície. Uma sugestão para a distribuição destes ressonadores é apresentada na Seção 4.3. A Seção 4.4 descreve o método utilizado para solucionar a equação de movimento do sistema, enquanto a Seção 4.7 enumera algumas das principais fontes de ruído que afetam o desempenho do detector. Na Seção 4.5 mostramos como este desempenho é calculado e o processo de transdução é descrito na Seção 4.9.

4.1 A Esfera Desacoplada

Considere um corpo esférico elástico isotrópico S de raio R , com massa m_S e feito de um material de densidade ρ e coeficientes de Lamè¹

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (4.1a)$$

¹Os coeficientes de Lamè descrevem as propriedades elásticas do material.

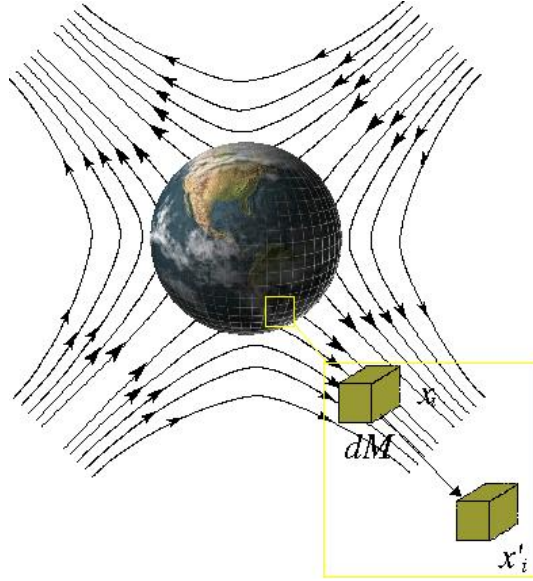


FIGURA 4.1 – Esfera em um campo de acelerações gerado pela passagem de uma onda gravitacional.

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.1b)$$

onde E e ν representam, respectivamente, o módulo de Young² e a razão Poissônica³. Admita que o mesmo se encontra imerso em um campo de forças, como gerado pela passagem de uma onda gravitacional apresentado na Figura 4.1. A deformação sofrida por um elemento de massa dm do corpo é descrita pelo vetor deslocamento $u_i = x'_i - x_i$, onde x_i representa sua posição de equilíbrio e x'_i , a posição do elemento dm após a deformação. Como, no nosso caso, o vetor u_i possui módulo muito pequeno, a aplicação da teoria de elasticidade linear à análise do problema é válida [7]. Assim, a equação de movimento, referente aos deslocamentos u_i pode ser expressa pelas **equações de Navier** e escrita como

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} + \rho u_{i,00} = f_i, \quad (4.2)$$

onde f_i representa o campo de densidade de forças atuante sobre a esfera [56]. Torna-se conveniente separar as dependências espaciais e temporais do vetor deslocamento. Então, tal vetor pode ser representado através da decomposição em seus modos normais,

²Como visto na Seção 2.1, a lei de Hooke pode ser escrita como $P = Eh$. Fazendo a deformação $h = 1$, então $P = E$, assim, o módulo de Young representa a pressão (teórica) necessária para comprimir ou alongar o material em 100%. Logo, possui unidades de pressão e relaciona-se com a densidade ρ e a velocidade do som no material v_s por $E = \rho v_s^2$.

³Quando um material é achatado devido a alguma pressão exercida, ele tende a alongar-se perpendicularmente à direção de compressão. Assim, a razão poissônica é definida como a razão entre a alongação perpendicular e o achatamento na direção da compressão, sendo, portanto, adimensional.

assumindo a forma

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_m A_m(t) \Psi_m(\mathbf{x}), \quad (4.3)$$

sendo $\Psi_m(\mathbf{x})$ a função característica de um dado modo m de oscilação e $A_m(t)$, sua amplitude. As soluções para os modos normais quadrupolares de oscilação são dadas como combinações lineares dos harmônicos esféricos⁴ $Y_m(\theta, \phi)$ e dadas por [55, 46]

$$\Psi_m(r, \theta, \phi) = [\alpha(r)\hat{\mathbf{r}} + \beta(r)R\nabla]Y_m(\theta, \phi). \quad (4.4)$$

Pode-se, a partir desta decomposição, representar a equação de movimento da esfera como um oscilador harmônico forçado por

$$\ddot{A}_m(t) + \tau_m^{-1}\dot{A}_m(t) + \omega_0^2 A_m(t) = \frac{1}{\rho N_m} \int_{V_0} \Psi_m(\mathbf{x}) \cdot \sum \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d^3x, \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ representa o campo de densidade de forças e τ_m é o tempo de decaimento das oscilações na esfera. N_m é um fator normalizador da função característica Ψ_m .

Uma vez conhecidos a amplitude característica A_m e o comportamento de Ψ_m , a Equação 4.5 conduz à determinação da força efetiva em cada modo. Tal força representa a força resultante da interação da esfera com o exterior (sinal+ruídos) e as forças internas (ruídos), sendo representada pelo somatório dos campos de densidade de forças $\sum \mathbf{f}$, na Equação 4.5. Desconsiderando-se por um momento as outras forças que não a gravitacional, pode-se definir a força gravitacional efetiva referente a cada modo normal da esfera

$$\mathcal{F}_m = \int_{V_0} \Psi_m \cdot \mathbf{f}^{\text{OG}} d^3x, \text{ com } m = 1 \dots 5. \quad (4.6)$$

As funções características Ψ_m obedecem o critério de normalização regido pela expressão

$$\int_V \Psi_n \cdot \Psi_m d^3x = N_m \delta_{mn} \quad (4.7)$$

onde N_m representa um fator normalizador arbitrário, normalmente escolhido com base no tipo de geometria utilizada, determinando a interpretação física tanto da amplitude do modo A_m quanto da função característica Ψ_m . Admitindo-se que a esfera em questão é homogênea e, portanto, ρ é constante, tem-se $N_m \equiv \frac{4\pi}{3} R^3$ para todo m , ou seja, N_m representa o volume da esfera. Em outras palavras, o fator de normalização garante a manutenção do volume constante às funções características.

⁴Utilizaremos aqui a notação $Y_m \equiv Y_{lm}$ para $l = 2$, uma vez que consideraremos apenas os modos quadrupolares (Vide Tabela 2.1).

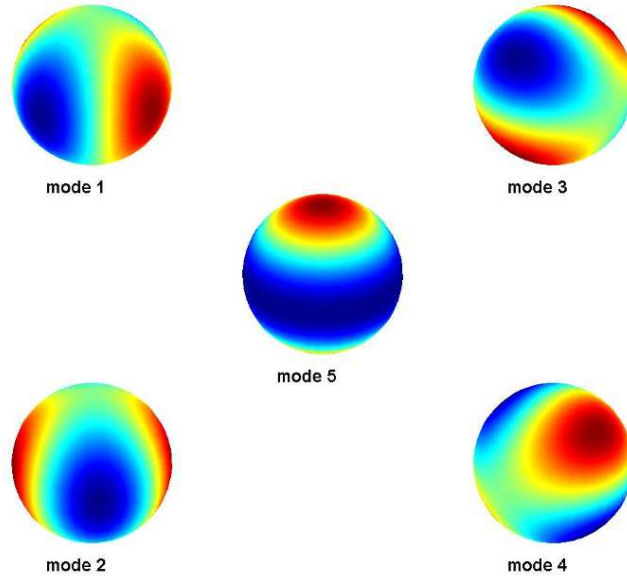


FIGURA 4.2 – Distribuição da função característica sobre a superfície da esfera, utilizando-se dos modos normais quadrupolares de oscilação. As regiões escuras representam as regiões de maior amplitude absoluta radial.

A Figura 4.1 representa a distribuição da função Ψ_m dos modos quadrupolares. As regiões mais escuras representam as áreas de maior amplitude absoluta radial⁵.

O valor numérico das amplitudes é regido pelos parâmetros de movimento radial $\alpha(r)$ e tangencial $\beta(r)$ obtidos pelas expressões

$$\alpha(r) = p_1 R \frac{\partial}{\partial r} j_2(qr) + 6p_2 \frac{R}{r} j_2(kr) \quad (4.8a)$$

$$\beta(r) = p_1 j_2(qr) + 6p_2 \frac{\partial}{\partial r} [r j_2(kr)] \quad (4.8b)$$

onde $j_2(x)$ é a função esférica de Bessel de ordem 2 [55], definidas por [9]

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x^2},$$

e $q^2 = \rho\omega_0^2/(\lambda + 2\mu)$ e $k^2 = \rho\omega_0^2/\mu$ são os quadrados dos vetores transverso e longitudinal da onda, respectivamente. O valor de ω_0 , que representa a frequência dos modos degenerados, é determinado pelas condições de contorno

$$p_1 \frac{d}{dr} \left[\frac{j_2(qr)}{r} \right] + p_2 \left[\frac{5}{r^2} - \frac{k^2}{2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] j_2(kr) = 0, \quad (4.9a)$$

⁵Neste trabalho não levaremos em conta a porção tangencial do movimento de tais modos, isto porque os transdutores que utilizaremos monitorarão apenas este tipo movimento. Utilizamos os parâmetros tangenciais apenas para obtenção das características elásticas da esfera e seus fatores normalizadores.

TABELA 4.1 – Valores dos Parâmetros Físicos da Esfera: valores introduzidos (1) e obtidos do modelo apresentado (2).

Descrição	Símbolo	Valor
(1) raio da esfera a 4K	R	0,3239 m
(1) massa da esfera	m_S	1147,85 kg
(1) massa efetiva	m_{eff}	287,63 kg
(1) densidade a 4K	ρ	8065,7 kg/m ³
(1) Módulo de Young a 4K	E	1,33×10 ¹¹ Pa
(1) Razão Poissônica	ν	0,364
(1) Coeficiente linear de contração †	$\Delta R/R$	334,52×10 ⁻⁵
(1) Coeficiente Lamè a 4K	μ	4,8753×10 ¹⁰ Pa
(1) Coeficiente Lamè a 4K	λ	1,3049×10 ¹¹ Pa
(1) Q Mecânico * (esfera)	Q_S	1,4×10 ⁶
(2) Freqüência central	f_0	3206,3 Hz
(2) Parâmetro normalizador 1	p_1	-5,5654
(2) Parâmetro normalizador 2	p_2	2,2758
(2) Parâmetro radial em $r = R$	$\alpha(R)$	2,8623
(2) Parâmetro tangencial em $r = R$	$\beta(R)$	0,6598
(2) Fator chi	χ	0,6013

† Média ponderada (94%Cu + 6%Al) [57].

* Fator de Qualidade Mecânica medido [48].

$$p_1 \left[\frac{6}{r^2} - \frac{k^2}{2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right] j_2(qr) + 6p_2 \frac{d}{dr} \left[\frac{j_2(kr)}{r} \right] = 0, \quad (4.9b)$$

em $r = R$. A utilização do fator normalizador N_m na Equação 4.7 determina os valores para os parâmetros normalizadores p_1 e p_2 . A Tabela 4.1 mostra os valores utilizados e obtidos do modelo da esfera apresentado. Conhecendo-se estes parâmetros pode-se combinar as expressões 2.31, 2.32 e 4.6 à 4.8, chegando-se a uma expressão para a força gravitacional efetiva, dada por

$$\mathcal{F}_m(t) = \sqrt{\frac{4\pi}{15}} \rho \ddot{h}_m(t) R^4 [p_1 j_2(qR) + 3p_2 j_2(kR)] = \frac{1}{2} \ddot{h}_m(t) m_S \chi R, \quad (4.10)$$

onde o fator adimensional χ descreve a admitância da esfera e depende exclusivamente das propriedades elásticas do material com que ela é confeccionada. A quantidade $h_m = h_m(h_\times, h_+, \beta, \gamma)$ é a amplitude esférica que relaciona as polarizações e a direção da frente de onda gravitacional com o sistema de referências adotado⁶(vide Seção 2.5).

⁶O sistema de referências pode ser ajustado de tal forma que β e γ representem os ângulos zenital e azimutal locais, respectivamente. Este procedimento facilita a determinação da direção de entrada de um sinal.

Cada fonte de ondas gravitacionais distinta gera uma força gravitacional efetiva com características próprias, dependendo da direção de entrada do sinal e das polarizações, as quais atuam sobre a esfera a partir do campo de acelerações. Como vimos anteriormente o valor de $|h| \ll 1$ e, portanto, a força gravitacional efetiva também é pequena, assim como a amplitude da oscilação por ela causada. Porém, para monitorarmos tais oscilações podemos utilizar ressonadores secundários, que funcionarão como amplificadores mecânicos, aumentando o valor numérico destas medidas.

4.2 Esfera Acoplada a Ressonadores Secundários

Portanto, desde que possuam massa muito menor que a da esfera, ressonadores secundários, a ela acoplados, servirão como transformadores de impedância mecânica, amplificando o sinal, ou seja, fazendo com que uma pequena vibração na superfície da esfera corresponda a um grande deslocamento no sensor de movimento.

Considere que são acoplados à esfera j ressonadores mecânicos unidimensionais idênticos. Os ressonadores são acoplados de forma que sua direção de movimento seja radial e ajustados para que sua frequência de ressonância coincida com a da esfera. O vetor deslocamento radial z_j da esfera sob cada ressonador j é dado por

$$z_j(t) = \hat{\mathbf{r}}_j \cdot \sum_m A_m(t) \mathbf{\Psi}_m(t). \quad (4.11)$$

Vibrações ocorridas na superfície da esfera excitam o ressonador j , localizado na posição x_j , transferindo-lhe momentum. O ressonador R_1 sofrerá um deslocamento q_{j1} relativo à superfície da esfera e um deslocamento $z_j + q_{j1}$ relativo ao centro de massa da esfera. O ressonador R_2 , por sua vez, sofrerá um deslocamento q_{j2} relativo ao ressonador R_1 e um deslocamento $z_j + q_{j1} + q_{j2}$ relativo ao centro de massa da esfera. Um diagrama do sistema é mostrado na Figura 4.2. As forças F_i^N representam as forças de ruído entre os ressonadores e k_i as constantes de mola.

O deslocamento radial da superfície da esfera sob cada ressonador correspondente a cada modo m pode ser agrupado em m vetores que descrevem o padrão do deslocamento radial de cada modo. Tais “vetores modelo” podem ser agrupados em uma “matriz modelo” B_{mj} , definida por

$$B_{mj} = \frac{1}{\alpha} \hat{\mathbf{x}}_j \cdot \mathbf{\Psi}_m(\mathbf{x}_j), \quad (4.12)$$

onde $\alpha = \alpha(R)$ representa a função $\alpha(r)$ na superfície. Comparando-se 4.11 com 4.4, e

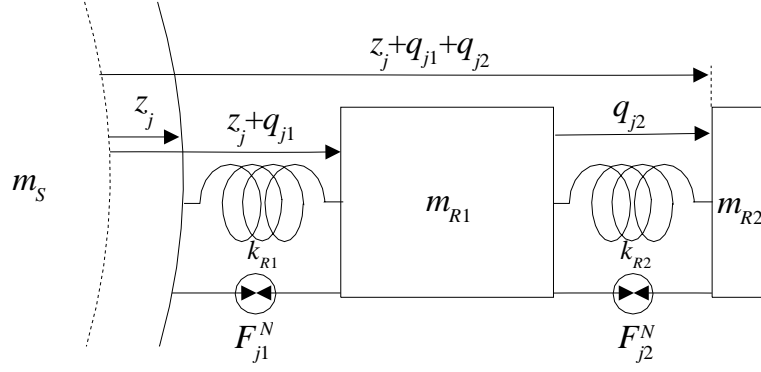


FIGURA 4.3 – Ressonador mecânico unidimensional de dois modos acoplado à superfície da esfera.

considerando-se apenas a componentes radial de Ψ_m , percebe-se que

$$B_{mj} \equiv Y_m(\theta_j, \phi_j), \quad (4.13)$$

ou seja, B_{mj} representa o comportamento do harmônico esférico Y_m na posição x_j . Em outras palavras, um transdutor j acoplado à superfície da esfera na posição θ_j, ϕ_j será sensível ao somatório dos harmônicos esféricos Y_m naquela posição.

Com o intuito de representar todo o sistema acoplado, geramos um sistema de equações sob forma matricial e obtivemos a expressão

$$\begin{pmatrix} m_S \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ m_{R_1} \alpha \underline{\underline{B}}^T & m_{R_1} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ m_{R_2} \alpha \underline{\underline{B}}^T & m_{R_2} \underline{\underline{I}} & m_{R_2} \underline{\underline{I}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{\ddot{A}}}(t) \\ \underline{\underline{\ddot{q}}}_1(t) \\ \underline{\underline{\ddot{q}}}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_S \underline{\underline{I}} & -H_{R_1} \alpha \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & H_{R_1} \underline{\underline{I}} & -H_{R_2} \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & H_{R_2} \underline{\underline{I}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{\dot{A}}}(t) \\ \underline{\underline{\dot{q}}}_1(t) \\ \underline{\underline{\dot{q}}}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_S \underline{\underline{I}} & -k_{R_1} \alpha \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & k_{R_1} \underline{\underline{I}} & -k_{R_2} \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & k_{R_2} \underline{\underline{I}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}(t) \\ \underline{\underline{q}}_1(t) \\ \underline{\underline{q}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{I}} & -\alpha \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}} & -\underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{F}}_S(t) \\ \underline{\underline{F}}_1^N(t) \\ \underline{\underline{F}}_2^N(t) \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

onde os termos duplamente sublinhados representam matrizes e os sublinhados⁷, vetores coluna, sendo $\underline{\underline{B}}^T$ a transposta de $\underline{\underline{B}}$; $\underline{\underline{I}}$, a matriz identidade; $\underline{\underline{0}}$, a matriz nula; H_i , o coeficiente de amortecimento do ressonador i .

Para facilitar os cálculos a partir de agora representaremos a Equação 4.14 como

$$\underline{\underline{X}}\ddot{\underline{\underline{w}}}(t) + \underline{\underline{Y}}\dot{\underline{\underline{w}}}(t) + \underline{\underline{Z}}\underline{\underline{w}}(t) = \underline{\underline{W}}\underline{\underline{F}}(t), \quad (4.15)$$

⁷Esta notação foi sugerida por Johnson e Merkwitz para facilitar a representação das equações de movimento [40].

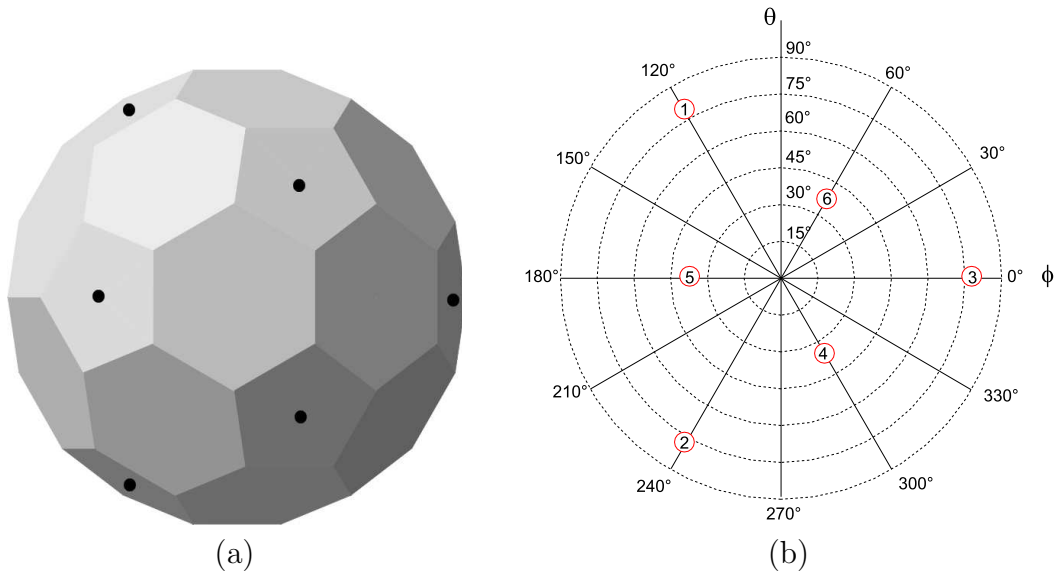


FIGURA 4.4 – (a) Icosaedro Truncado e as posições coincidentes com o centro das faces pentagonais (pontos escuros). (b) Disposição dos transdutores sobre a superfície de um hemisfério da esfera.

A Equação 4.14 representa um sistema de $5 + 2j$ equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Para que a mesma seja solucionável são necessárias algumas propriedades de simetria na matriz modelo. Em outras palavras, que a distribuição dos ressonadores secundários apresentem alguma simetria.

4.3 Localização dos Ressonadores e Canais dos Modos

Johnson e Merkwitz sugeriram que os ressonadores fossem dispostos de forma a coincidir com as faces pentagonais de um Icosaedro Truncado (IT) inscrito na esfera (vide Figura 4.4a), totalizando seis ressonadores acoplados a um hemisfério da esfera [40, 41, 42, 58]. A Figura 4.4b mostra a distribuição angular dos ressonadores, bem como a ordenação que seguiremos a partir de agora. A Figura 4.5 mostra o campo de simetrias apresentado pela configuração IT.

É uma característica da configuração IT, que apenas alguns ressonadores sejam afetados por modos específicos, de tal forma que é possível saber, pelo sinal obtido dos mesmos, quão excitado está cada modo da esfera e, conseqüentemente, estimar o sinal candidato. Isto advém de propriedades de simetria inerentes à matriz modelo. Dentre as mais importantes, temos que⁸

$$\underline{\underline{BB}}^T = \frac{3}{2\pi} \underline{\underline{I}}; \quad (4.16a)$$

$$\underline{\underline{B}}\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}} \text{ e} \quad (4.16b)$$

⁸A propriedade 4.16c foi encontrada durante este trabalho.

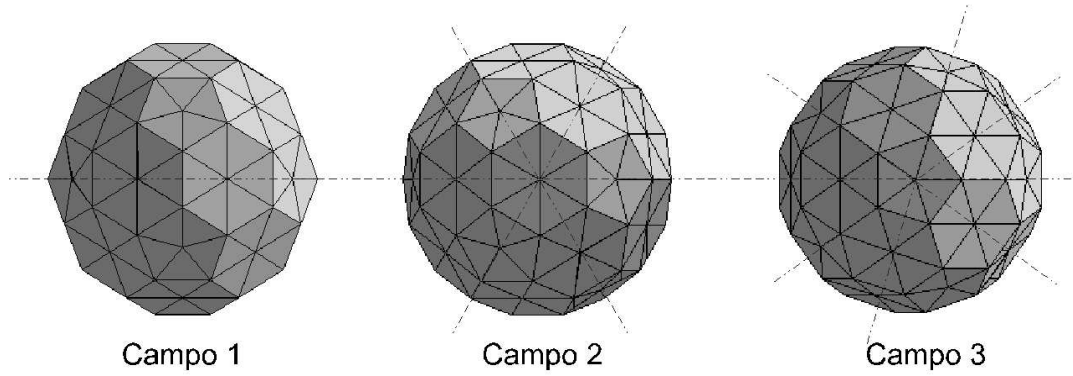


FIGURA 4.5 – Campos de simetria do icosaedro truncado. (1) Com relação aos hemisférios. (2) Com relação às faces hexagonais. (3) Com relação às faces pentagonais.

$$\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} = \frac{3}{2\pi} \underline{\underline{I}} - \frac{1}{4\pi} \underline{\underline{1}}. \quad (4.16c)$$

Nas Equações 4.16a a 4.16c, $\underline{\underline{1}}$ e $\underline{\underline{I}}$ representam, respectivamente, um vetor coluna e uma matriz nos quais todos os elementos são iguais a 1. Tais propriedades são importantes para a solução da equação de movimento, pois mantêm a simetria do sistema de equações.

