



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

INPE-14030-TDI/1063

**MODELO MATEMÁTICO PARA ANÁLISE DOS EFEITOS DA  
TURBULÊNCIA EM ESCOAMENTOS BIFÁSICOS  
FLUIDO-PARTÍCULA**

Helcio Francisco Villa Nova

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelo Dr. Jeronimo dos Santos Travelho, aprovada em 22 de fevereiro de 2006.

INPE  
São José dos Campos  
2005

519.876.5 : 532

VILLA NOVA, H. F.

Modelo matemático para análise dos efeitos da  
turbulência em escoamentos bifásicos fluido-partícula  
/ H. F. Villa Nova. – São José dos Campos: INPE, 2006.

191p. ; (INPE.14030-TDI/1063).

1.Escoamento bifásico. 2.Interação partículas-  
turbulência. 3.Modulação da turbulência. 4.Interação  
vórtice-esfera. 5.Intermitência de pequenas escalas.  
6.Escoamento de fluido-partícula. 7.Volume finito  
tridimensional. 8.Força de arrasto. 9.Flutuação da  
velocidade. I.Título.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Doutor(a) em  
Computação Aplicada

Dr. Fernando Manuel Ramos



---

Presidente / INPE / SJCampos - SP


Dr. Jerônimo dos Santos Travelho



---

Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

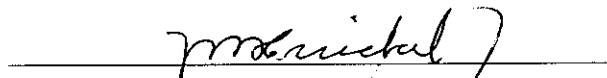
Dr. Reinaldo Roberto Rosa



---

Membro da Banca / INPE / SJCampos - SP


Dr. José Nivaldo Hinckel



---

Membro da Banca / INPE / SJCampos - SP


Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho



---

Membro da Banca / INPE / SJCampos - SP

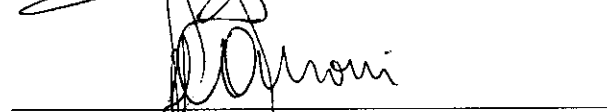
Dr. Marco Antônio Rosa Nascimento



---

Convidado(a) / UNIFEI / Itajubá - MG

Dr. Luiz Roberto Carroci



---

Convidado(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Aluno (a): Helcio Francisco Villa Nova

São José dos Campos, 22 de fevereiro de 2006



Dedico este trabalho a todos aqueles que se foram, mas não levaram suas lembranças do meu coração: ao meu primogênito Paulo Henrique, ao Cash e à Moxica.



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador Professor Jerônimo dos Santos Travelho pela orientação e colaboração na realização deste trabalho de pesquisa, mostrando-me os pontos falhos, elogiando os desenvolvimentos e criticando as inconsistências.

Agradeço a minha esposa Patricia Foroni pela compreensão, amizade, amor e dedicação dispensados neste curso de doutorado.

Agradeço ao meu filho Helcio Foroni Villa Nova pela alegria e inspiração.

Agradeço a minha Mamãe e família, irmãzinha e irmão. Agradeço profundamente ao meu Pai pelo automóvel (Corsa CLW0205), sem o qual este doutoramento não seria possível.

Agradeço aos amigos do LAC, ao Chefe do LAC José Demísio Simões e em particular ao Doutor Ezzat Selim Challoub.

Agradeço ao Doutor José Nivaldo Hinckel pelo apoio e confiança.

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro de 2004-2005.

Agradeço à empresa ALSTOM do Brasil pelo apoio de 2001-2003.





## RESUMO

Neste trabalho é analisado o efeito das partículas ou gotas, as quais constituem a fase dispersa, na turbulência da fase contínua (gás ou líquido). Este tipo de análise, a qual é conhecida como modulação da turbulência, busca obter as variações nos termos fontes de geração de energia cinética provocadas pela interação das partículas com o escoamento contínuo. Neste desenvolvimento, emprega-se três tipos de ferramentas matemáticas distintas aplicadas à análise da mecânica dos fluidos: estatística da turbulência, aerodinâmica de partículas e o cálculo computacional da dinâmica dos fluidos (*CFD*). A estatística da turbulência é empregada para se descrever os escoamentos turbulentos a partir da concentração ou distribuição de vórtices. A partir da análise assintótica encontra-se uma expressão para a função de distribuição de velocidades dos vórtices, a qual é comparada com os resultados experimentais de Castaing et al. (1990). Com o estudo dos efeitos de interação vórtice-partícula, juntamente com a inclusão dos termos de geração de vórtices na esteira da partícula, encontra-se uma expressão uma equação de variação da energia cinética da turbulência a qual é validada com os resultados experimentais compilados por de Crowe (2000). Buscando inserir os efeitos transientes provocados por vórtices de dimensões semelhantes ao diâmetro da partícula da fase dispersa, encontra-se a partir de resultados numéricos, uma expressão analítica para o coeficiente de arrasto de partículas esféricas com comportamento modificado pela passagem de vórtices. Estes resultados numéricos são validados com aqueles obtidos por Kim et al. (1985). Finalmente, obtém-se uma expressão para a variação da energia cinética da turbulência que engloba todos os efeitos considerados acima.



## **MATHEMATICAL MODEL FOR TURBULENCE EFFECT ANALYSIS IN TWO-PHASE FLOW TYPE FLUID-PARTICLE**

In this work the effect of particles or drops, which constitute the dispersed phase, is analyzed in the turbulence of the continuous phase (gas or liquid). This type of analysis, which is known as turbulence modulation, searches to get the variations in the terms sources of generation of kinetic energy provoked by the interaction of particles with the continuum flow. In this development, one uses three types of applied distinct mathematical tools to the analysis of the mechanic of fluid: statistics of the turbulence, particle aerodynamics and the computational fluid dynamics (CFD). The statistics of the turbulence it is used to describe the turbulent flow by concentration or distribution of vortices. From the assintotical analysis an expression for the function of speeds distribution of the vortices meets, which is compared with the experimental results of Castaing et al. (1990). With the study of the interaction effect vortex-particle, together with the inclusion of the terms of generation of vortices in the particle backflow, an expression meets an equation of variation of the kinetic energy of the turbulence which is validated with the experimental results compiled by of Crowe (2000). Searching to insert the transient effect provoked by vortices of similar dimensions to the particle diameter of the dispersed phase, one meets from numerical results, an analytical expression for the coefficient of spherical particle drag with behavior modified by vortices. These numerical results are validated with those gotten by Kim et al. (1985). Finally, an expression for the variation of the kinetic energy of the turbulence is gotten that get all the considered effect above.



# SUMÁRIO

página

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

|  |    |
|--|----|
| <b>CAPÍTULO 1-INTRODUÇÃO</b> .....   | 31 |
| 1.1-O Problema da Interação Vórtice-Partícula.....   | 34 |
| 1.2-Objetivos do Trabalho.....   | 45 |
| 1.3-Organização do Trabalho.....   | 46 |
| <b>CAPÍTULO 2-ESTATÍSTICA DA TURBULÊNCIA</b> .....   | 47 |
| 2.1-Aspectos Fundamentais.....   | 47 |
| 2.2-Teoria da Superestatística.....  | 52 |
| 2.2.1- Superestatística com Distribuição Lognormal.....  | 54 |
| 2.3-Função de Distribuição de Velocidades para Elevados Números de Reynolds.....   | 55 |
| 2.3.1-Efeito do Estiramento de Vórtices.....   | 56 |
| 2.3.2-Comparação entre as Expressões para a Função de Distribuição de Probabilidade para a Velocidade de Rotação dos Vórtices..... | 58 |
| 2.4-Análise Numérica e Analítica da Função de Distribuição.....  | 58 |
| 2.4.1-Expressão Analítica para a Função de Distribuição de Probabilidade de Velocidade Rotação dos Vórtices.....                   | 68 |
| 2.4.2-Ajuste da Expressão Analítica para Função de Distribuição de Velocidades.....  | 79 |
| 2.4.3-Comparação de Resultados Analítico e Experimental para a Função de Distribuição de Velocidade de Rotação dos Vórtices.....   | 84 |
| 2.5-Relação entre Variância $\lambda$ e Escalas de Vórtices.....   | 86 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>CAPÍTULO 3-MODULAÇÃO DA TURBULÊNCIA</b> .....  | 89  |
| 3.1-Aspectos Fundamentais.....  | 89  |
| 3.2-Dinâmica da Partícula no Fluido.....  | 92  |
| 3.2.1-Movimento de uma Partícula em um Fluido com Coeficiente de Arrasto Constante<br>..... | 93  |
| 3.2.2-Movimento de uma Partícula com Arrasto Variável no Tempo.....                         | 96  |
| 3.3-Dinâmica da Interação Vórtice-Partícula.....  | 97  |
| 3.4-Aerodinâmica da Geração de Vórtices.....  | 100 |
| 3.4.1-Relação entre o Número de Reynolds e Número de Strouhal.....                          | 103 |
| 3.4.2-Relação entre o Número de Reynolds e Comprimento da Esteira.....                      | 104 |
| 3.5-Modificação da Energia da Turbulência.....  | 105 |
| <br>  |     |
| <b>CAPÍTULO 4-INTERAÇÃO VÓRTICE-PARTÍCULA</b> .....   | 117 |
| 4.1-Introdução.....   | 117 |
| 4.2-Vórtice Cilíndrico-Definição Numérica.....  | 119 |
| 4.2.1-Simulação Numérica do Vórtice.....  | 122 |
| 4.3 - Escoamento Estacionário em Torno da Esfera.....                                       | 125 |
| 4.4 - Escoamento com Interação Vórtice-Partícula.....                                       | 130 |
| 4.4.1 - Variação do Coeficiente de Arrasto.....   | 132 |
| 4.4.2 - Expressão Analítica para a Variação do Coeficiente de Arrasto.....                  | 134 |
| 4.5 - Análise do Sentido de Rotação dos Vórtices.....                                       | 153 |
| <br>  |     |
| <b>CAPÍTULO 5-RESULTADOS FINAIS, CONCLUSÕES &amp;<br/>TRABALHOS FUTUROS</b> .....           | 155 |
| 5.1-Resultados Finais.....  | 155 |
| 5.2-Conclusões.....   | 158 |

5.3-Trabalhos Futuros.....161

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....163**

**APÊNDICE A-CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA CÁLCULO  
FLUIDO-DINÂMICO DE ESCOAMENTOS LAMINARES.....179**





## LISTA DE FIGURAS

|   |     |
|---|-----|
| 1.1-Os vórtices da turbulência.....   | 35  |
| 1.2-Espectro de energia cinética específica turbulenta.....   | 36  |
| 1.3-Variação da intensidade da turbulência com o tamanho da partícula.....  | 41  |
| 2.1-Integrando da função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices.....   | 59  |
| 2.2-Comparação entre as expressões (2.25) e (2.26).....   | 62  |
| 2.3-Raízes da primeira derivada em função da velocidade adimensional de rotação dos vórtices.....   | 63  |
| 2.4-Gráficos de $s^*$ como função de $u_\ell$ com $0 \leq u_\ell \leq 1$ .....  | 64  |
| 2.5-Coefficientes de forma para a expressão (2.29).....   | 65  |
| 2.6-Comparação dos resultados numérico (Figura 2.4) e analítico (expressão(2.28)).....  | 66  |
| 2.7-Comparação dos resultados numérico (Figura 2.4) e analítico (expressão (2.28)) sem simetria.....  | 67  |
| 2.8-Comparação dos resultados analítico (2.27) e de modelo (2.32).....  | 68  |
| 2.9-Comportamento de $y$ para os valores limites de $h$ .....   | 70  |
| 2.10-Limites superior e inferior de velocidade $u_\ell$ .....   | 78  |
| 2.11-Ajuste de dados analíticos (2.67) e experimentais de Takahashi et al. (1998).....  | 81  |
| 2.12-Coefficientes de forma: aproximação linear e resultados numéricos.....   | 83  |
| 2.13-Comparação dos resultados para a função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices: numérico e experimentais de Castaing et al. (1990)..... | 85  |
| 2.14- Relação entre $l$ e escala dos vórtices, $s_0$ e $\log_{10} \left( \frac{\alpha l \bar{\omega}}{\epsilon h_K \theta} \right)$ .....                   | 86  |
| 3.1-Interação vórtice-partícula.....  | 98  |
| 3.2-Geração de vórtices.....  | 101 |
| 3.3-Número de Strouhal na esteira da partícula: dados experimentais de Clift et al. (1978) e aproximação.....   | 103 |
| 3.4-Comprimento da esteira para partícula esférica: dados experimentais de Clift et al. (1978) e aproximação.....   | 104 |

|  |     |
|--|-----|
| 3.5-Relação $t_{int}/t_p$ com $d_p/d_v$ .....  | 107 |
| 3.6-Volume de controle no espaço físico.....   | 108 |
| 3.7-Volume de controle no espaço físico com partículas.....  | 109 |
| 3.8-Variação da intensidade da turbulência: dados experimentais compilados por Crowe<br>(2000) e aproximação teórica.....  | 116 |
| 4.1-Tubo de vórtice (a) e Tubo de vórtice cilíndrico (b).....  | 120 |
| 4.2a -Vórtice em $t = 4s$ .....  | 124 |
| 4.2b-Isosuperfície para pressão em $t = 4s$ .....  | 124 |
| 4.3-Dispersão no tempo, vórtice com $G_v = 2,5 \text{ m}^2/\text{s}$ e $s = 1 \text{ m}$ .....   | 125 |
| 4.4-Domínio de cálculo do escoamento em torno da esfera.....   | 126 |
| 4.5a-E escoamento em torno da esfera para $Re = 20$ (malha de 1000000 de elementos)....  | 128 |
| 4.5b-E escoamento em torno da esfera para $Re = 100$ (malha de 1000000 de elementos)...  | 128 |
| 4.6-Coefficiente de arrasto para partícula esférica: experimental e numérico.....  | 129 |
| 4.7a-Tempo 20s (malha de 1000000 de elementos).....  | 131 |
| 4.7b-Tempo 50s (malha de 1000000 de elementos).....  | 131 |
| 4.7c-Tempo 100s (malha de 1000000 de elementos).....   | 132 |
| 4.8-Coefficiente de arrasto sobre a esfera: $Re = 100$ (malha de 1000000 de elementos)....   | 132 |
| 4.9-Coefficiente de arrasto sobre a esfera: $Re = 100$ (malha de 1000000 de elementos), com<br>tubo de vórtice.....  | 133 |
| 4.10-Comparação dos efeitos sobre o coeficiente de arrasto.....  | 134 |
| 4.11-Parcela transiente do coeficiente de arrasto.....   | 136 |
| 4.12-Variação do coeficiente $A$ com o número de Reynolds.....   | 136 |
| 4.13-Comparação do coeficiente de arrasto para $Re = 100$ .....  | 137 |
| 4.14-Comportamento de $a_1$ e $a_2$ com $v_q^s/v_v$ e número de Reynolds.....  | 138 |
| 4.15-Comparação dos coeficientes $a_1$ e $a_2$ para $Re = 100$ .....   | 139 |
| 4.16-Comparação dos coeficientes $b_1$ e $b_2$ .....   | 140 |
| 4.17a-Coefficiente $g_1$ .....   | 141 |
| 4.17b-Coefficiente $g_2$ .....   | 141 |
| 4.18-Comparação dos resultados: numérico obtido por Kim et al. (1995) e analítico, para<br>distância nula entre trajetória do tubo de vórtice e centro da partícula..... | 142 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.19-Variação do coeficiente $f_1$ com a distância entre centros da trajetória do vórtice e partícula.....   | 143 |
| 4.20-Validação do coeficiente $f_1$ .....  | 144 |
| 4.21-Variação do coeficiente $f_2$ com a distância entre centros da trajetória do vórtice e partícula.....   | 145 |
| 4.22-Validação do coeficiente $f_2$ .....  | 145 |
| 4.23-Variação do coeficiente $x_1$ com a distância entre centros da trajetória do vórtice e partícula.....   | 146 |
| 4.24-Validação do coeficiente $x_1$ .....  | 147 |
| 4.25-Variação do coeficiente $x_2$ com a distância entre centros da trajetória do vórtice e partícula.....   | 148 |
| 4.26a-Comparação dos resultados: numéricos obtidos por Kim et al. (1995) e analíticos com $v_q^s/v_v = 0,1$ , para distâncias entre trajetória do tubo de vórtice e centro da partícula de (a) - $1 \hat{d}_p$ , (b) - $2 \hat{d}_p$ , (c) - $3 \hat{d}_p$ , (d) - $4 \hat{d}_p$ ..... | 149 |
| 4.26b-Comparação dos resultados: numéricos obtidos por Kim et al. (1995) e analíticos com $v_q^s/v_v = 0,2$ , para distâncias entre trajetória do tubo de vórtice e centro da partícula de (a) - $1 \hat{d}_p$ , (b) - $2 \hat{d}_p$ , (c) - $3 \hat{d}_p$ , (d) - $4 \hat{d}_p$ ..... | 150 |
| 4.26c-Comparação dos resultados: numéricos obtidos por Kim et al. (1995) e analíticos com $v_q^s/v_v = 0,1$ , para distâncias entre trajetória do tubo de vórtice e centro da partícula de (a) $1 \hat{d}_p$ , (b) $2 \hat{d}_p$ , (c) $3 \hat{d}_p$ , (d) $4 \hat{d}_p$ .....         | 151 |
| 4.26d-Comparação dos resultados: numéricos obtidos por Kim et al. (1995) e analíticos com $v_q^s/v_v = 0,2$ , para distâncias entre trajetória do tubo de vórtice e centro da partícula de (a) $1 \hat{d}_p$ , (b) $2 \hat{d}_p$ , (c) $3 \hat{d}_p$ , (d) $4 \hat{d}_p$ .....         | 152 |
| 4.27-Disposições para a passagem do tubo de vórtice com relação ao centro da partícula.....  | 153 |
| 5.1- Variação da intensidade da turbulência: comparação dos resultados experimentais e analíticos.....   | 159 |



## **LISTA DE TABELAS**

|   |    |
|---|----|
| 1-Condições de escoamento para os experimentos da Figura 1.3..... | 42 |
|---|----|



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Latinos

|               |   |
|---------------|---|
| $a$           | limite de integração  |
| $a^+$         | limite à direita  |
| $a(l)$        | coeficiente de forma  |
| $a_s$         | coeficiente de assimetria   |
| $b$           | fator de Boltzmann, limite de integração                                    |
| $b(l)$        | coeficiente de forma  |
| $c(l)$        | coeficiente de forma  |
| $d_{cc}$      | distância entre centros   |
| $d_p$         | diâmetro da partícula   |
| $d_{esteira}$ | comprimento da esteira  |
| $d_v$         | tamanho do vórtice  |
| $dN_p$        | número de partículas no volume de controle infinitesimal                    |
| $dN_v$        | número de vórtices no volume de controle infinitesimal                      |
| $dV_{vel}$    | volume de controle infinitesimal no espaço de velocidade de rotação         |
| $dV_x$        | volume de controle infinitesimal em um escoamento laminar                   |
| $f(t)$        | função temporal   |
| $f(b)$        | função de distribuição de $b$   |
| $f_{C_D}$     | função do número de Reynolds da partícula e do tempo                        |
| $f_g$         | freqüência com que os vórtices escapam ou são gerados na esteira            |
| $f_{vel}$     | função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices<br>normalizada |
| $\bar{g}$     | aceleração da gravidade   |

|  |  |
|--|--|
| $\mathbf{k}_0$                         | energia cinética específica de um tubo de vórtice                    |
| $\ell$                                 | escala de tamanho dos vórtices                                       |
| $\ell_c$                               | variação no tamanho do vórtice em um intervalo de tempo $t_c$        |
| $\mathbf{m}$                           | ordem do momento estatístico   |
| $\mathbf{n}$                           | número inteiro positivo  |
| $\hat{\mathbf{n}}$                     | versor normal à superfície   |
| $\mathbf{n}_p$                         | número de densidade de partículas                                    |
| $\mathbf{n}_v$                         | número de densidade de vórtices                                      |
| $\mathbf{p}$                           | número inteiro positivo, pressão                                     |
| $\mathbf{p}_\infty$                    | pressão no infinito.   |
| $\mathbf{p}(\mathbf{u})$               | função de distribuição de  |
| $\mathbf{p}(\mathbf{E})$               | função de distribuição de probabilidade de $\mathbf{E}$              |
| $\mathbf{p}(\mathbf{u} \mathbf{b})$    | probabilidade condicional de ocorrência de uma variável $\mathbf{u}$ |
| $\mathbf{p}_{e_\ell}(\mathbf{u}_\ell)$ | distribuição gaussiana para $\mathbf{u}_\ell$                        |
| $\mathbf{r}$                           | raio   |
| $\mathbf{r}_i$                         | raio interno   |
| $\mathbf{r}_e$                         | raio externo   |
| $\mathbf{r}_p$                         | raio da partícula  |
| $\mathbf{s}$                           | parâmetro  |
| $\mathbf{t}$                           | tempo  |
| $\mathbf{t}_0$                         | ponto de inflexão  |
| $\mathbf{u}$                           | variável geral   |
| $\mathbf{u}_\ell$                      | velocidade de rotação dos vórtices na forma adimensional             |
| $\mathbf{u}_\ell^*$                    | limites de velocidade de rotação dos vórtices na forma adimensional  |
| $\mathbf{v}_\ell$                      | velocidade tangencial de rotação dos vórtices                        |
| $\mathbf{v}_{\ell_0}$                  | velocidade tangencial de rotação dos vórtices de tamanho $\ell_0$    |



|  |  |
|--|--|
| $\mathbf{v}_0$                                     | velocidade do escoamento em escala integral            |
| $\bar{\mathbf{v}}$                                 | velocidade média do escoamento                         |
| $\mathbf{v}'$                                      | flutuação do campo velocidades do escoamento           |
| $\bar{\mathbf{v}}_f$                               | velocidade do fluido                                   |
| $\bar{\mathbf{v}}_p$                               | velocidade da partícula                                |
| $\bar{\mathbf{v}}_{p0}$                            | velocidade inicial da partícula                        |
| $\bar{\mathbf{v}}_v$                               | campo de velocidade gerado pelo vórtice                |
| $\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z$         | componentes do vetor velocidade                        |
| $\mathbf{v}_q^s$                                   | velocidade tangencial do núcleo do tubo de vórtice     |
| $\mathbf{v}_\infty$                                | velocidade da corrente livre                           |
| $w$  | variável de representação                              |
| $\mathbf{x}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ | vetor posição  |
| $A$  | parâmetro  |
| $A(\mathbf{a}_s)$                                  | constante de normalização                              |
| $B(\mathbf{E})$                                    | valor médio do fator de Boltzmann                      |
| $C^2$  | espaço das funções com derivadas segunda               |
| $C^4$  | espaço das funções com derivadas quarta                |
| $C_D$  | coeficiente de arrasto da partícula                    |
| $\bar{C}_D$  | valor médio do coeficiente de arrasto                  |
| $C_D^t(\mathbf{t})$                                | flutuação do coeficiente de arrasto                    |
| $C_D^t(\mathbf{t})$                                | parcela transitória do coeficiente de arrasto          |
| $C_D^p$  | parcela permanente do coeficiente de arrasto           |
| $C_D^v$  | parcela do coeficiente de arrasto referente ao vórtice |
| $D$  | dimensão característica do volume $\mathbf{V}_x$       |
| $D_v$  | dimensão característica do tubo de vórtice             |
| $E$  | energia efetiva  |
| $\bar{\mathbf{F}}_D$                               | força de arrasto                                       |

|                        |  |
|------------------------|--|
| $\vec{F}_{\text{ext}}$ | força externa  |
| $F_{\text{vel}}$       | função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices         |
| $G(t)$                 | variável de substituição   |
| $I$                    | intensidade da turbulência   |
| $I(h)$                 | integral de Laplace  |
| $I_1(s)$               | integrando da função de distribuição de probabilidade                |
| $I_+^*$                | conjunto dos números inteiros estritamente positivos                 |
| $K_0$                  | energia cinética de um tubo de vórtice                               |
| $N_v$                  | número de vórtices   |
| $O(\quad)$             | ordem de precisão ou numérica  |
| $Q_1(s)$               | distribuição de probabilidade do tipo lognormal das variações de $s$ |
| $R$                    | conjunto dos números reais   |
| $Re$                   | número de Reynolds   |
| $Re_p$                 | número de Reynolds da partícula                                      |
| $Re_1$                 | número de Reynolds baseado na escala de Taylor                       |
| $St$                   | número de Strouhal   |
| $V_f$                  | volume de fluido no espaço físico                                    |
| $V_p$                  | volume ocupado pelas partículas no espaço físico                     |
| $V_x$                  | volume no espaço físico  |
| $V_{\text{esteira}}$   | volume da esteira  |
| $W_p^f$                | taxa de trabalho realizado pelo fluido sobre a partícula             |
| $W_f^p$                | taxa de variação da energia cinética da partícula                    |
| $Z$                    | constante de normalização  |

## Gregos

|                   |  |
|-------------------|--|
| $a$               | coeficiente, expoente, constante   |
| $a_f, a_p$        | frações volumétricas da fase contínua e dispersa   |
| $b$               | grandeza intensiva, coeficiente  |
| $c$               | valor médio da distribuição gaussiana de $e_\ell$  |
| $g$               | coeficiente  |
| $e$               | constante positiva muito pequena   |
| $e_\ell$          | taxa de transferência de energia   |
| $e_{\ell_0}$      | taxa de transferência de energia na escala $\ell_0$  |
| $e_\ell^*$        | taxa média de dissipação de energia  |
| $f(\mathbf{t})$   | função monotônica  |
| $f_i (i = 1, 2)$  | coeficientes.  |
| $f^i(\mathbf{t})$ | $(i = 1, \dots, N)$ derivadas de $f(\mathbf{t})$   |
| $h$               | parâmetro positivo   |
| $h_K$             | escala de Kolmogorov   |
| $k$               | número de onda   |
| $l$               | variância adimensional de $\ln S$  |
| $m$               | constante universal, parâmetro   |
| $m_f$             | viscosidade do fluido  |
| $n$               | viscosidade cinemática   |
| $q$               | coeficiente  |
| $\hat{q}$         | versor na direção tangencial do vórtice  |
| $r_f$             | massa específica do fluido   |
| $r_f$             | massa específica do material da  |
| $s$               | variância adimensional da distribuição $p_{e_\ell}(\mathbf{u}_\ell)$ , raio do núcleo do vórtice |
| $s_0$             | variável de representação  |

|                        |  |
|------------------------|--|
| $s^*$                  | raiz da derivada primeira de $I_1(s)$  |
| $t$                    | parâmetro de tempo   |
| $\bar{\tau}$           | tensor viscoso   |
| $t_c$                  | intervalo de tempo de variação do tamanho do vórtice                                 |
| $t_{int}$              | tempo de interação   |
| $t_p$                  | tempo característico da partícula  |
| $w$                    | velocidade angular de rotação do vórtice.  |
| $\bar{w}$              | vorticidade  |
| $y$                    | função exponencial de $f(t)$   |
| $y_i$ ( $i = 1, 2$ )   | coeficientes   |
| $y_v$                  | linha de corrente do escoamento induzido pelo vórtice                                |
| $z_n$                  | expoente   |
| $DI$                   | variação da intensidade da turbulência   |
| $Dk$                   | variação específica de energia cinética da turbulência                               |
| $DK$                   | modificação da energia da turbulência  |
| $DK_t^+$               | taxa de aumento da energia cinética  |
| $DK^-$                 | perda de energia cinética do vórtice   |
| $DK_t^p$               | variação de energia cinética da turbulência para o caso de um conjunto de partículas |
| $DK_t$                 | variação total da energia turbulenta   |
| $Dt_i$                 | ( $i = 0, 1, 2 \dots$ ) coeficientes   |
| $DW$                   | taxa de dissipação de energia cinética   |
| $G_\ell$               | circulação correspondente aos vórtices da escala $\ell$                              |
| $G_v$                  | circulação do vórtice ou intensidade   |
| $L$                    | constante  |
| $L_0$                  | constante $L$ para $\ell_0$  |
| $P_1(\mathbf{u}_\ell)$ | função de distribuição de probabilidade para $\mathbf{u}_\ell$                       |

$P_{a_s,1}(\mathbf{u}_\ell)$       função de distribuição de probabilidade para  $\mathbf{u}_\ell$



## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é o estudo da interação da turbulência com partículas em um meio bifásico, sendo que os objetivos específicos são apresentados na seção 1.2.

Os escoamentos bifásicos estão presentes em um grande número de problemas da mecânica dos fluidos. Escoamento de gás ou líquido com partículas dispersa são bastante comuns em diversas aplicações tecnológicas. O escoamento de bolhas de vapor dispersas na fase líquida é um dos casos mais frequentes de escoamento bifásico encontrado na natureza, bem como o caso de gotas dispersa em meio gasoso.

Dentre os problemas que envolvem escoamentos bifásicos, se pode ter aqueles associados com os processos de combustão tais como aquecedores de óleo, motores de combustão interna e motores de propulsão. Estes equipamentos envolvem a queima de partículas líquidas (gotas) ou sólidas em uma atmosfera gasosa, sendo normalmente descrito como queima de *spray*.

Nos últimos anos com as variações climáticas ocorridas no planeta, o estudo da emissão e dispersão de partículas geradas nos processos de combustão é outra aplicação do estudo do escoamento bifásico que tem ganho destaque. Com as modelagens matemáticas, têm-se conseguido mostrar o comportamento das concentrações de partículas geradas nestes processos dentro da atmosfera terrestre. Em resumo, o estudo de escoamentos bifásicos tem-se mostrado uma das áreas com grande tendência de evolução, principalmente com relação à modelagem numérica, visando o grande número de aplicações tecnológicas.

Os escoamentos bifásicos têm sido normalmente representados por modelos de escoamentos separados, onde as fases apresentam velocidades de escoamento diferentes. Cada fase exerce uma influência sobre a outra e, sobre ela mesma, através de termos de arrasto, gradiente médio de pressão da fase contínua, tensão de contato entre as partículas entre outros; o que tem levado à necessidade de elaboração de modelos mais adequados.

Estes modelos são caracterizados por uma série de parâmetros, que estão associados à forma do escoamento bifásico, tais como relação entre densidades ou massas específicas das fases, relação entre as razões de ocupação volumétrica (ver equações 3.49a e 3.49b) e número de Reynolds da partícula ( $\mathbf{Re}_p$ , ver equação 3.5). Este último parâmetro é definido em função do módulo da diferença de velocidade entre as fases, caracterizando o número de Reynolds da partícula pela inércia da fase dispersa em relação às forças viscosas, diferentemente da caracterização do número de Reynolds do escoamento ( $\mathbf{Re}$ ), o qual se referencia pela inércia da fase contínua.

Neste trabalho é proposta uma análise da interação vórtice-partícula. É analisado o efeito dos vórtices gerados pela turbulência do fluido, que constitui a fase contínua, sobre a função de arrasto da partícula. A função de arrasto é normalmente dependente da diferença de velocidade entre as fases do escoamento bifásico fluido-partícula. Como os efeitos da turbulência são adicionados ao campo médio de variáveis que descrevem o escoamento turbulento, isto não é incluído na função do arrasto. A inclusão do efeito da turbulência sobre a fase dispersa no escoamento bifásico fluido-partícula tem sido foco de diversas discussões sobre de modulação da turbulência. Porém, o efeito direto dos vórtices da turbulência sobre as partículas tem sido pouco explorado.