Para seis transdutores idênticos seguindo a configuração IT e com Q s mecânicos idênticos para os cinco modos da esfera, a relação sinal-ruído SNR de uma antena esférica é idêntica àquela de uma barra acoplada a um destes seis transdutores. Assim, a *barra equivalente* tem uma massa efetiva, vista pelo transdutor, igual a [44]

$$m_{eff} = \frac{5}{6} \left(\frac{\chi}{2} \right) \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right) \rho. \quad (4.17)$$

Os segundos modos dos seis ressonadores q_{j2} podem, então, ser combinados linearmente, possibilitando o monitoramento dos modos normais de oscilação da esfera. A combinação linear das seis saídas, Johnson e Merkwitz chamaram **canais dos modos** $g_m(t)$, os quais são representados por

$$g_m \equiv B_{mj} q_{j2}. \quad (4.18)$$

Existe proporcionalidade entre g_m e \mathcal{F}_m que faz com que à leitura direta de cada canal do modo corresponda uma componente da força \mathcal{F}_m . A aplicação de métodos adequados de correlação, filtragem e otimização possibilitam a extração do valor de h_m de \mathcal{F}_m e, portanto, a obtenção de informações sobre perturbações no campo gravitacional local. Em outras palavras, viabilizam a detecção de ondas gravitacionais.

4.4 Solução da Equação de Movimento

A fim de normalizar a Equação 4.15, multiplicamos a mesma por \underline{X}^{-1} , obtendo

$$\underline{\ddot{w}}(t) + \underline{H}\underline{\dot{w}}(t) + \underline{K}\underline{w}(t) = \underline{P}\underline{F}(t). \quad (4.19)$$

A matriz diagonal \underline{D} , cujos elementos são os autovalores de \underline{K} , nos dá as frequências de ressonância de cada modo. Associados a estes autovalores, temos os autovetores, constituintes (colunas) da matriz \underline{U} e que tem como conjugada hermitiana \underline{U}^\dagger , tal que $\underline{U}\underline{U}^\dagger = \underline{U}^\dagger\underline{U} = \underline{I}$. Multiplicando-se a Equação 4.19 por \underline{U}^\dagger obtém-se

$$\underline{U}^\dagger\underline{\ddot{w}}(t) + \underline{U}^\dagger\underline{H}\underline{\dot{w}}(t) + \underline{U}^\dagger\underline{K}\underline{w}(t) = \underline{U}^\dagger\underline{P}\underline{F}(t). \quad (4.20)$$

Definindo-se uma quantidade $\underline{\zeta}(t) = \underline{U}^\dagger\underline{w}(t) \rightarrow \underline{w}(t) = \underline{U}\underline{\zeta}(t)$, tem-se que

$$\underline{\ddot{\zeta}}(t) + \underline{U}^\dagger\underline{H}\underline{U}\underline{\dot{\zeta}}(t) + \underline{D}\underline{\zeta}(t) = \underline{U}^\dagger\underline{P}\underline{F}(t), \quad (4.21)$$

já que $\underline{U}^\dagger\underline{K}\underline{U} = \underline{D}$ (definição de autovalores hermitianos).

Aplicando a Transformada de Fourier a Equação 4.21 chega-se a

$$\begin{aligned} -\omega^2\underline{\tilde{\zeta}}(\omega) + i\omega\underline{U}^\dagger\underline{H}\underline{U}\underline{\tilde{\zeta}}(\omega) + \underline{D}\underline{\tilde{\zeta}}(\omega) &= \underline{U}^\dagger\underline{P}\underline{\tilde{F}}(\omega) \\ (-\omega^2\underline{I} + i\omega\underline{U}^\dagger\underline{H}\underline{U} + \underline{D})\underline{\tilde{\zeta}}(\omega) &= \underline{U}^\dagger\underline{P}\underline{\tilde{F}}(\omega) \quad (\dots) = \underline{J}^{-1}(\omega) \\ \underline{\tilde{\zeta}}(\omega) &= \underline{J}(\omega)\underline{U}^\dagger\underline{P}\underline{\tilde{F}}(\omega). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Logo,

$$\underline{\tilde{w}}(\omega) = \underline{U}\underline{J}(\omega)\underline{U}^\dagger\underline{P}\underline{\tilde{F}}(\omega). \quad (4.23)$$

Assim a Transformada de Fourier Inversa nos dá os valores de $\underline{w}(t)$ e, portanto, a solução da equação de movimento do sistema. Lembrando que $\underline{w}(t) \equiv [\underline{A}(t), \underline{q}_1(t), \underline{q}_2(t)]$, podemos extrair os j últimos elementos do vetor $\underline{w}(t)$ e obter as amplitudes $q_{j2}(t)$. Portanto, é possível simular o comportamento do detector.

Ainda no domínio das frequências, podemos determinar os canais dos modos $\underline{\tilde{g}}(\omega)$ conhecendo as componentes $\underline{\tilde{q}}_{R_1}(\omega)$. Combinando as Equações 4.18 e 4.23, obtém-se

$$\underline{\tilde{g}}(\omega) = \underline{\xi}(\omega)\underline{\tilde{F}}^S(\omega) + \underline{\Omega}_1(\omega)\underline{\tilde{F}}_1^N(\omega) + \underline{\Omega}_2(\omega)\underline{\tilde{F}}_2^N(\omega). \quad (4.24)$$

A matriz $\underline{\xi}(\omega)$ representa a função de transferência das forças que atuam sobre a esfera $\underline{\tilde{F}}^S(\omega)$ na frequência ω . As matrizes $\underline{\Omega}_i(\omega)$ correspondem a função resposta dos canais às

forças de ruído $\underline{\tilde{F}}_i^N(\omega)$ do modo i .

4.5 Função de Transferência

A função de transferência $\underline{\underline{\xi}}(\omega)$ é a razão de proporcionalidade entre o canal do modo m e a força efetiva atuante sobre o mesmo. Ignorando-se por alguns instantes as fontes de ruído podemos reescrever a Equação 4.24 como

$$\underline{\tilde{g}}(\omega) = \underline{\underline{\xi}}(\omega)\underline{\tilde{\mathcal{F}}}(\omega), \quad (4.25)$$

onde $\underline{\mathcal{F}}(\omega) \equiv \mathcal{F}_m(\omega)$, $m = 1, \dots, 5$ representa a Transformada de Fourier da força gravitacional efetiva em cada um dos modos m . Da Equação 4.10, tem-se que

$$\underline{\tilde{\mathcal{F}}}_m(\omega) = -\frac{1}{2}\omega^2 m_S \chi R \tilde{h}_m(\omega), \quad (4.26)$$

então, Equação 4.25 nos dá

$$\underline{\tilde{g}}(\omega) = -\frac{1}{2}\omega^2 m_S \chi R \underline{\underline{\xi}}(\omega) \underline{\tilde{h}}(\omega), \quad (4.27a)$$

ou

$$\underline{\tilde{h}}(\omega) = -\frac{2}{\omega^2 m_S \chi R \underline{\underline{\xi}}(\omega)} \underline{\tilde{g}}(\omega). \quad (4.27b)$$

A inversa da função de transferência ($\underline{\underline{\xi}}^{-1}$) deconvolui os canais dos modos nas amplitudes esféricas $\underline{\tilde{h}}(\omega)$ no domínio das frequências. Portanto, a Transformada Inversa de Fourier das quantidades $\underline{\tilde{h}}_m(\omega)$ representa as quantidades $h_m(t)$ apresentadas nas Equações 2.36.

No caso de um detector ruidoso, os resultados são análogos [43]. As matrizes $\underline{\underline{\Omega}}_i(\omega)$, da Equação 4.24, referenciam as fontes de ruído do conjunto de transdutores nos modos da esfera. E, a Equação 4.25 retorna a medida do sinal gravitacional somado a estes ruídos projetados.

A função de transferência não depende nem do sinal nem do ruído, apenas de características mecânicas e eletrônicas do detector. Assim, sua determinação depende da precisão na estimativa dos valores numéricos destas características, que, conseqüentemente, implicará na precisão com que curva de sensibilidade do detector será determinada.

4.6 Curva de Sensibilidade do Detector

A curva de sensibilidade será determinada considerando a hipótese complementar a anterior, ou seja, admitindo-se que não existe nenhum sinal, somente ruído. Tomando a

densidade espectral da Equação 4.24, encontramos uma expressão analítica para a densidade espectral dos canais dos modos, representada por

$$\underline{S}^g(\omega) = |\underline{\xi}(\omega)|^2 \underline{S}^{\tilde{F}^S} + |\underline{\Omega}_1(\omega)|^2 \underline{S}^{\tilde{F}_1^N} + |\underline{\Omega}_2(\omega)|^2 \underline{S}^{\tilde{F}_2^N}, \quad (4.28)$$

em que S^X denotam as densidades espectrais das quantidades X . Para encontrarmos a Equação 4.28, assumimos que todos as fontes de ruído são estatisticamente independentes e, portanto, os termos cruzados foram ignorados.

Repetindo o procedimento utilizado para se obter 4.27b, encontram-se as curvas de sensibilidade do detector dadas por

$$|\tilde{h}_m(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{(-\frac{1}{2}\omega^2 m_S \chi R)^2 |\underline{\xi}^{-1}(\omega)|^2 \underline{S}^g(\omega)}}. \quad (4.29)$$

Desde que conhecidas as densidades espectrais das fontes de ruído que afetam o detector, a Equação 4.29 pode ser utilizada para representar a curva de sensibilidade do detector. Esta é a raiz quadrada da densidade espectral de ruído total medida nas saídas, referenciada como sinais de entrada \tilde{h}_m . Ela quantifica o ruído de fundo gravitacional fictício que mimetizaria o ruído estacionário da antena. Logo, conhecendo-se o espectro de potência das fontes de ruído é possível estimar a curva de sensibilidade do detector.

4.7 Fontes de Ruído

Um grande número de fontes de ruído podem ser consideradas quando agrupamos os processos físicos que eventualmente afetam o detector. Tais fontes de ruído são divididas em duas categorias básicas: as componentes de banda curta, que são caracterizadas pela densidade espectral de forças que excitam o sistema ressonante (forças de ruído); e as componentes de banda larga, que são caracterizados pela densidade espectral de deslocamento, e são referenciadas no deslocamento do modo de oscilação em análise, ou seja, são provenientes do processo de leitura ou monitoramento do experimento.

Utilizaremos em nosso modelo de ruído as duas mais importantes fontes de ruído de cada categoria, bem conhecidas e estudas na literatura [51]. Como representantes principais dos ruídos de força, quando da utilização de transdutores paramétricos, temos

a) ruído Browniano (Térmico): Análogo ao ruído Nyquist em circuitos LCR [59], o movimento browniano corresponde às excitações térmicas do(s) modo(s) fundamental(is) de um corpo causados pelas chamadas forças de Langevin. A energia média destas excitações é dada por $k_b T$, sendo k_b a constante

de Boltzman e T a temperatura termodinâmica do corpo. Sua densidade espectral é

$$S_{\text{Brown}}(\omega) = 4k_b T \omega \frac{m_i}{Q_i} \text{ N}^2/\text{Hz},$$

sendo m_i e Q_i , a massa e o fator de qualidade mecânica do i -ésimo elemento, respectivamente.

b) ruído de “Back-action”: Este ruído é inserido ao sistema de forma aditiva e é oriundo de flutuações das forças eletromagnéticas que atuam sobre a última massa (acoplamento eletro-mecânico), consideramos aqui como decorrente do ruído de amplitude da bomba injetora de microondas (com valores típicos $S_{\text{am}} \sim -140$ dBc/Hz) e que é expresso por

$$S_{\text{bkact}} = \frac{P_{\text{inc}}^2}{2\omega_p^2} \left(\frac{2Q_e}{f_p} \frac{df}{dx} \right)^2 S_{\text{am}} \text{ N}^2/\text{Hz}$$

onde P_{inc} representa a potência incidente na cavidade do transdutor, $\omega_p = 2\pi f_p$ a frequência angular da bomba e df/dx a variação de frequência com a distância (sensibilidade ao deslocamento, definida pelas propriedades eletrostáticas da cavidade).

E, como representantes das fontes de ruído de deslocamento temos:

a) ruído de fase: depende de características da bomba injetora e da cavidade ressonante. É regido pelo ruído de fase da bomba (com valores típicos $S_{\text{ph}} \sim -130$ dBc/Hz)

$$S_{\text{fase}}(\omega) = S_{\text{ph}} \left(\frac{df}{dx} \frac{2\pi}{\omega} \right)^{-2} \text{ m}^2/\text{Hz}$$

b) ruído serial: Advém do acoplamento eletromecânico do transdutor. Sua densidade espectral é representada por

$$S_{\text{serial}} = \frac{(T_{\text{amp}} + T)k_b}{P_{\text{inc}}} \left(\frac{2Q_e}{f_p} \frac{df}{dx} \right)^{-2} \text{ m}^2/\text{Hz},$$

onde T_{amp} é a temperatura de ruído do amplificador, T , a temperatura termodinâmica e Q_e o fator de qualidade elétrica da cavidade.

Todos os ruídos descritos acima entram na Equação 4.14 como as componentes $\underline{F^S}(t)$ (ruídos da esfera), $\underline{F_1^N}(t)$ (ruídos no ressonador $R1$) e $\underline{F_2^N}(t)$ (ruídos no ressonador $R2$). A componente $\underline{F^S}(t)$ é dada pela soma entre o sinal em cada modo da esfera e o ruído

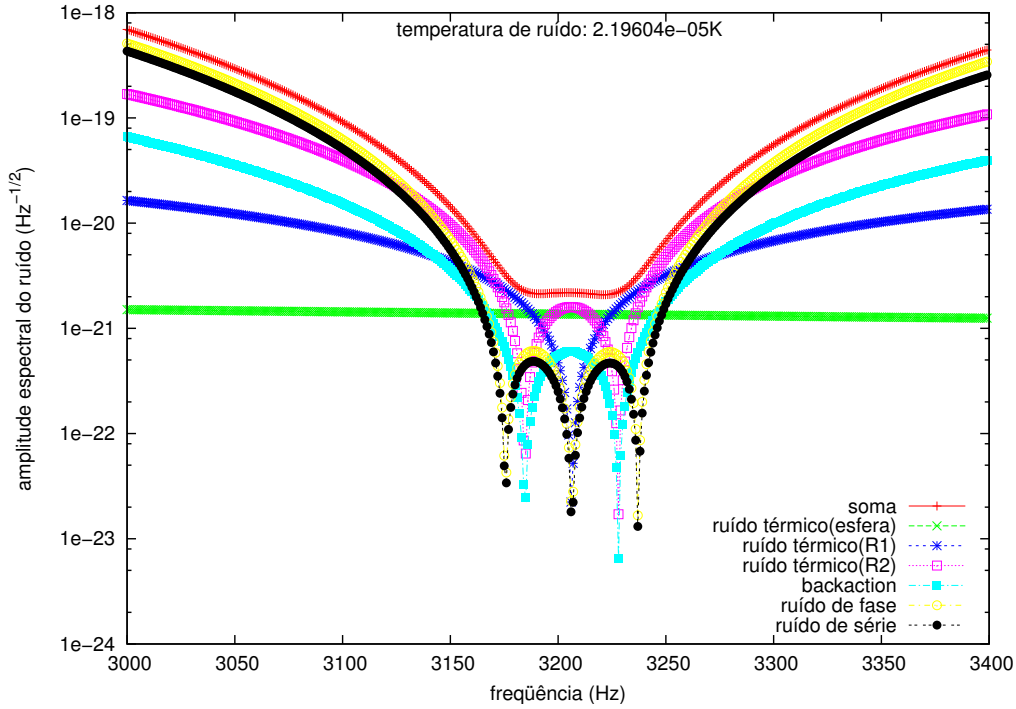


FIGURA 4.6 – Curva de sensibilidade média dos modos quadrupolares do detector SChenberg a temperatura de 4.2K e as contribuições individuais das fontes de ruído.

atuante no mesmo. No caso de ausência de sinal gravitacional ($\mathcal{F}_m(t) = 0 \forall m$) restam somente as contribuições dos ruídos. Estas fontes de ruído vêm sendo estudadas incessantemente e seus efeitos sobre os detectores são bem descritos. Mas, existem outras fontes que independem do conhecimento do instrumental e que podem interferir na detecção de ondas gravitacionais. Estas fontes apresentam, normalmente, características não lineares, e portanto são difíceis de serem modeladas. Como exemplo deste tipo de fonte de ruído podemos citar: a entrada de ruído através do sistema de isolamento vibracional; movimentos pendulares, que podem causar atrito entre o ponto de sustentação e a esfera, gerando ruído de baixa frequência que pode ter harmônicas dentro da banda de sensibilidade; vibrações provenientes do sistema de refrigeração; partículas com alta energia, que ultrapassam o sistema de blindagem; etc. Formas de amenizar ou monitorar estas contribuições estão sendo desenvolvidas e espera-se que, em breve, pouco interfiram na sensibilidade dos detectores.

Aplicando as densidades espectrais dos ruídos mencionados na Equação 4.28 e calculando as curvas de sensibilidade representadas por 4.29, obtém-se a Figura 4.6. A figura mostra também as contribuições individuais das fontes de ruído mencionadas referenciadas no modo de oscilação da esfera. Os parâmetros, que descrevem as densidades espectrais das fontes de ruído, foram otimizados de forma a se obter uma curva de sensibilidade

TABELA 4.2 – Valores dos Parâmetros Utilizados no Cálculo da Curva de Sensibilidade.

Descrição	Símbolo	Valor
massa intermediária	m_{R_1}	0,0534kg
massa final	m_{R_2}	10^{-5} kg
Q Mecânico R_1	Q_{R_1}	10^6
Q Mecânico R_2	Q_{R_2}	10^6
Q elétrico da cavidade	Q_e	10^4
frequência da bomba	f_p	10,21 GHz
acoplamento elétrico	β_e	1
deslocamento de frequência	df/dx	3×10^{14} Hz/m
potência incidente	P_{inc}	10^{-6} W
temperatura de ruído amplificador	T_{amp}	10 K
nível do ruído de fase	S_{ph}	-108 dB
nível do ruído de amplitude	S_{am}	-128 dB

aproximadamente plana no intervalo de maior sensibilidade (menores valores de \tilde{h}). Isto faz com que o espectro seja “branco” nesta faixa de frequências. Os valores utilizados são mostrados nas Tabelas 4.1 e 4.2.

Os resultados mostram que o detector apresentará sensibilidade $\tilde{h} \sim 10^{-21}$ Hz $^{-1/2}$ entre 3,17 – 3,24 kHz quando mantido à temperatura de 4,2 K.

4.7.1 Banda de Sensibilidade

O comprimento da banda de sensibilidade depende da escolha de um h_{min} para sua determinação. Esta escolha depende de quão conservador pretendemos ser para analisar o desempenho do detector. Seu valor numérico será calculado pela expressão

$$\Delta f = h_{min}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{S_h(f)}. \quad (4.30)$$

Escolhendo-se como h_{min} o valor mínimo da curva apresentada na Figura 4.6, a Equação 4.30 nos dá $\Delta f \approx 60$ Hz. Pode-se ser menos conservador e escolher um valor maior para h_{min} . Quão maior o valor escolhido, maior será a banda Δf utilizada para a análise da sensibilidade. Porém, a escolha imprópria pode acarretar na inserção de um nível maior de ruído nos dados.

4.8 Geração de Séries Temporais

Utilizando-se do conhecimento das densidades espectrais das fontes de ruído somos, então, capazes de gerar série temporais, contendo dados simulados que tentam reproduzir

os que serão obtidos do detector real.

Para gerar uma série temporal contendo as amplitudes $w(t)$ e, conseqüentemente, os q_{j2} (amplitudes do deslocamento dos segundos modos dos ressonadores secundários), introduzimos primeiramente somente as fontes principais de ruído no detector.

Para simular estas forças admitimos que as mesmas comportam-se como a soma de senóides com fases aleatórias e com freqüências $-\infty < \omega < \infty$. Porém, é impossível somarmos infinitas senóides com infinitas freqüências. O Teorema da Amostragem garante que somente freqüências a metade da freqüência de amostragem (usaremos $f_{\text{amost}} = 16384$ Hz) podem ser detectadas. Assim, simulamos no domínio de freqüências, senóides (Deltas de Dirac) com amplitudes $A_i(\omega) = \sqrt{S_i(\omega)}$ correspondentes às densidades espectrais na freqüência ω e fornecemos às mesmas fases aleatórias, ou seja,

$$\tilde{F}(\omega) = A_i(\omega) (\cos \phi + i \sin \phi), \quad (4.31)$$

sendo $0 < \phi < 2\pi$ a fase escolhida de forma aleatória (distribuição plana) e $i = \sqrt{-1}$ a unidade complexa. A Transformada de Fourier Inversa faz com que todas as senóides sejam somadas ao longo da série temporal. E, desta forma, obtém-se os valores das forças no domínio temporal. Estes valores servem de entrada no modelo desenvolvido.

A sensibilidade calculada a partir dos dados simulados deve ser, na média, equivalente a curva apresentada na Figura 4.6. A curva de sensibilidade está representada na Figura 4.7. A figura foi obtida quando calculamos a sensibilidade do detector utilizando uma série temporal de 32 segundos de dados simulados. Como pode ser observado pela figura, a curva obtida dos dados apresenta flutuações em torno da curva obtida das densidades espectrais porém, na média (utilizando-se um número suficiente de simulações), as curvas tenderão a encaixar-se perfeitamente na curva que desejamos reproduzir.

A Figura 4.8 mostra a série temporal, utilizada para calcular a curva de sensibilidade apresentada na Figura 4.7. As amplitudes são $\sim 10^{-16} - 10^{-15}$ m e apresentam distribuição gaussiana (Figura 4.9) com média $\langle q_{R2} \rangle \approx 0$ e desvio padrão $\sigma_{q_{R2}} \sim 2.5 \times 10^{-16}$ m.

Mas, as saídas dos transdutores não retornam valores em deslocamento e sim a diferença de potencial elétrico (voltagem) correspondente àquele deslocamento dentro da cavidade ressonante.

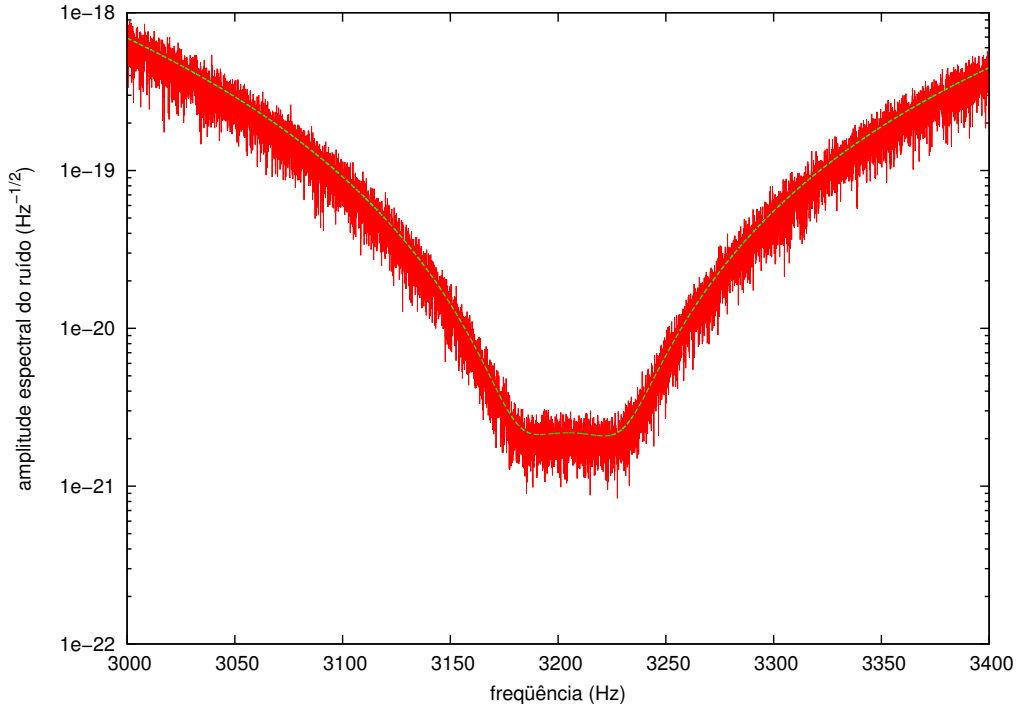


FIGURA 4.7 – Curva de sensibilidade média dos modos quadrupolares do detector SCHENBERG a temperatura de 4.2K e obtida a partir das séries temporais. A linha clara representa a sensibilidade teórica (calculada a partir das densidades espectrais) e a linha escura representa a sensibilidade obtida dos dados simulados.

4.9 Processo de Transdução: Transformação de Deslocamento em Voltagem

O transdutor funciona como um sensor de movimento, transformando o deslocamento δx da última massa (ressonador $R2$) em voltagem de saída. Esta transformação é dada pela relação [60]

$$\delta v_{\text{rms}} = \delta x_{\text{rms}} \frac{df}{dx} \frac{dV}{df}(f), \quad (4.32)$$

onde $\frac{dV}{df}(f)$ é a taxa de conversão discriminada pela frequência de “off-set” f e definida como

$$\frac{dV}{df}(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4f^2/\Delta f^2}} \times \frac{dV}{df}_{\text{DC}} \quad (4.33)$$

onde Δf é banda de ressonância e

$$\frac{dV}{df}_{\text{DC}} = H \sqrt{P_{\text{inc}}} \frac{4\beta_e}{1 + \beta_e^2} \frac{1}{\Delta f} \quad (4.34)$$

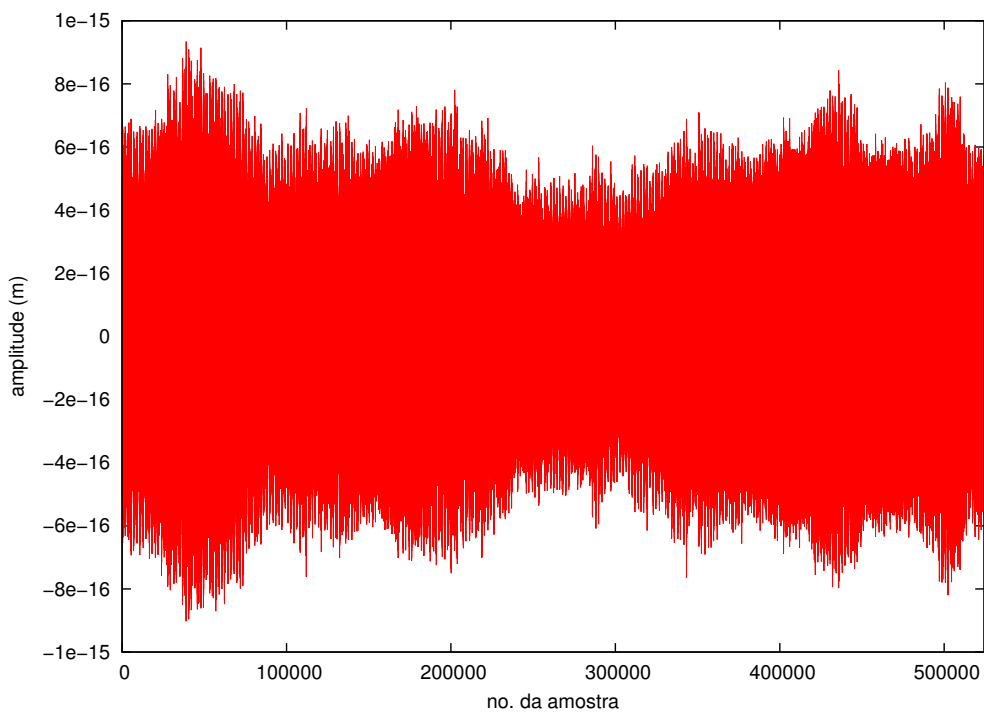


FIGURA 4.8 – Amplitude descrita por ressonador R_2 em uma série temporal simulada de 32 segundos.

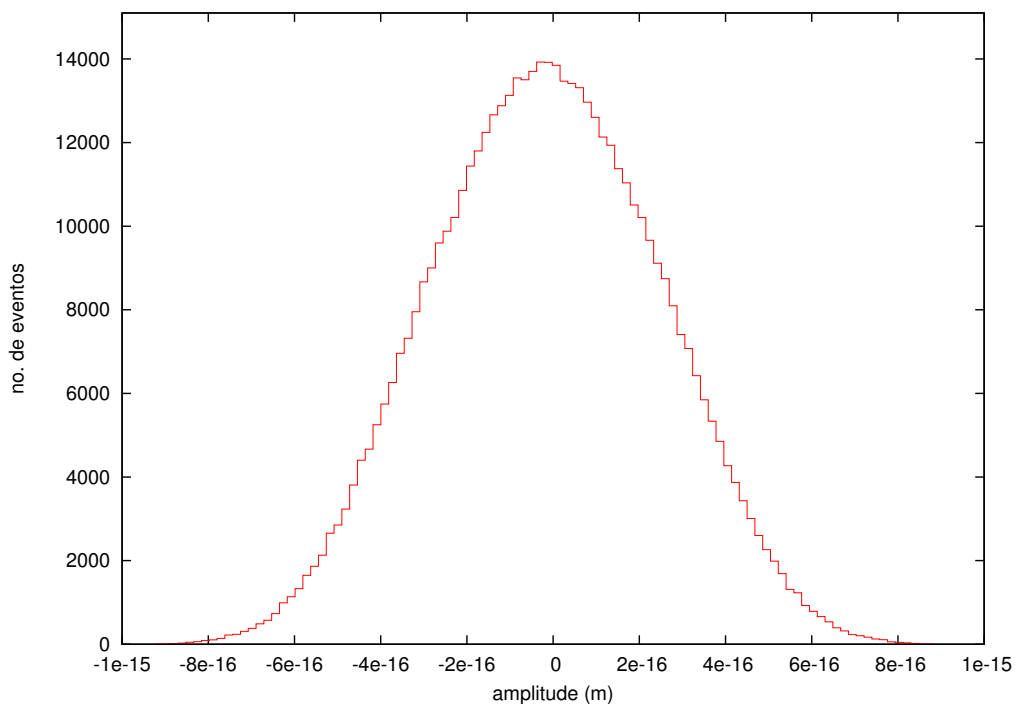


FIGURA 4.9 – Histograma dos deslocamentos apresentados na Figura 4.8. Percebe-se a distribuição gaussiana das amplitudes.

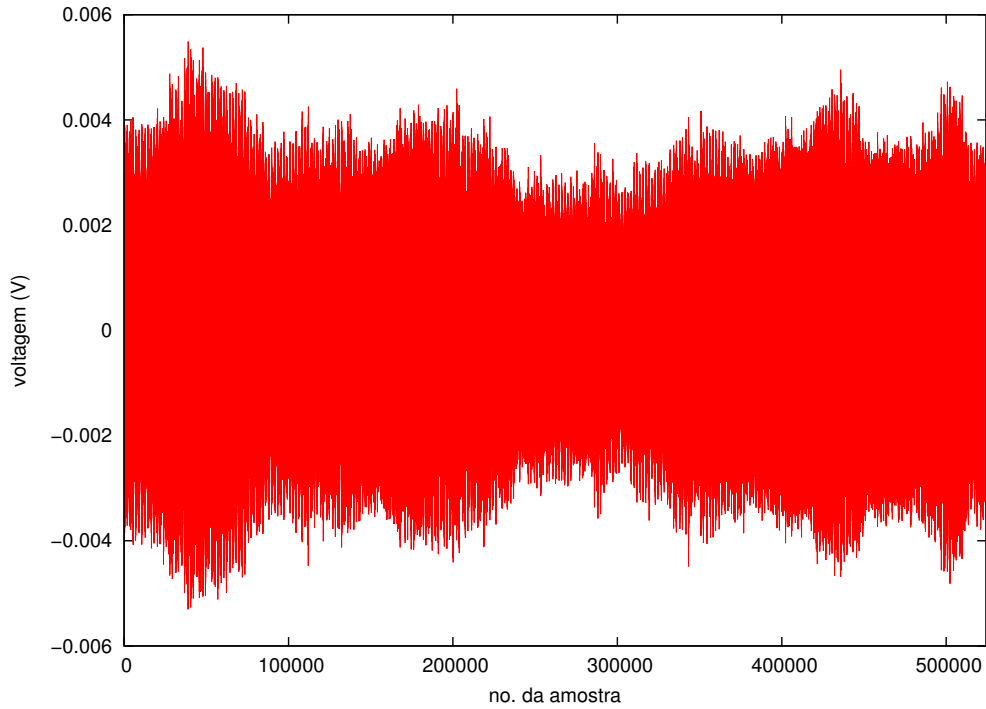


FIGURA 4.10 – Leitura em voltagem do transdutor 1 referente aos deslocamentos apresentados na Figura 4.8.

é o nível constante de conversão, H é coeficiente potência-voltagem do misturador e β_e o acoplamento elétrico. A Figura 4.10 representa a saída em voltagem do transdutor 1 para uma série simulada referente a 32 segundos e oriunda dos deslocamentos representados na Figura 4.8. Para obter a figura, estimamos o ganho da cadeia de amplificação como $\sim 10^6$.

4.10 Temperatura de Ruído

Considerando o ressonador $R2$ como um oscilador harmônico, podemos calcular a temperatura de ruído do detector, já que a energia de um oscilador harmônico é

$$E = \frac{k_b T}{2} = \frac{1}{2} k \delta x^2, \quad (4.35)$$

onde $k = m\omega^2$ é a constante de mola, m a massa, ω a frequência de ressonância e δx a variação de posição (deslocamento). Assim, temos que a temperatura de um evento (das Equações 4.35 e 4.32) é dada por

$$T = \frac{1}{k_b} m \omega^2 \left(\frac{df}{dx} \frac{dV}{df} \right)^{-2} \delta v^2. \quad (4.36)$$

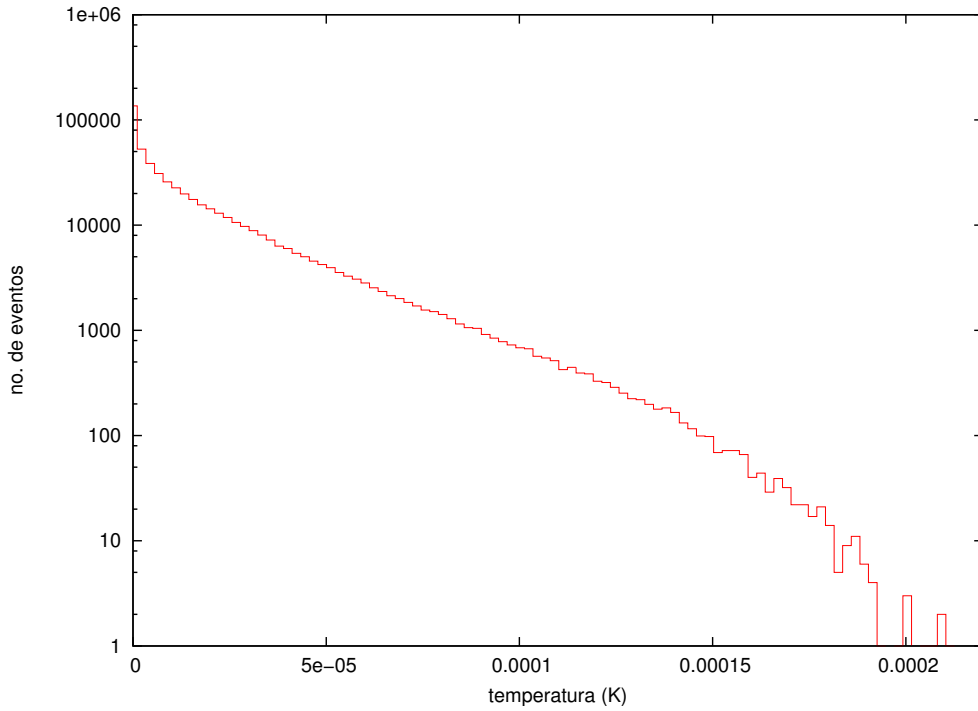


FIGURA 4.11 – Histograma de temperaturas dos eventos apresentados na Figura 4.10.

A Figura 4.11 apresenta o histograma de temperaturas dos dados mostrados nas Figuras 4.8 e 4.10. O histograma apresenta um perfil condicente com uma distribuição com decaimento exponencial, que pode ser ajustada por

$$N = N_0 \exp(-T/T_n), \quad (4.37)$$

onde N é o número de eventos no bin correspondente à temperatura T , N_0 é o número de eventos no bin zero e T_n é a temperatura de ruído do detector. A temperatura de ruído T_n é calculada pelo ajuste da Equação 4.37. As curvas foram ajustadas pelo Método dos Mínimos Quadrados com a finalidade de que fossem encontrados os melhores valores para N_0 e T_n . O melhor ajuste fornece uma temperatura de ruído $T_n \sim 2,2 \times 10^{-5}$ K.

De posse destas quantidades podemos partir para a solução do problema inverso e o tramento dos dados obtidos.

CAPÍTULO 5

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO E PROCESSAMENTO DOS DADOS

No final da década de 80, Dhurandhar e Tinto iniciaram o trabalho relacionado à solução do problema inverso, ou seja, determinar, a partir do conhecimento das amplitudes de oscilação de um corpo elástico, a direção e as polarizações de um sinal gravitacional [61]. Seguindo este trabalho, Gürsel e Tinto, em 1989, criaram um método para determinar estas quantidades utilizando os dados obtidos de 5 barras ou 5 interferômetros distintos [62].

No final da década de 90, Magalhães estudou o problema inverso exclusivamente para detectores esféricos e mostrou como determinar a direção de uma fonte pela utilização de um método puramente geométrico [63, 64, 65]. Merkowitz completou o trabalho elaborando um procedimento para determinar as polarizações e a direção pelo monitoramento dos canais dos modos, fornecendo uma solução analítica para o problema inverso [43]. Utilizaremos as metodologias desenvolvidas por Magalhães e Merkowitz, a fim de recuperar informações sobre um sinal introduzido no modelo descrito no capítulo anterior.

Como vimos no Capítulo 2 (Seção 2.5), as polarizações na forma TT são projetadas nos harmônicos esféricos segundo a aplicação da matriz de rotação de Euler (Equação 2.34). No capítulo anterior, vimos como obter as amplitudes esféricas a partir do monitoramento do deslocamento da massa final do transdutor. Agora, ligando estes dois conceitos utilizaremos as amplitudes esféricas para determinar a direção e polarizações de um sinal gravitacional.

5.1 Determinação da Direção e das Polarizações

Para facilitar a leitura e a compreensão desta seção, repetiremos aqui (utilizando a notação sugerida por Johnson e Merkowitz) as Equações 2.33, 2.34 (quando $\alpha = 0$) e 2.35

$$\underline{\underline{H}}'(t) \equiv \begin{pmatrix} h_+(t) & h_\times(t) & 0 \\ h_\times(t) & -h_+(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma \cos \beta & \cos \gamma & \sin \gamma \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

e

$$\underline{\underline{H}}(t) = \underline{\underline{R}}\underline{\underline{H}}'(t)\underline{\underline{R}}^T = \begin{pmatrix} h_1(t) - \frac{1}{\sqrt{3}}h_5(t) & h_2(t) & h_4(t) \\ h_2(t) & -h_1(t) - \frac{1}{\sqrt{3}}h_5(t) & h_3(t) \\ h_4(t) & h_3(t) & \frac{2}{\sqrt{3}}h_5(t) \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

A matriz de deformação na forma TT $\mathbf{H}'(t)$ é projetada no referencial do laboratório pela Equação 5.3, na qual é representada por $\mathbf{H}(t)$. Como mostra a Equação 5.3, as componentes de $\mathbf{H}(t)$ são combinações lineares das amplitudes esféricas $h_m(t)$.

Para obter $\underline{\underline{H}}'(t)$ de $\underline{\underline{H}}(t)$ precisamos apenas dos ângulos β e γ , uma vez que adotamos por convenção $\alpha = 0$. Multiplicando-se a Equação 5.3 por $\underline{\underline{R}}^T$ pela esquerda e por $\underline{\underline{R}}$ pela direita, obtém-se

$$\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{H}}(t) \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} \underline{\underline{H}}'(t) \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}}. \quad (5.4a)$$

Um vez que $\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{I}}$, temos que

$$\underline{\underline{H}}'(t) = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{H}}(t) \underline{\underline{R}}. \quad (5.4b)$$

Os valores de β e γ serão obtidos pela imposição de que a última coluna de $\underline{\underline{H}}'(t)$ deve ser nula, uma vez que, pela TRG, uma onda gravitacional não tem efeito sobre a direção de propagação (por convenção z'). Esta imposição gera um sistema de equações lineares, que tem como solução

$$\tan \gamma = -\frac{y}{x}, \quad (5.5)$$

$$\tan \beta = \pm \frac{y}{z} \frac{1}{\sin \gamma}. \quad (5.6)$$

O sinal negativo na Equação 5.5 vem da convenção de Euler, enquanto o duplo sinal em 5.6 ilustra o fato da esfera ser incapaz de distinguir fontes antípodas¹.

Devido ao fato do determinante de $\underline{\underline{H}}'(t)$ ser nulo, o sistema de equações é indeterminado – uma das equações depende das outras duas. Porém, duas equações independentes são suficientes para determinar β e γ univocamente. Para isso, impomos a condição de que quando $\tan \gamma = 0$, tenhamos $\tan \beta = \infty$, como deve ser. Desta forma, obtemos

$$y = h_3(t)h_4(t) - \frac{2\sqrt{3}}{3}h_2(t)h_5(t), \quad (5.7a)$$

$$x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \left(h_1(t)h_5(t) + \frac{\sqrt{3}}{3}h_5(t)^2 \right) - h_3(t)^2, \quad (5.7b)$$

¹Pode-se determinar a direção de propagação do sinal mas não o sentido.

$$z = h_2(t)h_3(t) + h_4(t) \left(h_1(t) + \frac{\sqrt{3}}{3}h_5(t) \right). \quad (5.7c)$$

Para obtermos as expressões para as polarizações, levamos em conta a construção de $\underline{\underline{H}}'(t)$ ($h_+ = H'_{11} = -H'_{22}$ e $h_\times = H'_{12} = H'_{21}$). Como $\underline{\underline{H}}(t)$ e $\underline{\underline{H}}'(t)$ são simétricas, os valores de H'_{12} e H'_{21} serão sempre idênticos, independente da presença de ruído. Contudo, esta mesma restrição não é aplicável a H'_{11} e H'_{22} [43]. Assim, tomaremos a média $h_+ = (H'_{11} + H'_{22})/2$ para obter a expressão analítica para as polarizações, que serão expressas por

$$h_+(t) = \frac{1}{2}h_1(t)(1 + \cos^2 \beta) \cos 2\gamma - \frac{1}{2}h_2(t)(1 + \cos^2 \beta) \sin 2\gamma \quad (5.8a)$$

$$- \frac{1}{2}h_3 \sin 2\beta \sin \gamma + \frac{1}{2}h_4(t) \sin 2\beta \cos \gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}h_5(t) \sin^2 \beta, \quad (5.8b)$$

$$h_\times(t) = h_1(t) \cos \beta \sin 2\gamma + h_2(t) \cos \beta \cos 2\gamma + h_3(t) \cos \gamma \sin \beta \\ + h_4(t) \sin \gamma \sin \beta.$$

Estas soluções podem ser derivadas também da combinação lineares das Equações 2.36 e representam a solução do problema inverso, sendo válidas tanto para o caso sem ruído quanto para o caso ruidoso.

5.2 Caso Somente com Sinal

Com o objetivo de testar a eficiência do método, necessitamos de uma forma de onda para introduzi-la no modelo e tentar recuperá-la posteriormente. Este sinal gravitacional deve ter duas características básicas:

- a) A forma de onda das duas polarizações possíveis a uma onda gravitacional, $h_+(t)$ e $h_\times(t)$.
- b) Uma direção de incidência, descrita pelos ângulos zenital β e azimutal γ , em relação ao referencial adotado.