O efeito da turbulência sobre o coeficiente de arrasto foi apresentado inicialmente por Clamen e Gauvin (1969), sendo a modificação expressa em termos do número de Reynolds ( $\mathbf{Re}_p$ ). Clift et al. (1978) compilaram estes resultados de Clamen e Gauvin (1969), mostrando a comparação sobre os valores do coeficiente de arrasto para escoamentos laminares e turbulentos. A modelagem numérica destes efeitos foi tratada por Travis et al. (1976), com discretização numérica pelo método das diferenças finitas e interação entre fases tratada pela acoplagem da função do arrasto, sem o efeito de turbulência.

Dentro do aspecto da modelagem dos escoamentos bifásicos, Kataoka (1986) apresenta uma abordagem geral do escoamento bifásico empregando modelos separados para as fases. Posteriormente em um segundo trabalho, Kataoka (1989) apresenta um modelo de



fechamento em dois pontos (modelo de duas equações tipo  $k - \epsilon$ ) para considerar os efeitos da turbulência em escoamentos bifásicos.

Vários fenômenos físicos surgem em escoamentos bifásicos. Por exemplo, análises de efeitos de mudança de fase são apresentadas por Young (1995), o qual considera nas equações de modelamento para o escoamento bifásico, os efeitos termodinâmicos da irreversibilidade em fenômenos de nucleação e coalescência de gotas. Este tipo de consideração não será considerado no atual trabalho, desde que estes fenômenos são importantes em escoamentos reativos com alta densidade de partículas (gotas).

A modelagem de escoamentos bifásicos com alta densidade de partículas é tratada por Andrews et al. (1996), com solução numérica obtida pelo método (MP-PIC) *Multiphase Particle-in-Cell* (Villa Nova (2004)) e desprezando os efeitos da turbulência. O algoritmo apresentado é validado para relações de frações volumétricas próximas de 0,1, mostrando a possibilidade de aplicações em escoamentos com comportamentos não convencionais, já que isto afeta as características de viscosidade aparente da mistura fluido-partícula. A modelagem da turbulência para escoamentos com alta densidade de partículas é bastante complexa, sobretudo no que tange a definição de viscosidade turbulenta. Uma alternativa para modelagens de escoamentos turbulentos com alta densidade de partículas é a análise dos termos cruzados por meio de modelos de tensões de Reynolds (ver Zhang et al. (1997)). Estes modelos são um tanto robustos, porém não representam com precisão os escoamentos bifásicos, já que não consideram o efeito de interação entre as partículas.

A interação entre as partículas da fase dispersa foi estudada por Schmidt e Rutland (2000), os quais propõem um algoritmo para modelagem de *spray* baseado em modelos estocásticos para a colisão entre as partículas, porém o efeito da turbulência é desconsiderado. Por outro lado, Snider (2001) apresenta um algoritmo de solução para escoamentos incompressíveis com fase dispersa baseado no MP-PIC, onde é introduzido o efeito da turbulência no cálculo do coeficiente de arrasto, como uma função implícita do número de Reynolds. Da mesma forma que Snider (2001), Patankar e Joseph<sup>a,b</sup> (2001)

introduzem o efeito da turbulência no coeficiente de arrasto como função implícita do número de Reynolds.

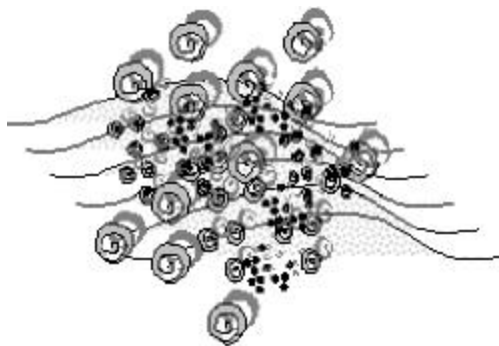
Kartushinsky e Michaelides (2003) introduzem o efeito da turbulência no estudo da colisão entre as partículas da fase dispersa. Isto constitui uma consideração relativamente importante, podendo ser introduzida nos modelos bifásicos. Resultados importantes podem ser obtidos com a introdução deste modelo de colisões entre as partículas, visto que neste modelo não se inclui restrição referente à interação de partículas.

O estado da arte mostra o interesse nos escoamentos bifásicos, principalmente no aspecto do modelamento de efeitos transientes de interação entre fases. Mas estas análises, quando são de cunho numérico, não esclarecem os fatores determinantes para a modelagem dos escoamentos bifásicos. Isso tem levado ao desenvolvimento de modelos experimentais, que além do alto custo produz resultados bastante restritos.

### **1.1-O Problema da Interação Vórtice-Partícula:**

A turbulência é um fenômeno presente na mecânica dos fluidos (ver Frisch (1995)), que se forma a partir da instabilidade do escoamento laminar, provocando a formação de estruturas bem definidas chamadas vórtices, que podem apresentar vários formatos (cilíndricos, grampo de cabelo, anel etc). Uma descrição completa da turbulência é algo ainda bastante imaturo, pois se têm várias linhas de análise, tanto na fenomenologia quanto na modelagem e simulação. Vários autores da atualidade entre eles Monin e Yaglom (1975), Frisch (1995) e Lesieur (2000), bem como Boussinesq e Kolmogorov que constituem um grupo de desbravadores deste universo inóspito que é a turbulência, não conseguiram fechar uma teoria descritiva que seja aplicada aos diversos casos de geração e evolução deste fenômeno. Para se ter uma teoria completa deste fenômeno seria necessário um conjunto de equações que pudessem ser aplicadas aos pequenos dispositivos até a evolução das estrelas. Para tanto, sabe-se que isto seria algo bastante complexo. Buscando-se exemplificar como poderia ser a turbulência, a Figura 1.1 seria um retrato de como ela é

vista neste trabalho: uma corrente de fluido carregando vórtices que se formam e se destroem e que de alguma forma perturbam esta corrente.

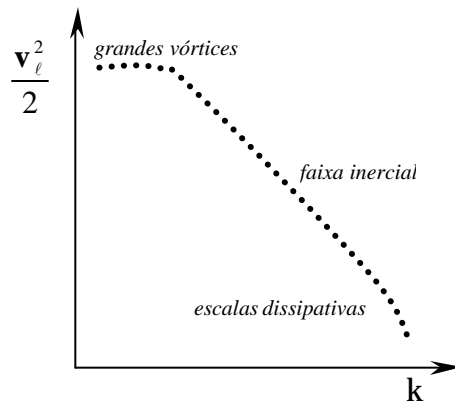


**FIGURA 1.1-Os vórtices da turbulência.**

Os vórtices são caracterizados por uma escala de tamanho  $\ell$ , a qual está relacionada ao tamanho do vórtice e por uma velocidade tangencial de rotação  $\mathbf{v}_\ell$ , associada neste caso com as perturbações na direção do escoamento (ver Frisch (1995) ou Tennekes e Lumley (1974)), que produz uma energia cinética específica dos vórtices dada por  $\mathbf{v}_\ell^2/2$  (ver Tennekes e Lumley (1974)).

A distribuição espectral de energia cinética da turbulência é dada em função do número de onda, o qual pode ser expresso na forma  $\mathbf{k} = 2\mathbf{p}/\ell$ , sendo que a Figura 1.2 (ver Frisch (1995)) mostra esta dependência. Esta distribuição é conhecida na literatura como cascata de energia, conforme foi denominada por Kolmogorov (ver Frisch (1995)).

A energia cinética da turbulência, a qual representa o valor médio da energia cinética dos vórtices no escoamento turbulento, é retirada do escoamento médio pelos grandes vórtices formados em escala integral (maior escala) e desce para os pequenos vórtices. Esse fenômeno ocorre a partir da reorganização do escoamento em escalas menores. As escalas menores, inferiores à escala integral, definem a faixa inercial e a faixa dissipativa (ver Figura 1.2).



**FIGURA 1.2-Espectro de energia cinética específica turbulenta.**

Dentro da faixa inercial, a qual foi definida por Kolmogorov (ver Frisch (1995)), o fenômeno da intermitência tem efeito importante na caracterização da turbulência quando se estuda a distribuição de velocidades tangenciais de rotação dos vórtices. Esta faixa é importante, pois nela se encontra a maior parte da energia da turbulência.

Uma explicação bastante aprofundada sobre a intermitência pode ser obtida em Frisch (1995). Porém, dentro do contexto do atual trabalho, a intermitência é caracterizada por períodos intercalados de atuação da turbulência no escoamento. Este tipo de fenômeno tem levado à necessidade de novas formas investigações, dentre elas análise fractal, novas formulações estatísticas etc.

A caracterização estatística da turbulência, a qual constitui uma das possíveis técnicas de análise desta, leva em conta a intermitência e permite propor modelos de distribuição estatística para os perfis de flutuações de velocidade, constituindo para este trabalho uma aproximação para a velocidade tangencial de rotação dos vórtices. Um dos precursores desta forma de investigação foi Kolmogorov (1961), o qual propôs um modelo de distribuição lognormal para a variância da velocidade de rotação dos vórtices dentro da faixa inercial, reformulando a teoria de 1941. Oboukhov (1961) completou a reformulação da teoria de Kolmogorov com o modelo para a lei de potências dos momentos estatísticos.

Ainda dentro da reformulação da teoria de Kolmogorov (1941), Kraichnan (1973) e Mandelbrot (1974) analisaram a consistência desta teoria, mostrando que dentro de qualquer domínio a energia dissipada pelos vórtices de pequenas escalas, conhecidas como dissipativas, tem na média uma distribuição lognormal, o que já teria sido caracterizado como uma das hipóteses desta teoria. Van Atta e Antonia (1980) verificaram a influência das flutuações na taxa local de dissipação da energia turbulenta, o que foi completado por Gargett et al. (1984), que analisou a hipótese de isotropia nestas flutuações.

Com o amadurecimento do conhecimento sobre o que foi proposto por Kolmogorov 1941 e reformulado em 1961, Andrews et al. (1989) propuseram uma distribuição de probabilidade para a taxa média local da dissipação da energia transferida entre os vórtices. Essa distribuição é baseada na função de distribuição de probabilidade tipo gama e os resultados obtidos a partir da mesma são situados entre a distribuição lognormal (modelo de Kolmogorov (1961) e o modelo  $\mathbf{b}$  mostrado em Frisch (1995).

Castaing et al. (1990) validaram o modelo de distribuição tipo lognormal com a diferença de velocidades tomada entre dois pontos situados a uma distância  $\ell$ . Os experimentos foram elaborados para túnel de vento e jatos turbulentos, os quais foram baseados na escala de Taylor, cuja relação com a escala convencional é expressa como  $\mathbf{Re}_\ell \sim \mathbf{Re}^{\frac{1}{2}}$ . A faixa de número de Reynolds baseado na escala de Taylor empregada para este experimento foi de  $800 \leq \mathbf{Re}_\ell \leq 3000$ , o que leva a valores do número de Reynolds na escala integral situados dentro da faixa inercial. A expressão da distribuição de flutuações no campo de velocidades paralela ao escoamento, que neste trabalho atual representa a distribuição de velocidade tangencial de rotação dos vórtices, e que foi obtida a partir dos experimentos foi também obtida por meio da teoria da superestatística por Beck (2004), para o caso de uma distribuição lognormal.

Resultados numéricos obtidos por simulação numérica com números de Reynolds baseados em escala convencional com valores na ordem de  $10^3$  foram obtidos por Vincent e

Meneguzzi (1991). Estes resultados levaram a uma forma não-gaussiana da distribuição de diferença de velocidades dentro da faixa inercial para os casos simulados.

Resultados experimentais para a função de distribuição de probabilidade da diferença de velocidades entre dois pontos foram obtidos também por Kailasnath et al. (1992), onde os efeitos do estiramento, o qual mostra a tendência dos tubos vórtices em se fechar em linhas de vórtice, foram observados. Estes resultados validam os experimentos apresentados por Castaing et al. (1990) e citados anteriormente.

A análise matemática da topologia do espaço de fases para as soluções das equações de Navier-Stokes com comportamento dentro do regime turbulento é uma ramificação dos estudos para tentar se compreender a turbulência. Migdal (1993), apresentou uma formulação matemática para a turbulência baseada na topologia do espaço de fases. No trabalho acima foi sugerida uma solução particular baseada na hierarquia das equações de Navier-Stokes, finalizada sobre a equação de Liouville, a qual foi modificada e denominada como equação do *Loop*.

Uma das formas de se obter resultados experimentais dentro da faixa turbulenta é empregando a superfluidez do hélio a baixas temperaturas, isto é a tendência de diminuição da viscosidade com a temperatura. Fazendo uso deste efeito, Tabeling et al. (1996) apresentaram os resultados experimentais de variação de velocidade entre dois pontos com hélio à baixa temperatura e verificaram a tendência não-gaussiana da distribuição.

Um compêndio de vários resultados referentes à turbulência é apresentado por Sreenivasan e Antonia (1997), onde um enfoque maior é dado à fenomenologia das pequenas escalas da turbulência desenvolvida desde a teoria de 1941 de Kolmogorov. Este trabalho foi uma grande revisão, ao nível de referências para a análise fenomenológica da turbulência, mostrando os possíveis segmentos de estudos e onde se pretendem chegar nos próximos anos.

O emprego de anemometria de fio quente tem mostrado bastante frutífero na obtenção de resultados experimentais para a turbulência, conforme fez Castaing et al. (1990). Porém, o que não se pode garantir é, se a introdução de uma sonda no escoamento modifica ou não estes resultados. Em busca de resultados experimentais com técnicas não intrusivas, Noullez et al. (1997) obtiveram pela técnica do *RELIEF (Raman Exciting Laser Induced Electronic Fluorescence)* a forma não-gaussiana da distribuição de flutuação de velocidade na direção do escoamento.

Dentro da fenomenologia da turbulência para números de Reynolds calculados para escalas convencionais dentro da faixa inercial é fato, como citado até agora, que a lei de distribuição de flutuação de velocidade na direção do escoamento é não-gaussiana. As razões deste comportamento (não-gaussiano) da lei de distribuição é mostrada de forma clara por Jiménez (1998), o qual coloca quais são as modificações necessárias que deveriam haver sobre o espectro de energia (lei do  $k^{-\frac{5}{3}}$ ), para se obter uma distribuição de flutuação de velocidade gaussiana.

Vários aspectos associados à fenomenologia da turbulência são ainda bastante obscuros de acordo com a visão dada pelas pesquisas. Um ponto importante, ainda não elucidado completamente seria a distribuição de vórtices no escoamento turbulento com referência a escala e não energia cinética. Este tema está relacionado com o espectro de energia dentro do fenômeno da intermitência. Guj e Camussi (1999), aplicaram *wavelets* para se analisar nas diversas escalas de turbulência a relação entre intermitência e espectro de energia, buscando-se obter a universalidade desta relação. Pearson e Antonia (2001), a partir de resultados de simulação direta, verificaram os efeitos da intermitência sobre a pressão e a velocidade na seguinte faixa da escala de Taylor  $40 \leq Re_1 \leq 4300$ .

Técnicas mais apropriadas para o tratamento da turbulência, sobretudo dentro do conceito termodinâmico da conservação e transformação de energia, foram propostas. Ramos et al. (2001) desenvolveram uma teoria estatística não-extensiva para a turbulência. Arimitsu e Arimitsu (2002) propuseram uma função de distribuição de probabilidade para a flutuação de velocidade baseada em medidas de entropia (entropia Rényi ou Tsallis), o que tem sido

estendido e aprofundado por Beck (2003), Beck<sup>a,b</sup> (2004) na teoria da superestatística, a qual é baseada na superposição de diferentes estatísticas no tempo ou espaço. Complementando este ramo de estudos Touchette e Beck (2004) têm aplicado técnica de altas energias para se obter resultados assintóticos de distribuições estacionárias da superestatística.

A caracterização da turbulência através de aspectos estatísticos, tais como distribuição da velocidade de rotação (relacionada à flutuação do campo de velocidade do escoamento), energia cinética e escalas dos vórtices têm permitido analisar e contemplar todos os efeitos da turbulência sobre a interação vórtice-partícula de forma bem próxima do que ocorre na realidade de um escoamento bifásico turbulento. Isto permite refletir como a turbulência poderia interagir com as partículas da fase dispersa.

Duas formas de análise tem sido exploradas na análise dos escoamentos bifásicos turbulentos: a primeira é baseada na modelagem do coeficiente de arrasto como função do número de Reynolds, onde os efeitos transientes não seriam considerados; a segunda forma de análise é baseada na interação direta vórtice-partícula com extensão para um conjunto de vórtices agindo sobre um conjunto de partículas onde os efeitos transientes são considerados. A segunda forma constitui uma boa aproximação para os efeitos da turbulência.

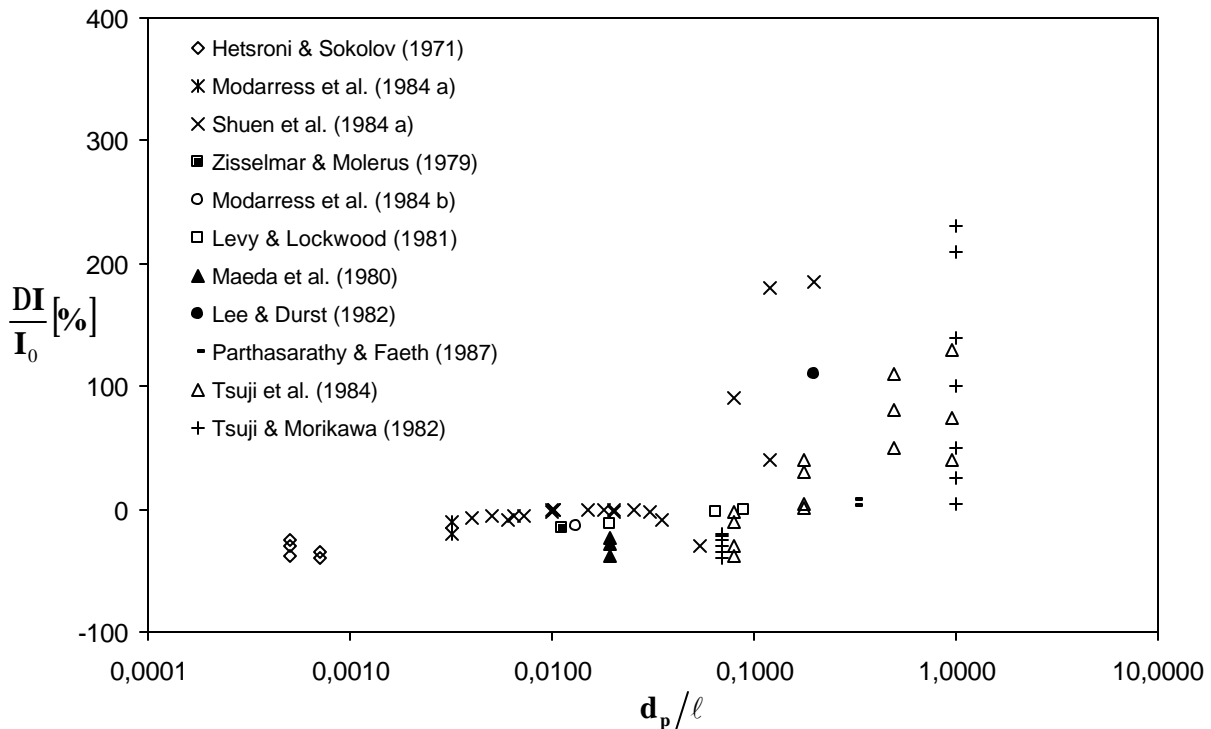
A interação vórtice-partícula, sem extensão para o escoamento bifásico, tem sido estudada primeiramente por Kim et al. (1994), onde é mostrado o efeito de um tubo de vórtice sobre o coeficiente de arrasto que passa por um corpo esférico contido em um escoamento laminar. Em continuidade a este trabalho, Kim et al. (1996) mostram o efeito de um par de vórtices sobre o coeficiente de arrasto. Masoudi e Sirignano (2000) incluem efeitos de vaporização de gotas na sistemática desenvolvida por Kim et al. (1994).

Em todos os casos de análise da interação vórtice e partícula citados acima os resultados obtidos são numéricos, os vórtices são advectados pela corrente laminar até se chocarem com a partícula. Com isso, pode-se ter uma perspectiva de como seria a interação de um ou



dois vórtices da turbulência com uma partícula dentro do contexto numérico-teórico, já que nenhum experimento tem sido proposto na literatura.

Este efeito das partículas sobre a turbulência da fase contínua é referenciado como modulação da turbulência, a qual tem sido tratada por Hetsroni e Sokolov (1971), Zisselmar e Molerus (1979), Maeda et al. (1980), Levy e Lockwood (1981), Lee e Durst (1982), Tsuji e Morikawa (1982), Modarress et al.<sup>a,b</sup> (1984), Shuen et al. (1984), Tsuji et al. (1984) e Parthasarathy e Faeth (1987). Os resultados destes autores com relação à variação percentual da intensidade da turbulência  $\frac{DI}{I_0} [\%]$  em escoamentos bifásicos para diversos tamanhos de partículas, adimensionalizados com a escala da turbulência são apresentados na Figura 1.3. O valor da intensidade da turbulência ( $I$ ) tem, por exemplo, aplicação imediata em modelos de turbulência como  $k - \epsilon$ .



**FIGURA 1.3-Variação da intensidade da turbulência com o tamanho da partícula.**

Da Figura 1.3 pode-se observar que a interação vórtice-partícula tem grande influência sobre a turbulência na região onde o tamanho da partícula tem dimensões semelhantes à

escala dos vórtices, sendo esta a região de concentração dos estudos desse trabalho. As condições do escoamento para os experimentos mostrados na Figura 1.3 são apresentados na Tabela 1.

**TABELA 1- Condições de escoamento para os experimentos da Figura 1.3.**

| Referência                   | Geometria       | $r_p/r_f$ | $a_p/a_f$            | Re     |
|------------------------------|-----------------|-----------|----------------------|--------|
| Hetsroni e Sokolov (1971)    | Jato            | 775       | $2,5 \times 10^{-6}$ | 83300  |
| Modarress et al. (1984 a)    | Jato            | 2500      | $2,0 \times 10^{-4}$ | 13300  |
| Shuen et al. (1984 a)        | Jato            | 2200      | $2,0 \times 10^{-4}$ | 19000  |
| Zisselmar e Molerus (1979)   | Tubo horizontal | 2,5       | 0,04                 | 100000 |
| Modarress et al. (1984 b)    | Tubo vertical   | 2500      | $3,5 \times 10^{-4}$ | 17000  |
| Levy e Lockwood (1981)       | Jato            | 2000      | $6,0 \times 10^{-4}$ | 20000  |
| Maeda et al. (1980)          | Tubo vertical   | 7500      | $1,0 \times 10^{-4}$ | 20000  |
| Lee e Durst (1982)           | Tubo vertical   | 2080      | $1,0 \times 10^{-5}$ | 8000   |
| Parthasarathy e Faeth (1987) | Jato            | 2,5       | 0,03                 | 9000   |
| Tsuji et al. (1984)          | Tubo vertical   | 850       | $5,0 \times 10^{-5}$ | 22500  |
| Tsuji e Morikawa (1982)      | Tubo horizontal | 833       | $4,0 \times 10^{-5}$ | 20000  |

Dentro do conceito de modulação da turbulência, Yuan e Michaelides (1992) apresentaram uma análise teórica da variação da energia cinética turbulenta em escoamentos bifásicos turbulentos, validando estes resultados com os experimentos de Levy e Lockwood (1981). Uma revisão do estado da arte da modulação da turbulência é apresentada por Crowe et al. (1996).

Young e Leeming (1997) propuseram uma análise teórica para escoamentos turbulentos com alta concentração de partículas, analisando a velocidade de deposição e a sua influência sobre as características turbulentas do escoamento.

Diversas análises da modulação da turbulência são comparadas por Kenning e Crowe (1997), onde alguns pontos são contestados e um modelo de balanço de energia entre as fases é proposto.

A grande maioria dos resultados foi obtida experimentalmente, para o caso de partículas sólidas dispersas em uma corrente turbulenta. Mashayek (1998), é uma exceção da regra, pois apresentou resultados para *spray*, obtidos por simulação direta.

Resultados experimentais obtidos por anemometria laser foram apresentados por Kaftori et al. (1998), sendo incluídos os efeitos de parede sobre a turbulência em escoamentos bifásicos. Boivin et al. (1998) com resultados numéricos obtidos por simulação direta, obtiveram o espectro de energia cinética para o escoamento bifásico turbulento. Shivshankar e Collins (1999), também a partir de simulação direta analisaram a modulação da turbulência levando em conta o efeito do choque entre partículas.

Ooms e Jansen (2000) apresentaram uma teoria para a modulação da turbulência com extrapolação dos resultados obtidos para o escoamento monofásico de fluido. Lun (2000) apresentou um modelo de turbulência para o escoamento bifásico com fechamento em dois pontos baseado no modelo  $k - w$ .

Crowe (2000) apresentou um modelo empírico de modulação da turbulência baseado em resultados experimentais no qual ele propõe a idéia de livre caminho médio das partículas da fase dispersa. O modelo é apropriado para uma faixa específica de escoamentos com características bem particulares, uma vez que não pode ocorrer decréscimo na intensidade da turbulência.

O estudo da modulação da turbulência envolve uma série de conhecimentos referentes às fontes de geração e destruição da turbulência que são de difícil identificação. Yang et al. (2000) apresentaram resultados experimentais da interação de vórtices gerados na esteira de perfis aerodinâmicos e, fizeram uma extensão para partículas apresentando estes efeitos como uma das fontes de geração da turbulência. Dentro do mesmo conceito, Meiburg et al. (2000) analisaram a variação do campo de vorticidade provocada pela presença de partículas, procurando conhecer os pontos de geração da vorticidade.

O estudo da influência das partículas na turbulência da fase contínua tem levado um grande número de pesquisadores a desenvolver técnicas e modelos apropriados para uma faixa cada vez maior de aplicações. Yamamoto et al. (2001) aplicaram um método misto de simulação lagrangeano-euleriano para analisar o efeito da partícula na turbulência, este método tem-se mostrado bastante importante, sobretudo nos casos com alta densidade de partículas. Zhang e Reese (2001) apresentaram um modelo completo para a análise dos escoamentos bifásicos com efeitos da colisão entre partículas, incluindo também os efeitos da modulação da turbulência.

Outros modelos tem sido desenvolvidos em casos limites de escoamentos visando levar em conta os efeitos de destruição da turbulência. Voth et al. (2002) mediram vórtices da turbulência em escalas de Taylor com número de Reynolds da ordem de  $140 \leq Re_1 \leq 970$ , com partículas no escoamento.

Escoamentos mais complexos, envolvendo instabilidades têm sido analisados. Laín et al. (2002) aplicaram um modelo tipo  $k - \epsilon$  para colunas de bolhas de vapor. Os resultados foram validados com anemometria laser. Da mesma forma que Aísa et al. (2002) aplicaram anemometria laser para analisar a concentração de partículas em escoamentos bifásicos. Ferrand et al. (2003) aplicaram anemometria laser para analisar jatos com concentrações de partículas de diferentes diâmetros.

Uma linha forte de análise da modulação da turbulência tem-se despontado, propondo modificações diretas sobre as equações de Navier-Stokes. L'vov et al. (2003) apresentaram um modelo de equações tipo Navier-Stokes para análise do escoamento bifásico, onde foi empregado modelos de fechamento para a turbulência semelhante àqueles do escoamento monofásico.

Dentro de um contexto bastante inovador, Zhang e Reese (2003) apresentam um modelo de análise dos escoamentos bifásicos levando-se em conta os efeitos sobre o coeficiente de arrasto. Por a idéia de se propor um modelo de escoamento turbulento com características

laminares e vórtices distribuídos é ainda recente, sendo pensada e desenvolvida no atual trabalho.

## **1.2-Objetivos do Trabalho:**

O trabalho engloba temas referentes à modelagem matemática e a física da turbulência. Nos objetivos busca-se compreender alguns pontos pouco explorados pela bibliografia analisada (modelagem da turbulência, interação vórtice-partícula e modulação da turbulência). Os principais temas deste trabalho podem ser separados em:

- 1) Modelagem dos efeitos da intermitência: os efeitos da intermitência são normalmente quantificados por curvas estatísticas de distribuição de velocidade dos vórtices em uma escala de tamanho. Dessa forma, busca-se obter expressão analítica para a forma dessas distribuições estatísticas, validadas com os experimentos. Isto nos permitirá conhecer quantos vórtice de determinada escala provavelmente atingem uma partícula em um escoamento turbulento.
- 2) Modelagem da interação vórtice-partícula: a interação de vórtice-partícula é modelada a partir da variação do coeficiente de arrasto provocada pela passagem do vórtice próximo à partícula. Busca-se modelar estes efeitos através de expressões analíticas obtidas em concordância com os resultados numéricos, os quais mostram os efeitos do vórtice sobre o coeficiente de arrasto de forma não-estacionária.
- 3) Modelagem dos efeitos de uma distribuição de vórtices sobre uma partícula: onde se conhecendo os efeitos de um vórtice sobre a partícula, busca-se analisar a ação de uma distribuição de vórtices sobre a partícula. Assim, pode-se ter um esboço do efeito da turbulência produzida sobre um conjunto de partículas.

Dessa forma, com os três objetivos principais citados acima, podem-se obter resultados referentes à modulação da turbulência que permitem o desenvolvimento de modelos que descrevam, juntamente com modelagens numéricas, aspectos dos escoamentos bifásicos turbulentos.

### **1.3-Organização do Trabalho:**

O trabalho está escrito em cinco capítulos:

- No primeiro Capítulo, referente à introdução, é apresentado uma revisão bibliográfica do trabalho, o estado da arte, os principais resultados relacionados com o estudo da turbulência em escoamentos bifásicos e suas as aplicações;
- No segundo Capítulo, referente à estatística da turbulência, faz-se uma análise da intermitência nos escoamentos turbulentos, onde expressões analíticas são obtidas para tais distribuições estatísticas;
- O terceiro Capítulo é referente à modulação da turbulência. Neste Capítulo busca-se mostrar os principais efeitos das partículas sobre a turbulência e vice-versa, além do equacionamento para o escoamento bifásico;
- No quarto Capítulo, interação vórtice-partícula, busca-se o desenvolvimento de uma formulação geral baseado em resultados numéricos obtidos pela modelagem euleriana da dinâmica dos fluidos;
- No quinto e último Capítulo são apresentados os resultados gerais e as conclusões.

## CAPÍTULO 2

### ESTATÍSTICA DA TURBULÊNCIA

Neste Capítulo é desenvolvida uma análise matemática da função de distribuição de probabilidade da flutuação da velocidade em um escoamento turbulento isotrópico, a partir da diferença do valor da velocidade tomado entre pontos com distâncias situadas dentro da faixa inercial do espectro de distribuição de energia cinética, a qual foi definida em 1941 por Kolmogorov. Conforme mostrado em Frisch (1995), a flutuação no campo de velocidades é da ordem da velocidade tangencial de rotação dos vórtices, levando à hipótese de se empregar a função de distribuição de probabilidade da flutuação da velocidade como a função de distribuição de probabilidade da velocidade tangencial de rotação dos vórtices.

Com base no modelo de Castaing et al. (1990), é desenvolvida uma expressão analítica baseada no teorema de Watson para a função de distribuição de probabilidade da flutuação da velocidade. Esta expressão é validada para valores experimentais apresentados por Castaing et al. (1990) e Takahashi et al. (1998).