Assim, conhecendo-se as polarizações e a direção de entrada de um sinal, podemos simular o efeito da onda gravitacional passante e checar se, após a passagem pelo modelo, é possível recuperá-la integralmente. Esta checagem será realizada através de dois métodos: as correlações entre as polarizações de entrada (ent) e saída (sai) e entre os espectros de entrada e de saída e, o cálculo do erro médio quadrático Q ao longo dos N pontos da

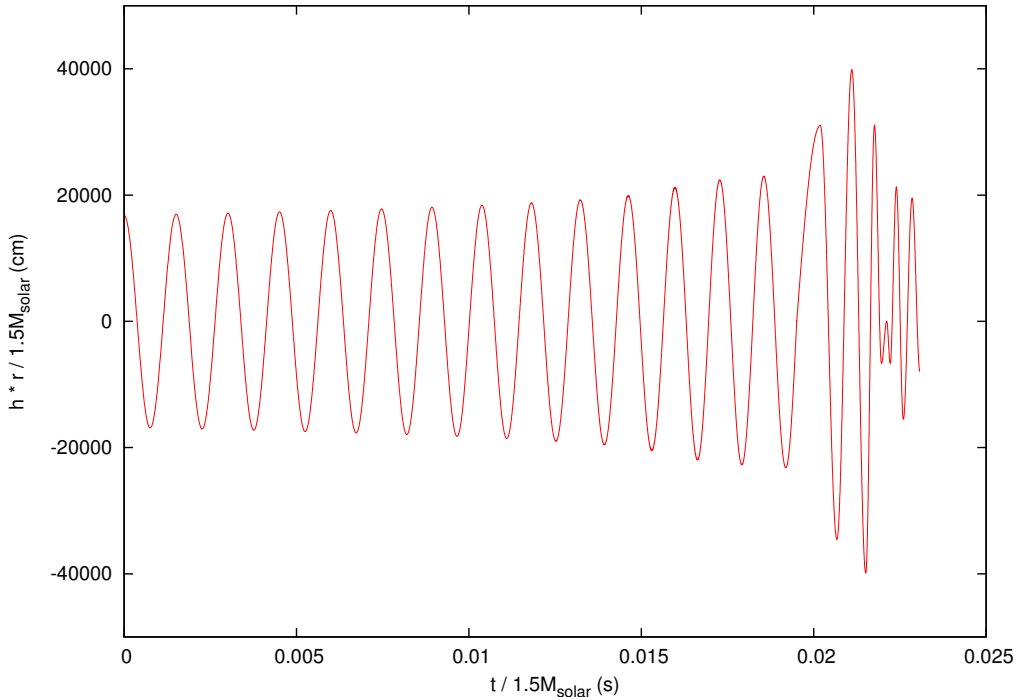


FIGURA 5.1 – Forma de onda da amplitude h da radiação gravitacional emitida por um sistema binário EN-EN coalescente. A forma de onda corresponde às últimas órbitas estáveis, ao toque das duas estrelas e a fusão dos dois objetos.

série temporal

$$Q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (h_i^{\text{ent}} - h_i^{\text{sai}})^2.$$

Existe na literatura uma grande quantidade de formas de onda simuladas para sinais gravitacionais, obtidas a partir de considerações sobre o tipo de fonte e metodologia utilizada para a simulação (Relatividade Numérica, Aproximação Pós-Newtoniana, etc). O Laboratório para Astrofísica de Altas Energias (LHEA) da NASA/GSFC mantém um catálogo contendo formas de onda das mais variadas fontes astrofísicas de radiação gravitacional, o AstroGravS (“Astrophysical Gravitational-Wave Sources Archive”), o qual encontra-se disponível no endereço eletrônico <http://astrogravs.gsfc.nasa.gov/docs/catalog.html>. Optamos por usar como sinais de teste as formas de onda, calculadas por Duez, Shibata e colaboradores, para a coalescência de um sistema binário de estrelas de neutrons, contendo as últimas órbitas estáveis, o toque (“plunge”) das duas estrelas e a fusão de ambas (“merger”)[66, 67, 68, 69].

A escolha desta forma de onda deve-se, também, ao fato de que os eixos do tempo e da amplitude podem ser escalonados de acordo com a massa M dos objetos apenas pela

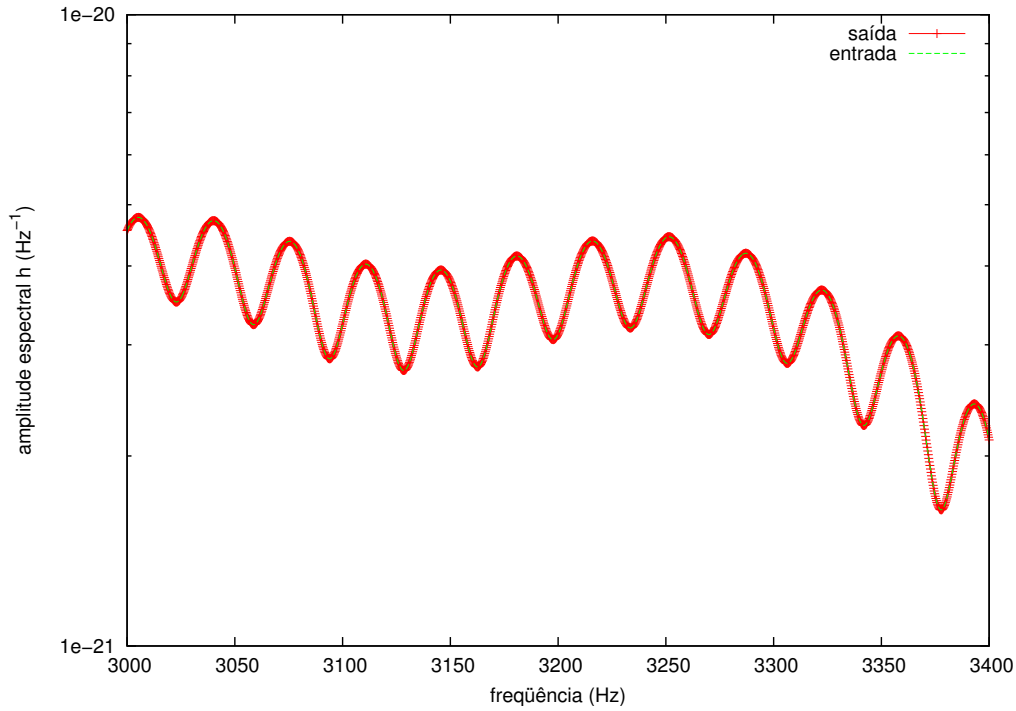


FIGURA 5.2 – Correlação entre os espectros do sinal de entrada e de saída em torno da banda de maior sensibilidade do detector.

multiplicação de ambos por $M/1,5M_{\odot}$. O valor numérico da amplitude pode, ainda, ser estimado segundo a distância da fonte ao observador, multiplicando-se os eixos das amplitudes por esta distância em cm. A Figura 5.1 mostra a forma de onda escolhida para o teste inicial. A forma de onda foi também reamostrada para se tornar compatível a taxa de amostragem que será utilizada pelo detector em questão.

Para introduzir este sinal no modelo, arbitramos uma direção e uma distância para a fonte, calculamos a força gravitacional efetiva atuante sobre a esfera e a adicionamos ao modelo, obtendo, desta forma, as saídas dos seis transdutores. Estas leituras são combinadas para o cálculo dos canais dos modos, das amplitudes esféricas e, através da solução do problema inverso, as informações inseridas devem ser recuperadas. As simulações para o caso sem ruído mostram uma correlação igual a 1 para ambas as polarizações e para o espectro, validando o método. A Figura 5.2 mostra o espectro de amplitudes do sinal de entrada e de saída. Pode-se observar que os espectros correlacionam-se perfeitamente (correlação 1) dentro da banda de sensibilidade do detector. Esta correlação estende-se por todo o domínio espectral. E, a $SNR \rightarrow \infty$ como esperado.

Com o propósito de representar a posição de entrada do sinal, projetamos a esfera no plano utilizando-se a projeção Hammer-Aitoff [70]. Para projetá-la a esfera foi “binada” em intervalos de $0,5^{\circ} \times 0,5^{\circ}$. Uma vez calculada uma posição angular de entrada do sinal

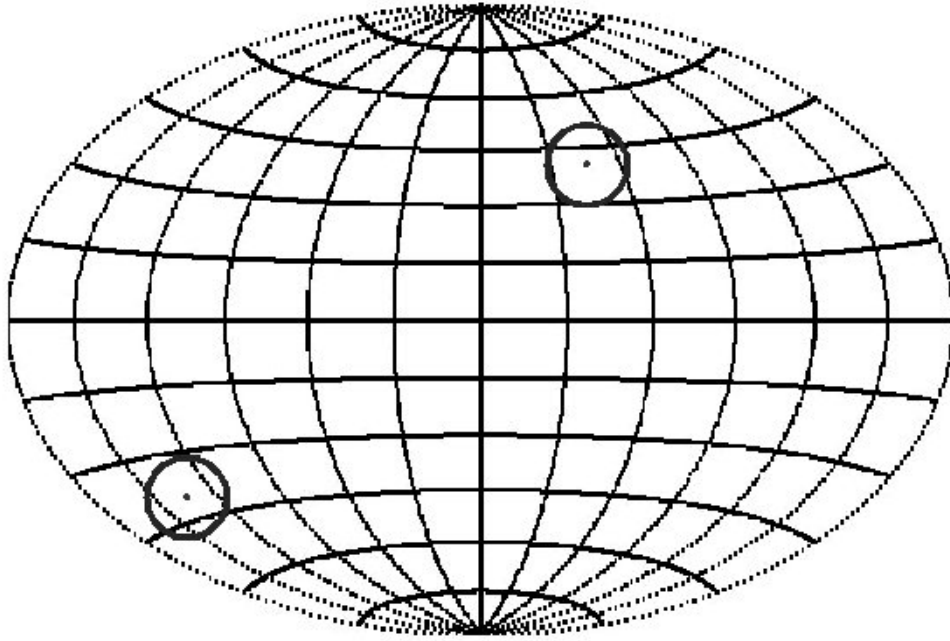


FIGURA 5.3 – Posição perpendicular à frente de onda do sinal de entrada na projeção Hammer-Aitoff.

(β, γ) e as polarizações da amostra no instante t , adicionamos ao “bin” correspondente o valor de $\sqrt{h_+(t)^2 + h_\times(t)^2}$. Esta quantidade está relacionada à quantidade de energia recebida pela esfera da direção (β, γ) (ver Equação 2.25a).

A Figura 5.3 mostra a posição da fonte, escolhida como $\theta \equiv \beta - 90^\circ = 45^\circ$ e $\phi \equiv -\gamma = -45^\circ$, assinalada com um círculo². O fato da $SNR \rightarrow \infty$, neste caso, faz com que a posição da fonte seja determinada com precisão infinita (limitada apenas pela “binagem” do mapa) e um único ponto aparece no histograma de posições. Devido ao fato da esfera ser incapaz de distinguir fontes antípodas (representado pelo duplo sinal da Equação 5.6), complementamos a representação colocando um ponto na direção diametralmente oposta (θ', ϕ') , sendo $\theta' = -\theta$ e $\phi' = \phi - 180^\circ$. A fim de não alterar o fluxo integrado em toda a esfera, o valor h atribuído a cada ponto é dividido por um fator 2.

Utilizamos o mesmo procedimento para analisar o comportamento da esfera quando somente o ruído está atuando sobre a mesma.

²O ângulo β é o ângulo com relação ao zênite da esfera no entanto, para projetar a posição segundo Hammer-Aitoff, o ângulo equivalente θ é medido com relação ao equador. Por este motivo, subtraímos 90° do ângulo β obtido.

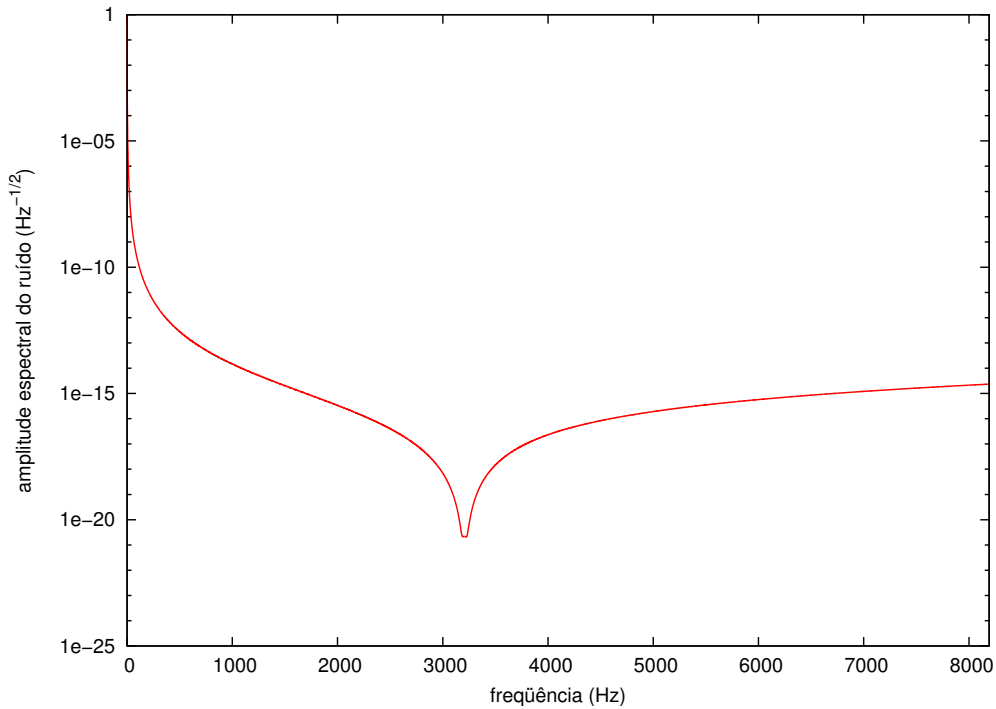


FIGURA 5.4 – Curva de sensibilidade em todo o espectro observável.

5.3 Caso Somente com Ruído

Se observarmos a curva de sensibilidade em todo o intervalo espectral, estendendo a curva apresentada na Figura 4.6, podemos perceber que o nível de ruído é maior do que 4 ordens de magnitude quando nos afastamos da frequência central, cerca de 200 Hz. Pode-se constatar pela Figura 5.4, que a situação é ainda mais crítica para frequências menores que 1,5 kHz, região onde o nível de ruído chega a ser ~ 15 ordens maior.

Visando contornar este problema e concentrar a análise na região de maior sensibilidade utilizamo-nos da aplicação de um Filtro Passa-Banda. O filtro é centrado em 3206,3 Hz e tem largura determinada pela Equação 4.30. Optamos por uma abordagem menos conservadora escolhendo uma banda para análise de 70 Hz, o que implica no incremento de h_{\min} em um fator $\approx 1,08$.

As amplitudes esféricas \tilde{h}_m são filtradas pelo filtro passa-banda individualmente, voltam ao domínio do tempo e, então, passam pela solução inversa. As Equações 5.5 e 5.6 fornecem uma posição equivalente para cada amostra de ruído, enquanto as Equações 5.8b e 5.8c fornecem as polarizações correspondentes. A Figura 5.5 mostra as amplitudes do ruído referenciada na polarização $h_+(t)$, enquanto a Figura 5.6 apresenta as distribuições de amplitudes de ambas as polarizações. Pode-se observar pela Figura 5.6 que as polarizações obtidas apresentam distribuições características distintas. Enquanto

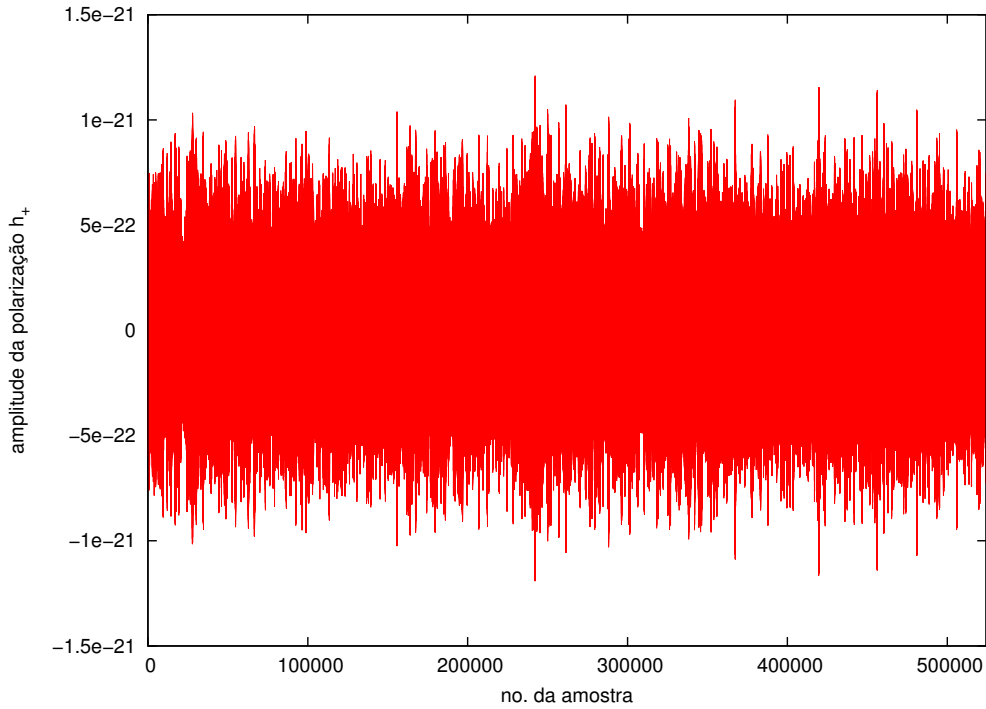


FIGURA 5.5 – Polarização $h_+(t)$ na saída – somente ruído.

a polarização h_\times apresenta uma distribuição gaussiana centrada próxima de zero, a polarização h_+ apresenta uma distribuição compatível com a soma de duas gaussianas com médias opostas. Estas distribuições são decorrentes das características de simetria das polarizações na composição da matriz deformação.

Estas características, aliada a alternância das amplitudes $h_+(t)$ e $h_\times(t)$, garantem que a distribuição dos $h(t)$ apresente uma forma “planckiana”, como deve ser, uma vez que esta quantidade está relacionada ao fluxo de energia depositado pelo ruído na direção (β, γ) . A Figura 5.7 mostra a distribuição dos $h(t)$ referentes ao ruído, na qual pode ser constatado o “carácter de corpo negro” da esfera.

A Figura 5.8 mostra o espectro de amplitudes $\tilde{h} = \sqrt{|\tilde{h}_+|^2 + |\tilde{h}_\times|^2}$ obtidas pela solução do problema inverso, quando somente ruído afeta o detector (sem sinal). Pode-se perceber que o espectro é aproximadamente plano dentro da banda de sensibilidade escolhida (3171,3 – 3241,3 Hz). A cerca de 5 Hz das extremidades da banda o espectro deixa de ser plano em decorrência da superestimativa da banda de sensibilidade (70 Hz ao invés de 60 Hz obtidos da Equação 4.30).

Para cada amostra $h_+(t)$ e $h_\times(t)$, temos uma posição de entrada (β, γ) calculada de um “sinal” equivalente, correspondendo ao nível de ruído relacionado a tal posição. A Figura 5.9 mostra este histograma de posições. As regiões mais claras representam as posições

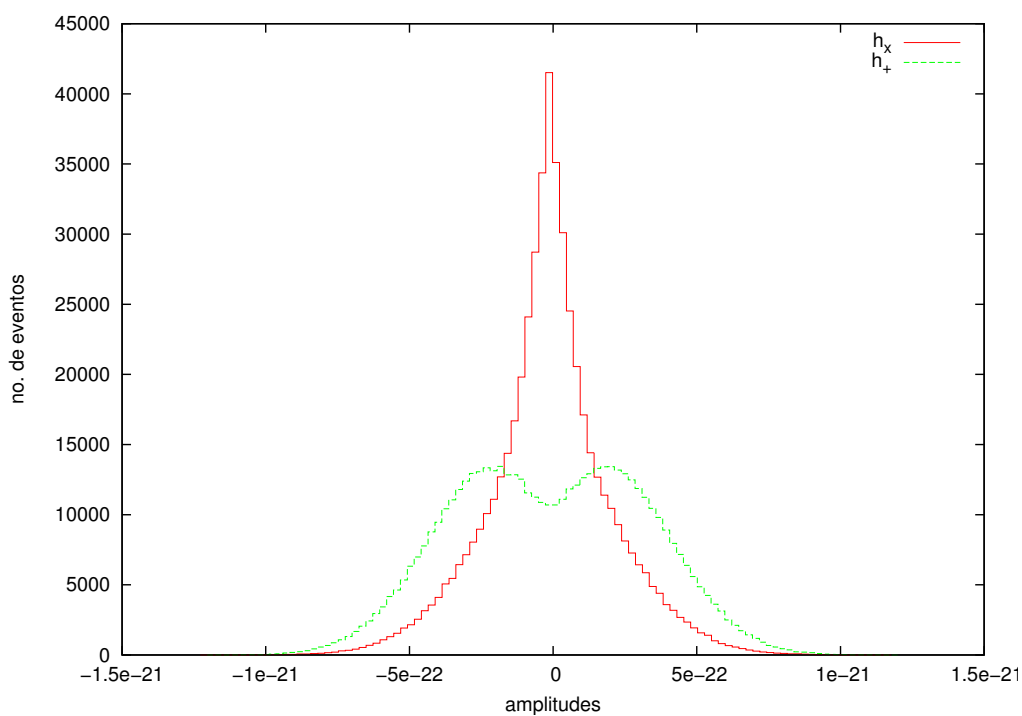


FIGURA 5.6 – Histogramas das amplitudes das polarizações $h_+(t)$ e $h_x(t)$.

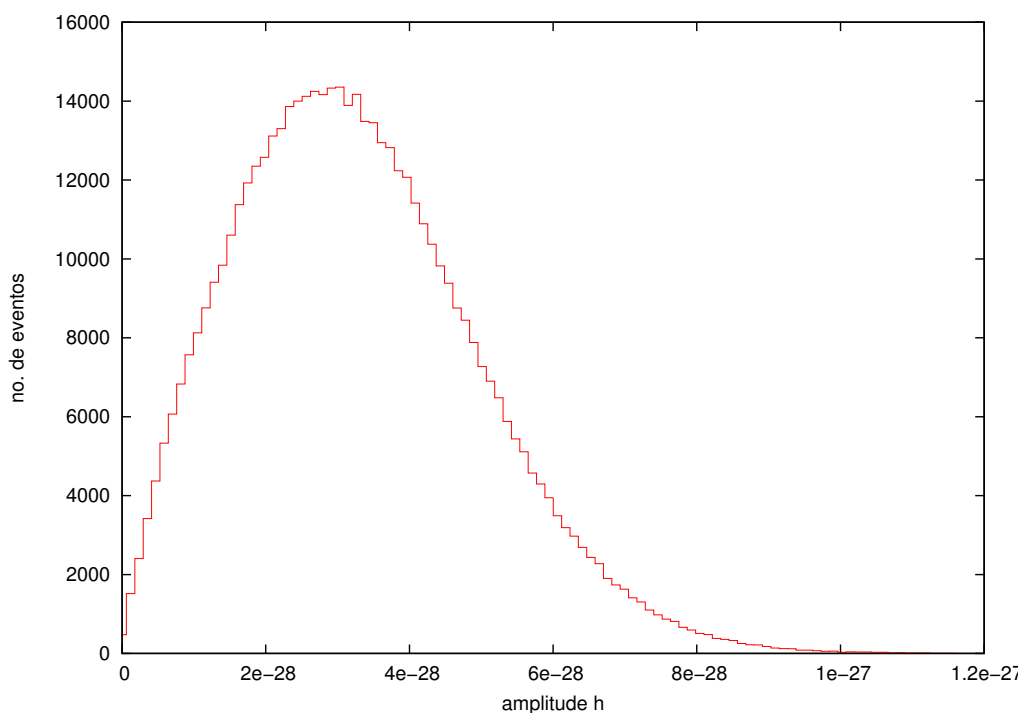


FIGURA 5.7 – Distribuição da amplitude $h(t)$.

com maior “luminosidade”, ou seja, regiões onde há maior concentração de energia incidente e obtidas pela solução inversa. A figura apresenta-se claramente não-isotrópica

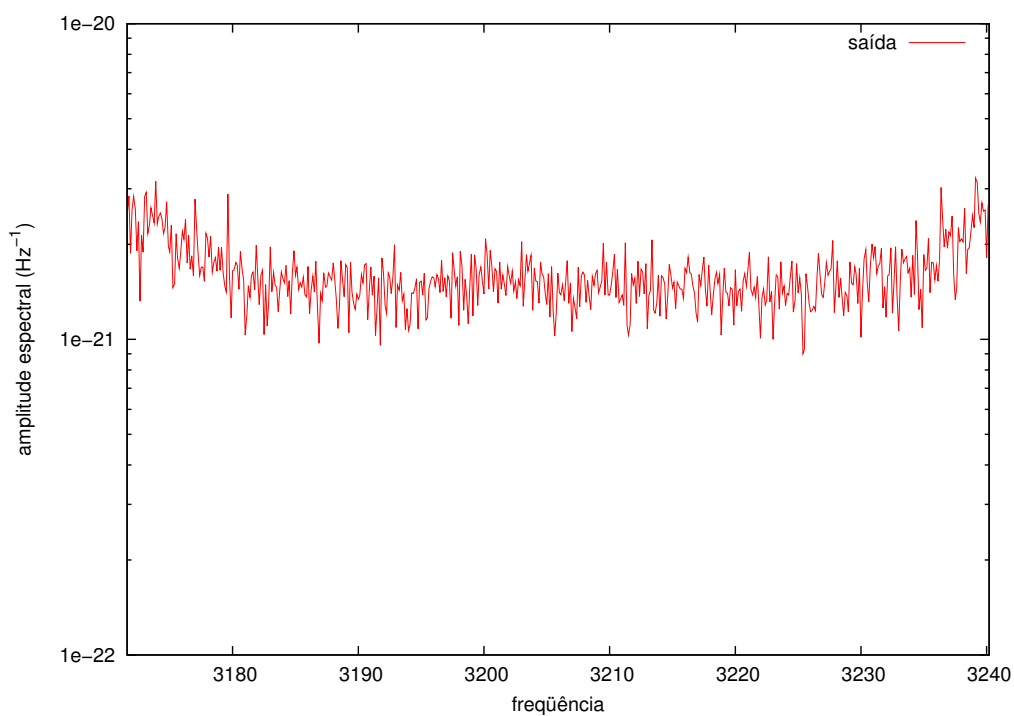


FIGURA 5.8 – Amplitude espectral das polarizações quando há somente ruído.

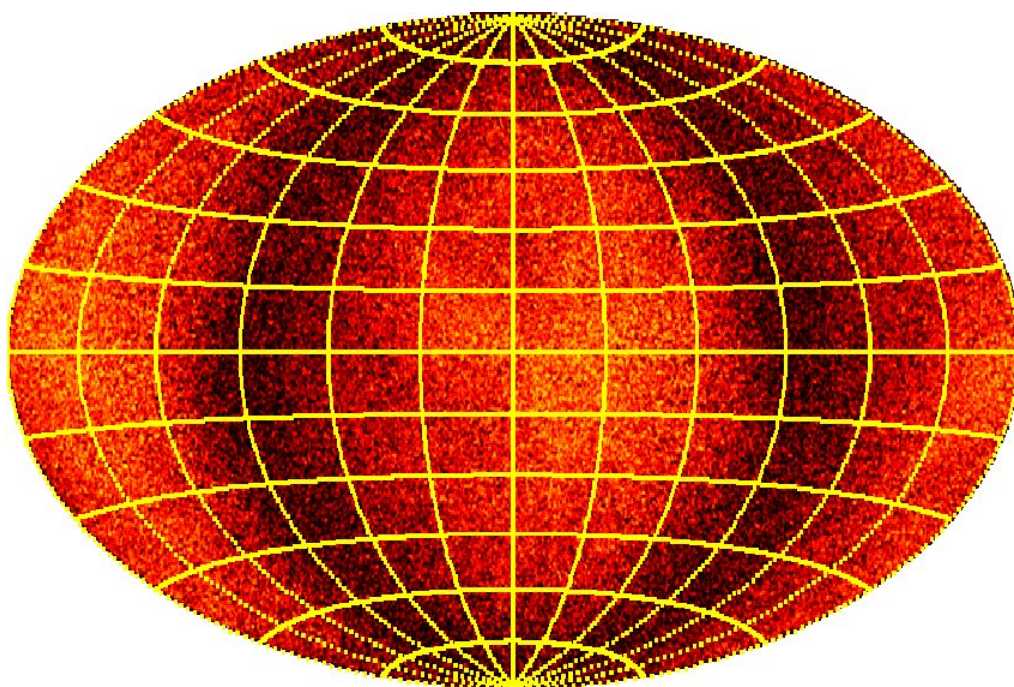


FIGURA 5.9 – Distribuição de posições equivalentes do ruído.

com concentração evidente nas regiões próximas ao equador e na longitude 150° e, por imposição, na direção diametralmente oposta. Este resultado inesperado tem origem no

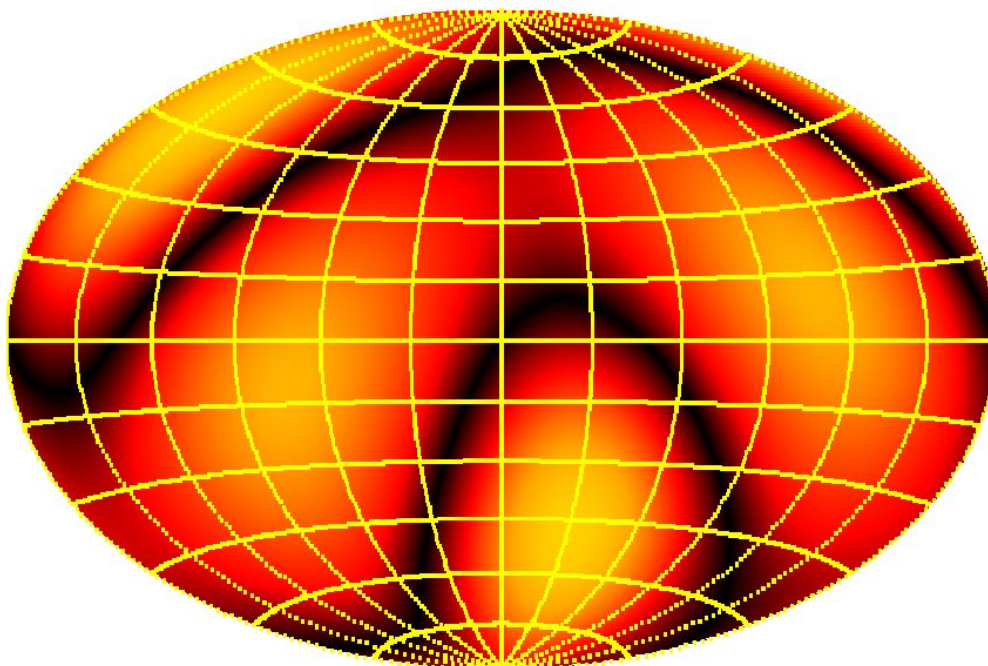


FIGURA 5.10 – Somatória dos modos quadrupolares representadas na projeção Hammer-Aitoff.

processo de reconstrução da esfera.

5.4 Conseqüências da Reconstrução Incompleta da Esfera

Inicialmente, decidimos analisar o comportamento da esfera, utilizando apenas os modos quadrupolares ($l = 2$). Uma esfera S é bem representada pela composição de todos os harmônicos esféricos em todos os multipolos e modos

$$S = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}. \quad (5.9)$$

No entanto, quando optamos pela análise exclusiva dos modos quadrupolares, utilizando apenas os Y_{2m} , estamos ignorando a contribuição dos demais multipolos (e os modos monopulares e dipolares, inclusive). Isto faz com que a reconstrução da esfera não seja completa, uma vez que a Equação 5.9 apresentará no somatório apenas $l = 2$. A Figura 5.10 representa este somatório sobre os modos quadrupolares. É claramente observável, que este somatório apresenta um aspecto quadrupolar. As regiões de máxima amplitude absoluta (representadas pelas regiões mais claras) localizam-se nas posições $[(\theta, \phi)] = [(48,9^\circ, 149,4^\circ), (-48,9^\circ, -30,6^\circ), (-11,4^\circ, 72,6^\circ), (11,4^\circ, -107,4^\circ)]$. Estas posições são antípodas duas a duas (as duas primeiras e as duas últimas) e, portanto, definem duas retas que passam pelo centro da esfera. Estas duas retas concorrentes (no centro)

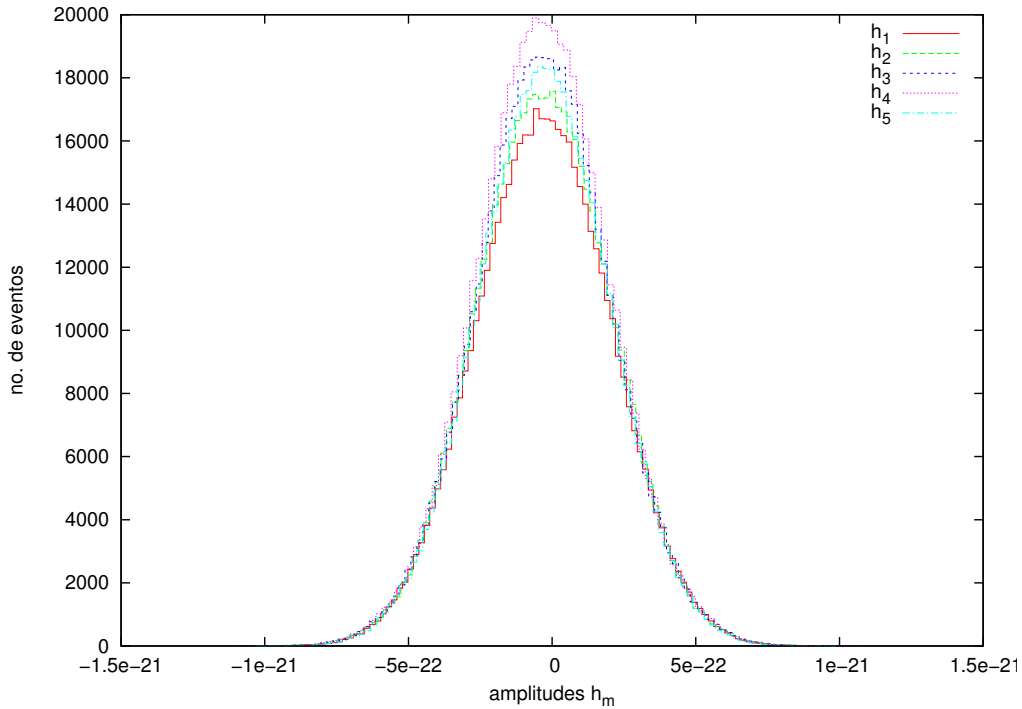


FIGURA 5.11 – Distribuição das amplitudes esféricas.

definem, por sua vez, um plano. A reta perpendicular a este plano e que passa pelo centro intercepta a superfície da esfera em $[(\theta_{\perp}, \phi_{\perp})] \approx [(0^{\circ}, 150^{\circ}), (0^{\circ}, -30^{\circ})]$. É interessante observar que estas coordenadas correspondem, aproximadamente, ao centro das regiões iluminada (como apresentado na Figura 5.9). Esta “coincidência” merece ser investigada.

Para representar a Figura 5.10 supomos que as amplitudes de cada modo são idênticas e unitárias, implicando em que os modos normais quadrupolares estão igualmente excitados. Porém, não há razões físicas para que os modos quadrupolares de oscilação da esfera estejam igualmente excitados e que apresentem a mesma amplitude no mesmo instante de tempo. A Figura 5.11 mostra a distribuição das amplitudes esféricas h_m para os dados simulados e apresentados na Figura 4.8. Observa-se pela figura que as distribuições não apresentam-se iguais em valor numérico. Isto implica que em determinados instantes, um ou outro modo encontra-se mais excitados, como seria de se esperar. O fato de, em determinados instantes, um modo estar mais excitado que o outro, desloca as regiões de máximo e de mínimo. Calcular a posição exata destes máximos e mínimos analiticamente é complicado, uma vez que desconhecemos o padrão de alternância entre os modos mais ou menos excitados. Mas, não há razões aparentes para não supor que, em média, o grau de excitação dos modos tenda a ser igual. Portanto, decidimos por fazer isto numericamente através de simulações sucessivas. Assim, a cada simulação, calculamos a média e a variância em cada “bin”, obtendo, após 100 simulações de 32 segundos de dados, uma

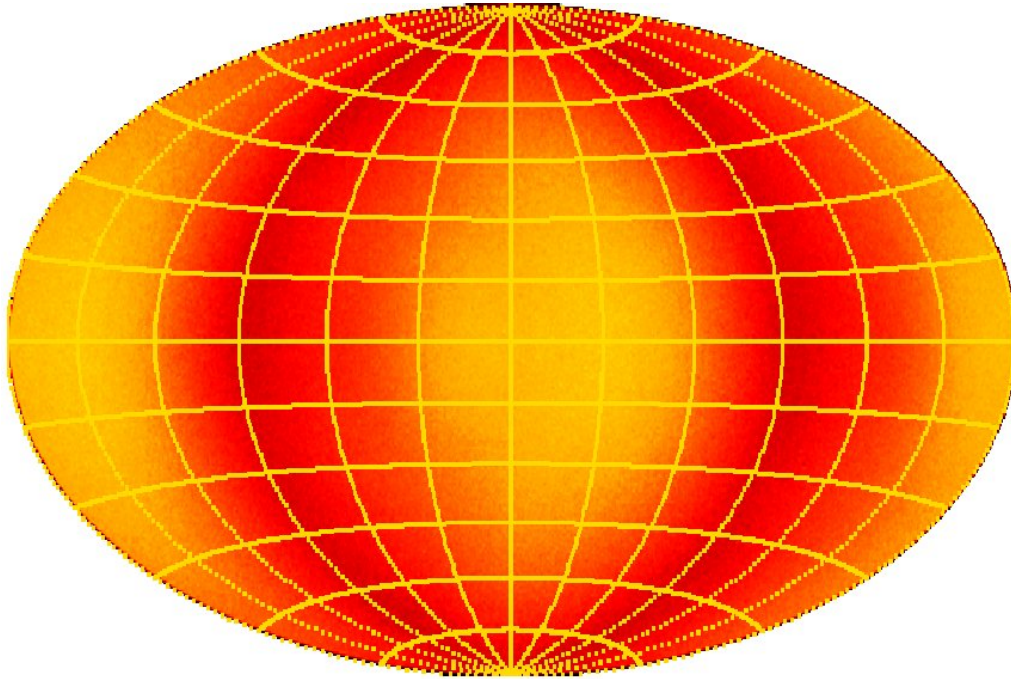


FIGURA 5.12 – Máscara de ganho após 100 simulações.

“máscara de ganho” para o ruído.

5.5 Máscara de Ganho

Chamamos de “máscara de ganho” pois, quando a posição de entrada é referenciada naquela região, a amplitude h apresenta um valor maior, uma vez que há correlação entre os modos, ou seja, parcelas aproximadamente iguais de energia são distribuídas entre os cinco modos. E, a esfera aparenta estar mais “iluminada” nesta região uma vez que os cinco modos normais apresentam graus de excitação similares. A medida que a correlação entre os modos diminui, a posição de entrada referenciada se distancia daquela região e o valor da amplitude h diminui. Então, para corrigir este efeito, o histograma de posições será dividido por esta máscara e será obtido o valor das flutuações do ruído (ou sinal+ruído) com relação a máscara. Após 100 simulações, a máscara apresenta o perfil mostrado na Figura 5.12.

Para realizar a divisão, a máscara é normalizada pelo valor máximo, tendo assim um carácter adimensional. Após um número suficiente de simulações (~ 100) não existem bins não preenchidos, o que evita divisões por zero. A região mais iluminada mantém seu valor (divisão por $x \simeq 1$), enquanto a região menos iluminada é intensificada pela máscara de ganho (divisão por $0 < x < 1$). A razão entre as regiões mais e menos iluminada é ≈ 3 . A Figura 5.13 mostra o mesmo histograma de posições apresentado na

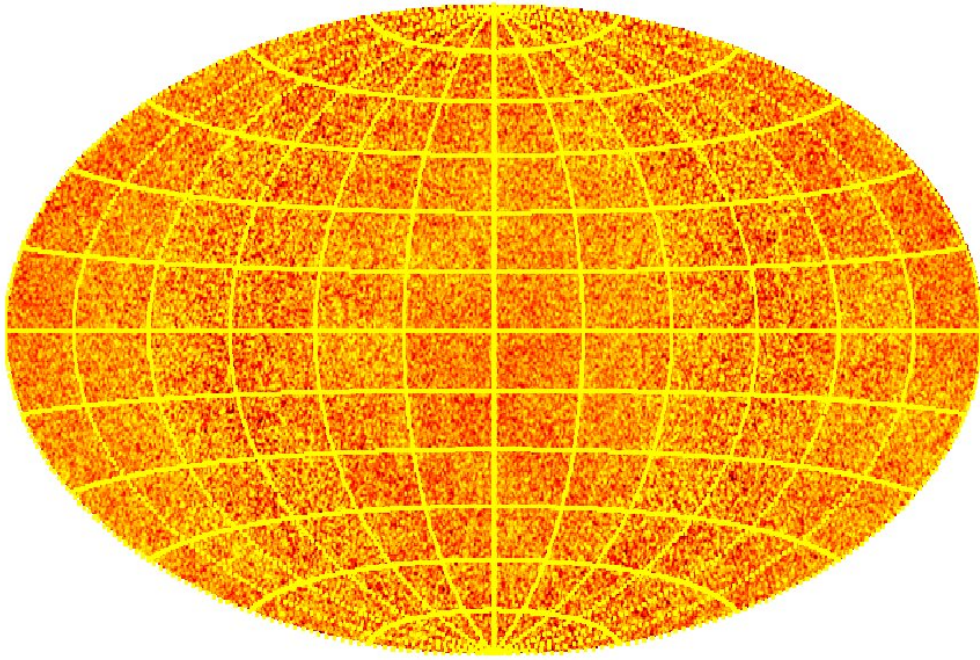


FIGURA 5.13 – Distribuição de posições equivalentes do ruído após a divisão pela máscara de ganho.

Figura 5.9 mas, agora, dividido pela máscara de ganho. Como pretendíamos, com o uso da máscara, a distribuição do ruído torna-se aproximadamente isotrópica.

A utilização da máscara não afeta o valor numérico das amplitudes das polarizações obtidas da solução, apenas a representação integrada dos h s no histograma de posições. Ela apenas realça as flutuações em relação ao padrão conhecido de ruído. Isto facilita que sinais, mesmos que relativamente fracos (baixa relação sinal-ruído), sobressaiam ao ruído e, tornem-se evidentes nesta representação.

5.6 Relação Sinal-Ruído

Estimar a relação sinal-ruído SNR de um sistema como o detector esférico não é algo trivial, já que ele possui cinco curvas diferentes de ruído (uma para cada modo) que podem ter perfis distintos. Contudo, podemos facilmente determinar a SNR_m de cada um dos cinco canais m pela relação

$$SNR_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \sqrt{\frac{|\tilde{h}_m|^2(\omega)}{N_m^2(\omega)}} d\omega, \quad (5.10)$$

onde $\sqrt{N_m^2(\omega)}$ representa o valor atribuído à curva de sensibilidade de cada modo m na frequência ω (conforme apresentado na Figura 4.6). A função $F(\omega)$ refere-se ao filtro

utilizado. No caso do filtro passa-banda, tem-se

$$F(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega_i \leq \omega \leq \omega_f, \\ 0, & \text{se } \omega_i > \omega > \omega_f, \end{cases}$$

sendo ω_i e ω_f , os limites inferior e superior da banda passante, respectivamente.

As quantidades \tilde{h}_m são dependentes da direção de entrada da frente de onda, ou seja, possuem uma dependência angular. Assim, cada SNR_m possui valores que dependem da posição angular da fonte, o que complica a análise do desempenho integrado do detector.

Seria necessário simular fontes em várias posições angulares diferentes, estimar a SNR_m em para cada posição e, então, integrá-la em m, θ, ϕ, ω . Isto, do ponto de vista computacional, é extremamente dispendioso³. Para contornar este problema, introduzimos o conceito de **curva média de ruído equivalente** N_ν para os cinco modos quadrupolares, para a qual adotaremos a seguinte definição

$$\frac{1}{N_\nu^2(\omega)} = \frac{1}{N_1^2(\omega)} + \frac{1}{N_2^2(\omega)} + \frac{1}{N_3^2(\omega)} + \frac{1}{N_4^2(\omega)} + \frac{1}{N_5^2(\omega)}. \quad (5.11)$$

Esta definição permite estimar a relação sinal-ruído equivalente integrada nos modos normais por elemento de frequência $SNR_\nu(\omega)$ como

$$SNR_\nu(\omega) = \sqrt{\frac{|\tilde{h}_1(\omega)|^2 + |\tilde{h}_2(\omega)|^2 + |\tilde{h}_3(\omega)|^2 + |\tilde{h}_4(\omega)|^2 + |\tilde{h}_5(\omega)|^2}{N_\nu^2(\omega)}}. \quad (5.12)$$

Mas, comparando a Equação 5.12 com a Transformada de Fourier das Equações 2.36, pudemos perceber que

$$|\tilde{h}^{\text{OG}}(\omega)|^2 = |\tilde{h}_1(\omega)|^2 + |\tilde{h}_2(\omega)|^2 + |\tilde{h}_3(\omega)|^2 + |\tilde{h}_4(\omega)|^2 + |\tilde{h}_5(\omega)|^2, \quad (5.13)$$

independentemente dos ângulos β, γ . O que parece, intuitivamente, óbvio, já que a quantidade de energia carregada pela onda gravitacional é decomposta (projetada) nos cinco modos normais. Conseqüentemente, a somatória das energia individuais de cada modo corresponde a energia da onda gravitacional incidente. Logo, definiremos a relação sinal-

³Algo como o que vimos apresentando, 0,25 graus quadrados, acarreta em $\sim 2 \times 10^6$ pontos para representar toda a esfera. Se considerarmos uma resolução em frequência razoável ($\Delta f_{\text{amostragem}} \sim 0,25$ Hz), necessitamos, na taxa de amostragem de 16384 Hz, de 65536 pontos. E, finalmente, considerando os cinco modos, teremos algo $\sim 6,5 \times 10^{11}$ operações para realizar esta integração.

ruído total SNR como

$$SNR = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \sqrt{\frac{|\tilde{h}^{\text{OG}}(\omega)|^2}{N_v^2(\omega)}} d\omega. \quad (5.14)$$

A Equação 5.14 representa a relação sinal-ruído integrada em todos os modos, ângulos de entrada e frequência, como queríamos representar e é muito mais econômica, do ponto de vista computacional.