#### **2.1-Aspectos Fundamentais:**

A função de distribuição de probabilidade referente à velocidade tangencial de rotação dos vórtices  $\mathbf{v}_\ell$  (considerando a hipótese citada em Frisch (1995)) é obtida a partir do módulo da diferença de velocidades medida entre dois pontos no escoamento, separados por uma distância  $\ell$ , a qual está situada dentro da faixa inercial do espectro de energia cinética definida na teoria de Kolmogorov de 1941. Este tipo de análise é baseado nas flutuações do campo de velocidade do escoamento, que permite obter de forma experimental a função de distribuição de probabilidade da velocidade tangencial de rotação dos vórtices com tamanho  $\ell$  (considerando a hipótese expressa por Frisch (1995)).

Uma das primeiras teorias referentes à obtenção da função de distribuição de probabilidade da velocidade tangencial de rotação dos vórtices distribuídos em um escoamento turbulento

é devido a Kolmogorov em 1962 (ver Frisch (1995)). Esta teoria é baseada em duas hipóteses, as quais são descritas a seguir. A primeira hipótese estabelece uma distribuição lognormal para a taxa média de dissipação de energia associada a vórtices de tamanho  $\ell$ , sendo representada por  $e_\ell^*$ . Dessa forma, a distribuição de  $e_\ell^*$  é uma função das escalas de tamanho dos vórtices, denominadas escalas de Richardson (ver Frisch (1995)). A segunda hipótese define uma taxa de transferência de energia  $e_\ell$ , que vai das grandes escalas em direção às pequenas escalas. Esta energia transferida entre as escalas de vórtices é definida por Kraichnan (1974) a partir da variância de  $\ln(e_\ell/e_{\ell_0})$ , sendo  $\ell_0$  a escala integral do problema.

A expressão para a variância de  $\ln(e_\ell/e_{\ell_0})$  foi estabelecida, anteriormente, por Kolmogorov (1961) como:

$$\left\langle \frac{\overline{e_\ell}}{\overline{e_{\ell_0}}} \frac{\overline{\overline{e_\ell}}}{\overline{\overline{e_{\ell_0}}}} - \left\langle \frac{\overline{e_\ell}}{\overline{e_{\ell_0}}} \frac{\overline{\overline{e_\ell}}}{\overline{\overline{e_{\ell_0}}}} \right\rangle^2 \right\rangle = L^2 = L_0^2 - m \ln \frac{\overline{e_\ell}}{\overline{e_{\ell_0}}}. \quad (2.1)$$

O símbolo  $\langle \rangle$  indica o valor médio para uma distribuição contínua de  $\ln(e_\ell/e_{\ell_0})$ , sendo  $m$  uma constante universal.  $L_0$  é uma constante que corresponde ao valor de  $L$  para  $\ell/\ell_0 \rightarrow 1$ .

Na ausência de uma teoria precisa, o teste proposto para as hipóteses Kolmogorov-Oboukhov baseou-se nos momentos da função de distribuição de probabilidade. Com isso, tem-se a seguinte expressão para momento da função de distribuição de probabilidade:

$$\frac{\langle (\overline{v_\ell})^n \rangle}{\langle \overline{v_{\ell_0}^2} \rangle^{\frac{n}{2}}} \mu \frac{\overline{e_\ell}}{\overline{e_{\ell_0}}} \frac{\overline{\overline{e_\ell}}}{\overline{\overline{e_{\ell_0}}}} \quad (2.2)$$



onde  $n \hat{I}_+^*$ , e representa a ordem do momento da função de distribuição de probabilidade e  $z_n$  é um expoente (ver Frisch (1995)) dado por:

$$z_n = \frac{1}{3}n - \frac{1}{9}c(n-3)n, \quad (2.3)$$

onde  $c$  é o valor médio da distribuição gaussiana de  $e_\ell$ .

De acordo com (2.3),  $z_n = z_n(\mathbf{n})$  é uma função decrescente de  $\mathbf{n}$  representada por um polinômio do segundo grau.

Para (2.3), seja dois inteiros pares representados por  $2\mathbf{p}$  e  $2\mathbf{p} + 2$ , tem-se que:

$$z_{2\mathbf{p}} > z_{2\mathbf{p}+2}. \quad (2.4)$$

Aplicando (2.2) para  $2\mathbf{p}$  e  $2\mathbf{p} + 2$ , obtém-se a relação dada como:

$$\frac{\langle (\mathbf{v}_\ell)^2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_{\ell_0}^2 \rangle} \mu \frac{\xi_\ell}{\xi_{\ell_0}} \frac{\bar{\theta}^{-(z_{2\mathbf{p}} - z_{2\mathbf{p}+2})}}{\bar{\theta}}. \quad (2.5)$$

Como (2.4) é verdadeira e  $\ell \ll \ell_0$ , então (2.5) leva a seguinte conclusão:

$$\langle (\mathbf{v}_\ell)^2 \rangle \otimes \mathbb{Y}, \quad (2.6)$$

o que não é verdadeiro, mostrando a inconsistência de (2.3).

Em função dessas inconsistências, muitos autores têm proposto novas expressões e teorias para descrever a função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices. Alguns

experimentos e teorias buscam empregar os resultados obtidos por Kolmogorov (1961) e Oboukhov (1961).

Mandelbrot (1974) trabalhou com uma distribuição lognormal para variância da taxa de transferência de energia entre as escalas, buscando mostrar que a lognormalidade baseado no conceito de cascata de energia auto-similar desenvolvido por Yaglom (1966) é inconsistente. Kraichnan (1973) e Van Atta e Antonia (1980) consideram a distribuição lognormal para variância da taxa de transferência de energia entre as escalas e buscaram explicar os efeitos de assimetria da função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices. Anselmet et al. (1984) e Antonia et al. (1982) mediram experimentalmente os coeficientes dos momentos estatísticos da função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices. O trabalho de Gargett et al. (1984) comprova experimentalmente as escalas de dissipação de energia propostas por Kolmogorov.

Um dos trabalhos mais importantes referentes à função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices foi desenvolvido por Castaing et al. (1990), onde os autores mostram claramente as inconsistências do modelo baseado em uma distribuição lognormal para variância da taxa de transferência de energia entre as escalas, proposto por Kolmogorov. No mesmo trabalho foi proposto um modelo estatístico para a função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices com formato não-gaussiano, o qual foi validado experimentalmente para jatos e túneis de vento. Dentro deste contexto Beck (2003) propôs uma teoria estatística conhecida por superestatística, a qual leva a resultados semelhantes àqueles obtidos experimentalmente por Castaing et al. (1990), descritos anteriormente.

Vincent e Meneguzzi (1991) a partir de simulação numérica direta, obtiveram a função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices com formato não-gaussiano, comprovando o modelo proposto por Castaing et al. (1990). Kailasnath et al. (1992), mostra comparações entre experimentos e desenvolvimentos teóricos baseados na teoria dos fractais, aplicada ao estudo da turbulência conforme é mostrado também em Frisch (1995).

Tabeling et al. (1996) mostra a partir de medidas experimentais a relação entre o número de Reynolds calculado na escala de Taylor, o qual foi definido na introdução, e os momentos estatísticos de ordem 3 e 4, como forma de verificação das hipóteses de Kolmogorov.

Dentre os principais trabalhos experimentais, que estão associados com medidas de incrementos de velocidades para obtenção das funções de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices, pode-se citar Noullez et al. (1997), Guj e Camussi (1999), Pearson e Antonia (2001). Esses autores empregam técnicas intrusivas e não intrusivas para elucidar o comportamento não gaussiano destas funções de distribuição.

Como o objetivo principal deste Capítulo está voltado para a modelagem da função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices no escoamento turbulento isotrópico, a caracterização desses vórtices normalmente é obtida pela circulação, definida como:

$$\mathbf{G}_\ell = \oint_{\mathbf{c}} \bar{\mathbf{v}}_\ell \times d\bar{\mathbf{\ell}}. \quad (2.7)$$

onde  $\bar{\mathbf{d}\ell}$  é o comprimento elementar na forma vetorial do circuito  $\mathbf{c}$  que contém o vórtice de tamanho  $\ell$ . Como mostrado a seguir, alguns autores têm desenvolvido técnicas apropriadas para a análise das distribuições de circulação dos vórtices. Migdal<sup>a b</sup> (1993) desenvolveu uma técnica conhecida como equação do *Loop*, a qual é extremamente apropriada para obtenção das distribuições de circulação. Sreenivasan et al. (1995) fazem a comparação de resultados numéricos com experimentais obtidos a partir de velocimetria da imagem de partículas, onde é mostrado o efeito do estiramento de vórtices na função de distribuição de circulação. Em outro estudo numérico, Cao et al. (1996) fazem uma análise sobre os resultados da função de distribuição de circulação obtidos por meio da simulação direta das equações de Navier-Stokes. Por outro lado, Moriconi e Takakura (1998) e Moriconi (2004), aplicando a técnica de Migdal<sup>a b</sup> (1993), obtiveram as funções de distribuição de circulação a partir da análise qualitativa da equação do *Loop*.

De forma mais geral, Sreenivasan et al. (1995), fizeram uma revisão geral dos aspectos envolvidos na obtenção das funções de distribuição de circulação e de velocidade de rotação dos vórtices, mostrando os pontos críticos das formas de distribuição. Um trabalho interessante é devido a Jiménez (1998), onde é feita uma análise do comportamento não-gaussiano destas funções de distribuição.

Para finalizar, como citado acima, existem duas formas básicas para a obtenção das funções de distribuição de circulação. A primeira, a qual será seguida nesse Capítulo, baseia-se na determinação da função de distribuição de circulação a partir da distribuição de velocidade de rotação dos vórtices. A segunda baseia-se na determinação direta da distribuição de circulação.

Neste Capítulo busca-se obter uma expressão analítica aproximada para a função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices e, conseqüentemente, para a circulação visando a distribuição de vórtices em um escoamento turbulento com espectro de energia dentro da faixa inercial. O Capítulo é organizado da seguinte forma, após a introdução: na seção 2.2 é apresentada uma descrição da teoria da Superestatística desenvolvida por Beck (2003); na seção 2.3 é apresentado o modelo de função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices sugerida por Castaing et al. (1990), o qual é comparado com o modelo lognormal da Superestatística; na seção 2.4 são feitas a compilação dos resultados e a análise numérica referentes à função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices bem como o desenvolvimento analítico para a expressão da função de distribuição de probabilidade de velocidade de rotação dos vórtices; na seção 2.5 é feita uma análise da relação entre o tamanho dos vórtices e a função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices.

## **2.2-Teoria da Superestatística:**

Segundo Beck (2003), a Superestatística é uma superposição de duas estatísticas diferentes que controlam um fenômeno físico, o qual apresenta um parâmetro de flutuação em um estado estacionário, tal como a turbulência isotrópica. A definição matemática para a

Superestatística é encontrada em Beck (2003) e Beck (2004a,b). A Superestatística é aplicada na análise de fenômenos físicos em condições fora do equilíbrio, com flutuações espaciais e temporais de suas variáveis.

Considerando-se o caso acima, com uma grandeza intensiva  $b$  constante que na turbulência isotrópica é representada pela função de flutuação da energia transferida entre as escalas de vórtices, pode-se empregar os fatores de Boltzmann para escrever:

$$\mathbf{b}(b) = e^{-bE}, \quad (2.8)$$

sendo  $E$  a energia efetiva (p. ex., energia da turbulência) nas proximidades da posição de análise. Por outro lado, se  $\mathbf{f}(b)$  é uma função de distribuição de  $b$  para um conjunto de eventos associados às posições dentro do domínio de análise, bgo o valor médio para o fator de Boltzmann fica expresso como:

$$\mathbf{B}(E) = \int_0^{\infty} \mathbf{f}(b) e^{-bE} db. \quad (2.9)$$

Segundo Beck (2003), a Superestatística pode ser classificada em duas formas:

1. Superestatística A, onde a constante normalização é independente de  $b$ , de forma que a função de distribuição de probabilidade de  $E$  é dada como:

$$\mathbf{p}(E) = \frac{\mathbf{B}(E)}{\int_0^{\infty} \mathbf{B}(E) dE} = \frac{1}{\mathbf{Z}} \int_0^{\infty} \mathbf{f}(b) e^{-bE} db, \quad (2.10)$$

sendo  $\mathbf{Z}$  a constante de normalização;

2. Superestatística B, onde a constante de normalização é dependente de  $b$ , produzindo :

$$p(\mathbf{E}) = \int_0^{\infty} f(b) \frac{1}{Z(b)} e^{-b\mathbf{E}} db, \quad (2.11)$$

sendo  $Z(b)$  a constante de normalização.

Conforme faz Beck (2003), a probabilidade condicional de ocorrência de uma variável  $\mathbf{u}$  associada a um fenômeno físico (p.ex. velocidade dos vórtices), que obedece uma equação dinâmica do tipo Langevin, pode ser dada por:

$$p(\mathbf{u}|b) = \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} b \mathbf{u}^2\right\}. \quad (2.12)$$

Dessa forma expressão para a função de distribuição de  $\mathbf{u}$  é:

$$p(\mathbf{u}) = \int_0^{\infty} p(\mathbf{u}|b) f(b) db. \quad (2.13)$$

A teoria proposta por Beck (2003), a qual é validada a partir dos resultados de Castaing et al. (1990) é criticada por Lavenda (2003) como sendo apenas parte de uma teoria mais geral.

### 2.2.1- Superestatística com Distribuição Lognormal:

Seja uma distribuição lognormal de  $b$ , dada como:

$$f(b) = \frac{1}{bs\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln(b/m))^2}{2s^2}\right\}, \quad (2.14)$$

onde  $m$  e  $s$  são parâmetros.

Com isso, introduzindo-se as definições (2.12) e (2.14) em (2.13) tem-se que:

$$p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\pi s} \exp\left\{-\frac{1}{2s^2} \mathbf{u}^T \mathbf{u}\right\} \quad (2.15)$$

De forma geral, Beck (2004a) mostra que os momentos dessa distribuição podem ser obtidos como:

$$\langle \mathbf{u}^m \rangle = [(\mathbf{m} - 1)!] \mathbf{m}^{-m/2} \mathbf{w}^{(1/8)\mathbf{m}^2} \quad (2.16)$$

onde  $\mathbf{m}$  é a ordem do momento estatístico e  $\mathbf{w} \propto \mathbf{e}^{-s^2}$ , lembrando que ! indica fatorial.

### 2.3-Função de Distribuição de Velocidades para Elevados Números de Reynolds:

O modelo de Castaing et al. (1990) para a função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices é apresentado a seguir. Este modelo é válido para os escoamentos turbulentos dentro da faixa inercial, sendo baseado em variações da velocidade de rotação dos vórtices na forma adimensional ( $\mathbf{u}_\ell \propto \mathbf{v}_\ell / \sqrt{\langle \mathbf{v}_\ell^2 \rangle}$ ) para uma dada taxa de transferência de  $e_\ell$  e variações da própria taxa de transferência  $e_\ell$ . É interessante observar que a taxa de transferência  $e_\ell$  pode ser negativa, porém seu valor médio deve ser igual a taxa média de dissipação de energia  $e_\ell^*$ .

Assumindo uma distribuição gaussiana para  $\mathbf{u}_\ell$ , com  $e_\ell$  fixo, tem-se que:

$$p_{e_\ell}(\mathbf{u}_\ell) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\mathbf{u}_\ell^2}{2S^2}\right\} \quad (2.17)$$

onde  $S$  é a variância adimensional da distribuição.

De acordo com Castaing et al. (1990), as variações de  $S$  apresentam uma distribuição de probabilidade do tipo lognormal expressa como:

$$Q_1(s)ds = \frac{1}{l\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\ln^2(s/s_0)}{2l^2}\right] d \ln s, \quad (2.18)$$

onde  $l$  representa a variância adimensional de  $\ln S$  e  $s_0 = e^{\frac{l^2}{2}}$ .

Combinando as expressões (2.17) e (2.18) encontra-se a seguinte função de distribuição de probabilidade para  $u_\ell$ :

$$P_1(u_\ell) = \frac{1}{2\pi l} \exp\left[-\frac{u_\ell^2}{2s^2}\right] \exp\left[-\frac{\ln^2(s/s_0)}{2l^2}\right] \frac{ds}{s^2}. \quad (2.19)$$

### 2.3.1-Efeito do Estiramento de Vórtices:

De acordo com Castaing et al. (1990) e, conforme pode ser visto em Frisch (1995), Jiménez (1998) e Lesieur (2000), o fenômeno de estiramento dos vórtices é responsável pela transferência de energia entre as escalas de tamanho de vórtices (escalas de Richardson (ver Frisch (1995))). A função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices está associada a estas escalas na forma  $s \propto \mu (e_\ell \ell)^{\frac{1}{3}}$ .

A diferença de velocidade do escoamento, tomada entre dois pontos na direção da corrente principal, distanciados de valores próximos do tamanho ao vórtice ( $\sim \ell$ ), fornece a flutuação provocada pela turbulência. Neste trabalho, esta flutuação é considerada da ordem da velocidade de rotação do vórtice, a qual corresponde a  $v_\ell$ . A oposição entre os movimentos da corrente do escoamento e de rotação do vórtice provocam variações do diâmetro do vórtice da ordem  $\ell_c$  em intervalos de tempo da ordem de  $t_c$ . Dessa forma, se  $\ell_c > 0$ , isto corresponde a um aumento do tamanho do vórtice produzido por  $v_\ell$  positivo e,



inversamente, se  $\ell_c < 0$  isto corresponde a uma diminuição do tamanho do vórtice produzido por  $\mathbf{v}_\ell$  negativo. Como  $S$  é incrementado com  $\ell$ , logo a expressão (2.17) deve ser não é simétrica, com o lado negativo mais aberto que o positivo.

Segundo Castaing et al. (1990), este efeito pode ser introduzido na expressão (2.17) da seguinte forma:

$$P_{e_\ell}(\mathbf{u}_\ell) \propto \exp\left[-\frac{u_\ell^2}{2S^2}\right] \left[1 + \frac{d \ln S^2}{d\ell} \ell_c \frac{u_\ell}{S}\right], \quad (2.20)$$

com  $(d \ln S^2 / d\ell) \ell_c$  sendo dado na seguinte forma:

$$\frac{d \ln S^2}{d\ell} \ell_c = a_s \frac{u_\ell / S}{(1 + u_\ell^2 / S^2)^{1/2}}. \quad (2.21)$$

Na expressão acima  $a_s$  representa um parâmetro positivo.

Introduzindo (2.20) e (2.21) em (2.19), tem-se:

$$P_{a_s,1}(\mathbf{u}_\ell) = \frac{A(a_s)}{2\pi l} \exp\left[-\frac{u_\ell^2}{2S^2}\right] \left[1 + a_s \frac{u_\ell / S}{(1 + u_\ell^2 / S^2)^{1/2}}\right] \exp\left[-\frac{\ln^2(S/S_0)}{2l^2}\right] \frac{dS}{S}, \quad (2.22)$$

sendo  $A(a_s)$  uma constante de normalização.

### 2.3.2-Comparação entre as Expressões para a Função de Distribuição de Probabilidade para a Velocidade de Rotação dos Vórtices:

A função de distribuição de probabilidade para a velocidade de rotação dos vórtices baseada no modelo proposto por Castaing et al. (1990) é, de acordo com as definições de Beck (2003), uma superestatística.

Comparando a expressão (2.15) obtida por Beck (2004a) (diretamente da Superestatística) com a expressão (2.22) obtida por Castaing et al. (1990), verifica-se que elas representam variáveis, fisicamente, inversas. A expressão (2.15) é definida por uma integral em  $b$ , que de acordo com Beck (2003) é dado por  $b \propto \mu \ell^{\frac{3}{2}}$ , isto é, a potência inversa da taxa de transferência de energia entre as escalas dos vórtices; por outro lado a expressão (2.22) é definida por uma integral em  $s$ , que conforme Castaing et al. (1990) é dado por  $s \propto \mu (\ell)^{\frac{1}{3}}$ , ou seja, potência positiva da taxa de transferência de energia entre as escalas dos vórtices.

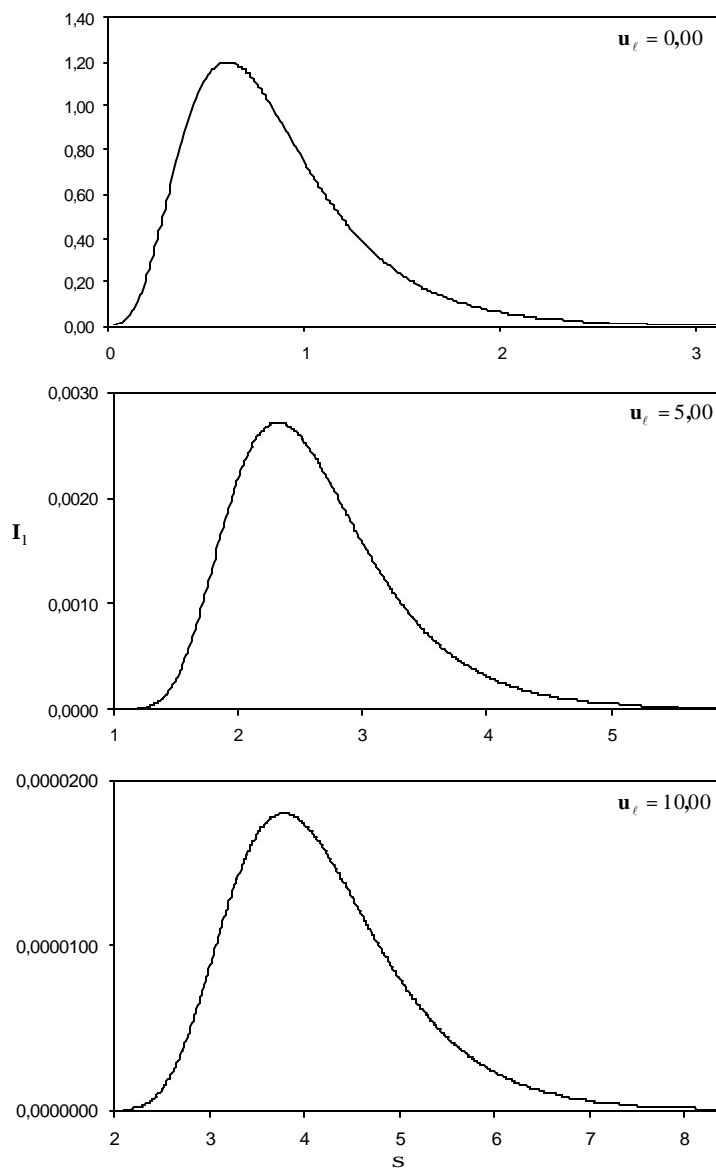
No aspecto estatístico, tendo em vista a expressão (2.20),  $s$  representa a variância de  $u_\ell$ , enquanto  $b$  (ver Beck (2003)) representa o inverso do quadrado da variância, conforme pode ser visto em (2.12). Com isto, é interessante colocar que o resultado apresentado por Castaing et al. (1990) é baseado em dados experimentais enquanto que aquele obtido por Beck (2004a) baseia-se na estatística de quantidades avaliadas indiretamente.

### 2.4-Análise Numérica e Analítica da Função de Distribuição:

O integrando da função de distribuição de probabilidade representada pela expressão (2.22) é expresso nesta forma:

$$I_1(s) = \frac{e^{-\frac{u^2}{2s^2} \left(1 + \frac{a_s}{\epsilon}\right) - \frac{u/s}{(1+u^2/s^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{[\ln(s/s_0)]^2}{2l^2}}}{s^2}. \quad (2.23)$$

A expressão (2.23) é mostrada nos gráficos da Figura (2.1) para velocidades adimensionais de rotação dos vórtices  $u_\ell$  iguais a 0,00 5,00 e 10,00 e com  $a_s = 0,18$ ,  $s_0 = 1,095918$  e  $l = 0,428$ .



**FIGURA 2.1-Integrando da função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices.**

Como pode ser observado o valor e a posição do ponto de inflexão variam com  $u_\ell$ .

A derivada primeira com relação a  $s$  da expressão (2.23) é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{d\mathbf{I}_1/ds}{\mathbf{I}_1/s} = \frac{\dot{\mathbf{u}}}{\mathbf{u}_\ell} \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{s} \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{\hat{\mathbf{e}}} + \frac{\mathbf{a}_s}{2} \frac{\mathbf{u}_\ell/s}{(1+\mathbf{u}_\ell^2/s^2)^{1/2}} - \frac{(\mathbf{u}_\ell/s)^2}{(1+\mathbf{u}_\ell^2/s^2)} \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{\dot{\mathbf{u}}} - \frac{\ln(s/s_0)}{1^2} - 2 \frac{\dot{\mathbf{u}}}{\mathbf{u}_\ell}. \quad (2.24)$$

O ponto de inflexão da expressão (2.24) é obtido a partir de  $d\mathbf{I}_1/ds = 0$ , isto é:

$$\frac{\dot{\mathbf{u}}}{\mathbf{u}_\ell} \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{s} \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{\hat{\mathbf{e}}} + \frac{\mathbf{a}_s}{2} \frac{\mathbf{u}_\ell/s}{(1+\mathbf{u}_\ell^2/s^2)^{1/2}} - \frac{(\mathbf{u}_\ell/s)^2}{(1+\mathbf{u}_\ell^2/s^2)} \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{\dot{\mathbf{u}}} - \frac{\ln(s/s_0)}{1^2} - 2 = 0. \quad (2.25)$$

A expressão (2.25) obtida neste trabalho a partir da derivação da proposta de outros trabalhos existentes na literatura não é adequada para a determinação de  $s^*$ , pois é implícita em  $s$ . Portanto será buscada em uma expressão que tem um comportamento semelhante, obtida a partir de simplificações.

A expressão (2.25) pode ser simplificada, uma vez que:

$$\left| \frac{\mathbf{u}_\ell/s}{(1+\mathbf{u}_\ell^2/s^2)^{1/2}} \right| @ 1,0.$$

Com isso, a expressão (2.25) toma a seguinte forma:

$$\frac{\dot{\mathbf{u}}}{\mathbf{u}_\ell} \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{s} \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{\hat{\mathbf{e}}} + \mathbf{a}_s \frac{\mathbf{u}_\ell}{|\mathbf{u}_\ell|} \frac{\dot{\mathbf{u}}}{\dot{\mathbf{u}}} - \frac{\ln(s/s_0)}{1^2} - 2 = 0, \quad (2.26)$$

onde o termo  $\mathbf{u}_\ell/|\mathbf{u}_\ell|$  tem sido inserido para que seja respeitado o sinal da velocidade adimensional de rotação dos vórtices.

A comparação entre as expressões (2.25) e (2.26) é mostrado na Figura (2.2), para valores da velocidade adimensional de rotação dos vórtices de - 7,00, - 3,50, 0,00, 3,50 e 7,00 com  $\mathbf{a}_s = 0,18$ ,  $\mathbf{s}_0 = 1,095918$  e  $l = 0,428$ .

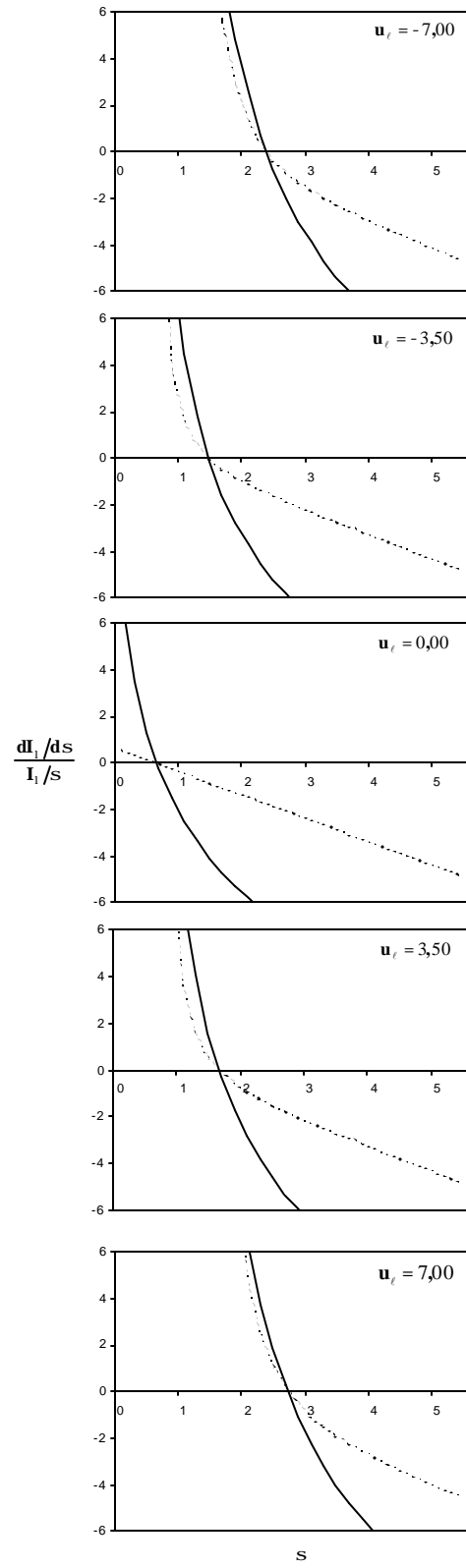
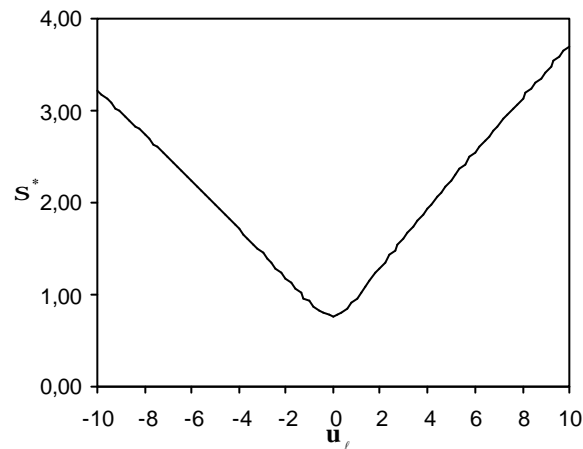


FIGURA 2.2-Comparação entre as expressões (2.25) (—) e (2.26) (-----).

Da Figura (2.2), tanto a expressão exata representada por (2.25), como a expressão aproximada representada por (2.26), fornecem o mesmo valor para a raiz da derivada primeira designada por  $s^*$ .

Os valores de  $s^*$  obtidos a partir da solução numérica da expressão (2.25), com o método da bisseção (erro da ordem de  $10^{-6}$ ) e com  $a_s = 0,18$ ,  $s_0 = 1,095918$  e  $l = 0,428$ , são apresentados na Figura (2.3).



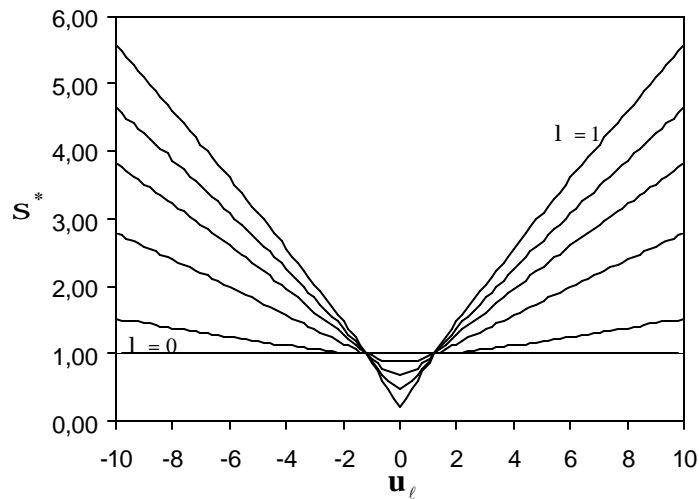
**FIGURA 2.3-Raízes da primeira derivada em função da velocidade adimensional de rotação dos vórtices.**

O valor de  $s^*$  para a velocidade adimensional de rotação dos vórtices igual a zero ( $u_\ell = 0,00$ ) é facilmente encontrada a partir da expressão (2.26), sendo dada como:

$$s^* = s_0 e^{-2l^2}. \quad (2.27)$$

Para os demais valores de velocidade adimensional de rotação dos vórtices, os valores de  $s^*$  podem ser obtidos conforme é mostrado a seguir.

Inicialmente a modelagem de  $s^*$  é feita para o caso de  $a_s = 0,0$ , isto é, caso com simetria. Os resultados apresentados na Figura (2.4) foram obtidos a partir da expressão (2.25) pelo método da bisseção com erro da ordem de  $10^{-6}$ .



**FIGURA 2.4-** Gráficos de  $s^*$  como função de  $u_\ell$  com  $0 \leq l \leq 1$ .

A expressão proposta neste trabalho para a modelagem das curvas  $s^* = s^*(u_\ell)$  com  $l$  constante é dada por:

$$s^* = a(l) \frac{|u_\ell|^3}{b(l) + u_\ell^2} + c(l), \quad (2.28)$$

onde  $a(l)$ ,  $b(l)$  e  $c(l)$  são coeficientes de forma definidos da seguinte maneira:

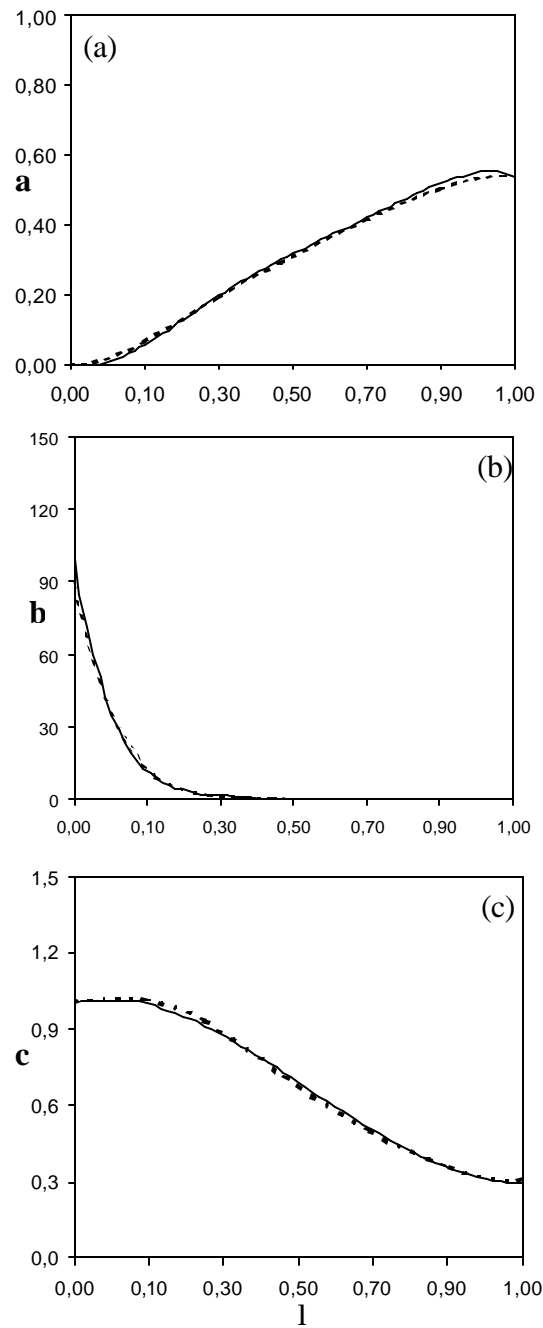
$$a = \frac{0,65l}{1 + 0,21^2}, \quad (2.29)$$

$$b = 120e^{-9,8(1+0,005)^{0,66}}, \quad (2.30)$$

$$c = \frac{1,02}{1 + 2,6(l - 0,06)^2}. \quad (2.31)$$

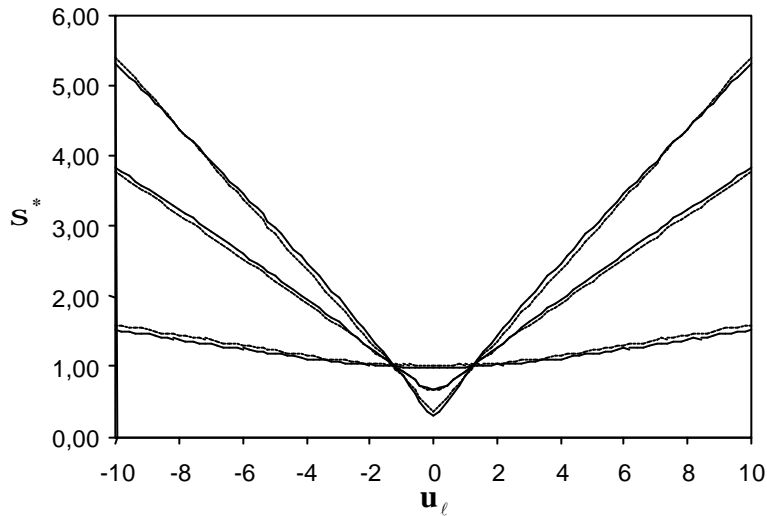


As Figuras (2.5a), (2.5b) e (2.5c) mostram o comportamento de  $a(l)$ ,  $b(l)$  e  $c(l)$  com  $l$ , para os resultados numéricos e aproximados pelas expressões (2.29), (2.30) e (2.31).



**FIGURA 2.5-** Coeficientes de forma para a expressão (2.29), resultados numérico (—) e modelo (-----).

O modelo obtido a partir das expressões (2.28), (2.29), (2.30) e (2.31) é mostrado na Figura (2.6) em comparação com os resultados numéricos mostrados na Figura (2.4), para  $l = 0,1, 0,5$  e  $0,9$ .

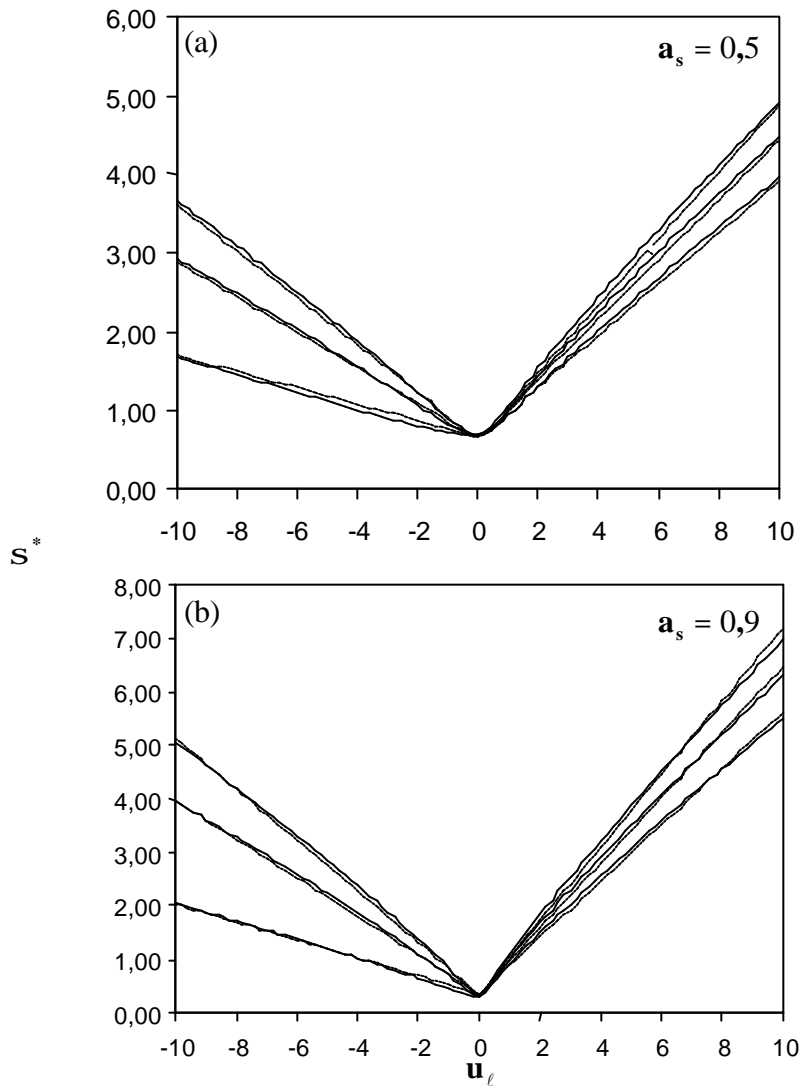


**FIGURA 2.6-Comparação dos resultados numérico (Figura 2.4)( —) e analítico (expressão(2.28)) (-----).**

Da mesma forma que feito para o caso com simetria, o caso sem simetria ( $a_s \neq 0$ ) é analisado mediante aos resultados numéricos de  $s^*$  obtidos a partir do método da bisseção. As Figuras (2.7a) e (2.7b) mostram estes valores para os dois parâmetros  $l = 0,1, 0,5$  e  $0,9$  e  $a_s = 0,5$  e  $0,9$ . Este trabalho propõe a seguinte expressão analítica que modela estas curvas é dada por:

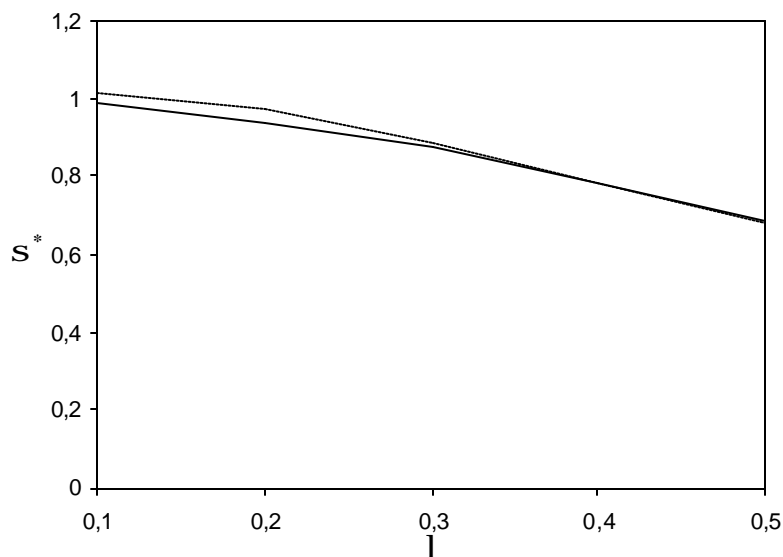
$$s^* = (1 + a_s \text{ sinal}(u_\ell))^{0.45} \hat{a}(l) \frac{|u_\ell|^3}{b(l) + u_\ell^2} + c(l) \hat{u}, \quad (2.32)$$

sendo  $\text{sinal}(u_\ell)$  a função sinal de  $u_\ell$ .



**FIGURA 2.7-Comparação dos resultados numérico (Figura 2.4) ( — ) e analítico (expressão(2.28)) ( - - - ) sem simetria.**

No limite, quando  $u_\ell \rightarrow 0$  a expressão (2.32) tende numericamente aos valores obtidos por (2.27), eliminando assim qualquer inconsistência numérica. A Figura 2.8 mostra o comportamento das expressões (2.32) e (2.27) para  $0,1 \leq u_\ell \leq 0,5$ , já que  $u_\ell$  é limitado experimentalmente por  $e^{\frac{1}{2}} \approx 1$  (ver Castaing et al. (1990)).



**FIGURA 2.8-Comparação dos resultados analítico (2.27) ( — ) e modelo (2.32)( ----).**

#### **2.4.1-Expressão Analítica para a Função de Distribuição de Probabilidade de Velocidade Rotação dos Vórtices:**

A integral representada pela expressão (2.22) tem a forma da Integral de Laplace, que na forma mais geral apresentada como:

$$I(h) = \int_a^b \exp\{-hf(t)\}f(t)dt . \quad (2.33)$$

Onde a função  $f(t)$ <sup>§</sup> cresce monotonicamente dentro do intervalo  $[a, b]$ . Tanto  $f$  quanto  $f'$  são funções que apresentam um comportamento assintótico com  $t \rightarrow a^+$ .  $h$  é um parâmetro positivo. Com isso, a análise de (2.33) pode ser reduzida à aplicação do teorema de Watson, cujo enunciado pode ser encontrado em Bleistein e Handelsman (1986).

<sup>§</sup> A correspondência com o atual trabalho é mostrada na página 47.

Em resumo, o teorema de Watson está associado com a monotonicidade de  $f$ , onde o único ponto crítico na integração é  $t = a$ .

Supondo-se que  $f(t)$  é não monotônica no intervalo  $[a, b]$  e que o mínimo absoluto de  $f$  neste intervalo ocorre exatamente em  $t = t_0$ ; ou simbolicamente,  $a < t_0 < b$ ,  $f'(t_0) = 0$  e  $f''(t_0) > 0$ , isto é,  $f'(t) \neq 0$  em  $[a, b]$  exceto em  $t_0$ ; isto implica em  $f$  diferenciável no intervalo  $[a, b]$ .

A Figura 2.9 mostra o comportamento qualitativo de  $y = \exp\{h[f(t) - f(t_0)]\}$  para vários valores de  $h$ , com uma função  $f$  genérica que satisfaça a condição acima. Na Figura (2.9) é aparente a natureza crítica do ponto  $t = t_0$ . De fato, quando  $h$  aumenta vê-se que a região onde  $y$  é significativamente diferente de zero vem a ser cada vez mais estreita em torno de  $t = t_0$ . Como  $f(t)$  não depende de  $h$ , logo o comportamento do produto  $f y$  deve ser semelhante ao de  $y$ . Assim, é razoável concluir que, na determinação do comportamento assintótico de  $\exp[hf(t_0)]I(h)$ , quando  $h \in \mathbb{R}$ , pode-se analisar somente o comportamento de  $f$  e  $f'$  nas vizinhanças de  $t = t_0$ .

Admitindo-se a conclusão acima correta, quando (2.33) é multiplicada por  $\exp[hf(t_0)]$ , tem-se:

$$\exp[hf(t_0)]I_0(h) = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} f(t) \exp\{-h[f(t) - f(t_0)]\} dt, \quad (2.34)$$

onde  $\epsilon$  é uma constante positiva muito pequena.

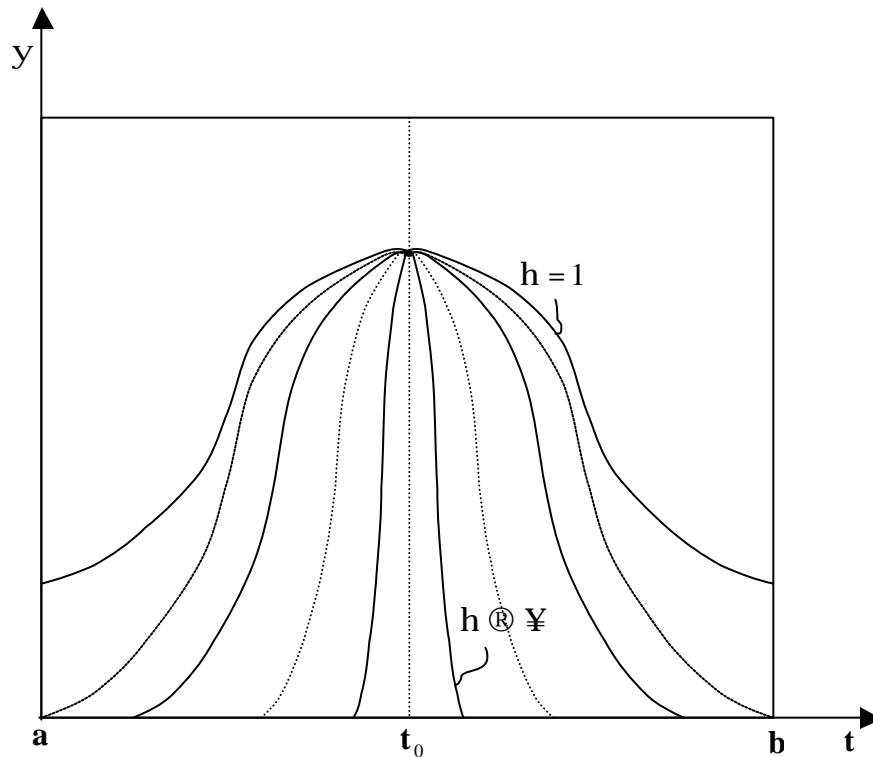
A suposição expressa por (2.34) implica em:

$$\lim_{h \in \mathbb{R}} \frac{I_0(h)}{I(h)} = 1. \quad (2.35)$$

Isto implica que os menores valores  $\epsilon$  correspondam aos maiores valores de  $h$ , de forma que (2.35) é respeitada.

Como  $\epsilon$  é pequeno, é razoável aproximar  $f(t) - f(t_0)$  e  $f'(t)$  dentro do intervalo  $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$  pelo primeiro termo não nulo de suas respectivas séries de Taylor em torno de  $t = t_0$ , isto é:

$$\exp[hf(t_0)]I_0(h) \gg \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} f(t_0) \exp\left[\frac{h}{2} f''(t_0)(t-t_0)^2\right] dt. \quad (2.36)$$



**FIGURA 2.9-Comportamento de  $y$  para os valores limites de  $h$ .**

Usando a condição imposta pela expressão (2.35) em (2.36), tem-se que:

$$I(h) \gg \exp[-hf(t_0)] f(t_0) \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \exp\left[\frac{h}{2} f''(t_0)(t-t_0)^2\right] dt. \quad (2.37)$$

Fazendo-se a seguinte substituição de variável:

$$t = \sqrt{\frac{h}{2} f''(t_0)}(t - t_0), \quad (2.38)$$

em (2.37), tem-se que:

$$I(h) \approx \exp[-hf(t_0)]f(t_0) \int_{-\sqrt{\frac{h}{2} f''(t_0)}}^{\sqrt{\frac{h}{2} f''(t_0)}} \frac{\exp\{-t^2\}}{\sqrt{\frac{h}{2} f''(t_0)}} dt. \quad (2.39)$$

Como  $h \rightarrow \infty$  mais rapidamente que  $e \rightarrow \infty$ , então os limites de integração de (2.39) podem ser trocados, de forma que:

$$\begin{aligned} I(h) &\approx \exp[-hf(t_0)]f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-t^2\}}{\sqrt{\frac{h}{2} f''(t_0)}} dt \\ &= \exp[-hf(t_0)]f(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{hf''(t_0)}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

A aproximação mostrada em (2.40) é bastante conhecida e, muitas vezes referenciada como fórmula de Laplace e sua aplicação é chamada de método de Laplace. Um certo cuidado foi tomado para não se empregar o símbolo de aproximação assintótica  $\sim$  na representação desta expressão, uma vez que nenhum erro foi estimado. O melhor que pode ser dito é que o lado direito de (2.40) representa o termo líder da expansão assintótica de (2.33) quando  $h \rightarrow \infty$ .

Há uma grande classe de métodos aplicados a análise integral porém, neste trabalho o método escolhido é referenciado como o teorema de Watson aplicado às integrais do tipo Laplace.

Reconsiderando a integral (2.33) e, as mesmas hipóteses sobre  $f$  e  $f'$  que levaram a obter a expressão (2.40), esta pode ser apresentada na seguinte forma:

$$\begin{aligned} I(h) &= \int_a^{t_0} \exp[-hf] f'(t) dt + \int_{t_0}^b \exp[-hf] f'(t) dt \\ &= I_a + I_b. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Como pode ser observado, a função  $f(t)$  é monotônica em cada um dos intervalos  $[a, t_0)$  e  $(t_0, b]$ , logo se  $f \in C^4[a, b]$  e  $f' \in C^2[a, b]$ , então pode-se escrever que:

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{2} f''(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(t_0)(t - t_0)^3 + O[(t - t_0)^4] \quad (2.42)$$

e

$$f'(t) = f'(t_0) + f''(t_0)(t - t_0) + O[(t - t_0)^2], \quad t \in t_0^+. \quad (2.43)$$

Considerando  $I_b(h)$  e, introduzindo-se a seguinte mudança de variável:

$$f(t) - f(t_0) = t, \quad (2.44)$$

tem-se a seguinte expressão:

$$I_b(h) = \exp[-hf(t_0)] \int_0^{f(b)-f(t_0)} G(t) \exp\{-ht\} dt, \quad (2.45)$$

onde

$$G(t) = \frac{f'(t)}{f''(t)}. \quad (2.46)$$



Para se aplicar o teorema de Watson, é necessário determinar a expansão assintótica em séries de potência de  $\mathbf{G}(t)$  quando  $t \rightarrow 0^+$ . Dessa forma, expandindo-se o numerador e o denominador da expressão (2.46) em séries de Taylor, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{f(t)}{f(t)} &= \frac{f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t - t_0)^2}{f(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{3}f^{iv}(t_0)(t - t_0)^3} \\
&= \frac{\frac{1}{1} \frac{f(t_0)}{f(t_0)(t - t_0)} + \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} + \frac{f''(t_0)(t - t_0)\ddot{u}}{2f(t_0)} \frac{1}{1 + \frac{f''(t_0)(t - t_0)}{2f(t_0)} + \frac{f^{iv}(t_0)(t - t_0)^2 \ddot{u}}{6f(t_0)}}}{\frac{1}{1} \frac{f(t_0)}{f(t_0)(t - t_0)} + \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} + \frac{f''(t_0)(t - t_0)\ddot{u}}{2f(t_0)}} \\
&= \frac{\frac{1}{1} \frac{f(t_0)}{f(t_0)(t - t_0)} + \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} + \frac{f''(t_0)(t - t_0)\ddot{u}}{2f(t_0)}}{\frac{1}{1} \frac{f(t_0)}{f(t_0)(t - t_0)} + \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} + \frac{f''(t_0)(t - t_0)\ddot{u}}{2f(t_0)}} \\
&= \frac{\frac{1}{1} \frac{f(t_0)}{f(t_0)(t - t_0)} + \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} + \frac{f''(t_0)(t - t_0)\ddot{u}}{2f(t_0)}}{\frac{1}{1} \frac{f(t_0)}{f(t_0)(t - t_0)} + \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} + \frac{f''(t_0)(t - t_0)\ddot{u}}{2f(t_0)}} \\
&= \frac{f(t_0)}{f(t_0)(t - t_0)} + \frac{1}{1} \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} - \frac{f(t_0)f''(t_0)\ddot{u}}{2f^2(t_0)} + \\
&\quad + \frac{1}{1} \frac{f''(t_0)}{2f(t_0)} + \frac{f(t_0)f''^2(t_0)}{4f^3(t_0)} - \frac{f(t_0)f^{iv}(t_0)}{6f^2(t_0)} - \frac{f'(t_0)f''(t_0)\ddot{u}}{2f^2(t_0)}(t - t_0) + \\
&\quad + \frac{1}{1} \frac{f'(t_0)f''^2(t_0)}{4f^3(t_0)} - \frac{f'(t_0)f^{iv}(t_0)}{6f^2(t_0)} - \frac{f''(t_0)f''(t_0)\ddot{u}}{4f^2(t_0)}(t - t_0)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{1} \frac{f''(t_0)f''^2(t_0)}{8f^3(t_0)} - \frac{f''(t_0)f^{iv}(t_0)\ddot{u}}{12f^2(t_0)}(t - t_0)^3. \quad (2.47)
\end{aligned}$$

Mantendo-se as mesmas hipóteses sobre  $f$  e  $\mathbf{f}$  que levaram a obter a expressão (2.40), juntamente com a definição (2.44), a expressão (2.42) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{1}{6}f'''(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0)^3 + \frac{1}{2}f''(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0)^2 - \mathbf{t} = 0. \quad (2.48)$$

Admitindo-se que  $\frac{1}{6}f'''(\mathbf{t}_0) \ll 1$  em (2.48), tem-se:

$$e(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0)^3 + \frac{1}{2}f''(\mathbf{t}_0)(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0)^2 - \mathbf{t} = 0, \quad (2.49)$$

onde  $e$  é uma constante positiva muito pequena.

Por outro lado, inserindo perturbações no comportamento de  $(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0)$  a partir de uma série de potências de  $e$ , de forma que como:

$$(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0) = D\mathbf{t}_0 + eD\mathbf{t}_1 + e^2D\mathbf{t}_2 + \dots. \quad (2.50)$$

Assim, introduzindo-se (2.50) em (2.49) e abandonando as potências de  $e$  superiores a 2, encontra-se as seguintes expressões para os coeficientes  $D\mathbf{t}_i$  ( $i = 0, 1, 2 \dots$ ):

$$D\mathbf{t}_0 = \frac{\mathbf{t} - \mathbf{t}_0}{f''(\mathbf{t}_0)} \quad (2.51)$$

$$D\mathbf{t}_1 = -\frac{2\mathbf{t}}{f''(\mathbf{t}_0)} \quad (2.52)$$

$$Dt_2 = \frac{\alpha}{\xi} \frac{50t^3 \ddot{\theta}^{\frac{1}{2}}}{f^{\alpha^2}(t_0)^{\frac{1}{\theta}}} \quad (2.53)$$

Estas expressões podem ser substituídas em (2.50), levando a:

$$(t - t_0) = \frac{\alpha}{\xi} \frac{2t \ddot{\theta}^{\frac{1}{2}}}{f^{\alpha}(t_0)^{\frac{1}{\theta}}} - e \frac{2t}{f^{\alpha^2}(t_0)} + e^2 \frac{\alpha}{\xi} \frac{50t^3 \ddot{\theta}^{\frac{1}{2}}}{f^{\alpha^2}(t_0)^{\frac{1}{\theta}}} + \dots \quad (2.54)$$

Fazendo  $e = \frac{1}{6} f^{\alpha}(t_0)$  na expansão acima, tem-se finalmente a seguinte expressão para

$(t - t_0)$ :

$$(t - t_0) = \frac{\alpha}{\xi} \frac{2t \ddot{\theta}^{\frac{1}{2}}}{f^{\alpha}(t_0)^{\frac{1}{\theta}}} - \frac{1}{3} \frac{f^{\alpha}(t_0)t}{f^{\alpha^2}(t_0)} + \frac{\alpha}{\xi} \frac{25}{648} \frac{f^{\alpha^2}(t_0)t^3 \ddot{\theta}^{\frac{1}{2}}}{f^{\alpha^2}(t_0)^{\frac{1}{\theta}}} + \dots \quad (2.55)$$

Substituindo a expressão (2.55) em (2.46), obtém-se:

$$\mathbf{G}(t) = \frac{f(t_0)}{\sqrt{2f^{\alpha}(t_0)}} t^{-\frac{1}{2}} + \frac{\dot{1} f^{\alpha}(t_0)}{\dot{1} f^{\alpha}(t_0)} - \frac{f(t_0)f^{\alpha}(t_0)\ddot{u}}{3f^{\alpha^2}(t_0)\dot{p}} + \mathbf{O}\left(t^{\frac{1}{2}}\right), \quad (2.56)$$

com  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Efetuando-se as operações de integração em (2.45) após introduzir-se (2.56), chega-se a:

$$\mathbf{I}_b(h) = \sqrt{\frac{p}{2hf^{\alpha}(t_0)}} f(t_0) \exp[-hf(t_0)] + \frac{\dot{1} f^{\alpha}(t_0)}{\dot{1} f^{\alpha}(t_0)} - \frac{f(t_0)f^{\alpha}(t_0)\ddot{u}}{3f^{\alpha^2}(t_0)\dot{p}} \frac{\exp[-hf(t_0)]}{h} + \mathbf{O}\left[\frac{\alpha \exp[-hf(t_0)] \ddot{\theta}^{\frac{1}{2}}}{\xi h^{\frac{3}{2}}}\right]. \quad (2.57)$$

Analizando  $I_a(h)$ , de forma análoga a  $I_b(h)$ , tem-se que:

$$I_a(h) = - \exp[-hf(t_0)] \int_0^{f(a)-f(t_0)} G(t) \exp[-ht] dt, \quad (2.58)$$

onde  $G(t)$  é dado como:

$$G(t) = \frac{f(t_0)}{\sqrt{2f'(t_0)}} t^{-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2} f''(t_0)}{\frac{1}{2} f'(t_0)} - \frac{f(t_0) f''(t_0) \ddot{u}}{3f'(t_0)^{\frac{3}{2}}} + O\left(t^{\frac{1}{2}}\right), \quad (2.59)$$

com  $t \in 0^+$ .

Com isso, tem-se que:

$$I_a(h) = \sqrt{\frac{p}{2hf'(t_0)}} f(t_0) \exp[-hf(t_0)] - \frac{\frac{1}{2} f''(t_0)}{\frac{1}{2} f'(t_0)} - \frac{f(t_0) f''(t_0) \ddot{u} \exp[-hf(t_0)]}{3f'(t_0)^{\frac{3}{2}} h} + O\left(\frac{\exp[-hf(t_0)] \ddot{u}}{h^{\frac{3}{2}}}\right). \quad (2.60)$$

Finalmente, somando-se (2.57) e (2.60), encontra-se a expressão para a integral definida em (2.40), isto é:

$$I(h) = \sqrt{\frac{2p}{hf'(t_0)}} f(t_0) \exp[-hf(t_0)] + O\left(\frac{\exp[-hf(t_0)] \ddot{u}}{h^{\frac{3}{2}}}\right). \quad (2.61)$$

Definitivamente, a expressão obtida em (2.40) representa o termo líder da expansão assintótica de (2.33).

Finalmente, identificando a expressão (2.33) com a distribuição de velocidades dos vórtices proposta por Castaing et al. (1990) representada pela expressão (2.22), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t} &= \mathbf{s} & \mathbf{a} &= \mathbf{0} & \mathbf{b} &= \mathbf{Y} & \mathbf{t}_0 &= \mathbf{s}^* \\
 \mathbf{h} &= \frac{1}{\Gamma^2} & \mathbf{f}(\mathbf{t}) &= \frac{\ln^2(\mathbf{s}/\mathbf{s}_0)}{2} & \mathbf{f}(\mathbf{t}) &= \mathbf{e} \frac{-\frac{\mathbf{u}_\ell^2}{2\mathbf{s}^2} \left(1 + \mathbf{a}_s \frac{\mathbf{u}_\ell/\mathbf{s}}{(1 + \mathbf{u}_\ell^2/\mathbf{s}^2)^{1/2}}\right)^{1/2}}{\mathbf{s}^2}
 \end{aligned}$$

Com isso, (2.22) é colocada na forma de (2.40), e a solução (2.61) fica:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{a}_s, 1}(\mathbf{u}_\ell) = \mathbf{A}(\mathbf{a}_s) \mathbf{e} \frac{\frac{\mathbf{u}_\ell^2}{2\mathbf{s}^2} \left(1 + \mathbf{a}_s \frac{\mathbf{u}_\ell/\mathbf{s}^*}{(1 + \mathbf{u}_\ell^2/\mathbf{s}^{*2})^{1/2}} + \frac{[\ln(\mathbf{s}^*/\mathbf{s}_0)]^{1/2}}{2\Gamma^2}\right)^{1/2}}{\mathbf{s}^* \sqrt{2\mathbf{p}(1 - \ln(\mathbf{s}^*/\mathbf{s}_0))}}. \quad (2.62)$$

É importante salientar que a expressão (2.62) representa uma aproximação para a solução de (2.22) que será tanto mais próxima da solução exata quanto menor for  $\Gamma$ .