5.7 Caso com Sinal mais Ruído

Para testar o desempenho do método quando existe um sinal gravitacional nos dados, adotaremos o mesmo procedimento e sinal utilizados na Seção 5.2. Para determinar a relação sinal-ruído, necessitamos que a fonte esteja em uma determinada distância r e assim, podemos estimar o valor numérico da amplitude h .

Sinal e ruído são expressos em unidades distintas (i.e. no domínio da frequência a amplitude do sinal é dada em Hz^{-1} enquanto a amplitude do ruído é expressa em $\text{Hz}^{-1/2}$), sendo assim transformamos a amplitude do sinal em outra importante quantidade, a amplitude característica, a qual é definida como

$$h_c(f) = \sqrt{\Delta f |\tilde{h}^{GW}(f)|^2},$$

onde $|\tilde{h}^{GW}(f)|^2$ é o espectro de potência do sinal na frequência f [71]. A amplitude característica é essencialmente o sinal *rms* no intervalo de frequência Δf centrado na frequência f e que tem a mesma unidade das fontes de ruído.

Desta forma, podemos realizar simulações sucessivas a fim de estimar, numericamente, o erro quadrático na determinação da direção angular $\sigma_\Omega^2 = \sigma_\theta \sigma_\phi$ [72].

Este erro corresponde à área (ou ângulo sólido) da superfície da esfera, sobre a qual a fonte “espalhou sua energia”, ou seja, equivale ao erro na determinação da direção correspondente a cada amostra devido a presença do ruído. Assim, a energia do sinal é espalhada em torno de sua posição de entrada real segundo σ_θ e σ_ϕ . O produto entre as duas quantidades descreve uma área na esfera, que corresponde a σ_Ω^2 .

5.7.1 Fonte Galáctica

Inicialmente, supomos uma fonte galáctica com $r \sim 30$ kpc. Este raio abrange toda a Galáxia e boa parte de seu halo. A esta distância, a fonte em questão apresenta $SNR \approx 122$. A Figura 5.14 mostra a posição média da fonte obtida, após 10 simulações. O erro

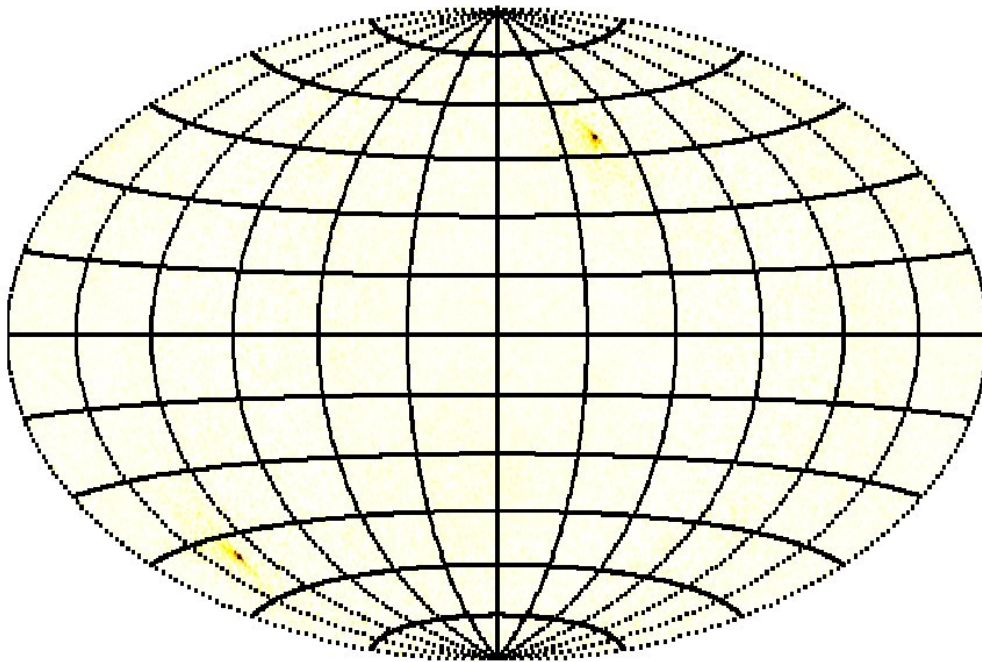


FIGURA 5.14 – Determinação da direção média da fonte – $SNR \approx 122$ – após 10 simulações.

na determinação da direção $\sigma_{\Omega}^2 \approx 8$ graus quadrados. A correlação entre os espectros é de $\approx 0,81$. Percebe-se pela Figura 5.15 como o espectro da fonte eleva o nível do espectro apresentado pelo ruído. A figura mostra o espectro médio das 10 simulações e o efeito é facilmente percebido, o espectro de saída assume o contorno do espectro de entrada. Com este valor para a SNR a contribuição da fonte é intensa o suficiente para que a mesma não seja totalmente diluída durante o tempo de integração (4 s).

A Figura 5.16 apresenta a leitura da polarização $h_+(t)$ na entrada e na saída do modelo, ambas após a filtragem passa-banda. É visível o instante e intervalo de tempo que o sinal passa pela banda de sensibilidade do detector. É possível estimar a razão entre os dois picos (correspondentes ao toque e ao modo barra da fusão dos dois objetos) e o desvio padrão como 30 – 40.

Porém, sabemos que fontes que apresentem SNR desta ordem são extremamente raras ($\lesssim 2$ por século).

5.7.2 Fonte Próxima

Supomos, agora, uma fonte próxima $r \sim 60$ kpc mas, extra-galáctica. Este raio abrange toda a Galáxia, todo o seu halo e parte das Nuvens de Magalhães. A esta distância, a fonte em questão apresenta $SNR \approx 60$. A Figura 5.17 mostra a posição da fonte

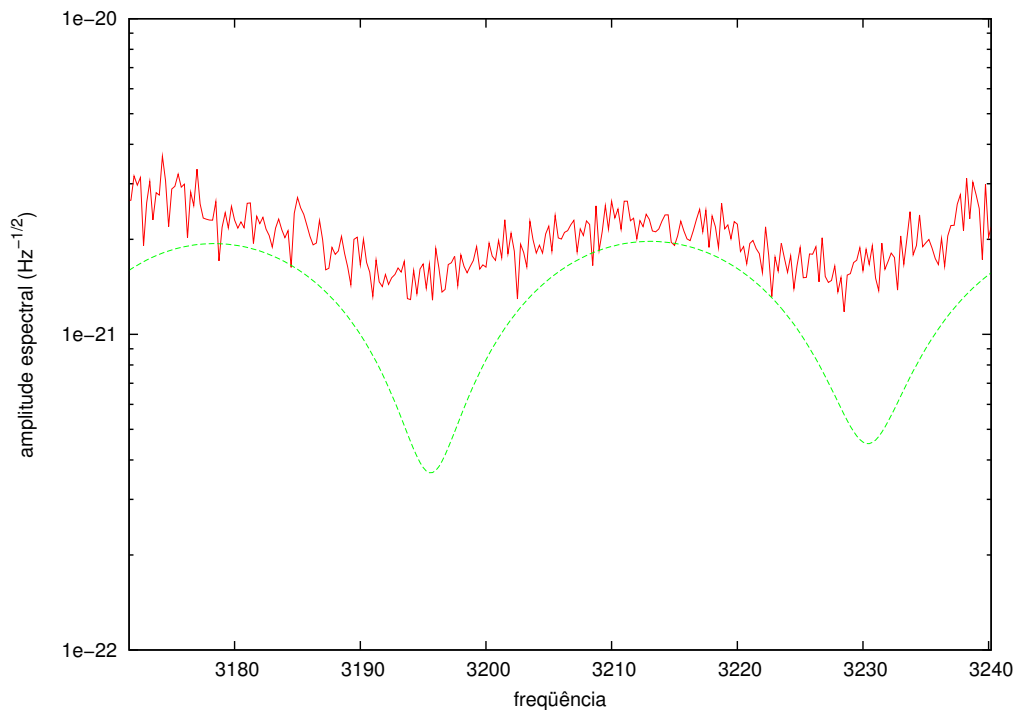


FIGURA 5.15 – Amplitude espectral das polarizações – $SNR \approx 122$ – após 10 simulações.

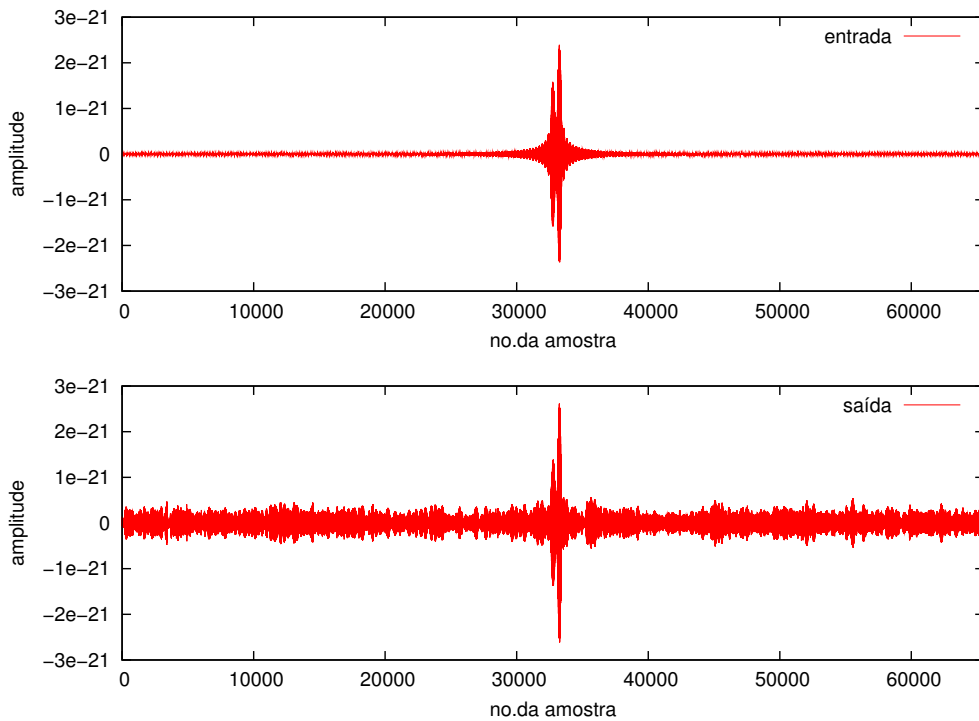


FIGURA 5.16 – Polarização $h_+(t)$ obtida nas saídas da solução – $SNR \approx 122$.

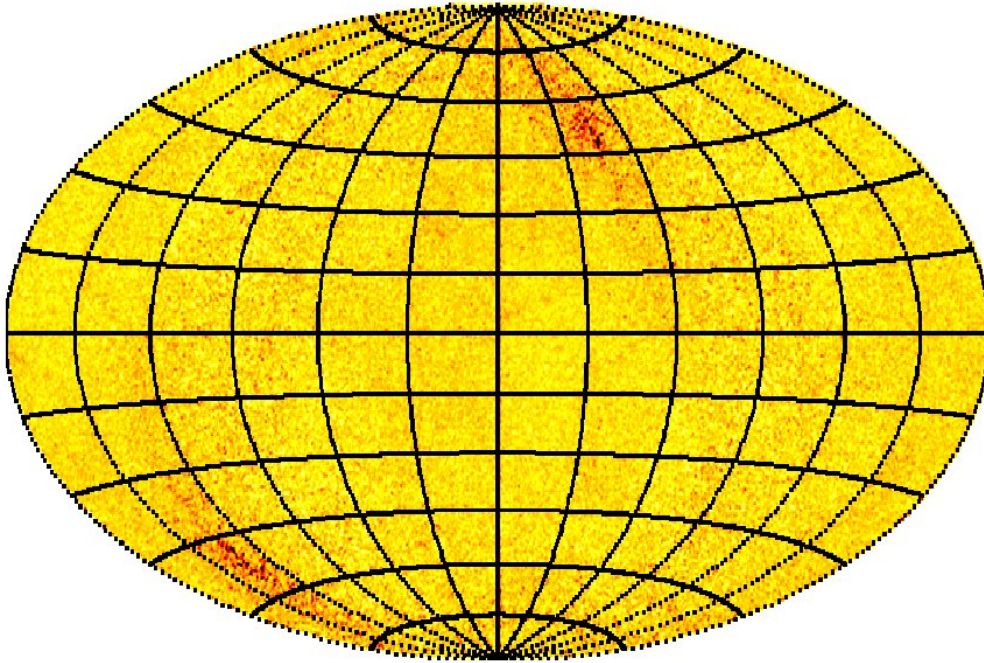


FIGURA 5.17 – Determinação da direção – $SNR \approx 60$ - após 10 simulações.

obtida, após 10 simulações. Pela figura podemos notar que a posição média determinada pela solução apresenta-se mais “espalhada”, que a correspondente apresentada na Figura 5.14. O erro na determinação da direção $\sigma_{\Omega}^2 \approx 81$ graus quadrados. A correlação entre os espectros é de $\approx 0,71$. Percebe-se pela Figura 5.18 como o espectro da fonte pouco afeta o nível do espectro obtido pela aplicação da solução inversa. Isto devido ao fato da energia do pulso ser parcialmente dissipada durante o tempo de integração.

A Figura 5.19 apresenta a leitura da polarização $h_+(t)$ de saída e de entrada. É possível ainda notar o pico referente ao sinal nos dados. A razão entre os picos e o desvio padrão é $\lesssim 10$.

5.7.3 Fonte Extra-Galáctica

Finalmente, supomos uma fonte extra-galáctica distante com $r \sim 100$ kpc. Este raio abrange toda a Galáxia, seu halo, as Nuvens de Magalhães e algumas galáxias satélites. Nesta distância, a $SNR \approx 30$. A Figura 5.20 mostra dos histogramas de posição de 10 simulações consecutivas. O erro na determinação da direção $\sigma_{\Omega}^2 \approx 400$ graus quadrados. Observa-se a mancha referente a indeterminação na posição devido a presença de ruído. A correlação entre os espectros é baixa ($\approx 0,50$). Como pode ser observado pela Figura 5.21, a contribuição da fonte ao espectro total é pequena, levando em conta o tempo de integração, e a energia proveniente da fonte é diluída no cálculo total do espectro.

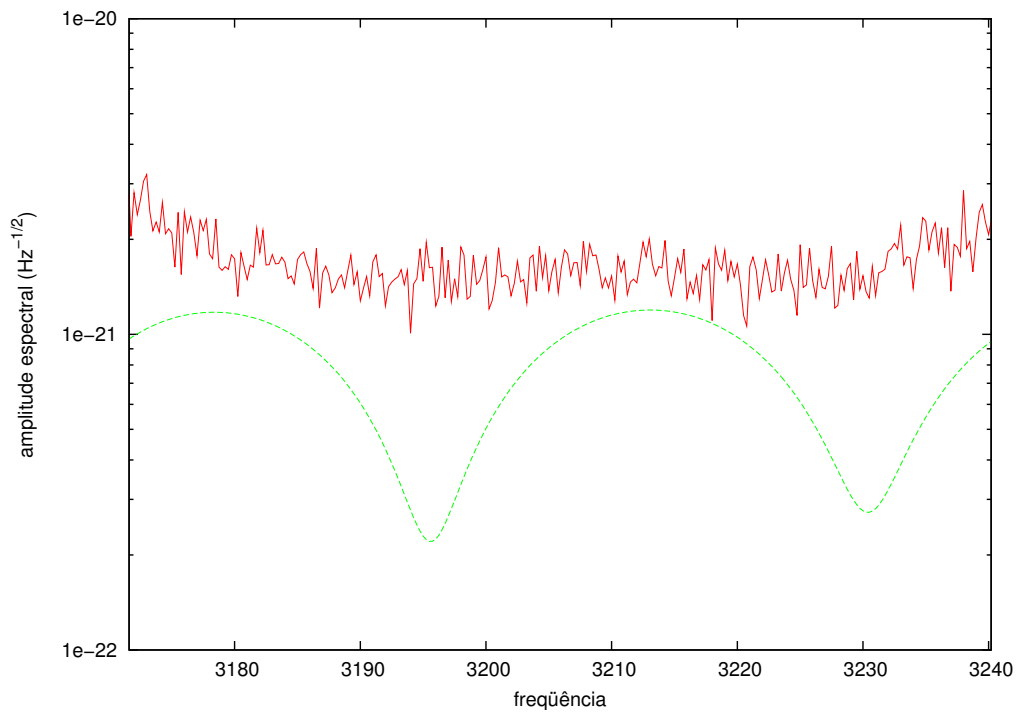


FIGURA 5.18 – Amplitude espectral das polarizações – $SNR \approx 60$.

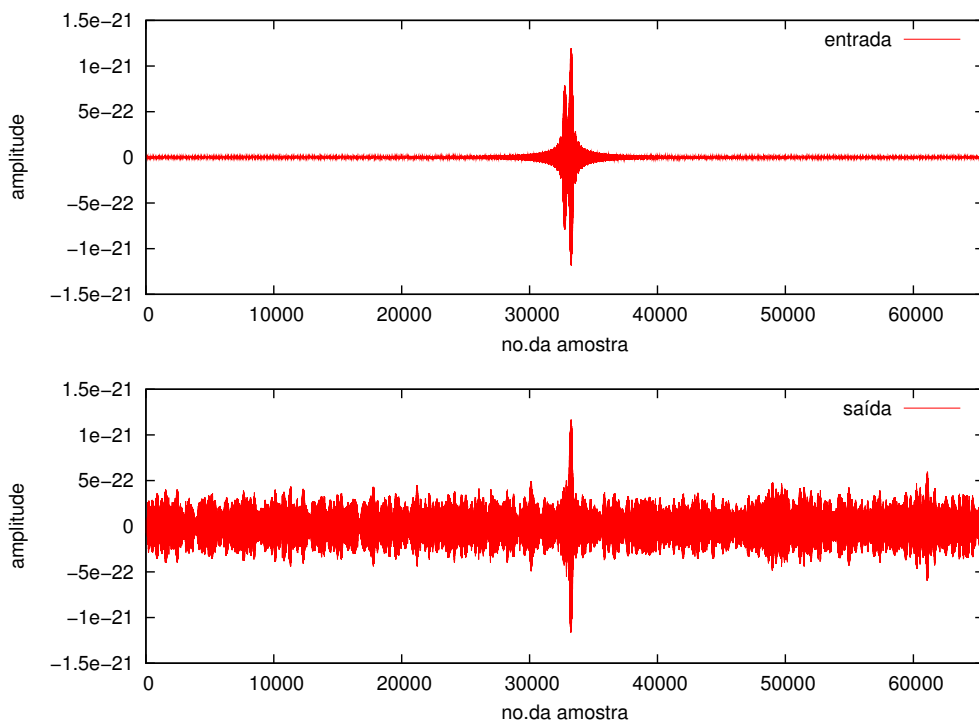


FIGURA 5.19 – Polarização $h_+(t)$ obtida nas saídas da solução – $SNR \approx 60$.

Isto pode ser comprovado pela Figura 5.22 que apresenta a leitura da polarização $h_+(t)$ de saída e de entrada. É evidente que para fonte com $SNRs$ dessa ordem encontram-se

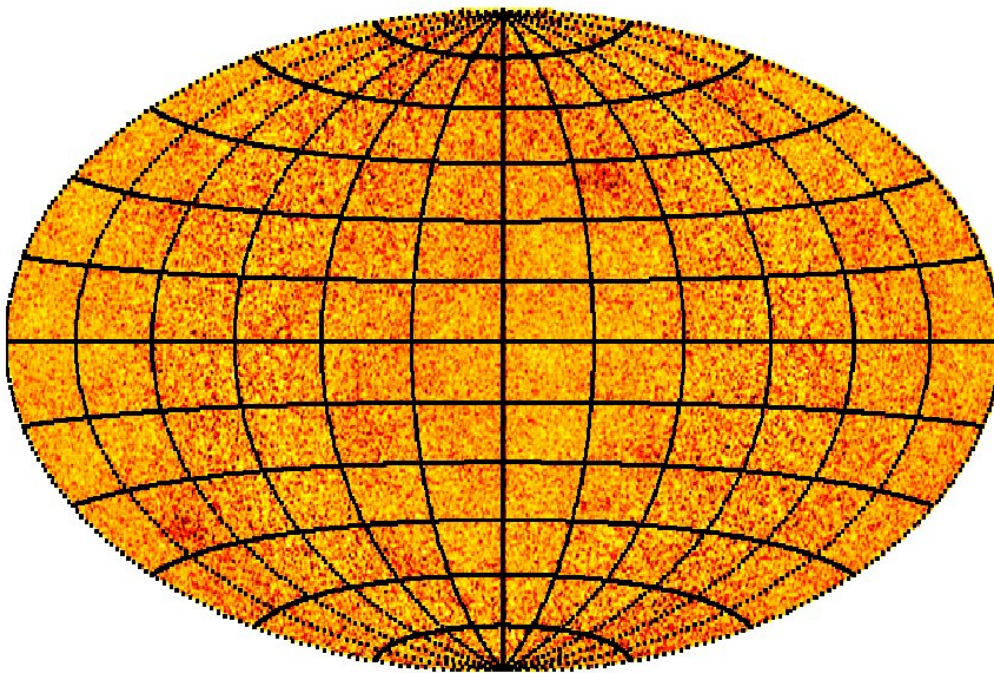


FIGURA 5.20 – Determinação da direção – $SNR \approx 30$ – após 10 simulações.

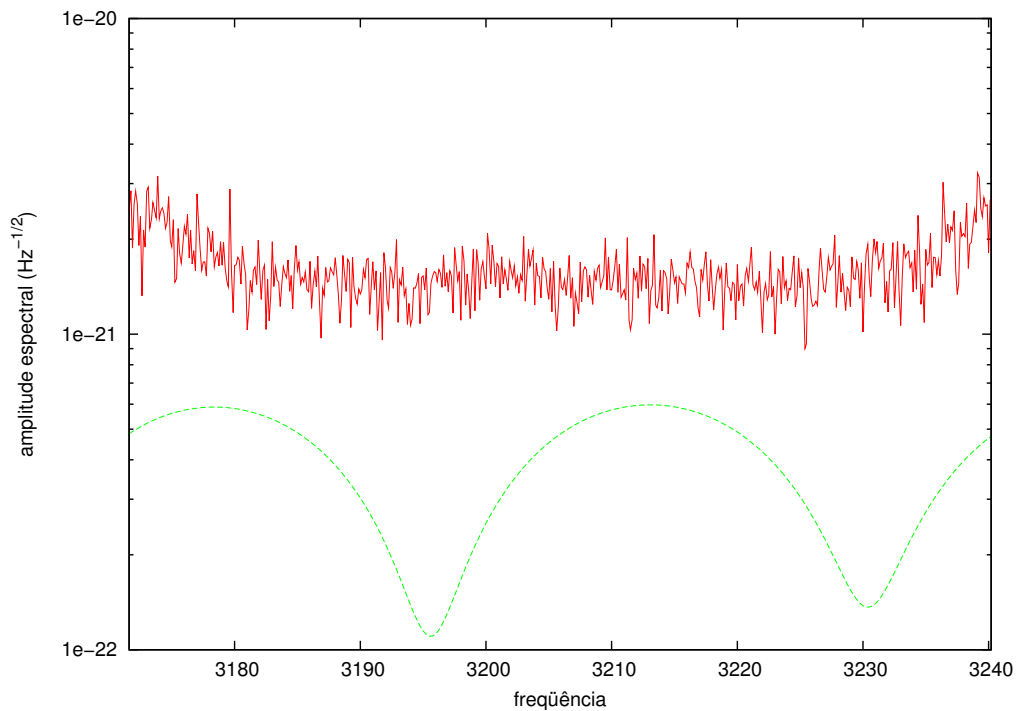


FIGURA 5.21 – Amplitude espectral das polarizações – $SNR \approx 30$.

equiparadas ao ruído. A razão entre o pico e o desvio padrão é $\lesssim 4$.

Pouco podemos afirmar sobre a fontes com relações sinal-ruído desta ordem. É possível

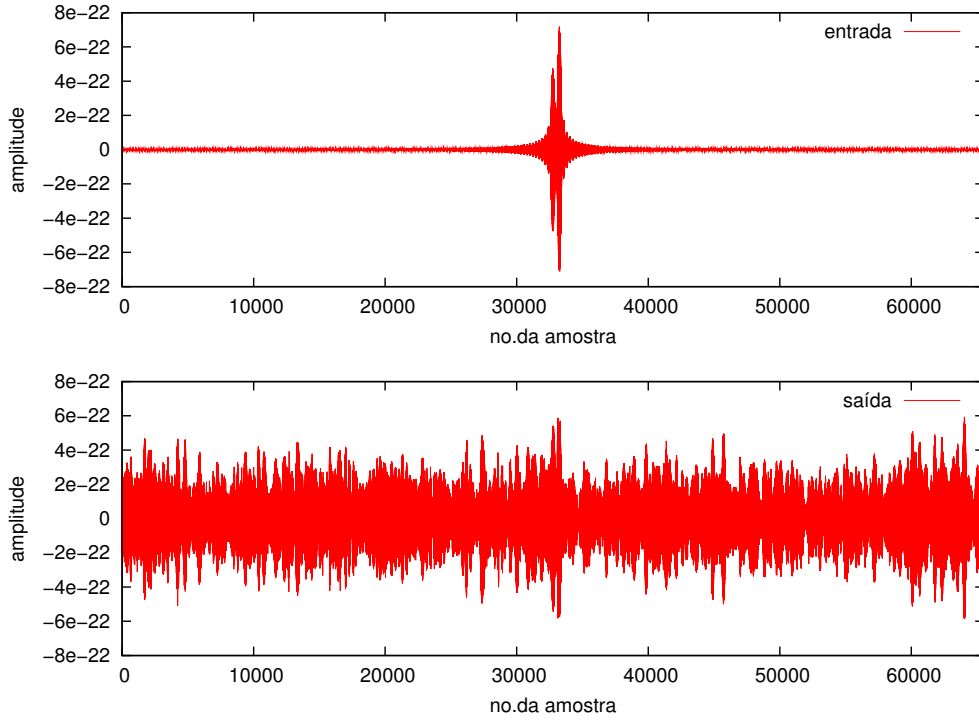


FIGURA 5.22 – Polarização $h_+(t)$ nas saídas da solução – $SNR \approx 36$.

melhorar a SNR diminuindo o tempo de integração, porém se utilizarmos a FFT para obter o domínio de frequências, isto pode acarretar na perda de resolução em frequência ($\Delta f_{amostragem} = f_{amostragem}/2N$, onde N é o número de pontos). A DFT pode ser uma alternativa a ser testada para solucionar este problema.

Contudo, podemos afirmar que para SNR baixas (< 10) existe a necessidade da aplicação de outros métodos de filtragem.

5.8 Filtro de Correlação (“Matched Filter”)

Se a forma de onda de uma fonte particular é conhecida, o método ótimo para sua procura nos dados é o filtro de correlação (“Matched Filter”) [73]. Seja $k(t, \theta)$ a representação de um gabarito de sinal gravitacional no detector cuja fonte possui um conjunto de parâmetros θ . Por exemplo, θ pode representar as componentes de massa, plano de órbita, etc, de um sistema binário coalescente. Sendo $s(t|\bar{\theta}) = h(t|\bar{\theta}) + n(t)$ a medida de um sinal gravitacional com parâmetros $\bar{\theta}$, então a correlação entre a medida e o gabarito é definida como

$$\langle s(\bar{\theta}) | k(\theta) \rangle = 2 \int_0^\infty \frac{\tilde{s}(f|\bar{\theta}) |\tilde{k}^*(f|\theta) + \tilde{s}^*(f|\bar{\theta}) \tilde{k}(f|\theta)}{S_n(f)} df, \quad (5.15)$$

em que $S_n(f)$ representa a densidade espectral do ruído na frequência f . O filtro 5.15 correlaciona as medidas com o gabarito, enfatizando as frequências onde o nível de ruído é baixo (numerador) com as frequências onde o nível de ruído é alto (denominador). A relação sinal-ruído do filtro de correlação é dada por

$$\rho(\theta|\bar{\theta}) = \frac{|\langle s(\bar{\theta}) | k(\theta) \rangle|}{\langle k(\theta) | k(\theta) \rangle^{1/2}}. \quad (5.16)$$

O melhor ajuste aos parâmetros θ é encontrado quando se maximiza $\rho(\theta|\bar{\theta})$. Quando ρ excede um determinado limiar ρ^* , um candidato a sinal é identificado. Devido a presença de ruído, o melhor ajuste não será necessariamente correspondente aos verdadeiros parâmetros θ .

A Figura 5.23 mostra a polarização $h_+(t)$ nas saídas da solução antes (centro) e após (abaixo) o uso do “matched filter”. O caso é o mesmo da subseção 5.7.3 portanto, o sinal encontra-se no mesmo nível do ruído. O gabarito é exatamente igual ao sinal introduzido no modelo (acima). Antes da correlação com os dados o gabarito foi filtrado pelo filtro passa-banda, para evitar o aparecimento de falsas componentes de baixa ou alta frequência. Pode ser observado que com a aplicação do “matched filter” o nível de ruído baixa e a fonte aparece exatamente em sua posição original. Portanto, tanto a informação da forma de onda quanto sua fase são recuperadas. E o sinal é recuperado com correlação 0,8. Para este caso, a relação sinal ruído pós-filtragem é $\rho \approx 100$.

Sabemos de antemão que o “matched filter” é extremamente sensível a forma de onda [74]. Se utilizamos um gabarito diferente daquele equivalente ao sinal introduzido no modelo, as saídas do filtro retornam apenas ruídos de correlação. A Figura 5.24 ilustra este caso. Geramos um gabarito utilizando outra forma de onda que não a de entrada. Esta forma de onda apresenta apenas considerações físicas diferentes em sua obtenção [75]. Podemos observar pela Figura 5.24 (embaixo) que pouco do sinal original é recuperado quando o gabarito não tem correlação com o sinal inserido. O valor de $\rho \approx 0,66$ para este caso.

Assim, podemos concluir que a aplicação do “matched filter” necessita de um conhecimento prévio da forma de onda exata que se deseja procurar nos dados. Para o caso do detector esférico, o número de parâmetros que envolvem a construção de gabaritos (direção, polarizações, etc), podem fazer do “matched filter” um método de análise computacionalmente dispendioso. E, portanto, outras alternativas devem ser buscadas.

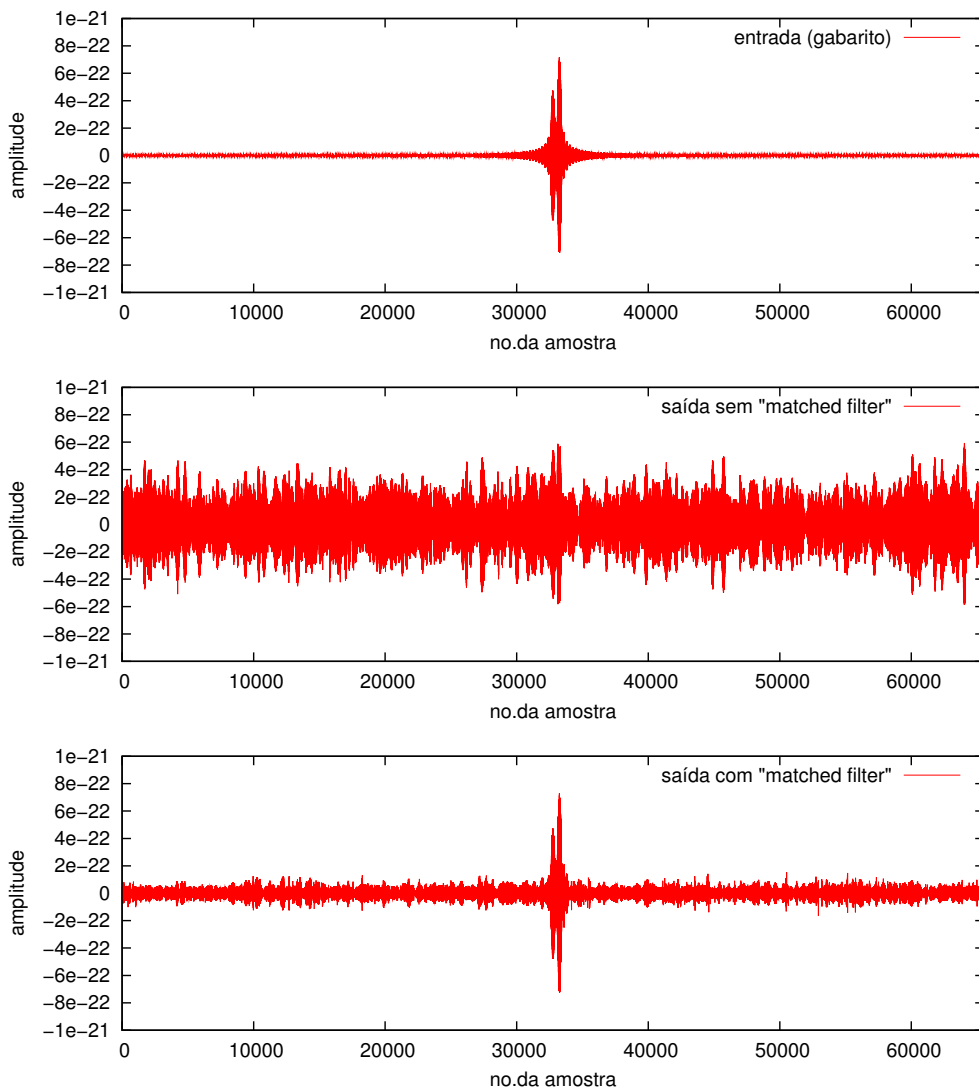


FIGURA 5.23 – Polarização $h_+(t)$ nas saídas da solução antes (centro) e após (embaixo) o uso do “Matched Filter”, com o gabarito exatamente igual ao sinal introduzido no modelo (acima).

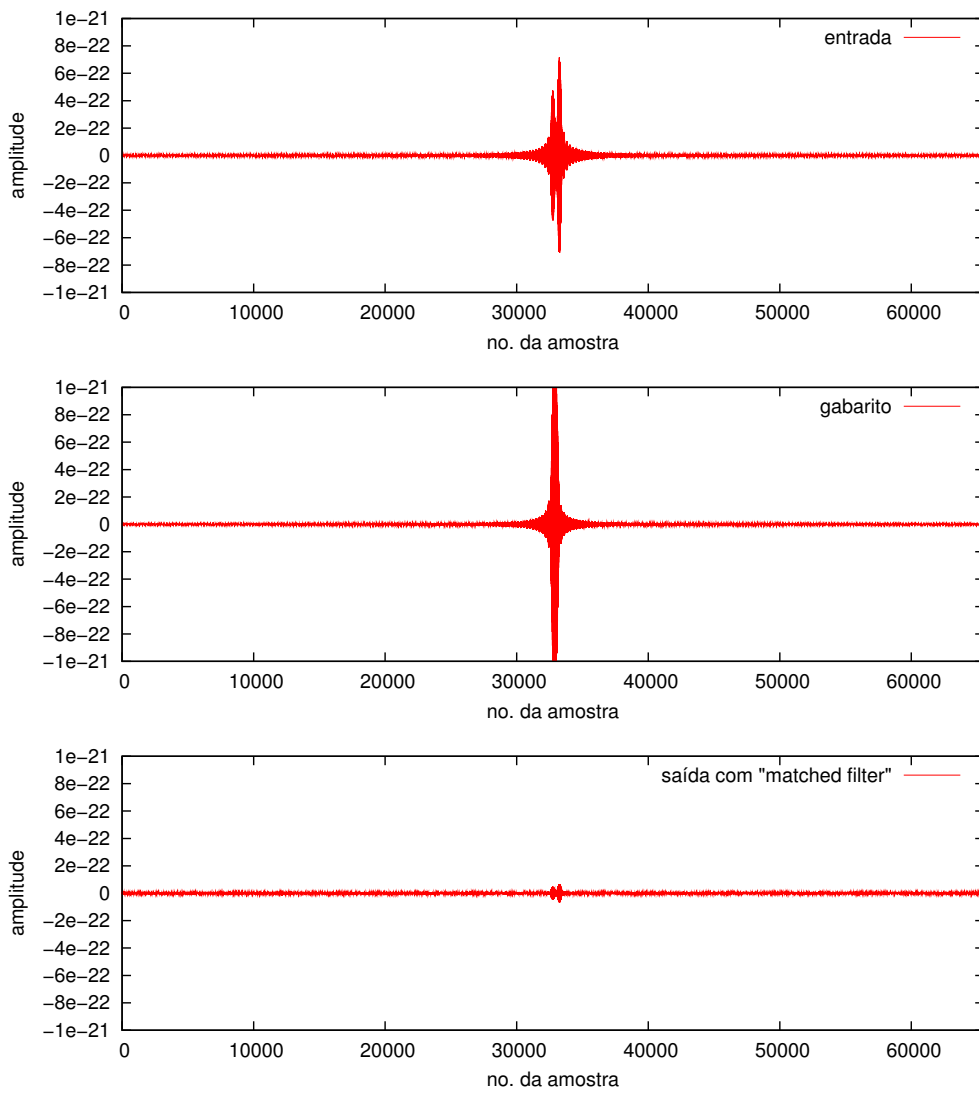


FIGURA 5.24 – Polarização $h_+(t)$ nas saídas da solução após (embaixo) o uso do “Matched Filter”. O sinal de entrada (acima), possui forma de onda diferente do gabarito (centro).

CAPÍTULO 6

RESULTADOS FINAIS, CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Os resultados mostram que a sensibilidade do detector será $\tilde{h} \sim 10^{-21} Hz^{-1/2}$ quando operando em temperaturas a ≈ 4 K.

Com esta sensibilidade, mostramos que o detector Mario Schenberg será capaz de detectar eventos galácticos (até as Nuvens de Magalhães) no primeiro objetivo ($T \sim 4$ K), somente através da utilização de um filtro passa-banda. Este desempenho é melhor em temperaturas mais baixas ($T \sim 15$ mK). As relações sinal-ruído para fontes a estas distâncias são suficientes para que o erro na determinação da direção seja de apenas alguns graus.

A metodologia apresentada pode ser aplicada a um programa de análise de dados em tempo real que poderá emitir alarmes sobre possíveis candidatos, e transmití-los a comunidade científica, para comprovações por outros meios (raios-X, raios- γ , etc).

O modelo que desenvolvemos é bastante flexível e adaptável aos parâmetros “reais” do detector portanto, podemos adaptá-lo às condições impostas pelo seu funcionamento. A função de transferência, ferramenta essencial para a solução do problema inverso, não depende do sinal ou do ruído, apenas de características mecânicas e eletrônicas. Podendo, assim, ser adaptada ao caso real.

Várias funções de transferência, referentes a conjuntos de parâmetros diferentes podem ser armazenadas em disco, a fim de serem utilizadas a posteriori, otimizando o processo de análise. Com elas podemos estimar as amplitudes de cada modo esférico, determinando o grau de excitação do mesmo. Uma vez obtidas as amplitudes esféricas, podemos testar em um conjunto de filtros qual apresenta o melhor desempenho.

Como mostramos no capítulo anterior, a aplicação do filtro Passa-Banda é necessária, uma vez que os níveis de ruído fora da banda são extremamente altos. Porém, para $SNR < 30$, o sinal encontra-se parcialmente imerso no ruído e a utilização de outros métodos de tratamento de dados se faz necessária.

Como primeira sugestão apresentamos o “matched filter”, que funciona a partir da utilização de “gabaritos de busca”. O problema da geração de gabaritos de busca são as formas de ondas. O “desconhecimento” que possuímos de propriedades hidrodinâmicas e relativísticas sobre muitas das fontes candidatas, pode tornar este trabalho árduo e

improdutivo.

Uma alternativa promissora é a utilização dos chamados **filtros adaptativos**. Eles podem trabalhar sobre o pressuposto de que, a maior parte do tempo, os dados fornecem apenas ruído (uma suposição bastante condicente com a realidade de um detector de ondas gravitacionais) e, então, procurar por variações no padrão de ruído. Estes filtros funcionam no plano- z , no espaço complexo das frequências e são uma poderosa ferramenta para a análise de dados. Sugerimos que, no futuro, sejam realizadas experiências envolvendo a aplicação destes filtros na análise dos dados do detector.

Dentro desta banda de frequências, encontram-se algumas fontes interessantes de radiação gravitacional, e que são candidatas a serem observadas pelo Schenberg [47, 48, 76]. Dentre elas podemos citar

- Colapsos nucleares em supernovas axi-assimétricas;
- Instabilidades hidrodinâmicas em estrelas de neutrons;
- Excitação dos modos f de estrelas de neutrons, decorrente da matéria acretaada que colide com a superfície da estrela, “estrelamotos”, etc;
- Excitação dos primeiros modos quadrupolares de buracos negros com $M \approx 3,8 - 9,0 M_{\odot}$ [77];
- Coalescência de objetos compactos, como estrelas de nêutrons e buracos negros, cujo objeto final possua massa $M \approx 3,8 - 9,0 M_{\odot}$.

Além disso, algumas especulações são feitas sobre objetos mais exóticos como

- Rotação de estrelas bosônicas ou de matéria estranha em $f_{\text{rot}} \approx 1600$ Hz;
- Espiralração de mini-buracos negros em sistemas binários.

A utilização do método sugerido neste trabalho aliado a filtragem e tratamento adequado dos dados, pode levar a obtenção de informações sem precedentes sobre o Universo em que vivemos.

No entanto, estes resultados são derivados de simulações, que se propõem apenas a prever o comportamento do instrumento. É esperado que um resultado similar possa ser obtido diretamente do instrumento, a partir de uma precisa aquisição de dados. Portanto, sugerimos, também, como trabalho futuro o desenvolvimento de um sistema de aquisição de dados eficiente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Amaldi, E. The Search for Gravitational Wave. In: Shapiro, M. M.; Wefel, J. P. (ed.). **Cosmic Gamma-Rays and Related Astrophysics**. Dordrecht: D. Reidel, 1989. p. 563–607.
- [2] Einstein, A. The Principal Ideas of the Theory of Relativity. In: Janssen, M.; Schulmann, R.; Illy, J.; Lehner, C.; Buchwald, D. K. (ed.). **The Collected Papers of Albert Einstein. The Berlin Years: Writings, 1918-1921**. Princeton: University Press, 2002. v. 7, p. 3–8.
- [3] Einstein, A. On Gravitational Waves. In: Janssen, M.; Schulmann, R.; Illy, J.; Lehner, C.; Buchwald, D. K. (ed.). **The Collected Papers of Albert Einstein. The Berlin Years: Writings, 1918-1921**. Princeton: University Press, 2002. v. 7, p. 11–29.
- [4] Weyl, H. **Space-Time-Matter**. London: Methuen, 1922.
- [5] Eddington, A. S. **The Mathematical Theory of Relativity**. Cambridge: University Press, 1924.
- [6] Kenyon, I. R. **General Relativity**. Oxford: University Press, 1990.
- [7] Bianchi, M.; Coccia, E.; Colacino, C. N.; Fafone, V.; Fucito, F. Testing theories of gravity with a spherical gravitational wave detector. **Classical and Quantum Gravity**, v. 13, n. 11, p. 2865–2873, 1996.
- [8] Misner, C.; Thorne, K. S.; Wheeler, J. A. **Gravitation**. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.
- [9] Arfken, G. B.; Weber, H. J. **Mathematical methods for physicists**. Burlington: HAP, 2000.
- [10] Ju, L.; Blair, D. G.; Zhao, C. Detection of Gravitational Waves. **Reports on Progress of Physics**, v. 63, p. 1317–1427, 2000.
- [11] Blair, D. **The Detection of Gravitational Waves**. Cambridge: University Press, 1991.
- [12] Thorne, K. S. Gravitational Radiation. In: Hawking, S.; Israel, W. (ed.). **300 Years of Gravitation**. Cambridge: University Press, 1997. p. 330–458.