Uma rápida análise sobre o denominador de (2.62) permite estabelecer limites relativos a  $\mathbf{u}_\ell$ , de forma que  $\ln(\mathbf{s}^*/\mathbf{s}_0) < 1$  seja respeitado. Assim, tomando-se a expressão (2.26) e substituindo  $\ln(\mathbf{s}^*/\mathbf{s}_0) = 1$ , tem-se:

$$\frac{\mathbf{u}_\ell^2}{\mathbf{s}^*} \left(1 + \mathbf{a}_s \frac{\mathbf{u}_\ell/\mathbf{s}^*}{(1 + \mathbf{u}_\ell^2/\mathbf{s}^{*2})^{1/2}} + \frac{1}{2\Gamma^2}\right)^{1/2} - 2 = 0. \quad (2.63)$$

Inserindo-se a definição de  $\mathbf{s}_0$  em  $\ln(\mathbf{s}^*/\mathbf{s}_0) = 1$ , obtém-se:

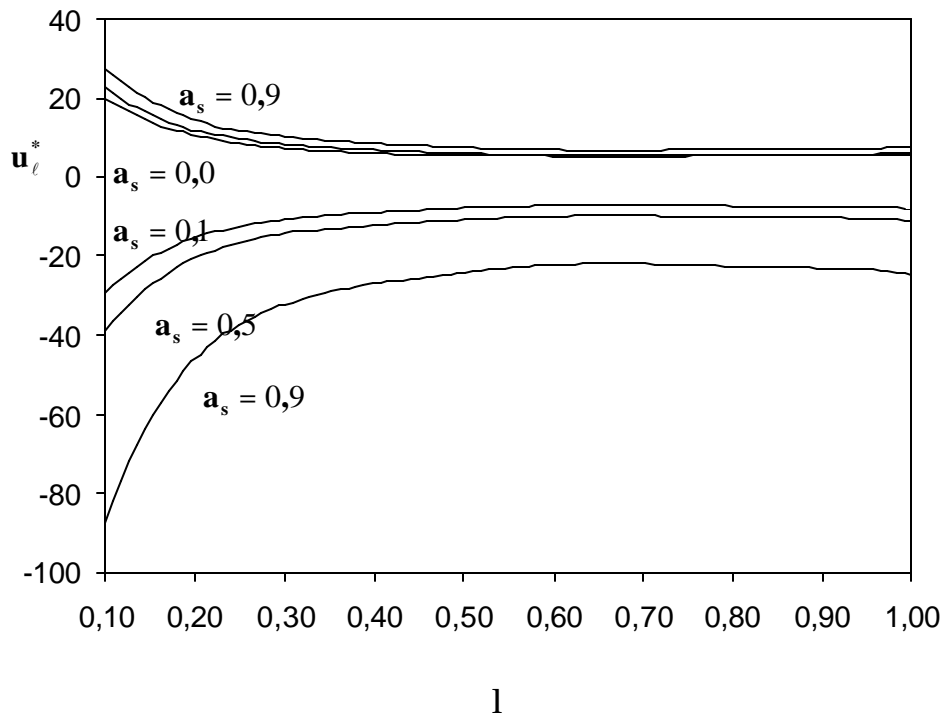
$$\mathbf{s}^* = \mathbf{e}^{\frac{\Gamma^2}{2} + 1}. \quad (2.64)$$

Com isto, substituindo (2.64) em (2.63), encontra-se:

$$\mathbf{u}_\ell^* = \frac{\hat{e} 2l^2 + 1 \hat{u}^{\frac{1}{2}} \hat{a} e^{\frac{l^2+1}{2}} \hat{\theta}}{\hat{e} 1 + \mathbf{a}_s \hat{u}^{\frac{1}{2}} \hat{e} l^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.65a)$$

$$\mathbf{u}_\ell^* = - \frac{\hat{e} 2l^2 + 1 \hat{u}^{\frac{1}{2}} \hat{a} e^{\frac{l^2+1}{2}} \hat{\theta}}{\hat{e} 1 - \mathbf{a}_s \hat{u}^{\frac{1}{2}} \hat{e} l^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.65b)$$

As expressões (2.65a,b) representam os limites superior e inferior, respectivamente, de velocidades. Estes limites são representados na Figura (2.10) como função de  $l$  e do parâmetro  $\mathbf{a}_s$ .



**FIGURA 2.10-Limites superior e inferior de velocidade  $u_\ell$ .**

A região limitada pelas curvas correspondentes a  $\mathbf{a}_s = 0,9$  produzem  $\ln(s^*/s_0) < 1$ .

### 2.4.2-Ajuste da Expressão Analítica para Função de Distribuição de Velocidades:

O ajuste da expressão analítica (2.62) com os valores experimentais obtidos por Castaing et al. (1990) e Takahashi et al. (1998) é obtido através da introdução de fatores de forma (coeficientes de ajuste das curvas) e da constante de normalização  $\mathbf{A}(\mathbf{a}_s)$ .

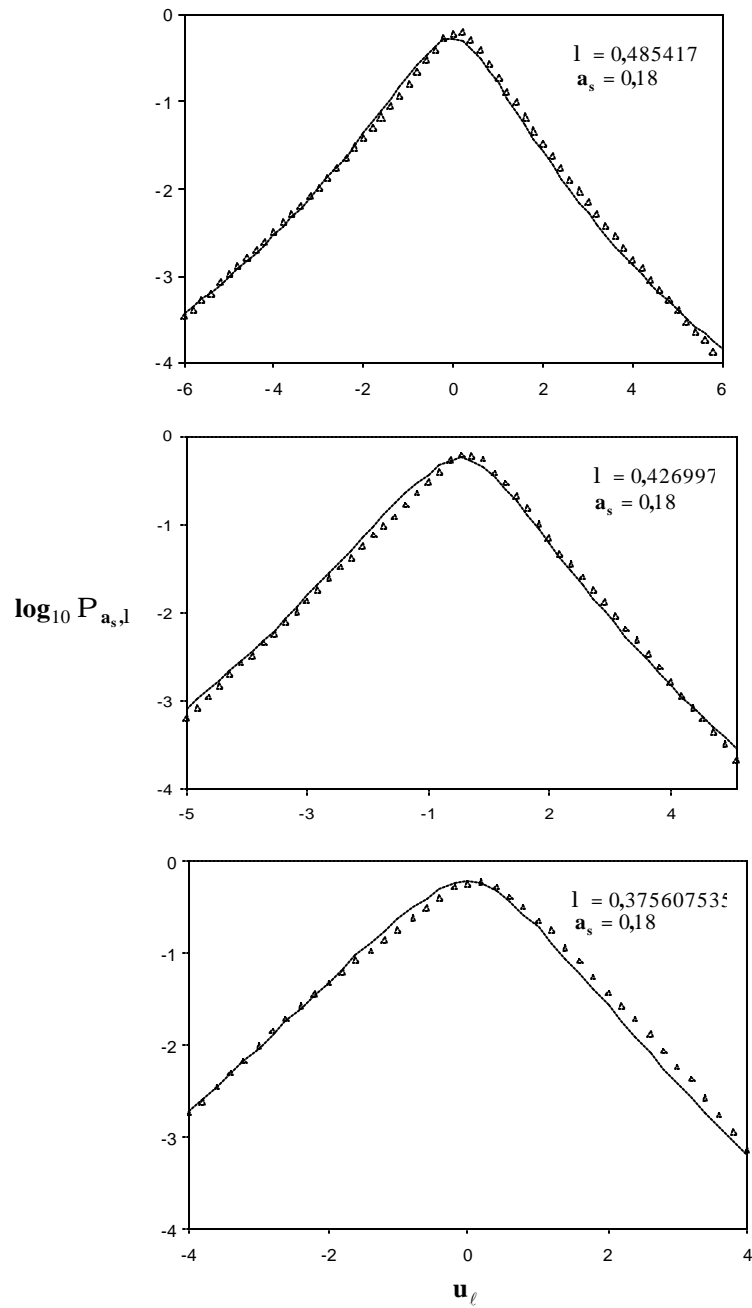
A determinação de  $\mathbf{A}(\mathbf{a}_s)$  é obtida tomando-se a integral de (2.62) com relação a  $\mathbf{u}_\ell$  igual a unidade, isto é:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{a}_s) e^{-\frac{1}{2} \frac{u_\ell^2}{s^*} \left( 1 + \mathbf{a}_s \frac{u_\ell/s^*}{1 + u_\ell^2/s^*} + \frac{[\ln(s^*/s_0)]^2}{2(1)^2} \right)} du_\ell = 1. \quad (2.66)$$

Esta integração é extremamente complexa, uma vez que  $s^*$ , conforme pode ser visto em (2.28), é dependente de  $\mathbf{u}_\ell$ . Portanto, para obter esta aproximação, introduz-se os fatores de forma na expressão (2.62), obtendo:

$$P_{\mathbf{a}_s,1}^*(\mathbf{u}_\ell) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{u_\ell^2}{s^*} \left( 1 + \mathbf{a}_s \frac{u_\ell/s^*}{1 + u_\ell^2/s^*} + \frac{[\ln(s^*/s_0)]^2}{2(g1)^2} \right)}}{s^* \sqrt{2p(1 - q \ln(s^*/s_0))}} \quad (2.67)$$

Os coeficientes  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}$  e  $\mathbf{q}$  são expressos como funções de  $\mathbf{l}$  obtidos a partir da comparação de (2.67) com os dados experimentais de Takahashi et al. (1998), dentro do limite de velocidades estabelecido por (2.65), conforme mostra a Figura (2.11).

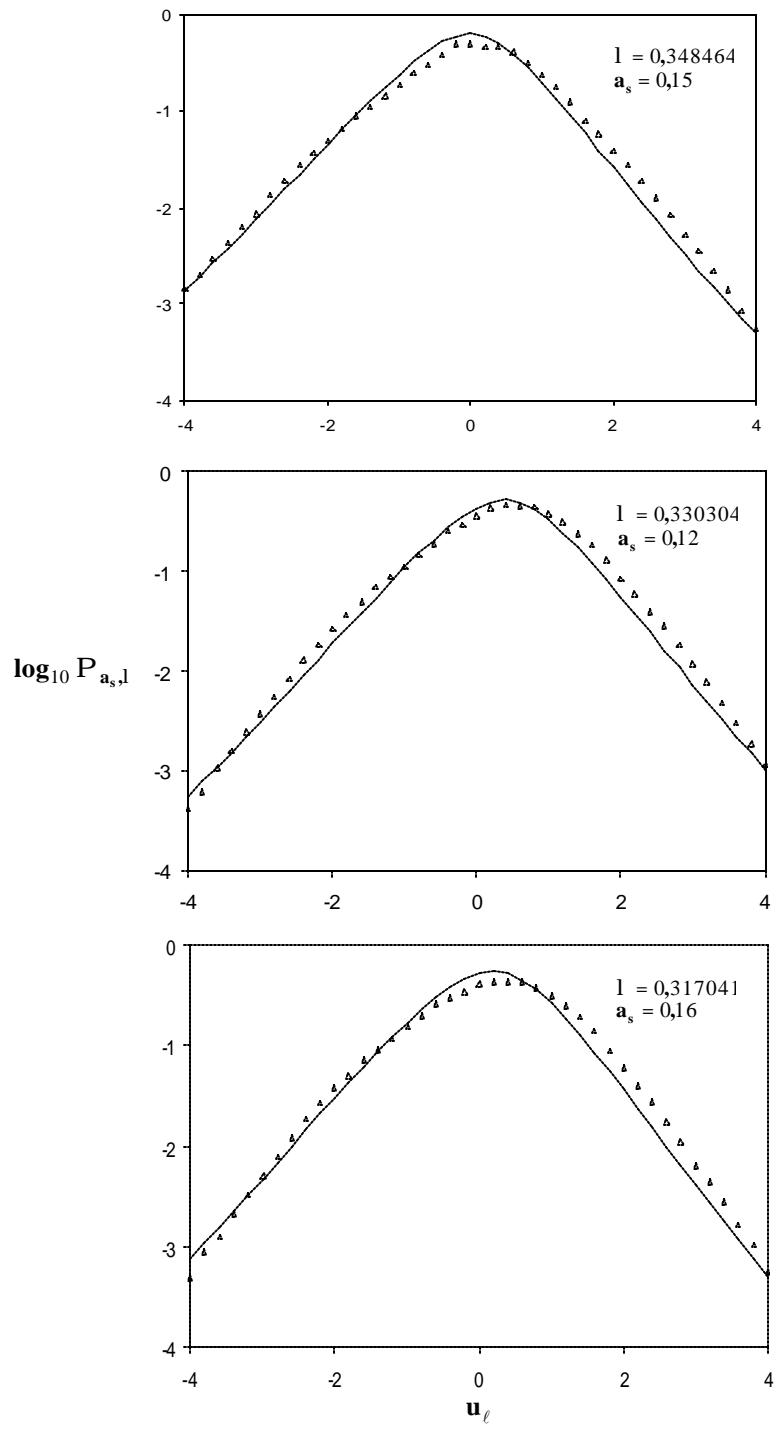


**FIGURA 2.11-Ajuste de dados analíticos (2.67) (----) e experimentais (?).**

**FONTE: de Takahashi et al. (1998).**

**(Continua)**





**FIGURA 2.11-(Conclusão).**

Os coeficientes  $a, b, g$  e  $q$  podem ser modelados a partir das seguintes expressões:

$$a = -0,0089l + 0,7327, \quad (2.68)$$

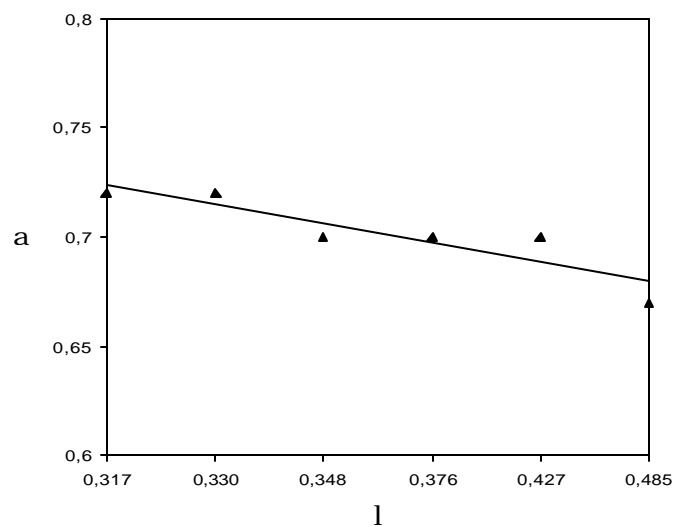
$$b = 1,4411, \quad (2.69)$$

$$g = 1,5, \quad (2.70)$$

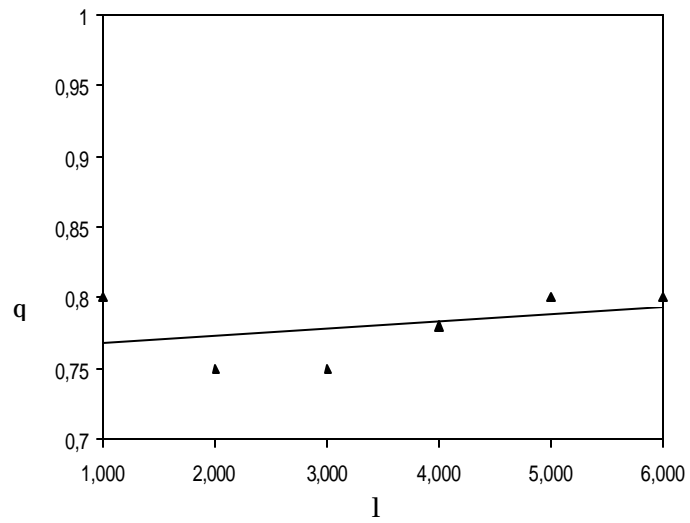
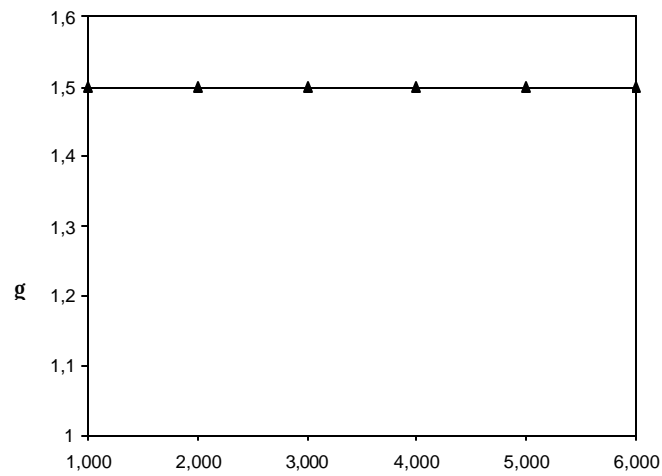
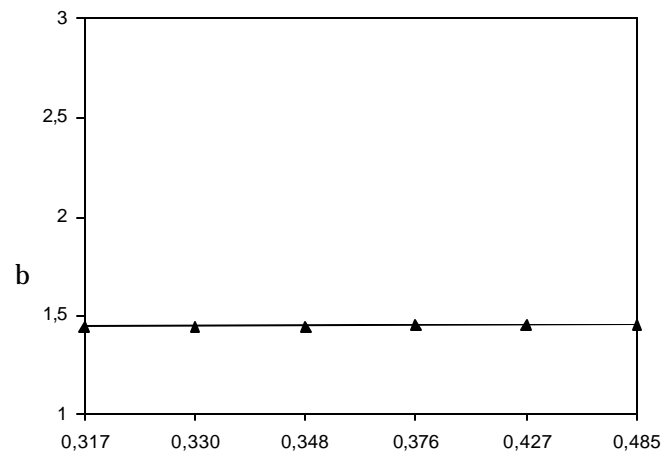
$$q = -0,0051l + 0,762, \quad (2.71)$$

as quais foram obtidas por meio das curvas da Figura 2.11.

O comportamento dos coeficientes  $a, b, g$  e  $q$  com relação a  $l$  é mostrado na Figura 2.12.



**FIGURA 2.12-Coefficientes de forma: aproximação linear (—) e resultados numéricos (?).** (Continua)

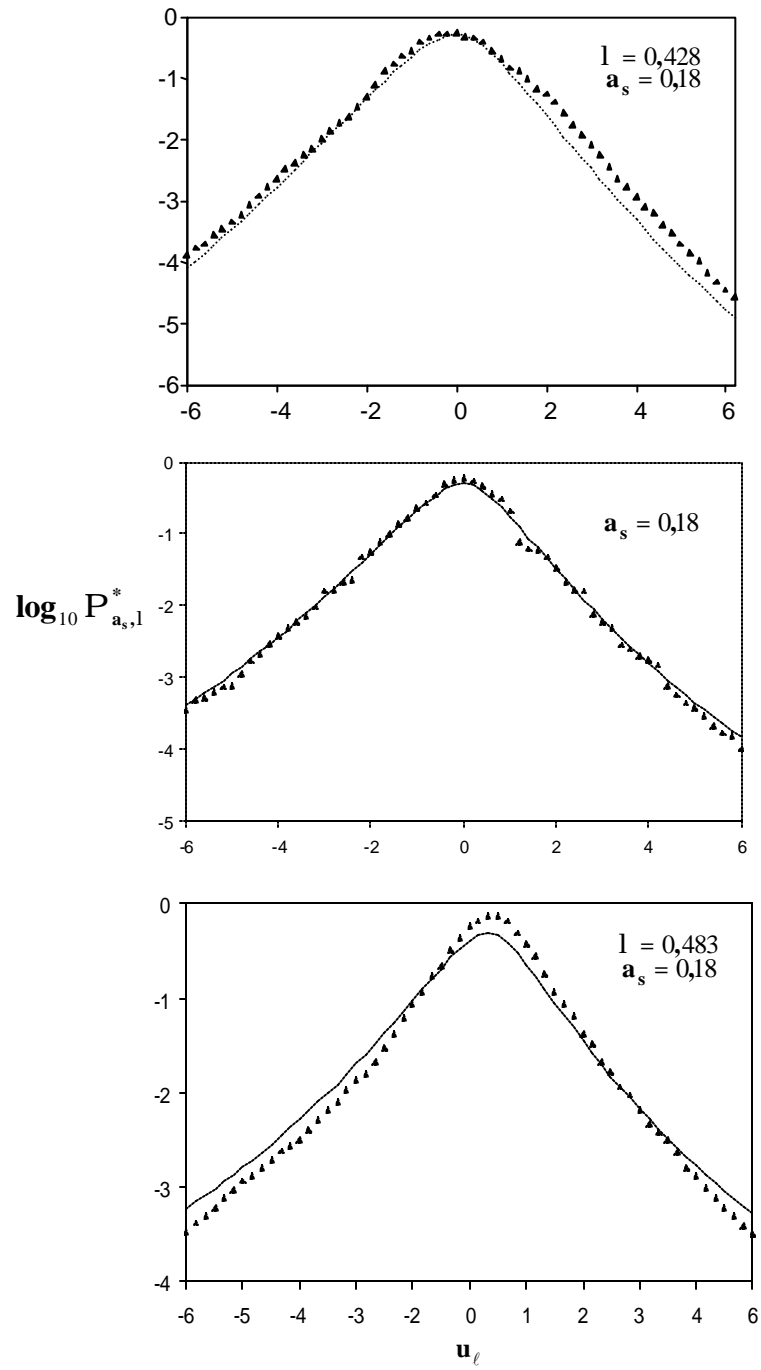


**FIGURA 2.12- (Conclusão).**

Conforme expresso na formulação apresentada,  $A(a_s)$  é uma constante de normalização cujo valor depende do fator de assimetria  $a_s$ . Por comparação direta entre as expressões (2.62) e (2.67)  $b$  representaria  $A(a_s)$ , porém;  $b$  apresenta valor constante. Isto contraria a definição de  $A(a_s)$  dentro do aspecto funcional. A explicação para tal discrepância está associada com a normalização das curvas geradas por Takahashi et al. (1998), bem como outros autores. Como  $a_s$  é da ordem de  $10^{-1}$  ( $0,12 \leq a_s \leq 0,26$ ) e, conforme pode ser visto na expressão (2.22),  $a_s$  multiplica um termo de ordem máxima igual 1, exatamente nos extremos da curva da função de distribuição de probabilidade de velocidade de rotação dos vórtices. Nessa expressão a contribuição da normalização (ver expressão (2.66)) é muito pequena, de forma que os efeitos de  $a_s$  sobre  $A(a_s)$  podem ser considerados fracos.

#### **2.4.3-Comparação de Resultados Analítico e Experimental para a Função de Distribuição de Velocidade de Rotação dos Vórtices:**

A Figura 2.13 mostra uma comparação entre os resultados experimental obtidos por Castaing et al. (1990) e numérico obtido a partir das expressões (2.67)-(2.71), para diferentes valores de  $l$ . Como pode ser observado da Figura 2.13, ocorre um certo desvio dos dados experimentais, o qual cresce com o aumento do valor de  $l$ . Provavelmente este desvio seja ocasionado pela linearização das expressões para os coeficientes de forma. Para se obter uma aproximação mais precisa seria necessário analisar uma quantidade maior de dados experimentais. De forma geral, é importante dizer que a expressão (2.67) juntamente com (2.28) constituem uma boa aproximação para a função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices, dentro dos limites estabelecidos por (2.65).



**FIGURA 2.13-** Comparação dos resultados para a função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices: numérico (----) e experimentais (? ).

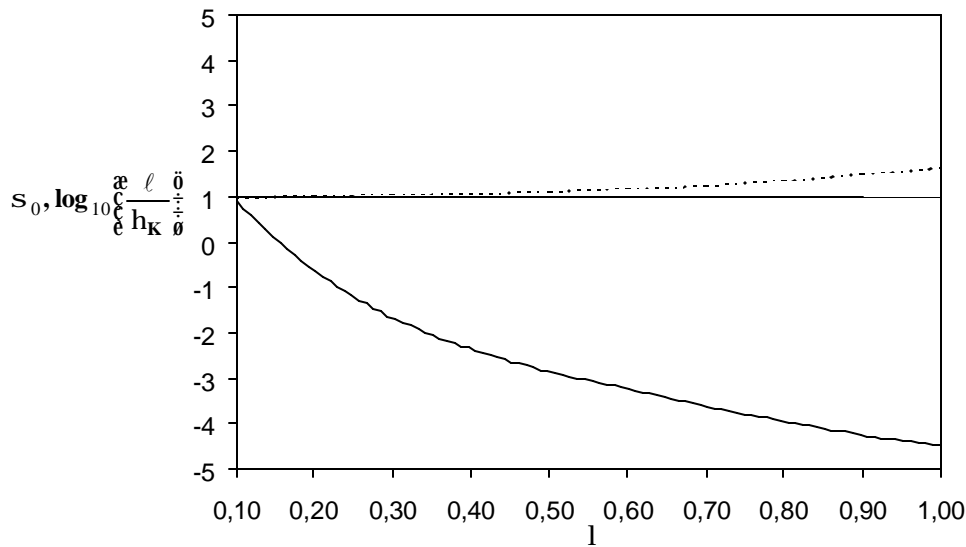
**FONTE:** Castaing et al. (1990).

## 2.5-Relação entre Variância $l$ e Escalas de Vórtices:

A relação entre a variância  $l$  da variável descrita pela distribuição lognormal, a qual foi definida em (2.16), e o tamanho dos vórtices é obtida a partir dos resultados de Castaing et al. (1990), como:

$$9l^2 = 3,85 \frac{\alpha \ell \bar{\theta}^{-0,34}}{\epsilon h_K \bar{\theta}}, \quad (2.72)$$

onde  $\ell$  representa o tamanho do vórtice e  $h_K$  é a escala de Kolmogorov definida em Frisch (1995). A expressão (2.72) é mostrada na Figura 2.14, juntamente com  $s_0$ .



**FIGURA 2.14-** Relação entre  $l$  e escala dos vórtices,  $s_0$  (-----) e  $\log_{10} \frac{\alpha \ell \bar{\theta}^{-0,34}}{\epsilon h_K \bar{\theta}}$  (—).

O valor de  $s_0$  (calculado a partir de (2.27)) deve ser da ordem de 1 conforme mostra os experimentos de Castaing et al. (1990). Dessa forma, a variância  $l$  deve ser limitada em valores inferiores a 0,5 (ver expressão (2.27)). Por outro lado, a escala de Kolmogorov típica para túnel de vento, a qual dá o tamanho médio dos vórtices na região de dissipação, é de  $h_K = 35 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ . Para este valor, a Figura 2.14 mostra que os resultados obtidos pela

expressão (2.72) para  $S_0$  maior que a unidade fornece vórtices com tamanhos muito pequenos.

Dessa forma, fica finalizada a primeira parte para se descrever o comportamento da turbulência com relação ao número de vórtices presentes no escoamento. Busca-se introduzir esta distribuição de vórtices em escoamento bifásico para se caracterizar o efeito da turbulência nesta forma de escoamento.





## CAPÍTULO 3

### MODULAÇÃO DA TURBULÊNCIA

Neste Capítulo é feita a análise do efeito das partículas que constituem a fase dispersa sobre a turbulência da fase contínua do escoamento. Este efeito, o qual é conhecido como modulação da turbulência, é explorado neste trabalho a partir de ferramentas analíticas, sendo os resultados validados com experimentos disponíveis na bibliografia.

Um ponto importante aqui desenvolvido é a introdução dos efeitos de geração de vórtices na esteira da partícula, baseado na relação entre o número de Strouhal ( $St$ ) e o número de Reynolds da partícula ( $Re_p$ ) para o caso de partículas com geometria esférica.

#### **3.1-Aspectos Fundamentais:**

A modulação da turbulência refere-se ao estudo dos efeitos da interação vórtice-partícula na turbulência do escoamento, ou melhor, o efeito das partículas ou gotas (as quais constituem a fase dispersa) sobre a turbulência da fase contínua (ver Capítulo 1).

Em geral, são conhecidos 6 (seis) mecanismos dependentes, os quais contribuem para a modificação dos efeitos da turbulência em escoamentos multifásicos dispersos, isto é:

- a) dissipação da energia cinética da turbulência;
- b) incremento da viscosidade aparente da fase contínua;
- c) dimensões da esteira atrás da partícula;
- d) massa de fluido arrastada com a partícula (massa ajuntada);
- e) aumento dos gradientes de velocidade entre partículas rígidas (variação local dos gradientes de pressão);
- f) deformação da fase dispersa.

Conforme Yuan e Michaelides (1992), dos mecanismos acima que modificam a turbulência, f) não é aplicável para escoamentos de partículas e, as contribuições de e) e b) são negligenciáveis para escoamentos de partículas sólidas.

O estudo da modificação da turbulência é fundamental na análise dos fenômenos de transporte tais como tensões de Reynolds, transferência de calor e efeitos de dispersão de partículas. Dentro deste objetivo, vários autores têm-se dedicado ao estudo do efeito das partículas sobre a turbulência. No aspecto experimental, Gore e Crowe (1988) apresentaram a faixa crítica dos diâmetros característicos das partículas que interferem na intensidade da turbulência<sup>1</sup>. Os mesmos autores determinaram a faixa crítica para a relação entre diâmetro da partícula e comprimento característico da turbulência (diâmetro do vórtice) que produzem efeitos sobre a intensidade da turbulência. Hetsroni (1989) também analisou os efeitos das partículas na atenuação e aumento da turbulência da fase contínua, sendo feita uma caracterização da modulação da turbulência, sobretudo dentro do conceito de tempo e comprimento característico aplicados a jatos. As expressões obtidas por Hetsroni (1989) são aplicáveis a dutos com expansão súbita, de onde se determina o efeito do tamanho da partícula sobre o perfil médio de velocidades após a expansão. Finalmente, Hetsroni (1989) conclui que partículas grandes possuem esteira significativa, o que vem a constituir uma fonte de vórtices e, portanto de aumento da turbulência.

Estudos analíticos da modulação da turbulência foram desenvolvidos por Yuan e Michaelides (1992), que analisaram a influência das partículas sobre a energia dissipada pela turbulência. Os resultados obtidos foram comparados com experimentos, onde um ponto importante desta comparação é a influência da turbulência sobre o coeficiente de arrasto das partículas. Na mesma linha têm-se Kenning e Crowe (1997), apresentaram um modelo integral para a modulação da turbulência baseado no balanço de energia das fases. Os resultados de Kenning e Crowe (1997) são validados para dutos e jatos. Igualmente, Young e Leeming (1997) apresentaram uma teoria para o escoamento bifásico turbulento baseada em um modelo de dispersão das partículas. Este modelo analisa separadamente a fase contínua da fase dispersa, fazendo uso de formulação mista euleriana-lagrangeana. Este modelo foi testado para escoamento em dutos. L'vov et al. (2003) apresentaram uma teoria analítica desenvolvida para se determinar os efeitos das partículas sobre a turbulência, com modificação das variáveis do escoamento contínuo.

---

<sup>1</sup> A intensidade da turbulência é definida normalmente como:  $\mathbf{I} = \sqrt{\langle \mathbf{v}'^2 \rangle} / \bar{v}$ , onde  $\mathbf{v}'$  representa a flutuação e  $\bar{v}$  o valor médio do campo velocidades do escoamento.

Estudos numéricos têm sido muito importantes na investigação dos efeitos interativos dos escoamentos bifásicos, sobretudo efeitos que não podem ser observados experimentalmente. Boivin et al. (1998) chegaram, por meio da simulação direta das equações de conservação e das equações do movimento referentes à fase dispersa, ao espectro de energia cinética turbulenta para o escoamento bifásico turbulento. Estes resultados foram analisados dentro do aspecto qualitativo. Mashayek (1998) apresentou resultados de simulação direta para um escoamento gasoso com baixo número de Mach, considerando a dispersão de gotas. Na mesma linha, Sundaram e Collins (1999) simularam partículas em um meio gasoso. Yamamoto et al. (2001) empregaram a simulação de grandes vórtices no estudo dos escoamentos bifásicos turbulentos, sendo considerado as colisões entre partículas nos resultados médios do escoamento. Nos últimos trabalhos Yamamoto et al. concluem que as partículas pequenas atenuam a turbulência e, as partículas grandes provocam aumento da intensidade da turbulência. Estes resultados foram validados para experimentos em canais.

Kaftori et al. (1998) fizeram um estudo do escoamento bifásico turbulento próximo à parede, desenvolvendo um modelo de lei de parede validado experimentalmente por anemometria a laser. Eles concluem que o efeito das partículas na parede pode ser resumido de duas formas: o primeiro pela interação partícula vórtice e, o segundo de forma similar ao aumento de rugosidade na parede.

Laín et al. (2002) apresentaram um estudo de bolhas no escoamento líquido, onde o efeito da geração da turbulência na esteira é levado em conta. Foi utilizado para este caso um modelo de turbulência do tipo  $k - \epsilon$  para a fase contínua.

Estudos experimentais mais recentes, com técnicas mais precisas foram feitos por Voth et al. (2002), os quais empregaram pequenos pedaços de silicone no escoamento, para se medir o comportamento das partículas no escoamento turbulento. A técnica *PIV* (*Particle Image Velocity*) é utilizada para fotografar o escoamento, buscando-se determinar a função de distribuição de aceleração das partículas. Na mesma linha, Aísa et al. (2002) fizeram um

estudo estatístico dos resultados experimentais obtidos por anemometria a laser para o caso de escoamentos bifásicos líquido-partículas. Ferrand et al. (2003) apresentaram um estudo experimental de jatos bifásicos, onde os efeitos das gotas na turbulência são quantificados por correlações da energia cinética e intensidade da turbulência.

Zhang e Reese (2003) compilaram uma grande quantidade de resultados, obtidos com a maioria dos modelos citados acima, e os compara com experimentos. Na mesma direção, Villa Nova (2004) apresentou uma compilação dos principais resultados.

Conforme foi colocado no Capítulo 2, a turbulência pode ser modelada como um escoamento laminar com uma distribuição de vórtices. Por outro lado, colocando-se uma distribuição de partículas e vórtices no escoamento laminar, pode-se estudar a modulação da turbulência com base na variação da função de distribuição dos vórtices e, verificar a supressão da turbulência com partículas pequenas e o incremento com partículas grandes. As variações no número de vórtices presentes no escoamento podem ser modeladas como termos fontes, positivos ou negativos, na geração de vórtices.

### 3.2-Dinâmica da Partícula no Fluido:

A análise dinâmica das partículas em um escoamento é apresentada em numerosas publicações (p.ex. Thomas (1992)), sendo descrita pela equação de Basset-Boussinesq-Oseen (BBO). Considerando uma pequena partícula de forma esférica não-deformável, seu movimento no espaço 3-D é descrito, segundo Thomas (1992), por:

$$\begin{aligned} \frac{4\rho_p}{3} r_p^3 \frac{d\bar{\mathbf{v}}_p}{dt} = & \frac{4\rho_p}{3} r_p^3 \frac{\hat{e}}{8} C_D \frac{r_f}{r_p} \frac{1}{r_p} |\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p| \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p) - \frac{4\rho_p}{3} r_p^3 \bar{\mathbf{N}}_p \\ & + \frac{1}{2} \frac{4\rho_p}{3} r_p^3 r_f \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p) \\ & + 6r_p^2 \sqrt{\rho_p r_f m_f} \end{aligned}$$

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{d}{d\tau} (\bar{v}_f - \bar{v}_p) d\tau + \bar{F}_{ext}, \quad (3.1)$$

onde  $\bar{v}_p$  e  $\bar{v}_f$  denotam as velocidades da partícula e do fluido, respectivamente,  $r_p$  e  $r_f$  são as massas específicas do material da partícula e do fluido. O raio da partícula é  $r_p$ , a viscosidade do fluido é  $\mu_f$  e,  $C_D$  é o coeficiente de arrasto da partícula.

O significado físico dos cinco (5) termos do lado direito da equação (3.1) é dado a seguir conforme Thomas (1992). O primeiro termo representa a força viscosa que atua na partícula. O segundo termo é devido ao gradiente de pressão nas vizinhanças do contorno da partícula. O terceiro termo é referente à massa ajuntada e, representa a força necessária para acelerar a massa de fluido nas vizinhanças da partícula. O quarto termo é a integral de Basset, a qual leva em conta os efeitos não-estacionários do escoamento. O último termo é referente às forças externas, como gravidade.

### 3.2.1-Movimento de uma Partícula em um Fluido com Coeficiente de Arrasto Constante:

A equação do movimento de uma partícula esférica de aerosol que se desloca em um fluido é obtida a partir da equação (3.1). Conforme Michaelides (1988) e Yuan e Michaelides (1992), como a relação entre as massas específicas das fases ( $r_p/r_f$ ) é da ordem de 1000, os termos de massa ajuntada e Basset podem ser desprezados. Da mesma forma, como o tamanho das partículas que constituem a fase dispersa são da ordem de micron, o termo de pressão também pode ser desprezado. Assim, tem-se a seguinte equação do movimento para a partícula:

$$\frac{4\rho_p}{3} r_p^3 \frac{d\bar{v}_p}{dt} = \frac{4\rho_p}{3} r_p^3 \frac{3}{8} C_D \frac{r_f}{r_p} \frac{1}{r_p} |\bar{v}_f - \bar{v}_p| \frac{d}{dt} (\bar{v}_f - \bar{v}_p) + \bar{F}_{ext} \quad (3.2)$$

ou, introduzindo  $\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{4}{3}\rho\mathbf{r}_p^3\mathbf{g}$ , chega-se a:

$$\frac{4\rho}{3}\mathbf{r}_p^3\frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{4\rho}{3}\mathbf{r}_p^3\frac{8}{3}\mathbf{C}_D\frac{r_f}{r_p}\frac{1}{r_p}|\vec{v}_f - \vec{v}_p|\frac{d}{dt}(\vec{v}_f - \vec{v}_p) + \frac{4}{3}\rho\mathbf{r}_p^3\mathbf{g}, \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{g}$  é a aceleração da gravidade.

Rearranjando a equação (3.3), chega-se a seguinte forma:

$$\frac{8}{3}\mathbf{C}_D^{-1}\frac{r_p}{r_f}\mathbf{r}_p\frac{d\vec{v}_p}{dt} = |\vec{v}_f - \vec{v}_p|(\vec{v}_f - \vec{v}_p) + \frac{8}{3}\mathbf{C}_D^{-1}\frac{r_p}{r_f}\mathbf{r}_p\mathbf{g}. \quad (3.4)$$

Considerando o escoamento longe da parede em regime laminar, o coeficiente de arrasto  $\mathbf{C}_D$  é dado pela fórmula de Stokes, isto é:

$$\mathbf{C}_D = \frac{24}{\mathbf{Re}_p} = \frac{24\mathbf{m}_f}{r_f\mathbf{d}_p|\vec{v}_f - \vec{v}_p|} = \frac{12\mathbf{m}_f}{r_f\mathbf{r}_p|\vec{v}_f - \vec{v}_p|}, \quad (3.5)$$

onde fica definido o número de Reynolds para partícula, com  $\mathbf{d}_p$  representando o diâmetro da partícula.

Substituindo a expressão (3.5) em (3.4), obtém-se:

$$\frac{2}{9}\frac{r_p}{\mathbf{m}_f}\mathbf{r}_p^2\frac{d\vec{v}_p}{dt} = (\vec{v}_f - \vec{v}_p) + \frac{2}{9}\frac{r_p}{\mathbf{m}_f}\mathbf{r}_p^2\mathbf{g} \quad (3.6)$$

ou, na seguinte forma compacta:

$$t_p \frac{d\bar{\mathbf{v}}_p}{dt} = (\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p) + t_p \bar{\mathbf{g}}, \quad (3.7)$$

onde

$$t_p = \frac{2 r_p}{9 m_f} r_p^2 = \frac{1}{18} \frac{r_p}{m_f} d_p^2. \quad (3.8)$$

A expressão (3.8) representa o tempo característico da partícula em um escoamento laminar, onde a fórmula de Stokes para o  $C_D$  é válida.

Para uma partícula com velocidade inicial  $\bar{\mathbf{v}}_{p0}$ , a solução da equação (3.7) é dada como:

$$\bar{\mathbf{v}}_p = \bar{\mathbf{v}}_f + \left[ (\bar{\mathbf{v}}_{p0} - \bar{\mathbf{v}}_f) - t_p \bar{\mathbf{g}} \right] e^{-t/t_p} + t_p \bar{\mathbf{g}}. \quad (3.9)$$

Tomando-se a expressão (3.9), sem o efeito gravitacional, tem-se:

$$\bar{\mathbf{v}}_p = \bar{\mathbf{v}}_f + (\bar{\mathbf{v}}_{p0} - \bar{\mathbf{v}}_f) e^{-t/t_p}. \quad (3.10)$$

A velocidade terminal da partícula no fluido (equação (3.10)) é dada, após um pequeno manuseio algébrico, na seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{v}}_p = \bar{\mathbf{v}}_{p0} + (\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}) \left\{ 1 - e^{-t/t_p} \right\}. \quad (3.11)$$

Neste caso anterior, desenvolveu-se o equacionamento para o movimento de uma partícula em um escoamento laminar, onde se empregou a expressão de Stokes para o  $C_D$ . De outra forma, se a expressão para  $C_D$  for mantida implícita, o tempo característico da partícula pode ser expresso de forma geral como:

$$t_p = \frac{4}{3} \frac{C_D^{-1}}{|\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p|} \frac{r_p}{r_f} \mathbf{d}_p \quad (3.12)$$

A velocidade terminal, expressa em (3.11) para o caso laminar, fica da mesma forma para o caso geral, porém com as devidas modificações em  $t_p$ .

### 3.2.2-Movimento de uma Partícula com Arrasto Variável no Tempo:

Admitindo-se que o coeficiente de arrasto para uma partícula contida no escoamento seja dada na seguinte forma:

$$C_D(\mathbf{t}) = \bar{C}_D + C_D^{\dagger}(\mathbf{t}), \quad (3.13)$$

onde  $\bar{C}_D$  corresponde ao valor médio e  $C_D^{\dagger}(\mathbf{t})$  à flutuação no coeficiente de arrasto, respectivamente.

De acordo com Clift et al. (1978), o coeficiente de arrasto é expresso como uma potência inversa do número de Reynolds da partícula. Com isso, a expressão (3.13) pode ser representada, de outra forma, como:

$$C_D(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{f}_{C_D}(\mathbf{Re}_p^{1-a}, \mathbf{t})}{\mathbf{Re}_p}, \quad (3.14)$$

onde  $\mathbf{f}_{C_D}$  é uma função do número de Reynolds da partícula e do tempo, que representa o coeficiente de arrasto, sendo  $a \hat{=} \mathbf{R}$ .

Introduzindo-se a expressão (3.14) em (3.12), juntamente com a definição do número de Reynolds para a partícula, tem-se:



$$t_p = \frac{4 d_p^2 r_p}{3 f_{C_D} m_f}. \quad (3.15)$$

Como  $f_{C_D}$  é função do número de Reynolds e do tempo então,  $t_p$  deixa de ser constante. Tomando-se a expressão (3.7), sem o efeito gravitacional, e aplicando (3.15), obtém-se:

$$\frac{4 d_p^2 r_p}{3 f_{C_D} m_f} \frac{d\bar{v}_p}{dt} = (\bar{v}_f - \bar{v}_p). \quad (3.16)$$

Integrando a equação (3.16), chega-se a:

$$\bar{v}_p = \bar{v}_{p0} + (\bar{v}_f - \bar{v}_{p0}) \left( 1 - \exp\left[-\frac{3 m_f}{4 d_p^2 r_p} \int_0^t f_{C_D} dt\right] \right). \quad (3.17)$$

A expressão (3.17) representa a forma geral para a velocidade terminal.

### 3.3-Dinâmica da Interação Vórtice-Partícula:

Considerando o arrasto como a força predominante sobre a partícula, a taxa de trabalho realizado pelo fluido sobre a partícula estacionária é expressa por:

$$W_p^f = \vec{F}_D \times \vec{v}_f \quad (3.18)$$

onde  $\vec{F}_D$  é a força de arrasto exercida pelo fluido sobre a partícula.

Por outro lado, a taxa de variação de energia cinética da partícula é dada por:

$$W_f^p = \vec{F}_D \times \vec{v}_p. \quad (3.19)$$

A taxa de dissipação de energia presente na interação fluido-partícula, com a definição de força de arrasto, é dada por:

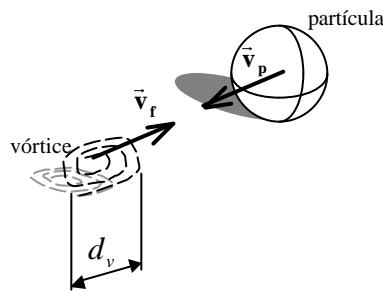
$$\begin{aligned}
 DW &= \vec{F}_D \times (\vec{v}_f - \vec{v}_p) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{r_f}{r_p} \frac{\rho_p d_p^2}{\rho} C_D [(\vec{v}_f - \vec{v}_p) \times (\vec{v}_f - \vec{v}_p)] \frac{(\vec{v}_f - \vec{v}_p)}{|\vec{v}_f - \vec{v}_p|} \cdot (\vec{v}_f - \vec{v}_p). \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

A interação entre vórtice-partícula pode ser compreendida com ajuda da Figura 3.1. Para um vórtice de tamanho  $d_v$ , o qual se desloca no escoamento com velocidade  $\vec{v}_f - \vec{v}_p$ , o tempo de interação vórtice-partícula, de acordo com Yuan e Michaelides (1992), é da seguinte ordem:

$$t_{int} \sim \frac{d_v}{|\vec{v}_f - \vec{v}_p|}, \quad (3.21)$$

que com a definição do número de Reynolds da partícula e a expressão (3.8) fica:

$$t_{int} \sim 18 t_p (r_f / r_p) (d_v / d_p) \text{Re}_p^{-1}. \quad (3.22)$$



**FIGURA 3.1-Interação vórtice-partícula.**

Admitindo-se que o trabalho realizado pelo vórtice sobre a partícula, o qual corresponde à perda de energia cinética do vórtice, é obtido a partir da integração de (3.20) no intervalo de tempo de interação, tem-se:

$$DK^- = \int_0^{t_{int}} \frac{1}{2} \rho_f \frac{\pi d_p^2}{4} C_D [(\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p) \times (\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p)] \frac{(\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p) \cdot \ddot{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p|} dt \quad (3.23)$$

Introduzindo na expressão logo acima a equação (3.17), juntamente com (3.14) e, fazendo uso da definição do número de Reynolds da partícula, chega-se a:

$$DK^- = \frac{\rho_f m_f}{8} [(\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}) \times (\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0})] \int_0^{t_{int}} f_{C_D} \exp\left(-\frac{3}{2} \frac{m_f}{d_p^2 R_p} t\right) dt \frac{(\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p) \cdot \ddot{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p|} dt \quad (3.24)$$

A expressão para o coeficiente de arrasto obtida por Schiller e Nauman (Clift et al. 1978) é dada por:

$$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0,15 Re_p^{0,687}), \quad (3.25)$$

a qual produz a seguinte expressão para  $f_{C_D}$  :

$$f_{C_D} = 24(1 + 0,15 Re_p^{0,687}). \quad (3.26)$$

Introduzindo (3.26) em (3.24) e considerando o número de Reynolds da partícula constante, tem-se:

$$DK^- = \frac{\rho_f d_p^3 m_f}{12} [(\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}) \times (\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0})]$$

$$\frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{36m_f t_{int}}{d_p^2 r_p}\right)} \left[1 + 0,15 \text{Re}_p^{0,687}\right] \frac{\dot{u} \ddot{u}}{\dot{u} \dot{y}}, \quad (3.27)$$

que, com a definição (3.8), fica:

$$DK = \frac{\rho d_p^3 m_f}{12} \left[ (\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}) \times (\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}) \right]$$

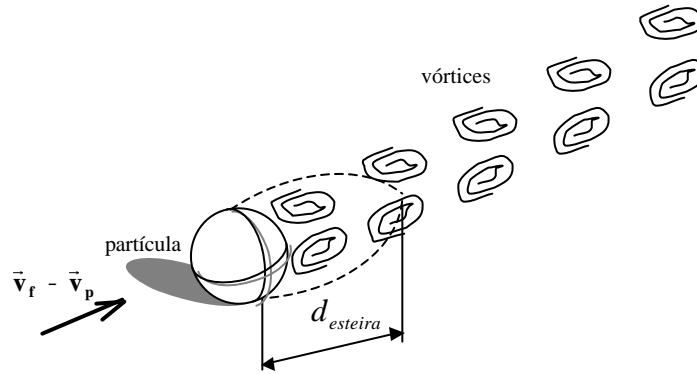
$$\frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{2t_{int}}{t_p}\right)} \left[1 + 0,15 \text{Re}_p^{0,687}\right] \frac{\dot{u} \ddot{u}}{\dot{u} \dot{y}}. \quad (3.28)$$

A expressão (3.28) obtida pelo desenvolvimento acima é idêntica àquela de Yuan e Michaelides (1992) para a energia da turbulência dissipada. Porém, a expressão (3.28) é desenvolvida a partir de uma teoria mais geral (equação (3.24)), permitindo assim introduzir variações no coeficiente de arrasto da partícula.

De forma geral, a expressão (3.28) representa a redução na turbulência, provocada pela dissipação de energia do vórtice devido à interação com a partícula.

### 3.4-Aerodinâmica da Geração de Vórtices:

A geração de vórtices a partir da esteira que se forma atrás da partícula é a fonte de produção da turbulência no escoamento longe da parede, segundo Yamamoto et al. (2001). Este mecanismo de geração pode ser mais bem compreendido a partir da Figura 3.2.



**FIGURA 3.2-Geração de vórtices.**

O fenômeno da geração de vórtices em escoamentos fluido-partícula foi estudado por vários autores, entre eles Yuan e Michaelides (1992) e Crowe (2000), sendo que a grande maioria resume o estudo a apresentar resultados empíricos.

Dentro desse tipo de análise, a frequência com que os vórtices escapam ou são gerados na esteira atrás da partícula é dada por  $f_g$ . Se estes vórtices são gerados com velocidade da ordem de  $|\vec{v}_f - \vec{v}_p|$ , a taxa de aumento da energia cinética envolvida no processo de geração poderia ser expressa de forma analítica como:

$$DK_t^+ = V_{esteira} r_f \frac{(\vec{v}_f - \vec{v}_p) \times (\vec{v}_f - \vec{v}_p)}{2} f_g. \quad (3.29)$$

Onde  $V_{esteira}$  representa o volume da esteira, o qual pode ser modelado por meio elipsóide de revolução, cujo volume seria  $\pi d_p^2 d_{esteira} / 12$ .

A frequência de geração dos vórtices pode ser colocada em termos do número de Strouhal, isto é:

$$St = \frac{f_g d_p}{|\vec{v}_f - \vec{v}_p|}. \quad (3.30)$$

Introduzindo as definições acima em (3.29), chega-se a:

$$DK_t^+ = \frac{\rho d_p}{12} d_{esteira} r_f \frac{|\vec{v}_f - \vec{v}_p|^3}{2} St. \quad (3.31)$$

Colocando em (3.31) a expressão (3.17) e, integrando no intervalo correspondente ao tempo característico da partícula, tem-se:

$$DK_t^+ = \frac{\rho d_p}{12} d_{esteira} r_f St \frac{|\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}|^3}{2} \int_0^{t_p} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \frac{9}{4} \frac{m_f}{d_p^2 r_p} \frac{t_p^3}{\tau} \frac{\dot{u}}{\dot{u}_p}. \quad (3.32)$$

Admitindo-se o coeficiente de arrasto constante no tempo, pode-se obter de (3.32), juntamente com (3.14), que:

$$\begin{aligned} DK_t^+ &= \frac{\rho d_p}{12} d_{esteira} r_f St \frac{|\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}|^3}{2} \int_0^{t_p} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \\ &= \frac{\rho d_p^2}{12} r_f \frac{|\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}|^2}{2} d_{esteira} \frac{4 d_p r_p St}{9 m_f C_D Re_p} \left| \vec{v}_f - \vec{v}_{p0} \right| \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t_p}{\tau}\right) \right] = \frac{9}{4} \frac{m_f C_D Re_p t_p}{d_p^2 r_p} \frac{\dot{u}}{\dot{u}_p}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Com a fórmula de Stokes representada pela expressão (3.5), a equação logo acima fica:

$$DK^+ = \frac{\rho d_p^2}{12} r_f \frac{|\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}|^2}{2} d_{esteira} \frac{d_p r_p |\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}| St}{m_f} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t_p}{\tau}\right) \right] = \frac{54 m_f t_p}{d_p^2 r_p} \frac{\dot{u}}{\dot{u}_p}, \quad (3.34)$$

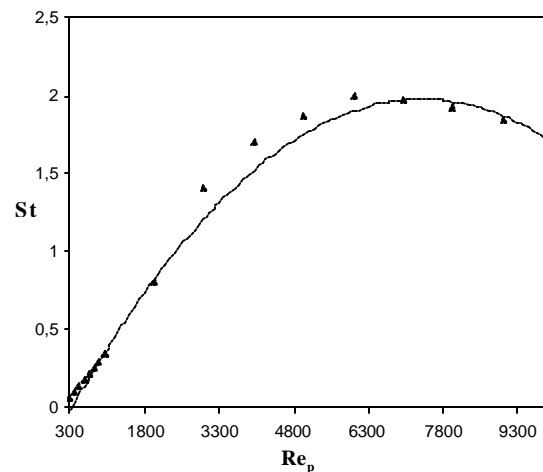
que com (3.8) e (3.17), produz:

$$DK^+ = \frac{\rho d_p^2}{12} r_f |\bar{v}_f - \bar{v}_{p0}|^2 \hat{e} \hat{e} \approx 0,009 d_{esteira} St \frac{r_f |\bar{v}_f - \bar{v}_{p0}| d_p}{m_f} \frac{r_p \dot{u}}{r_f \dot{u}} \quad (3.35)$$

No caso de pequenas partículas, o termo de geração da turbulência obtido nesta análise (o qual é dado por (3.35)) tende a ser nulo, pois  $d_{esteira} \approx 0$ . Isto vem em acordo com os experimentos, que mostram que as pequenas partículas atenuam os efeitos turbulentos, conforme mostrado no Capítulo 1.

### 3.4.1-Relação entre o Número de Reynolds e Número de Strouhal:

Na Figura 3.3, é mostrado os resultados experimentais de Clift et al. (1978) juntamente com a curva de ajuste para a relação entre o número de Reynolds e o número de Strouhal de uma partícula de forma esférica.



**FIGURA 3.3-Número de Strouhal na esteira da partícula: dados experimentais ( ? ) e aproximação ( ————— ).**

**FONTE: Clift et al. (1978).**

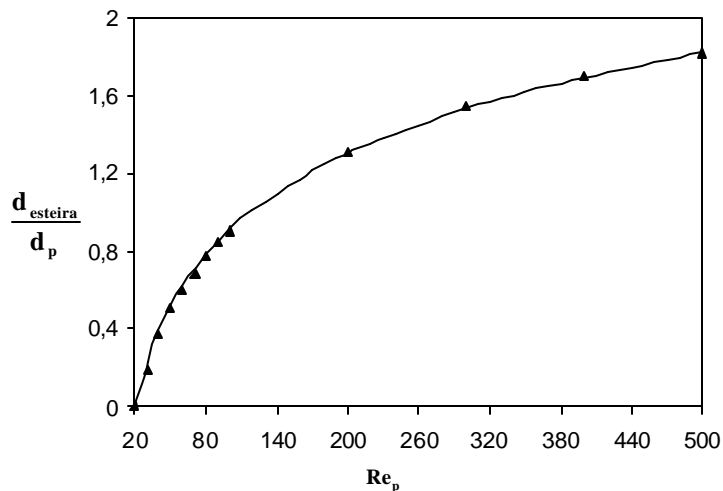
A curva de ajuste empregada neste trabalho para os dados experimentais representados na figura acima é dada por um polinômio do segundo grau, o qual mostra a tendência do comportamento do número de Strouhal com o número de Reynolds da partícula. Este polinômio tem a seguinte expressão analítica:

$$St = -4,0 \cdot 10^{-8} Re_p^2 + 5,9 \cdot 10^{-4} Re_p - 0,16. \quad (3.36)$$

Esta aproximação escolhida no atual trabalho, representada pela expressão (3.36), pode ser empregada para uma projeção do comportamento do número de Strouhal com o número de Reynolds da partícula, desde que seja feito dentro do domínio representado.

### 3.4.2-Relação entre o Número de Reynolds e Comprimento da Esteira:

A Figura 3.4 mostra os dados experimentais de Clift et al. (1978) e a curva de ajuste para a relação entre o número de Reynolds e o comprimento da esteira de uma partícula de forma esférica.



**FIGURA 3.4-Comprimento da esteira para partícula esférica: dados experimentais (●) e aproximação (—).**

**FONTE: Clift et al. (1978).**

A curva de ajuste empregada é dada pela seguinte expressão analítica:

$$\frac{d_{esteira}}{d_p} = 1,3(\ln Re_p + 1,3). \quad (3.37)$$



A expressão acima representa um dos possíveis ajustes para os dados experimentais mostrados na Figura (3.4), dentro do intervalo representado.

### 3.5-Modificação da Energia da Turbulência:

A modificação na energia da turbulência provocada por uma partícula pode ser modelada pela superposição dos efeitos de geração e atenuação desenvolvidos neste trabalho. Isto é representado de forma geral pela subtração da expressão (3.24) de (3.32), ou seja:

$$DK = DK^+ - DK^- =$$

$$= \frac{\rho d_p}{12} d_{esteira} r_f St \frac{|\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}|^3}{2} \int_0^{t_p} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt - \frac{9}{4} \frac{m_f}{d_p^2 r_p} \int_0^{t_c} \frac{d\vec{u}}{dt} dt \int_0^{t_c} \frac{d\vec{u}}{dt} dt$$

$$- \frac{\rho d_p m_f}{8} \left[ (\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}) \times (\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}) \right] \int_0^{t_{int}} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt - \frac{3}{2} \frac{m_f}{d_p^2 r_p} \int_0^{t_c} \frac{d\vec{u}}{dt} dt \int_0^{t_c} \frac{d\vec{u}}{dt} dt. \quad (3.38)$$

Como feito anteriormente, se o coeficiente de arrasto é independente do tempo, pode-se tomar a expressão (3.35) como termo de geração e a expressão (3.27) como termo de atenuação. Assim, fazendo  $(1 + 0,15 Re_p^{0,687}) = 1$  com o objetivo de se trabalhar com a expressão de Stokes para o coeficiente de arrasto, juntamente com (3.8) tem-se que:

$$DK = \frac{\rho d_p^2}{12} r_f |\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}|^3 \int_0^{t_p} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt - \frac{\rho d_p^3 r_p}{12} |\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}|^2 \int_0^{t_p} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt - \frac{2t_{int}}{t_p} \frac{d\vec{u}}{dt} \int_0^{t_p} \frac{d\vec{u}}{dt} dt. \quad (3.39)$$

Empregando-se as expressões (3.36) e (3.37), a equação (3.39) fica:

$$DK = \frac{\rho d_p^3}{12} r_p |\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}|^2 \left\{ 0,0117 (\ln \text{Re}_p + 1,3) \left[ r_f |\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}| \frac{d_p}{m_f} \right] \right. \\ \left. - \left[ 4,0 \cdot 10^{-8} \text{Re}_p^2 + 5,9 \cdot 10^{-4} \text{Re}_p - 0,16 \right] - \left[ 1 - \exp(-2t_{\text{int}}/t_p) \right] \right\}. \quad (3.40)$$

Segundo Hetsroni (1989), as flutuações provocadas pela turbulência no campo de velocidades da fase dispersa e contínua são da mesma ordem, portanto  $\sqrt{\langle \mathbf{v}^2 \rangle} \mu |\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p|$  ou  $\sqrt{\langle \mathbf{v}_f^2 \rangle} \mu |\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p|$ . Com isso, pode-se definir a energia cinética de um tubo de vórtice como:

$$K_0 = \frac{\rho d_v^2}{4} d_c r_f \frac{|\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p|^2}{2}, \quad (3.41)$$

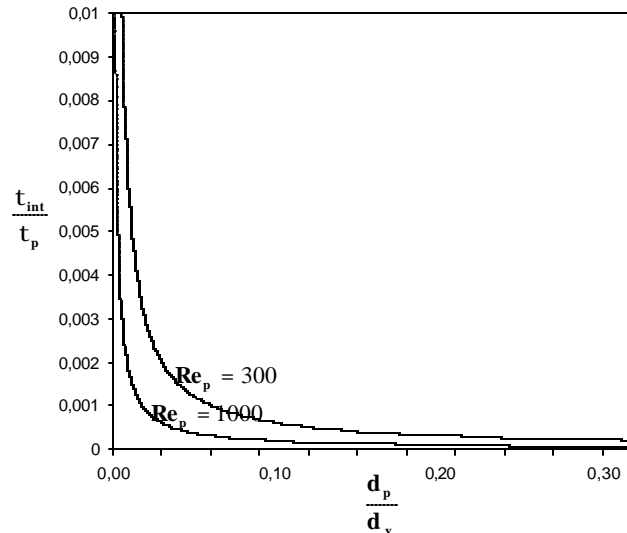
onde  $d_c$  é o comprimento do tubo de vórtice.

Dividindo a equação (3.40) por (3.41), e considerando que  $d_c \gg d_p$ , encontra-se em termos de porcentagens:

$$\frac{DK}{K_0} [\%] = 100 \cdot \frac{2 \rho d_p \ddot{\theta}^2}{3 \xi d_v \dot{\theta}} \frac{r_p \hat{e} |\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}| \dot{u}^2}{r_f \hat{e} |\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p| \hat{h}} \left\{ 0,0117 \text{Re}_p (\ln \text{Re}_p + 1,3) \left[ |\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}| / |\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p| \right] \right. \\ \left. - \left[ 4,0 \cdot 10^{-8} \text{Re}_p^2 + 5,9 \cdot 10^{-4} \text{Re}_p - 0,16 \right] - \left[ 1 - \exp(-2t_{\text{int}}/t_p) \right] \right\}. \quad (3.42)$$

A expressão (3.42) representa a variação da energia cinética da turbulência produzida por uma partícula interagindo com um único vórtice.

A Figura 3.5 mostra o comportamento da relação  $t_{int}/t_p$  com  $d_p/d_v$ .



**FIGURA 3.5-Relação  $t_{int}/t_p$  com  $d_p/d_v$ .**

Da figura acima pode-se observar que  $t_{int}/t_p \rightarrow 0$  com  $d_p/d_v \rightarrow 1$ , logo o termo de dissipação da energia turbulenta é efetivo somente para pequenos valores de  $d_p/d_v$ , isto é; para pequenas partículas.