- [13] Saijo, M.; Shibata, M.; Baumgarte, T. W.; Shapiro, S. L. Dynamical Bar Instability in Rotating Stars: effect of General Relativity. **Astrophysical Journal**, v. 548, n. 2, p. 908–919, Feb. 2001.
- [14] Kobayashi, S.; Meszaros, P. Gravitational Radiation from Gamma-Ray Burst Progenitors. **Astrophysical Journal**, v. 589, p. 861, 2003.
- [15] Richard, J. A.; Wheeler, J. Relativistic Cosmology and Space Platforms. In: Conference on Space Physics, 1971. **Proceedings...** Paris: ESRO, 1971. p. 145–174.
- [16] Lai, D.; Shapiro, S. L. Hydrodynamics of coalescing binary neutron star: ellipsoidal treatment. **Astrophysical Journal**, v. 443, n. 2, p. 705–716, 1995.
- [17] Houser, J. L.; Centrella, J. M.; Smith, S. C. Gravitational Radiation from Non axisymmetric Instability in a Rotating Star. **Physical Review Letters**, v. 72, n. 9, p. 1314–1317, Feb. 1994.
- [18] Houser, J. L.; Centrella, J. M.; Smith, S. C. The Effect of Rotation on the Gravitational Radiation and Dynamical Stability of Stiff Stellar Cores. **Monthly Notice of Royal Astronomy Society**, v. 299, p. 1069–1086, 1998.
- [19] Taylor, J. H. Binary pulsars and relativistic gravity. **Review of Modern Physics**, v. 66, n. 3, p. 711–719, 1994.
- [20] Weisberg, J. M.; Taylor, J. H. The Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis. In: Rasio, F. A.; Stais, I. H. (ed.). Binary Radio Pulsars: Aspen Conference, Aspen, July, 2004. **Proceedings...** San Francisco: ASP Conference Series, 2005. (in press). Disponível em: <http://xxx.arxiv.org/abs/astro-ph/0407149>.
- [21] Tutukov, A. V.; Yungelson, L. R. The merger rate of neutron star and black hole binaries. **Monthly Notice of Royal Astronomy Society**, v. 260, n. 3, p. 675–678, 1993.
- [22] Yamaoka, H.; Shigeyama, T.; Shemi, A. Formation of double neutron star system and asymmetric supernova explosions. **Astrophysical Journal**, v. 267, n. 2, p. 433–438, 1993.
- [23] Kormendy, J. Hubble Space Telescope spectroscopic evidence for a $2 \times 10^9 M_{\odot}$ black hole in NGC 3115. **Astrophysical Journal**, v. 459, p. L57–L60, Mar. 1996.
- [24] Maucelli, E. **Data analysis of the Allegro gravitational wave detector**. 128 p. Thesis (Doctor in Physics) — Louisiana State University, 1997.

- [25] Barker, K.; Chanmugam, G.; Johnson, W.; Tohline, J. Millisecond pulsar as candidates for the detectability of continuous gravitational waves. In: Backers, D. C.; Fruchter, A. E.; Tavani, M. M. (ed.). **Millisecond pulsars: a decade of surprise**. San Francisco: ASP Conf. Series, 1994. p. 563–607.
- [26] Yamaoka, H.; Shigeyama, T.; Shemi, A. Waiting for LISA: binaries with orbital periods less than $\sim 10^4$ s. **Classical and Quantum Gravity**, v. 14, n. 6, p. 1417–1423, June 1997.
- [27] Miranda, O. D.; Arajo, J. C. N.; Aguiar, O. D. Is there a signature in gravitational waves from structure formation of the Universe? In: Edoardo Amaldi Conference 3, Pasadena, CA 12-16 July, 1999. **Proceedings...** New York: AIP Press, 2000. p. 94–97.
- [28] Vachaspati, T.; Vilenkin, A. Gravitational radiation from cosmic strings. **Physical Review D**, v. 31, n. 12, p. 3052–3058, June 1985.
- [29] Weber, J. A. Detection and Generation of Gravitational Waves. **Physical Review**, v. 177, p. 306, Jan. 1960.
- [30] Gertsenshtein, M. E.; Pustovoit, R. L. On detection of low frequency gravitational waves. **Soviet Physics - JETP**, v. 16, p. 433–435, 1962.
- [31] Weber, J. A. Evidence for discovery of gravitational radiation. **Physical Review Letters**, v. 22, n. 24, p. 1320–1324, Jan. 1969.
- [32] Weber, J. A. New gravitational radiation experiments. **Physical Review Letters**, v. 31, n. 2, p. 779–783, Sept. 1973.
- [33] Thorne, K. S.; Caves, C. M.; Sandberg, V. D.; Zimmermann, M. The quantum limit for gravitational waves detector and methods of circumventing it. In: Sources of gravitational radiation: Battelle Seattle Workshop, Seattle, 1979. **Proceedings...** Cambridge: University Press, 1979. p. 49–68.
- [34] Aguiar, O. D. **Astrofísica de ondas gravitacionais**. Notas de aula da disciplina AST-300 do curso de Pós-Graduação em Astrofísica do INPE. 1992.
- [35] Paik, H. J.; Wagoner, R. V. Calculation of the absorption cross section for a cylindrical gravitational wave antenna. **Physical Review D**, v. 13, n. 10, p. 2694–2699, May 1976.
- [36] Coccia, E.; Lobo, J. A.; Ortega, J. A. Propose gravitational wave observatory based on solid elastic sphere. **Physical Review D**, v. 52, n. 6, p. 3735–3738, Sept. 1995.

- [37] Lobo, J. A. What can we learn about gravitational wave physics with an elastic spherical antenna. **Physical Review D**, v. 52, n. 2, p. 591–604, July 1995.
- [38] Lobo, J. A. The multiple-resonator problem in a spherical GW antenna: its general solution and new interesting layouts. **Europhysics Letters**, v. 35, n. 4, p. 253–258, Aug. 1996.
- [39] Lobo, J. A. Multiple mode gravitational wave detection with a spherical antenna. **Monthly Notice of Royal Astronomy Society**, v. 316, p. 173–194, Mar. 2000.
- [40] Johnson, W.; Merkowitz, S. M. Truncated icosahedral gravitational wave antenna. **Physical Review Letters**, v. 70, n. 16, p. 2367–2370, 1993.
- [41] Merkowitz, S. M.; Johnson, W. W. First tests of a truncated icosahedral gravitational wave antenna. **Physical Review D**, v. 53, n. 10, p. 5377–5381, 1996.
- [42] Merkowitz, S. M.; Johnson, W. W. Techniques for detecting gravitational waves with a spherical antenna. **Physical Review D**, v. 56, n. 12, p. 7513–7528, 1997.
- [43] Merkowitz, S. M. Solution to the inverse problem for a noisy spherical gravitational wave antenna. **Physical Review D**, v. 58, n. 6, p. 062002, 1998.
- [44] Harry, G. M.; Stevenson, T. R.; Paik, H. J. Detectability of gravitational wave events by spherical resonant-mass antennas. **Physical Review D**, v. 54, n. 4, p. 2409–2420, 1996.
- [45] Stevenson, T. R. Limits on the sensitivity of spherical gravitational wave detectors and on the accuracy of reconstructed signals. **Physical Review D**, v. 56, n. 2, p. 564–587, July 1997.
- [46] Wagoner, R. V.; Paik, H. J. Multi-mode detection of gravitational waves by a sphere. In: *Symposium on Experimental Gravitation, Pavia, Italia, 1976. Proceedings....* London: World Scientific, 1977. p. 257–266.
- [47] Aguiar, O. D.; Andrade, L. A.; Camargo Filho, L.; Costa, C. A.; de Araujo, J. C. N.; de Rey Neto, E. C.; de Souza, S. T.; Fauth, A. C.; Frajuca, C.; Frossati, G.; Furtado, S. R.; Furtado, V. G. S.; Magalhães, N. S.; Marinho Jr, R. M.; Matos, E. S.; Meliani, M. T.; Melo, J. L.; Miranda, O. D.; Oliveira Jr, N. F.; Ribeiro, K. L.; Salles, K. B. M.; Stelatti, C.; Velloso Jr, W. F. The status of the Brazilian spherical detector. **Classical and Quantum Gravity**, v. 19, n. 7, p. 1949–1953, Apr. 2002.
- [48] Aguiar, O. D.; Andrade, L. A.; Barroso, J. J.; Camargo Filho, L.; Carneiro, L. A.; Castro, C. S.; Castro, P. J.; Costa, C. A.; Costa, K. M. F.; de Araujo, J. C. N.; de

- Lucena, A. U.; de Paula, W.; de Rey Neto, E. C.; de Souza, S. T.; Fauth, A. C.; Frajuca, C.; Frossati, G.; Furtado, S. R.; Lima, L. C.; Magalhães, N. S.; Marinho Jr, R. M.; Matos, E. S.; Melo, J. L.; Miranda, O. D.; Oliveira Jr, N. F.; Paleo, B. W.; Remy, M.; Ribeiro, K. L.; Stellati, C.; Jr, W. F. V.; Weber, J. The Brazilian spherical detector: progress and plans. **Classical and Quantum Gravity**, v. 21, n. 5, p. 457–463, Mar. 2004.
- [49] Velloso Jr., W. F.; ; Melo, J. L.; Aguiar, O. D. Design of and Isolation System to a Medium-Size Spherical Resonant Gravitational Wave Detector. In: Edoardo Amaldi Conference 3, Pasadena, CA 12-16 July, 1999. **Proceedings....** New York: AIP Press, 2000. p. 441.
- [50] Waard, L. G. A. de; Frossati, G. MiniGRAIL progress report 2001 - the first cool-down. **Classical and Quantum Gravity**, v. 19, n. 7, p. 1935–1941, 2002.
- [51] Tobar, M. E.; Ivanov, E. N.; Blair, D. G. **Parametric Transducer for the Next Generation of Cryogenically and Ultra-Cryogenically Cooled Resonant-Mass Gravitational Waves Detectors**. Relatório Técnico. Dep. of Physics: University of Western Australia, 2000.
- [52] Tobar, M. E.; Ivanov, E. N.; Blair, D. G. Parametric Transducers for the Advanced Cryogenic Resonant-Mass Gravitational Waves Detectors. **General Relativity and Gravity**, v. 32, n. 9, p. 1799–1821, 2000.
- [53] Andrade, L. A.; Costa, C. A.; Aguiar, O. D.; Frajuca, C.; Mosso, M. M.; Podcameni, A.; da Silva, H. J. P. P.; Magalhães, N. S. Ultra-low phase noise 10 GHz oscillator to pump the parametric transducers of the Mario Schenberg gravitational wave detector. **Classical and Quantum Gravity**, v. 21, n. 5, p. 1215–1219, Mar. 2004.
- [54] Forward, R. L. Multidirectional, multipolarization antennas for scalar and tensor gravitational radiation. **General Relativity and Gravity**, v. 2, n. 2, p. 149–159, 1971.
- [55] Ashby, N.; Dreitlein, J. Gravitational wave reception by a sphere. **Physical Review D**, v. 12, n. 2, p. 336–349, 1975.
- [56] Heinbockel, J. H. **Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics**. Dominion University, 1996. Disponível em: <http://www.math.odu.edu/~jhh/counter2.html>. Acesso em: 28 nov. 2001.
- [57] Scott, R. B. **Cryogenic Engineering**. Clinton: Van Nostrand, 1963.

- [58] Merkowitz, S. M. **Truncated Icosahedral Gravitational Wave Antenna**. 131 p. Thesis (Doctor in Astrophysics) — Louisiana State University, 1995.
- [59] Saulson, R. Thermal noise in mechanical experiments. **Physical Review D**, v. 42, n. 8, p. 2437–2445, Oct. 1990.
- [60] Cuthbertson, B. D.; Tobar, M. E.; Ivanov, E. N.; Blair, D. G. Sensitivity and Optimization of a High-Q Sapphire Dielectric Motion-Sensing Transducer. **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**, v. 45, n. 5, p. 1303–1313, Sept. 1998.
- [61] Dhurandhar, S. V.; Tinto, M. Astronomical observations with a network of detectors of gravitational waves. I - Mathematical framework and solution of the five detector problem. **Monthly Notice of Royal Astronomy Society**, v. 234, p. 663–676, 1988.
- [62] Gursel, Y.; Tinto, M. Near optimal solution to the inverse problem for gravitational-wave bursts. **Physical Review D**, v. 40, n. 12, p. 3884–3938, Dec. 1989.
- [63] Magalhães, N. S.; Johnson, W. W.; Frajuca, C.; Aguiar, O. D. Determination of astrophysical parameters from the spherical gravitational wave detector data. **Monthly Notice of Royal Astronomy Society**, v. 274, p. 670–678, 1995.
- [64] Magalhães, N. S.; Aguiar, O. D.; Johnson, W. W.; Frajuca, C. Possible resonator configurations for the spherical gravitational wave antenna. **General Relativity and Gravity**, v. 29, n. 12, p. 1511–1525, 1997.
- [65] Magalhães, N. S.; Johnson, W. W.; Frajuca, C.; Aguiar, O. D. A geometric method for location of gravitational wave sources. **Astrophysical Journal**, v. 475, n. 2, p. 462–468, 1997.
- [66] Duez, M. D.; Baumgarte, T. W.; Shapiro, S. L. Computing the complete gravitational wavetrain from relativistic binary inspiral. **Physical Review D**, v. 63, n. 8, p. 084030, Mar. 2001.
- [67] Duez, M. D.; Baumgarte, T. W.; Shapiro, S. L.; Shibata, M.; Uryu, K. Comparing the inspiral of irrotational and corotational binary neutron stars. **Physical Review D**, v. 65, n. 2, p. 024016, Dec. 2001.
- [68] Shibata, M.; Uryu, K. Simulation of merging binary neutron stars in full general relativity: $\Gamma = 2$ case. **Physical Review D**, v. 61, n. 6, p. 064001, Mar. 2000.

- [69] Shibata, M.; Taniguchi, K.; Uryu, K. Merger of binary neutron stars with realistic equations of state in full general relativity. **Physical Review D**, v. 71, n. 8, p. 084021, Apr. 2005.
- [70] Calabretta, M. R.; Greisen, E. W. Representations of Celestial Coordinates in FITS. **Astronomy and Astrophysics**, v. 395, n. 3, p. 1077–1122, Dec. 2002.
- [71] Aufmuth, P.; Danzmann, K. Gravitational wave detectors. **New Journal of Physics**, v. 7, n. 202, p. 1–14, 2005.
- [72] Aguiar, O. D.; Magalhães, N. S. The Imminent Aurora of Gravitational Wave Astronomy. In: Braga, J.; Barbuy, B.; Leister, N. V. (ed.). XIXth Annual Meeting of the Sociedade Astronômica Brasileira, Caxambu, 1-4 Agosto, 1993. **Proceedings....** São Paulo: IAG/USP, 1994. p. 199–205.
- [73] Wainstein, L. A.; Zubakov, V. D. **Extraction of Signals from Noise**. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1962. Traduzido do russo para o inglês por R. A. Silverman.
- [74] Helstrom, C. W. **Statistical Theory of Signal Detection**. Oxford: Pergamon Press, 1960.
- [75] Ruffert, M.; Janka, H.-T. Coalescing neutron stars - A step towards physical models. III. Improved numerics and different neutron star masses and spins. **Astronomy and Astrophysics**, v. 380, n. 2, p. 544–577, Dec. 2001.
- [76] Aguiar, O. D.; Andrade, L. A.; Barroso, J. J.; Bortoli, F.; Carneiro, L. A.; Castro, P. J.; Costa, C. A.; Costa, K. M. F.; de Araujo, J. C. N.; de Lucena, A. U.; de Paula, W.; de Rey Neto, E. C.; de Souza, S. T.; Fauth, A. C.; Frajuca, C.; Frossati, G.; Furtado, S. R.; Magalhães, N. S.; Marinho Jr, R. M.; Matos, E. S.; Melo, J. L.; Miranda, O. D.; Oliveira Jr, N. F.; Paleo, B. W.; Remy, M.; Ribeiro, K. L.; Stellati, C.; Velloso Jr, W. F.; Weber, J. The Brazilian gravitational wave detector Mario Schenberg: progress and plans. **Classical and Quantum Gravity**, v. 22, n. 10, p. S209–S214, May 2005.
- [77] Costa, C. A.; Aguiar, O. D.; Magalhães, N. S. Response of the Brazilian Gravitational Wave Detector to Signals from a Black Hole Ringdown. **Classical and Quantum Gravity**, v. 21, n. 5, p. 827–832, Mar. 2004.
- [78] Ceseracciu, A.; Vaedovato, G.; Ortolan, A. A modular object oriented data acquisition system for the gravitational wave AURIGA experiment. In: Computing in High Energy and Nuclear Physics (CHEP03), La Jolla, March 24-28,

2003. **Proceedings...** La Jolla: University of California, 2005. Disponível em:
<http://www.auriga.lnl.infn.it/auriga/publications/publications.html>.

- [79] Astone, P. Methods and results of the IGEC search for burst gravitational waves in the years 1997-2000. **Physical Review D**, v. 68, p. 022001, 2003.

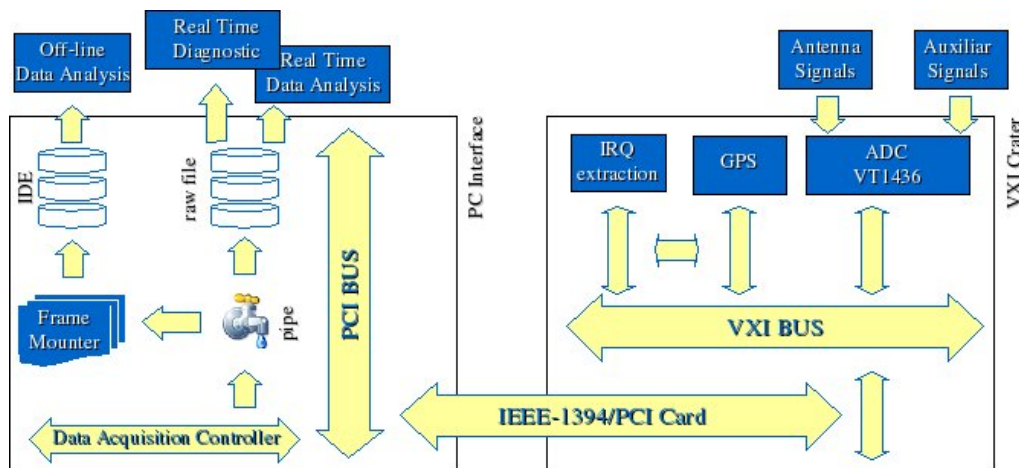


FIGURA A.1 – Esboço de um sistema de aquisição de dados para o detector Mario Schenberg, a partir do equipamento já adquirido.

APÊNDICE A

PROPOSTA PARA O SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE DADOS – HARDWARE/SOFTWARE

O desenvolvimento de um sistema de aquisição de dados (SAD) eficiente e confiável é um pré-requisito para a credibilidade de um instrumento de precisão como um detector de ondas gravitacionais. Um SAD eficaz deve ser capaz de adquirir e arquivar medidas, controlar, monitorar e diagnosticar o detector e seu ambiente.

O equipamento que será utilizado para a aquisição de dados do detector Mario Schenberg já foi comprado (importado) e deverá chegar ao Brasil até o próximo mês de Junho. O equipamento possui tecnologia VXI (VXI é um padrão industrial para o barramento de instrumentação eletrônica) e será alojado em uma estante “CT-400 Modular 13-slot C-size VXIbus” (<http://www.vxitech.com>).

A saída de cada transdutor será amostrada a taxa de 16384 Hz por um conversor analógico digital (ADC) VT1436 com 16 canais independentes (paralelos), precisão de 24 bits e acoplado diretamente à estante VXI¹. Os dados adicionais como os provenientes dos acelerômetros, sismógrafos, detectores de raios cósmicos, etc, poderão ser amostrados com taxas diferenciadas e complementarão as informações sobre o estado do instrumento. A Figura A.1 mostra o diagrama esquemático de uma proposta para o sistema de aquisição de dados.

¹O equipamento tem capacidade de amostrar a taxa de 105.2 kHz, portanto estaremos operando bem abaixo de sua capacidade máxima.

O VT1436 armazenará os dados amostrados em sua memória FIFO de 32 Mb em blocos de tamanho configurável pelo aplicativo de controle. Quando os blocos estão completos, um sinal de interrupção (IRQ) é gerado no barramento VXI. O sinal IRQ informa para o processo na plataforma de aquisição que o bloco está pronto e pode ser lido. O mesmo sinal IRQ é enviado ao GPS (modelo Symmetricom Bc357VXI-C) que retorna o instante de tempo para o início da geração do bloco seguinte.

A.1 Sincronização

O GPS será acoplado diretamente no barramento VXI e servirá como relógio interno, ou seja, deverá sincronizar o sistema. O GPS possui um oscilador interno de 10 MHz e um relógio com precisão de 100 ns. Porém, o mecanismo de geração do IRQ pode apresentar um atraso intrínseco, o qual deverá ser estimado para manter a precisão e sincronização no instante de tempo ao qual corresponde cada bloco. Todos os processos são independentes e deverão ser controlados pelo programa de aquisição de dados instalado em um micro-computador (barramento PCI) [78].

A.2 Interface VXI-PCI

A conexão VXI-PCI será feita por uma placa “IEEE-1394 Firewire to VXIbus Interface” acoplada diretamente ao barramento VXI. Os blocos já prontos são lidos no barramento PCI. A capacidade de transmissão de dados desta interface será de ~ 7 Mb/s. Levando em conta a taxa de amostragem (16384 amostras/s), a precisão (3 bytes) e o número de canais a serem amostrados (> 9), estimamos que o equipamento ocupará menos da metade de sua capacidade. O aplicativo de controle de aquisição de dados controlará esta interface entre os sistemas VXI e PCI. Os dados coletados pela interface passarão por um “pipe” (arquivo de fluxo de dados temporário) que será acessado pelos outros processos.

A.3 Armazenamento de Dados

Um destes processos consiste no armazenamento dos dados em disco para análise e tratamento posterior. Este processo deve montar um arquivo no qual será inserido cabeçalho, identificadores, etc, de acordo com um formato pré-estabelecido. Este formato padrão deve conter, além dos dados, informações de como o arquivo deve ser lido (cabeçalho), informações sobre o estado do detector, informações provenientes dos canais auxiliares, etc. Assim, cada arquivo deve ser auto-inteligível pelo aplicativo de análise posterior. Toda informação necessária para uma análise de dados a posteriori deve estar contida no arquivo gerado por este processo. As informações poderão, por exemplo, ser expor-

tadas para o formato IGWD ², caso necessário. Apesar deste protocolo de transferência não ter sido originalmente desenvolvido para armazenamento e processamento, ele tem demonstrado flexibilidade suficiente, simplificando desta forma o desenvolvimento de subsistemas de entrada e saída [79]. Seguindo este protocolo de transferência de informação os dados podem ser “cruzados” com os demais detectores. Isto faz deste formato uma opção interessante a ser implementada.

A.4 Diagnóstico

Outro processo importante que poderá acessar o “pipe” é um aplicativo de diagnóstico do detector. Este aplicativo pode ser bastante útil para o monitoramento em tempo real. Isto permitirá a constatação em tempo real de como o ajuste em determinados parâmetros afeta o desempenho do instrumento, por exemplo, possibilitando o ajuste fino do detector. Como exemplo, de um aplicativo capaz de realizar este monitoramento em tempo real, podemos citar o Baudline (<http://www.baudline.com>).

A.5 Análise em Tempo Real

Ainda pode ser utilizado um aplicativo capaz de: analisar em tempo real os dados; estimar a sensibilidade do detector; e, relacionar os dados fornecidos pelos canais auxiliares com os dados da antena, a fim de interagir com o possíveis vetos à análise de dados. Este programa deverá ser, também, capaz de, em tempo real, monitorar eventos candidatos e registrar sua localização temporal nos dados para uma procura mais minuciosa a posteriori.

²O IGWD (International Gravitational Wave Data) é um protocolo de intercâmbio de informação assinado pela colaboração internacional (GWIC, Gravitational Wave International Committee) que envolve os inúmeros detectores de ondas gravitacionais existentes <http://gwic.gravity.psu.edu>.