Por outro lado, a relação entre diferenças de velocidades  $\left| \vec{v}_f - \vec{v}_{p0} \right| / \left| \vec{v}_f - \vec{v}_p \right|$  depende unicamente da relação entre o tempo de resposta da partícula no escoamento e o tempo da partícula, conforme mostra (3.10). Normalmente, o tempo de resposta para escoamentos bifásicos é bastante baixo, levando a relação acima a ser bem próxima da unidade.

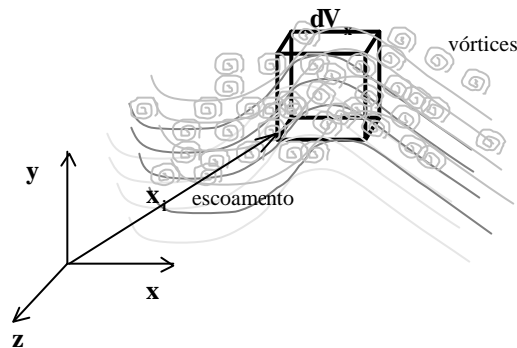
Diante das condições acima, a equação (3.42) produz um comportamento parabólico para a variação da energia da turbulência como função da  $d_p/d_v$ , o qual concorda com os experimentos apresentados em Gore e Crowe (1989), Hetsroni (1989), Kenning e Crowe (1997), Yuan e Michaelides (1992) e Crowe (2000).

A análise da expressão (3.42) tem como objetivo validar a expressão (3.38) para aplicações com o coeficiente de arrasto variável no tempo.

### 3.6-Modificação Total da Energia da Turbulência:

Conforme foi mencionado anteriormente, considera-se como modelo de estudo um escoamento turbulento definido como um escoamento laminar com vórtices distribuídos. Estes vórtices não giram com a mesma velocidade, sendo esta variável no tempo e espaço. Para uma descrição completa da velocidade dos vórtices é necessário recorrer a uma descrição estatística, conforme foi feito no Capítulo 2.

Para iniciar, considera-se um volume de controle infinitesimal  $dV_x$  em um escoamento laminar com  $N_v$  vórtices de tamanho  $d_v$  uniformemente distribuídos, conforme mostra Figura 3.6.



**FIGURA 3.6- Volume de controle no espaço físico.**

Definindo-se o número de densidade de vórtices como:

$$n_v(x_i) = \frac{dN_v}{dV_x}, \quad (3.43)$$

onde  $dN_v$  é o número de vórtices no volume de controle infinitesimal  $dV_x$ .

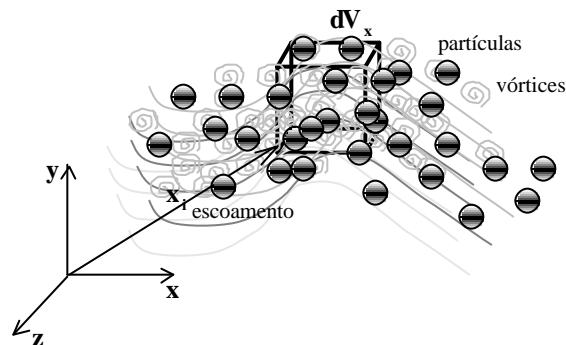
A expressão (3.43) representa a função de distribuição de posição de vórtices em  $\mathbf{x}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . Como os vórtices são distribuídos de maneira uniforme, logo;  $\mathbf{n}_v$  é constante.

Para o caso da função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices, pode-se definir:

$$\mathbf{F}_{vel} = \frac{dN_v}{dV_x dV_{vel}}, \quad (3.44)$$

onde  $dV_{vel}$  é o volume no espaço de velocidade de rotação. Neste caso  $\mathbf{F}_{vel}$  representa o número de vórtices que tem velocidade de rotação entre  $\mathbf{v}_\ell$  e  $\mathbf{v}_\ell + d\mathbf{v}_\ell$  ( $\ell \circ \mathbf{d}_p$ ), no volume de controle infinitesimal  $dV_x$ .

As expressões (3.43) e (3.44) podem ser normalizadas com o número total de vórtices  $N_v$ . O mesmo conceito de distribuição estatística pode ser aplicado ao escoamento bifásico. Considerando uma distribuição uniforme de partículas que apresentam o mesmo tamanho  $\mathbf{d}_p$ , conforme Figura 3.7.



**FIGURA 3.7-Volume de controle no espaço físico com partículas.**

Assim, tem-se para o número de densidade de partículas:

$$\mathbf{n}_p = \frac{dN_p}{dV_x}, \quad (3.45)$$

onde  $dN_p$  é o número de partículas no volume de controle infinitesimal  $dV_x$ . Como a distribuição é uniforme,  $\mathbf{n}_p$  é constante.

Da mesma forma que (3.43) e (3.44), a expressão (3.45) pode ser normalizada com o número total de partículas  $N_p$ .

Como foi anteriormente citada, a expressão (3.38) dá a variação de energia cinética da turbulência para o caso de uma única partícula. Para o caso de  $N_p$  partículas com distribuição uniforme, tem-se:

$$\begin{aligned} DK_t^p &= \int_{V_x} [DK^+ - DK^-] \mathbf{n}_p dV_x = \\ &= \mathbf{n}_p V_x \frac{\rho d_p}{12} d_{esteira} r_f St \frac{|\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}|^3}{2} \int_0^{t_p} \hat{\mathbf{e}} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \frac{9}{4} \frac{m_f}{d_p^2 r_p} \int_0^{t_c} \hat{\mathbf{u}} dt dt \\ &- \mathbf{n}_p V_x \frac{\rho d_p m_f}{8} [(\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}) \times (\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0})] \int_0^{t_{int}} \hat{\mathbf{e}} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \frac{3}{2} \frac{m_f}{d_p^2 r_p} \int_0^{t_c} \hat{\mathbf{u}} dt dt. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Da expressão (3.46), somente a segunda parcela do lado direito depende do número de vórtices, a qual corresponde ao termo de interação vórtice-partícula. Com isso, tem-se a expressão geral de modificação da energia turbulenta, obtida para o caso de uma distribuição  $F_{vel}$  de vórtices de tamanho  $d_v$ , dada por:

$$DK_t = \mathbf{n}_p V_x \frac{\rho d_p}{12} d_{esteira} r_f St \frac{|\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}|^3}{2} \int_0^{t_p} \hat{\mathbf{e}} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \frac{9}{4} \frac{m_f}{d_p^2 r_p} \int_0^{t_c} \hat{\mathbf{u}} dt dt$$

$$\begin{aligned}
& - n_p V_x \frac{pd_p m_f}{8} \int_{V_x V_{vel}} \dot{\mathbf{f}}_{vel} \int_{\hat{\mathbf{f}}} [(\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}) \times (\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0})] \dot{\mathbf{f}}_{C_D} \hat{\mathbf{e}} \exp \frac{\alpha}{\hat{\mathbf{e}}} - \frac{3}{2} \frac{m_f}{d_p^2 r_p} \dot{\mathbf{f}}_{C_D} dt \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{\hat{\mathbf{e}}} \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{\hat{\mathbf{e}}} dV_{vel} dV_x = \\
& = n_p V_x \frac{pd_p}{12} d_{esteira} r_f St \frac{|\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}|^3}{2} \int_0^{t_p} \dot{\mathbf{f}}_{C_D} \hat{\mathbf{e}} \exp \frac{\alpha}{\hat{\mathbf{e}}} - \frac{9}{4} \frac{m_f}{d_p^2 r_p} \dot{\mathbf{f}}_{C_D} dt \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{\hat{\mathbf{e}}} dt \\
& - n_p n_v V_x^2 \frac{pd_p m_f}{8} \int_{V_{vel}} \dot{\mathbf{f}}_{vel} \int_{\hat{\mathbf{f}}} [(\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}) \times (\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0})] \dot{\mathbf{f}}_{C_D} \hat{\mathbf{e}} \exp \frac{\alpha}{\hat{\mathbf{e}}} - \frac{3}{2} \frac{m_f}{d_p^2 r_p} \dot{\mathbf{f}}_{C_D} dt \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{\hat{\mathbf{e}}} \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{\hat{\mathbf{e}}} dV_{vel},
\end{aligned} \tag{3.47}$$

sendo  $\mathbf{f}_{vel}$  a função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices normalizada ( $\mathbf{f}_{vel} = \mathbf{F}_{vel} / \mathbf{N}_v$ ). Aplicando à expressão (3.47) a função de arrasto independente do tempo, fazendo  $(1 + 0,15 \text{Re}_p^{0,687}) = 1$  com o objetivo de se trabalhar com a expressão de Stokes juntamente com a definição (3.8), tem-se a seguinte expressão para a variação da energia cinética:

$$\begin{aligned}
DK_t & = n_p V_x \frac{pd_p^2}{12} r_f \frac{|\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}|^3}{2} \hat{\mathbf{e}} \exp \frac{\alpha}{\hat{\mathbf{e}}} - 0,018 d_{esteira} St \frac{d_p r_p}{m_f} \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{\hat{\mathbf{e}}} \\
& - n_p n_v V_x^2 \frac{pd_p^3 r_p}{8} \int_{V_{vel}} \dot{\mathbf{f}}_{vel} |\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}|^2 \hat{\mathbf{e}} \exp \frac{\alpha}{\hat{\mathbf{e}}} - \frac{2t_{int}}{t_p} \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{\hat{\mathbf{e}}} dV_{vel}. \tag{3.48}
\end{aligned}$$

A definição de fração volumétrica é expressa como:

$$a_f = \frac{V_f}{V_x}, \tag{3.49 a}$$

$$a_p = \frac{V_p}{V_x}. \quad (3.49 \text{ b})$$

Onde  $a_f$  e  $a_p$  expressam as frações volumétricas da fase contínua e dispersa, respectivamente.

Associando o conceito de densidade ( $r_i = m_i/V_i, i = f, p$ ) com as expressões (3.49) e introduzindo isto em (3.48), tem-se a variação específica de energia cinética da turbulência, dada por:

$$Dk = \frac{1}{2} \frac{a_p}{a_f} \frac{|\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}|^3}{2} \hat{e} \hat{e} 0,018 d_{esteira} St \frac{r_p}{m_f} \frac{\dot{u}}{\dot{u}} - \frac{3}{4} n_v V_x \frac{a_p}{a_f} \frac{r_p}{r_f} \int_{V_{vel}} \dot{f}_{vel} |\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}|^2 \hat{e} \hat{e} 1 - \exp\left[-\frac{2t_{int}}{t_p} \frac{\dot{u}}{\dot{u}}\right] dV_{vel}. \quad (3.50)$$

Tomando-se a energia cinética específica do vórtice a partir da definição (3.41), tem-se:

$$k_0 = \frac{1}{(V_f)_v} \frac{\rho d_v^2}{4} d_c \frac{|\vec{v}_f - \vec{v}_p|^2}{2}, \quad (3.51)$$

onde  $(V_f)_v$  representa o volume de fluido contido no vórtice.

Dividindo-se (3.50) por (3.51) e fazendo  $d_c \gg d_p$  encontra-se:

$$\frac{Dk}{k_0} = \frac{1}{2} \frac{a_p}{a_f} \frac{r_p}{r_f} \frac{|\vec{v}_f - \vec{v}_{p0}|^3}{|\vec{v}_f - \vec{v}_p|^3} \hat{e} \hat{e} 0,018 \frac{d_{esteira}}{d_p} St Re_p \frac{\dot{u}}{\dot{u}}$$



$$- \frac{3}{2} \frac{a_p}{a_f} \frac{r_p}{r_f} \frac{\mathbf{n}_v \mathbf{V}_x}{|\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p|^2} \frac{\mathbf{0}}{V_{vel}} \mathbf{f}_{vel} |\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}|^2 \hat{\mathbf{e}}_1 - \exp\left\{-\frac{\alpha}{\zeta} \frac{2t_{int}}{t_p} \frac{\ddot{\mathbf{0}}}{\theta} \mathbf{dV}_{vel}\right\} \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (3.52)$$

Segundo Kolmogorov (ver Frisch (1995)) as escalas de velocidade e tamanho de vórtice são relacionadas na forma  $v_{\ell_0}/v_\ell \sim (\ell_0/\ell)^{1/3}$ , logo a relação entre diferenças de velocidades pode ser colocada como  $|\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}|/|\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p| \sim (\ell_0/\ell)^{1/3}$ , desde que  $\sqrt{\langle v_\ell^2 \rangle} \mu |\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_p|$ . Se é feito a hipótese da escala integral ser da ordem da escala das partículas ( $\ell_0 \sim \mathbf{d}_p$ ), a expressão (3.52) fica na seguinte forma:

$$\frac{D\mathbf{k}}{k_0} = \frac{1}{2} \frac{a_p}{a_f} \frac{r_p}{r_f} \frac{\mathbf{d}_p}{\mathbf{d}_v} \hat{\mathbf{e}}_1 0,018 \frac{\mathbf{d}_{esteira}}{\mathbf{d}_p} \text{St Re}_p \frac{\ddot{\mathbf{0}}}{\theta} \hat{\mathbf{e}}_1 - \frac{3}{2} \frac{a_p}{a_f} \frac{r_p}{r_f} \frac{\alpha \mathbf{d}_p}{\zeta \mathbf{d}_v} \frac{\ddot{\mathbf{0}}^2}{\theta^3} \frac{\mathbf{n}_v \mathbf{V}_x}{V_{vel}} \frac{\mathbf{0}}{V_{vel}} \mathbf{f}_{vel} \hat{\mathbf{e}}_1 - \exp\left\{-\frac{\alpha}{\zeta} \frac{2t_{int}}{t_p} \frac{\ddot{\mathbf{0}}}{\theta} \mathbf{dV}_{vel}\right\} \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (3.53)$$

Expandindo o integrando da segunda parcela do termo do lado direito de (3.53) em série de potências encontra-se:

$$1 - e^{-\frac{2t_{int}}{t_p}} = 2 \frac{t_{int}}{t_p} - 2 \frac{\alpha t_{int}}{\zeta} \frac{\ddot{\mathbf{0}}}{\theta} \frac{t_{int}}{t_p} + \dots,$$

que, com as definições (3.8), (3.21) e do número de Reynolds da partícula, fica:

$$1 - e^{-\frac{2t_{int}}{t_p}} = 2 \frac{r_f}{r_p} \frac{\mathbf{d}_v}{\mathbf{d}_p} \frac{18}{\text{Re}_p} - 2 \frac{\alpha r_f}{\zeta} \frac{\mathbf{d}_v}{r_p} \frac{18}{\mathbf{d}_p} \frac{\ddot{\mathbf{0}}^2}{\theta} \frac{1}{\text{Re}_p} + \dots$$

Se  $r_f/r_p \sim 10^{-3}$ ,  $Re_p \approx 10^2$ , logo os termos de segunda ordem em diante podem ser desprezados e, (3.53) é expressa na forma:

$$\frac{Dk}{k_0} = \frac{1}{2} \frac{a_p}{a_f} \frac{r_p}{r_f} \frac{d_p}{d_v} \hat{e} \left[ 0,018 \frac{d_{esteira}}{d_p} St Re_p \frac{\ddot{u}}{\ddot{u}} \right. \\ \left. - 54 \frac{a_p}{a_f} \frac{d_p}{d_v} \frac{\ddot{u}}{\ddot{u}}^{-\frac{1}{3}} n_v V_x \frac{1}{Re_p} \right]. \quad (3.54)$$

Finalmente, com as expressões (3.36) e (3.37), tem-se a expressão em termos de porcentagem para a variação da intensidade da turbulência dada como:

$$\frac{Dk}{k_0} = \frac{a_p}{a_f} \frac{1}{\hat{e}} \left[ 0,0117 \frac{r_p}{r_f} \frac{d_p}{d_v} (\ln Re_p + 1,3) \left[ - 4,0 \cdot 10^{-8} Re_p^2 + 5,9 \cdot 10^{-4} Re_p - 0,16 \right] Re_p \right. \\ \left. - \frac{54}{Re_p} \left( d_v/d_p \right)^{\frac{1}{3}} n_v V_x \frac{\ddot{u}}{\ddot{u}} \right]. \quad (3.55)$$

Empregando a definição (3.43) tem-se, para uma distribuição uniforme de tubo de vórtices no espaço físico, que:

$$n_v = \frac{dN_v}{dV_x} = \frac{N_v}{V_x},$$

a qual leva a seguinte forma:

$$N_v = n_v V_x.$$

Como o volume de cada tubo de vórtice (de forma geral) é  $V_v$ , então em um domínio físico cujo volume é  $V_x$ , o número de vórtices é dado por:

$$N_v \sim \frac{V_x}{V_v} \sim \frac{D^3}{D_v^3}. \quad (3.56)$$

Onde  $D$  representa a dimensão característica do volume  $V_x$  e  $D_v \sim \sqrt[3]{(\rho d_v^2/4)\mu}$  representa uma dimensão característica do tubo de vórtice.

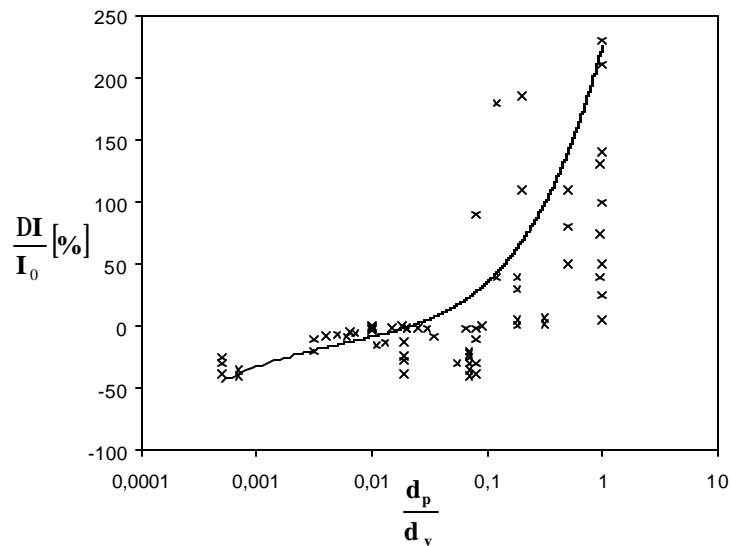
Assim, a expressão para a variação da energia da turbulência, no caso com distribuição uniforme de vórtices e partículas e coeficiente de arrasto constante, é dada como:

$$\frac{Dk}{k_0} = \frac{a_p}{a_f} \hat{i} 0,0117 \frac{r_p}{r_f} \frac{d_p}{d_v} (\ln Re_p + 1,3) \left[ - 4,0 \cdot 10^{-8} Re_p^2 + 5,9 \cdot 10^{-4} Re_p - 0,16 \right] Re_p - \frac{54}{Re_p} \left( \frac{d_v}{d_p} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{D}{D_v} \right)^3 \frac{\mu}{\rho}. \quad (3.57)$$

Sabendo-se da definição da intensidade da turbulência, tem-se para a variação percentual que:

$$\frac{DI}{I_0} [\%] = 100 \cdot \frac{\partial k}{\partial k_0} \sqrt{\frac{Dk}{k_0} + 1} \frac{\partial k}{\partial k_0} \frac{\partial k}{\partial k_0} \frac{\partial k}{\partial k_0}. \quad (3.58)$$

A comparação da variação da intensidade da turbulência provocada pelas partículas do escoamento da fase dispersa a partir das expressões (3.57) e (3.58), com os resultados experimentais compilados por Crowe (2000), para  $a_p/a_f \sim 0,001$ ,  $r_p/r_f \sim 1000$ ,  $Re_p \sim 600$  e  $D/D_v \sim 8,5$ , é mostrada na Figura 3.8.



**Figura 3.8-Varição da intensidade da turbulência: dados experimentais**

( $\times$ ) e aproximação teórica (—).

**FONTE: Crowe (2000).**

Conforme pode ser observado, os resultados teóricos concordam bem com os resultados experimentais, incluindo até a diminuição da turbulência conforme previsto por vários autores, porém; não formulado.

## CAPÍTULO 4

### INTERAÇÃO VÓRTICE-PARTÍCULA

Neste Capítulo busca-se obter uma análise precisa da interação vórtice-partícula, para obter resultados referentes ao coeficiente de arrasto variando no tempo. A interação vórtice-partícula é inicialmente tratada pelo choque de um tubo de vórtice, carregado pela corrente média do escoamento laminar, o qual atinge a partícula esférica. A modelagem é feita empregando um código com discretização do tipo volumes finitos e malha não estruturada. A chave do processo interativo é baseada na variação temporal do coeficiente de arrasto, o qual é modelado analiticamente a partir dos resultados numéricos. Finalmente, os resultados são extrapolados para uma distribuição de vórtices, onde se analisa a tendência dos efeitos superpostos dos vórtices.

#### **4.1-Introdução:**

Desde do início deste trabalho o escoamento turbulento tem sido modelado como a superposição de uma distribuição de vórtices sobre um escoamento laminar. No Capítulo anterior foi inserida a distribuição de partículas nesta distribuição de vórtices e, como foi mostrada, a interação vórtice-partícula é de fundamental importância na escolha da forma de modelagem do escoamento bifásico resultante desta combinação. Para valores elevados da relação entre tamanho do vórtice e diâmetro da partícula, ocorre a dissipação dessas estruturas coerentes. Essas estruturas representam os vórtices, que são estruturas tridimensionais na forma de tubo. Para valores próximos da unidade da relação diâmetro da partícula por diâmetro do vórtice, tem-se aumento da quantidade de estruturas coerentes a partir da esteira gerada. É dentro desta faixa que se busca conhecer melhor o efeito da interação vórtice-partícula.

O problema hidrodinâmico modelado é constituído de uma partícula colocada em repouso em um escoamento laminar tridimensional, onde uma estrutura coerente, a qual é descrita em Lamb (1932) ou Saffman (1992) como um tubo de vórtice, é carregada ou advectada pela corrente do escoamento. O interesse principal é conhecer os efeitos transientes

provocados pelo tubo de vórtice sobre as forças de superfície relativas a partícula. Isto tem, em termos de simulação, o mesmo efeito de uma partícula da fase dispersa que se desloca na fase contínua com uma velocidade relativa.

Dentro do estudo a ser apresentado, são analisados efeitos transientes produzidos pela estrutura coerente sobre a partícula e a de linearidade destes efeitos produzidos por uma distribuição de vórtices, os quais constituem estas estruturas coerentes definidas como tubos cilíndricos com rotação.

A análise do escoamento em torno da partícula foi apresentada de forma analítica por Lamb (1932) e Batchelor (1967) para o caso ideal sem viscosidade. Fornberg (1988) apresentou a solução numérica para o escoamento incompressível, viscoso e estacionário com elevado número de Reynolds. Estes resultados são relativamente importantes em termos de validação, permitindo, por exemplo, uma estimativa para malha de discretização espacial. Kim et al. (1998) apresentaram o desenvolvimento de uma nova equação para o movimento da partícula validada com resultados numéricos. Wang e Joseph (2004) estudaram o escoamento potencial sobre a esfera, com precisão de segunda ordem.

Em linha com o objetivo deste Capítulo, Howe et al. (2001) apresentaram um estudo teórico-experimental sobre o caráter não-estacionário do coeficiente de arrasto para escoamentos viscosos incompressíveis com alto número de Reynolds.

Dentro do aspecto da interação vórtice-partícula, Kim et al. (1995) analisaram o escoamento laminar tridimensional em torno de uma esfera, perturbado por uma estrutura coerente inicialmente cilíndrica (tubo de vórtice vertical). A modelagem numérica é obtida por discretização com diferenças finitas, cuja validação é feita para o escoamento estacionário em torno da esfera. Continuando o trabalho precedente, Kim et al. (1997) analisaram, com a mesma modelagem, a linearidade da superposição de vórtices. Elcrat et al. (2001), apresentaram os efeitos de vórtices estacionários sobre o escoamento em torno da esfera. De forma semelhante, Gossler e Marshall (2001) apresentaram um estudo numérico da interação vórtice-cilindro em um escoamento tridimensional viscoso.

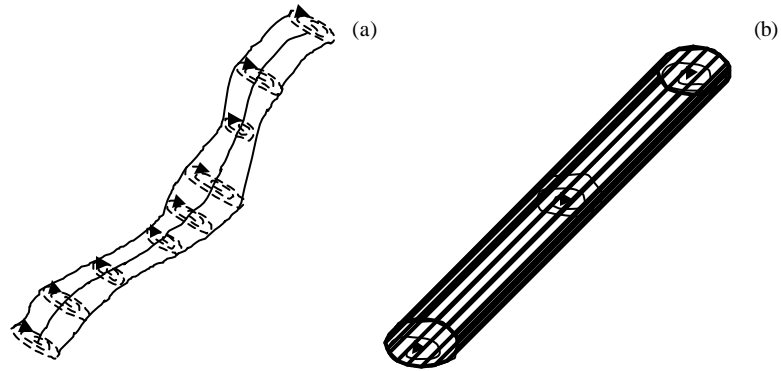
Como já mencionado no Capítulo 1, uma das principais aplicações para o escoamento bifásico turbulento é associada com o processo de combustão de gotas em câmaras de combustão motor-foguete. Dentro desse contexto, Birouk et al. (1996) analisaram os efeitos da turbulência na vaporização de gotas. Masoudi e Sirignano (2000), completaram esse trabalho com a análise da interação do vórtice com a gota vaporizando.

A análise da linearidade dos efeitos de superposição de vórtices que modificam a estrutura do escoamento em torno de uma partícula com formato esférico está intimamente associada com a interação entre os vórtices. Overman e Zabusky (1982), apresentaram um estudo numérico dos efeitos evolutivos de vórtices paralelos. Leweke et al. (2001), mostraram numericamente a interação entre vórtices com rotações no mesmo sentido. Marshall et al. (2001), apresentaram um estudo numérico da interação entre dois tubos de vórtices cilíndricos, onde os sentidos de rotação são opostos. Schouveiler et al. (2004), analisaram a interação das esteiras de duas esferas colocadas lado a lado. Na mesma linha, porém com esferas colocadas na mesma direção, tem-se o trabalho de Tsuji et al. (2003). Finalmente, Mattner et al. (2003), apresentaram um estudo numérico sobre a formação de vórtices na esteira da esfera.

O objetivo principal deste Capítulo é obter a perturbação provocada pela passagem do vórtice sobre o coeficiente de arrasto.

#### **4.2-Vórtice Cilíndrico-Definição Numérica:**

Um tubo de vórtice representa, segundo Batchelor (1967), uma estrutura tridimensional, gerada a partir de uma geratriz bidimensional. No caso particular de um tubo de vórtice cilíndrico, tem-se uma estrutura regular de revolução.



**FIGURA 4.1-Tubo de vórtice (a) e Tubo de vórtice cilíndrico (b).**

No que se refere à geratriz do tubo de vórtice, de acordo com Lamb (1932) e Batchelor (1967), existem dois modelos de vórtices bidimensionais que podem ser empregados como tal. O primeiro é definido como ponto vórtice, sendo estabelecido para o escoamento ideal, sem rotação (escoamento potencial) e cujo campo de velocidades  $\vec{v}_v$  é expresso por:

$$\vec{v}_v = \frac{G_v}{2\pi r} \hat{q} \quad (4.1)$$

Onde  $G_v$  é a circulação do vórtice ou intensidade ( $G_v = \oint \vec{v} \times d\vec{\ell}$ ),  $r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{1}{2}}$  é o raio que designa o efeito do campo de velocidades em um plano  $y = a$  ( $a$  é uma constante) e  $\hat{q}$  é o versor na direção tangencial do vórtice.

Um segundo modelo é baseado no vórtice forçado (escoamento entre cilindros, p.ex.), o qual gera um escoamento rotacional, onde o campo de velocidades é:

$$\vec{v}_v = w r \hat{q} \quad (4.2)$$

onde  $w$  representa a velocidade angular de rotação do vórtice.



Em ambos os casos apresentados acima ocorrem uma singularidade. Dentro do aspecto numérico, o ideal seria um modelo misto com domínios de aplicação limitados pelo núcleo do vórtice. Dessa forma, a abordagem potencial pode ser mantida para o escoamento fora do núcleo.

Kim et al. (1995) emprega uma expressão para a linha de corrente do escoamento induzido pelo vórtice no instante inicial, a qual é dada por:

$$y_v(\mathbf{r}, t_0) = -\frac{G_v}{2p} \ln[\mathbf{r}^2 + s^2], \quad (4.3)$$

onde  $s$  é o raio do núcleo do vórtice, que de acordo com a definição do Capítulo 3  $s \circ \mathbf{r}_v = \mathbf{d}_v$ .

O campo de velocidade inicial induzida pelo vórtice pode ser descrito a partir de (4.3) pelas definições de velocidades ortogonais do escoamento potencial, conforme Batchelor (1967). Com isso, tem-se que:

$$\vec{v}_v = -\frac{\nabla y_v}{\nabla \mathbf{r}} \hat{q} = \frac{G_v}{p} \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}^2 + s^2} \hat{q}. \quad (4.4)$$

O campo de pressão inicial devido ao vórtice é obtido a partir da componente radial da equação de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas, a qual mostra o balanço entre a aceleração centrífuga e o gradiente de pressão para as linhas de corrente circulares, isto é:

$$\frac{r v_v^2}{r} = \frac{\nabla p}{\nabla r}, \quad (4.5)$$

Integrando (4.5) com (4.4), do infinito até próximo ao núcleo do vórtice, tem-se que:

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t_0) = r \frac{G_v}{p} \frac{\mathbf{r}}{[r^2 + S^2]^2} d\mathbf{r} + \mathbf{p}_\infty, \quad (4.6)$$

a qual produz a seguinte expressão:

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t_0) = -r \frac{G_v^2}{2p^2} \frac{1}{r^2 + S^2} + \mathbf{p}_\infty. \quad (4.7)$$

Onde  $r$  é a densidade do fluido e  $\mathbf{p}_\infty$  é a pressão no infinito.

#### 4.2.1-Simulação Numérica do Vórtice:

A simulação numérica do vórtice é implementada para um domínio semi-esférico para se garantir simetria de malha não-estruturada, com raio de  $10S$ . O vórtice é colocado no centro do domínio, sendo verificado o campo de velocidades induzido.

Para facilitar a implementação das condições iniciais nos nós da malha emprega-se o campo de velocidades apresentado em (4.4) em coordenadas cartesianas. Assim, usando a definição de velocidade para o escoamento potencial, tem-se que:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{G_v}{2p} \ln[r^2 + S^2] \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{G_v}{2p} \ln[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 + S^2] \right] = - \frac{G_v}{p} \frac{(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 + S^2}, \quad (4.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{G_v}{2p} \ln[r^2 + S^2] \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{G_v}{2p} \ln[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 + S^2] \right] = - \frac{G_v}{p} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 + S^2}. \quad (4.9) \end{aligned}$$

As equações governantes desta modelagem são representadas pela equação da continuidade (conservação da massa) e quantidade de movimento. Para o caso do escoamento incompressível, tem-se:

$$\vec{N} \times \vec{v} = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{N} \vec{v} = - \frac{\vec{N} p}{r} + n \vec{N}^2 \vec{v}, \quad (4.11)$$

onde  $\vec{v} = \vec{v}_x \hat{x} + \vec{v}_y \hat{y} + \vec{v}_z \hat{z}$  e  $n$  a viscosidade cinemática.

As condições de contorno implementadas na superfície do domínio semi-esférico são do tipo Dirichlet, sendo dadas por:

$$\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_y = \mathbf{v}_z = 0, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{p} = 0. \quad (4.13)$$

Para o plano de simetria, o qual divide o domínio esférico, a condição imposta é mista, sendo dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial y} = 0, \quad (4.14)$$

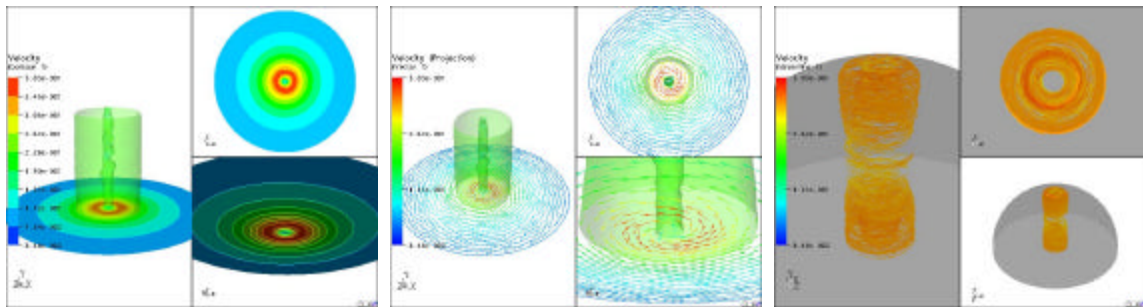
$$\mathbf{v}_y = 0. \quad (4.15)$$

A condição inicial é dada pelo campo de velocidade e pressão aplicado pelo tubo vórtice cilíndrico estabelecido em  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) = (0, 0)$ , com raio do núcleo  $s = 1 \text{ m}$  e intensidade  $G_v = 2,5 \text{ m}^2/\text{s}$ , isto é:

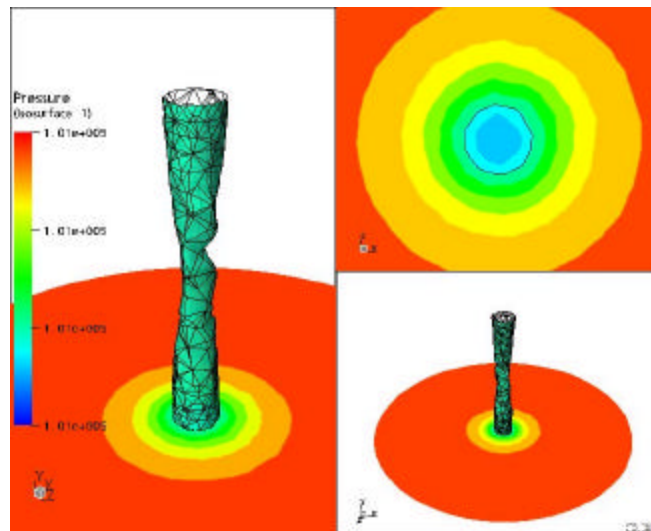
$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_v, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{v}_x = -\frac{G_v}{\rho} \frac{\mathbf{z}}{x^2 + z^2 + S^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_z = \frac{G_v}{\rho} \frac{\mathbf{x}}{x^2 + z^2 + S^2}. \quad (4.17)$$

A solução numérica é obtida por um esquema numérico tridimensional que emprega volumes finitos, com a correção pressão-velocidade do tipo Poisson. Detalhes do código são mostrados no Apêndice A. O vórtice implementado numericamente, empregando-se uma malha não estruturada de 100000 elementos do tipo tetraédrica, é apresentado nas Figuras 4.2.

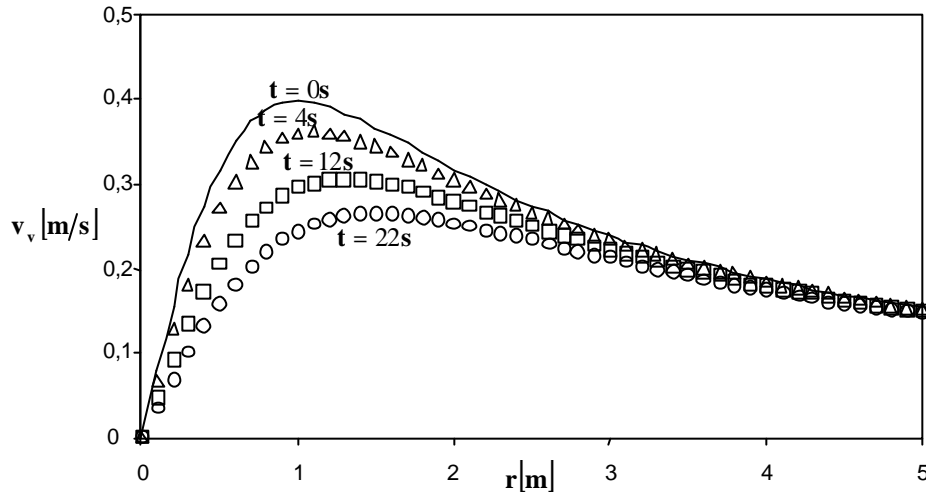


**FIGURA 4.2a - Vórtice em  $t = 4s$ .**



**FIGURA 4.2b-Isosuperfície para pressão em  $t = 4s$ .**

A Figura 4.3 mostra a dispersão do campo de velocidades ao longo do tempo, para o vórtice com intensidade de  $G_v = 2,5 \text{ m}^2/\text{s}$  e núcleo com raio  $s = 1 \text{ m}$ .



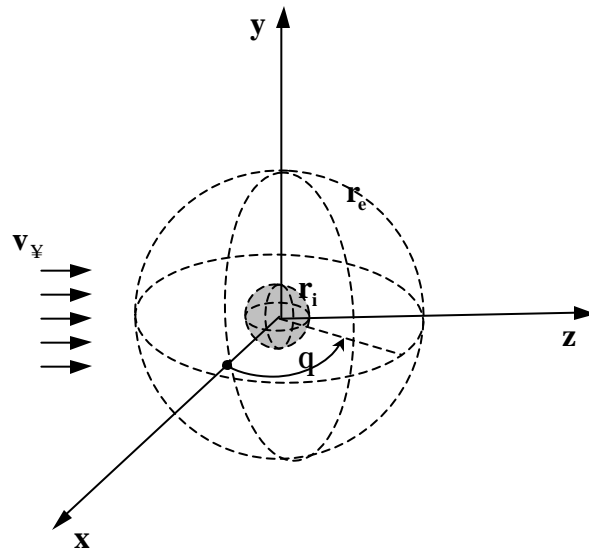
**FIGURA 4.3-Dispersão no tempo, vórtice com  $G_v = 2,5 \text{ m}^2/\text{s}$  e  $s = 1 \text{ m}$ .**

O ponto de máximo das curvas acima representa o tamanho do núcleo do vórtice (ver Saffman (1992)). Os resultados mostrados na Figura 4.3 são valores médios tomados ao longo do tubo de vórtice (uma vez que se emprega uma malha não estruturada). Os resultados foram obtidos para malhas de 100000, 480000 e 1000000 de elementos. O objetivo principal desta simulação é verificar a consistência numérica da expressão (4.3), a qual define o vórtice de Spalart. Como pode ser visto, em função da malha não-estruturada os resultados que formam a isosuperfície de pressão não estão posicionados uniformemente, causando uma certa distorção da estrutura tridimensional.

#### **4.3 - escoamento Estacionário em Torno da Esfera:**

A validação do cálculo do escoamento, o qual já foi empregado no item anterior, é feita para o caso estacionário do escoamento em torno de uma esfera. As equações (4.10) e (4.11), para o caso estacionário, são discretizadas por volumes finitos. O domínio de cálculo é limitado internamente por uma esfera de raio unitário de  $1 \text{ m}$  e externamente por

uma esfera de raio de 10 m. Este valo foi escolhido visando facilitar a construção e refinamento da malha com relação à escala de referência, não modificando a consistência do problema, pois o que deve ser respeitada é a similaridade de Reynolds. A condição de contorno imposta é do tipo Dirichlet. Na primeira metade da esfera externa, é imposto o valor de velocidade relativo ao número de Reynolds, o qual é calculado em função do diâmetro da esfera interna. Na segunda metade, é colocada pressão nula. Para a esfera interna é imposto uma condição de velocidade nula para a superfície. A Figura 4.4 mostra o domínio numérico do problema.



**FIGURA 4.4-Domínio de cálculo do escoamento em torno da esfera.**

O problema matemático referente à análise do escoamento em torno da esfera pode ser colocado da seguinte forma:

- 1) equações de conservação da massa e quantidade de movimento;

$$\vec{N} \times \vec{v} = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{N} \vec{v} = - \frac{\vec{N} p}{r} + n \vec{N}^2 \vec{v}, \quad (4.19)$$

2) condições de contorno:

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \mathbf{v}_z &= v_z \\ \hat{i} \cdot \mathbf{v}_x &= v_x = 0 \end{aligned} \text{ em } \mathbf{r} = \mathbf{r}_e, \quad 180^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{p} = 0 \text{ em } \mathbf{r} = \mathbf{r}_e, \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_y = \mathbf{v}_z = 0 \text{ em } \mathbf{r} = \mathbf{r}_i, \quad \forall \varphi, \quad (4.22)$$

3) condição inicial:

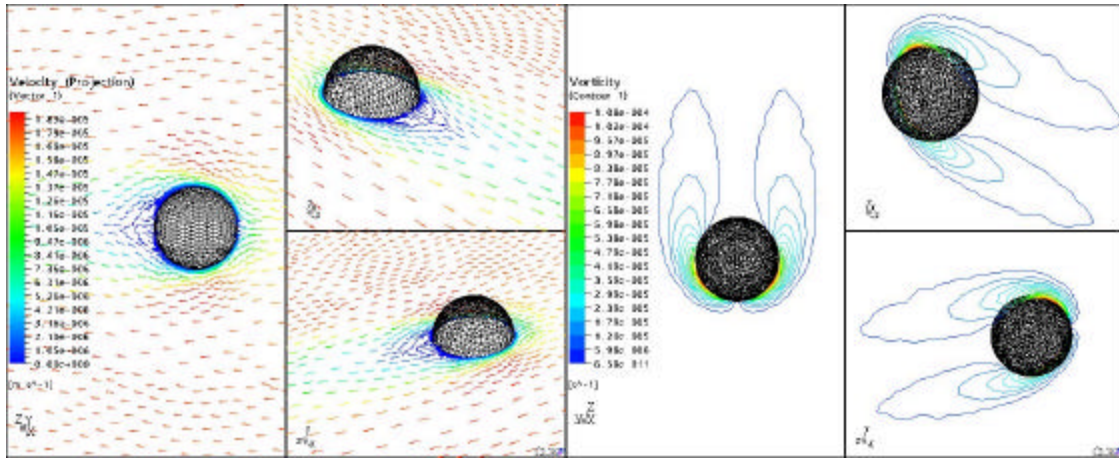
$$\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_y = \mathbf{v}_z = 0, \text{ para todo o domínio.} \quad (4.23)$$

O algoritmo de cálculo empregado é apresentado no Apêndice A.

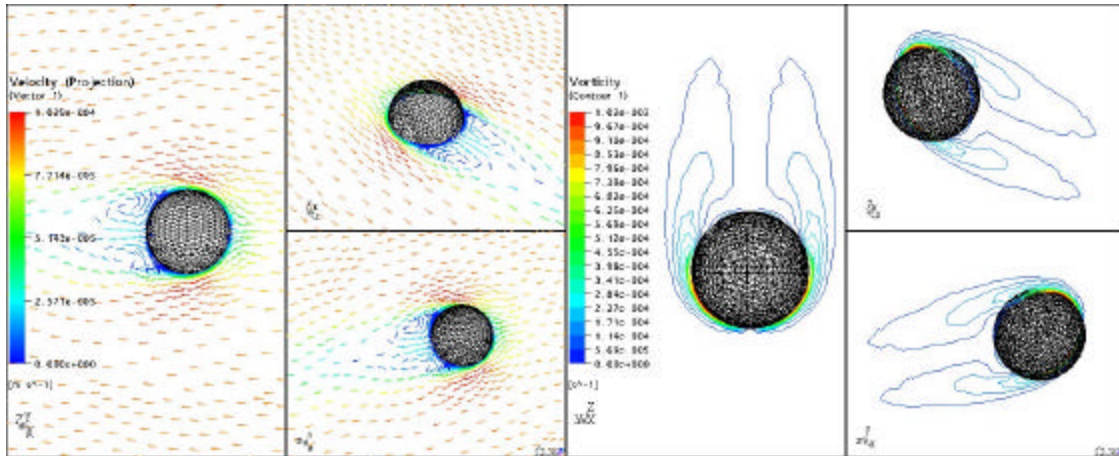
As Figuras 4.5 apresentam o campo de velocidade e vorticidade<sup>1</sup> para número de Reynolds iguais a 20 e 100. Estas figuras podem ser comparadas visualmente com aquelas encontradas em Batchelor (1967) ou com Clift et al. (1978). Os resultados foram gerados para malhas não estrutura de 100000, 480000 e 1000000 de elementos.

---

<sup>1</sup> A vorticidade é definida como  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ .



**FIGURA 4.5a-**Escoamento em torno da esfera para  $Re = 20$  (malha de 1000000 de elementos).



**FIGURA 4.5b-** Escoamento em torno da esfera para  $Re = 100$  (malha de 1000000 de elementos).

A Figura 4.6 mostra a comparação do coeficiente de arrasto obtido numericamente com os experimentos de Clift et al. (1978). A definição do coeficiente de arrasto é expressa por:

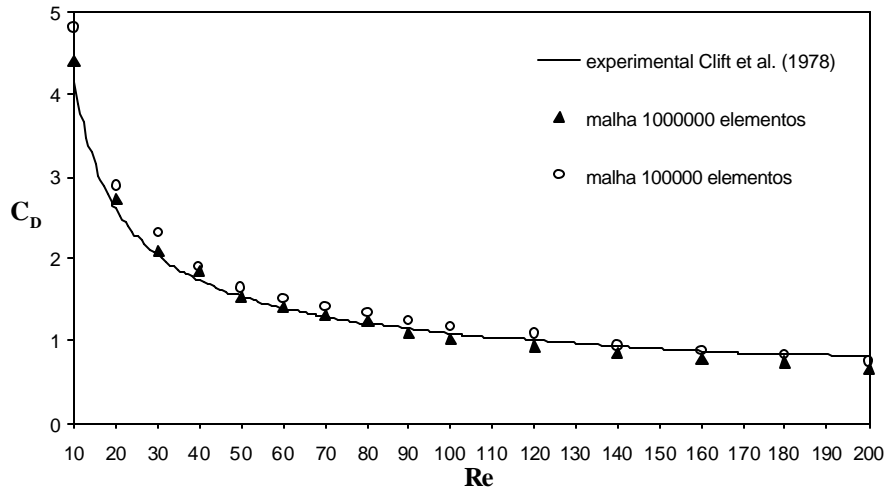


$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 \pi r_i^2}. \quad (4.24)$$

Em (4.24),  $F_D$  é o módulo da força de arrasto, o qual é dado pela soma dos efeitos de pressão e viscosidade sobre a superfície da partícula, ou seja:

$$F_D = \int_S -p \hat{n} \times d\vec{S} + \int_S \hat{n} \times \vec{\tau} \times d\vec{S}, \quad (4.25)$$

onde  $p$  é a pressão,  $\vec{\tau}$  é o tensor viscoso e  $\hat{n}$  é versor normal à superfície.



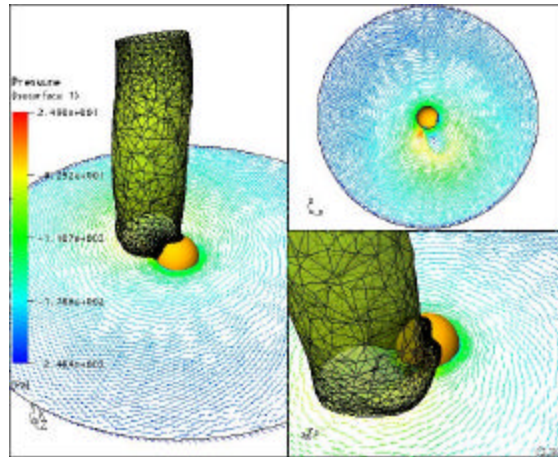
**FIGURA 4.6-Coeficiente de arrasto para partícula esférica: experimental numérico.**

A Figura 4.6 mostra a boa concordância dos resultados numéricos com o experimento, permitindo validar os resultados obtidos pelo código computacional nas aplicações posteriores. Esta validação se torna, em princípio, a única forma de confiabilidade nos resultados apresentados posteriormente os quais são associados com a passagem do vórtice pela partícula, uma vez que esta forma de interação ainda não tem sido explorada pelos experimentos.

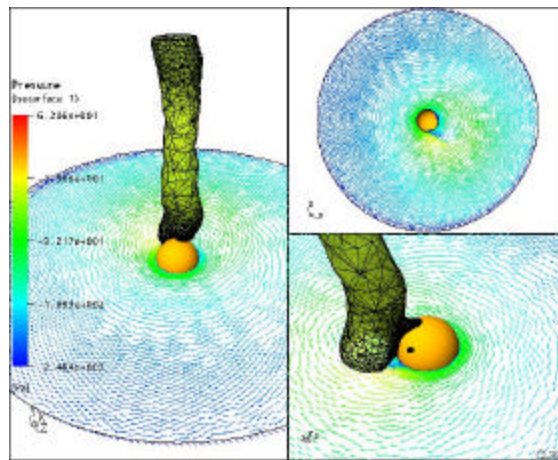
#### 4.4 - escoamento com Interação Vórtice-Partícula:

Neste item busca-se analisar os efeitos da passagem do vórtice, o qual foi descrito no item 4.2, pela partícula colocada inicialmente em um escoamento estacionário. Este estudo foi feito inicialmente, dentro do aspecto numérico, por Kim et al. (1995) e Kim et al. (1997). Isto permite que o cálculo desenvolvido no atual trabalho seja aferido numericamente com os resultados destes autores acima citados. Porém, como os objetivos propostos inicialmente estão associados com a determinação dos efeitos não estacionários sobre o coeficiente de arrasto da partícula devido a passagem dos vórtices, é então interessante conhecer-se a função temporal  $C_D = C_D(t)$ .

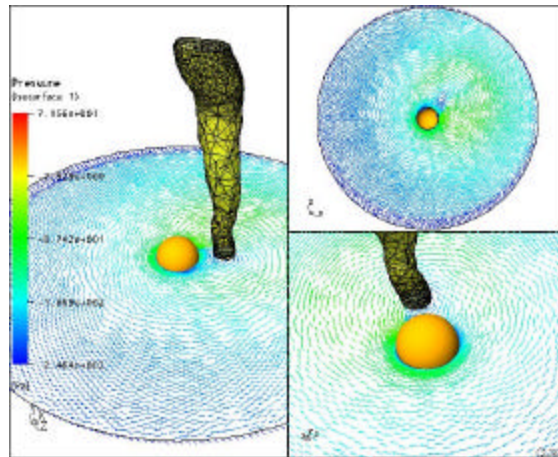
O domínio de cálculo é composto por duas esferas concêntricas (conforme Figura 4.4), com as mesmas condições limites (4.20)-(4.22), porém com a condição inicial (4.16) e (4.17). A posição inicial do tubo de vórtice é definida em  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) = (\mathbf{d}, -10)$ , isto é, o tubo de vórtice é colocado a uma distância  $\mathbf{d}$  do eixo  $\mathbf{x}$  e a  $10 \mathbf{m}$  à frente da partícula (com relação ao escoamento livre). Para ter o mesmo problema numérico que Kim et al. (1995), implementou-se um plano de simetria em  $\mathbf{y} = 0$ . Da mesma forma que feito anteriormente, o problema matemático foi discretizado por volumes finitos, sendo testado com três malhas (100000, 480000 e 1000000 de elementos). As Figuras 4.7 mostram os resultados para três tempos distintos da passagem do vórtice pela partícula. Os resultados correspondem a um número de Reynolds de 100, para o raio de aspecto da partícula de  $1 \mathbf{m}$ , velocidade da corrente livre de  $0,01 \mathbf{m/s}$ , massa específica de  $1000 \mathbf{kg/m}^3$ . O vórtice foi implementado com intensidade de  $2,5 \mathbf{m}^2/\mathbf{s}$  com um raio do núcleo de  $1 \mathbf{m}$ . As figuras representam uma superfície de mesma pressão. Neste caso como a relação entre a velocidade tangencial do núcleo do tubo de vórtice e a velocidade da corrente livre é elevada ( $v_q^s/v_\infty = (G/2\rho s)/v_\infty \sim 40$ ), a estrutura do tubo é bastante rígida provocando o desvio durante a passagem pela partícula. Ao contrário, os tubos de vórtices com baixas relações entre as velocidades tangencial do núcleo e da corrente livre podem ser quebrados ou divididos.



**FIGURA 4.7a-Tempo 20s (malha de 1000000 de elementos).**



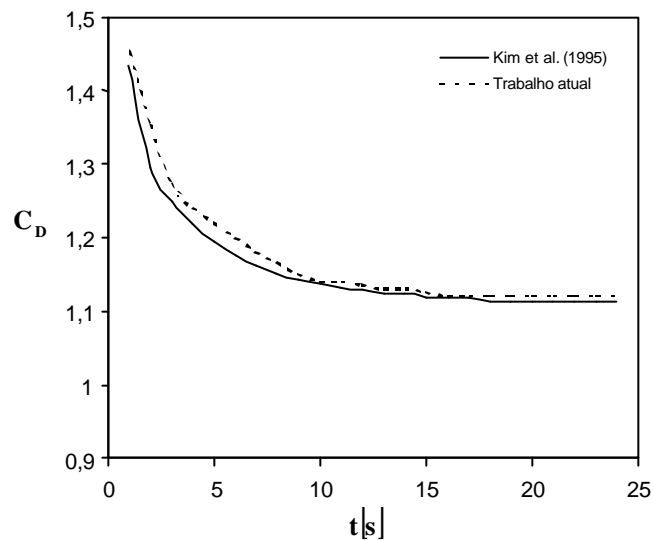
**FIGURA 4.7b-Tempo 50s (malha de 1000000 de elementos).**



**FIGURA 4.7c- Tempo 100s (malha de 1000000 de elementos).**

#### 4.4.1 – Variação do Coeficiente de Arrasto:

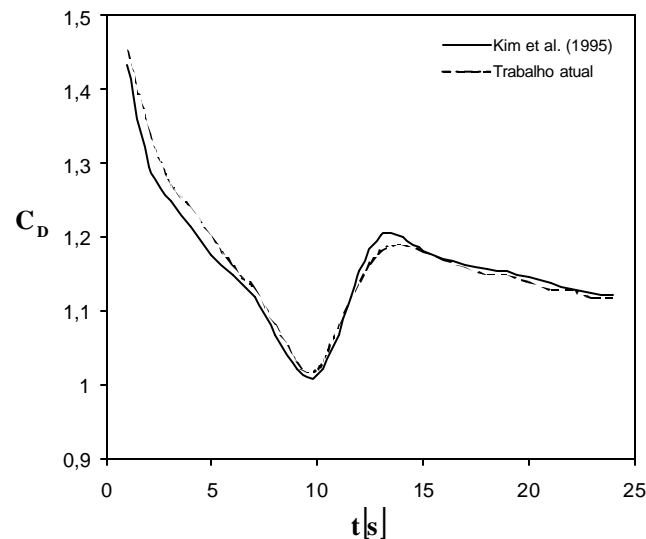
Como citado anteriormente, a passagem do vórtice provoca uma variação sobre o coeficiente de arrasto. Inicialmente, é analisada a variação do coeficiente de arrasto da partícula de forma esférica com a propagação das condições de contorno ao longo do domínio computacional, descrito no item anterior. Isto é, sem os efeitos transientes provocados pela passagem do tubo de vórtice pelo domínio computacional.



**FIGURA 4.8-Coeficiente de arrasto sobre a esfera: Re = 100 (malha de 1000000 de elementos).**

A Figura 4.8 mostra o caso transitório do coeficiente de arrasto. O resultado deve ser semelhante aquele apresentado na Figura 4.6, uma vez que o número de Reynolds é definido com a velocidade na corrente livre. É interessante observar que a falta de concordância nos resultados obtida por Kim et al. (1995) nos tempos iniciais é produzida em função da diferença do número de iterações durante cada passo no tempo ( $\sim 10$  iterações) e do erro máximo ( $\sim 10^{-6}$ ).

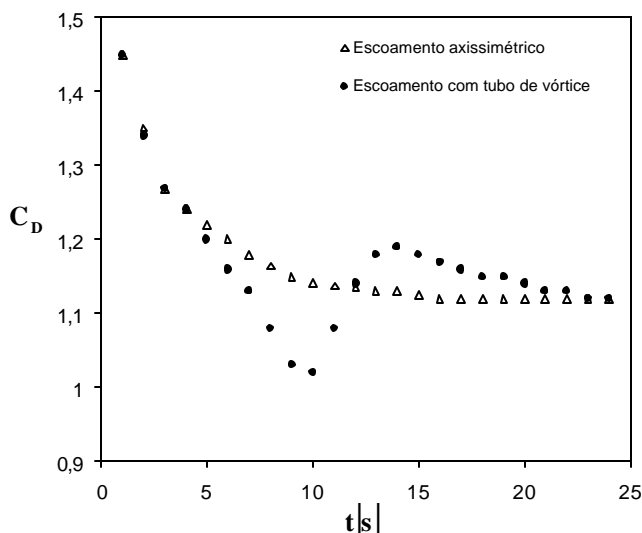
Para o caso da variação do coeficiente de arrasto devido à passagem do tubo de vórtice é necessário incluir alguns parâmetros adimensionais visando diminuir o número de casos computacionais simulados. Além do número de Reynolds, tem-se a velocidade tangencial do núcleo do vórtice adimensionalizada pela velocidade da corrente livre ( $\mathbf{v}_q^s / \mathbf{v}_\infty = (G/2\rho S) / \mathbf{v}_\infty$ ). A figura abaixo mostra a comparação com o resultado obtido por Kim et al. (1995) para  $\mathbf{v}_q^s / \mathbf{v}_\infty = 0,40$ .



**FIGURA 4.9-Coeficiente de arrasto sobre a esfera:  $Re = 100$  (malha de 1000000 de elementos), com tubo de vórtice.**

O tubo de vórtice é inicialmente estabelecido em  $\mathbf{x} = 0$  e  $\mathbf{z} = -10\mathbf{m}$ , conforme Kim et al. (1995). Dessa forma, os resultados obtidos pelo código computacional empregado são semelhantes aos de Kim et al (1995).

A Figura 4.10 mostra os efeitos da passagem do vórtice pela partícula, no caso anterior.



**FIGURA 4.10-Comparação dos efeitos sobre o coeficiente de arrasto.**

A partir da figura acima, pode se observar que os efeitos da passagem do tubo de vórtice sobre o coeficiente de arrasto ocorrem de forma ímpar, onde na primeira etapa ocorre uma diminuição dos efeitos do escoamento axissimétrico e, posteriormente uma amplificação, provocada justamente pela assimetria imposta pelo tubo de vórtice ao campo de velocidades.

#### 4.4.2 – Expressão Analítica para a Variação do Coeficiente de Arrasto:

A obtenção dos resultados numéricos mostrados apresenta vantagens e desvantagens. Em geral, o cálculo demanda tempo para preparação, geração e tratamento dos resultados. De forma que é vantajoso obter uma expressão analítica que descreva o comportamento do coeficiente de arrasto no tempo.

Inicialmente, para o caso da interação vórtice-partícula, tem-se a partir das simulações apresentadas anteriormente a validação dos resultados de Kim et al. (1995). Estes resultados permitem que expressões analíticas para o efeito do vórtice sobre o coeficiente

de arrasto. A primeira análise é feita para o efeito transitório do escoamento sobre a partícula inicialmente mostrado na Figura 4.8. A expressão para o coeficiente de arrasto pode ser colocada, no caso do escoamento axissimétrico (sem tubo de vórtice), como:

$$C_D(t) = C_D^t(t) + C_D^p, \quad (4.26)$$

onde  $C_D^t(t)$  é a parcela transitória e  $C_D^p$  a parcela permanente.

A parcela permanente é descrita pela expressão do arrasto para o escoamento em torno da esfera, a qual já foi apresentado no Capítulo 3 (Clift et al. (1978)) como:

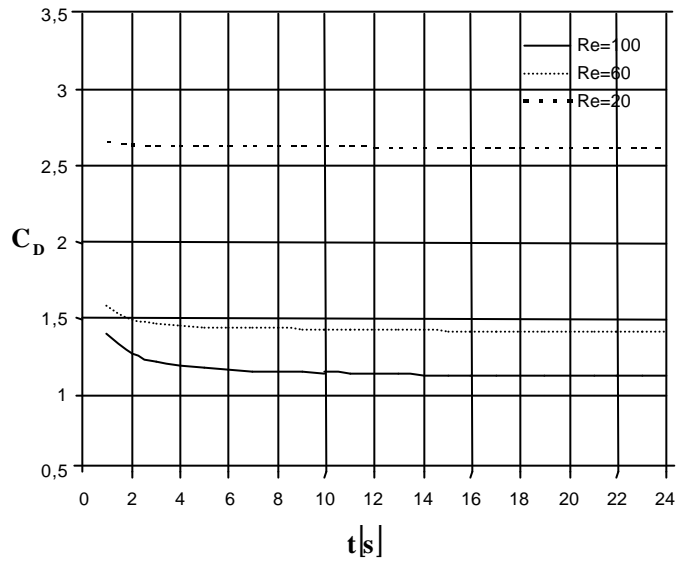
$$C_D^p = \frac{24}{Re} [1 + 0,15 Re^{0,694}]. \quad (4.27)$$

A parcela transitória pode ser descrita por uma função do tempo dada na seguinte forma:

$$C_D^t(t) = \frac{A}{t}, \quad (4.28)$$

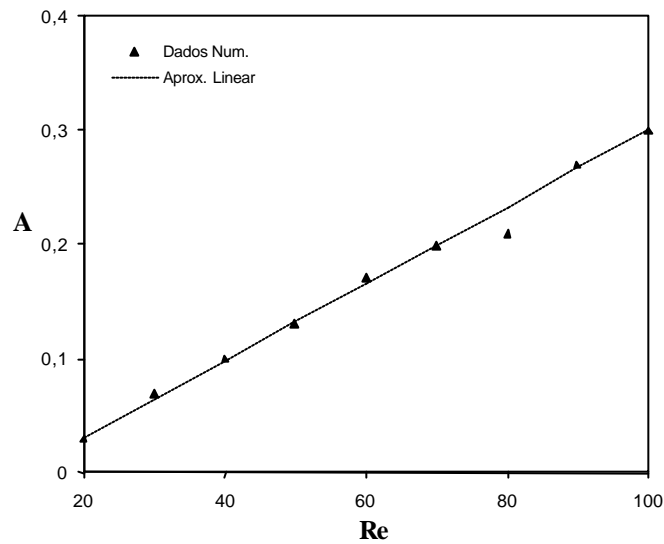
onde  $A$  é um parâmetro obtido a partir dos resultados numéricos como função do número de Reynolds.

Os resultados do cálculo transiente para o intervalo de 0 a 24s é apresentado na Figura 4.11 para números de Reynolds 20, 60 e 100. Como pode ser observado diretamente da figura, o coeficiente de arrasto tende ao valor permanente, o qual é dado pela expressão (4.27), mais rapidamente para números de Reynolds baixos.



**FIGURA 4.11- Parcela transiente do coeficiente de arrasto.**

Para a faixa do número de Reynolds entre 20 e 100 o coeficiente  $A$  da expressão (4.28) é mostrado na Figura (4.12).



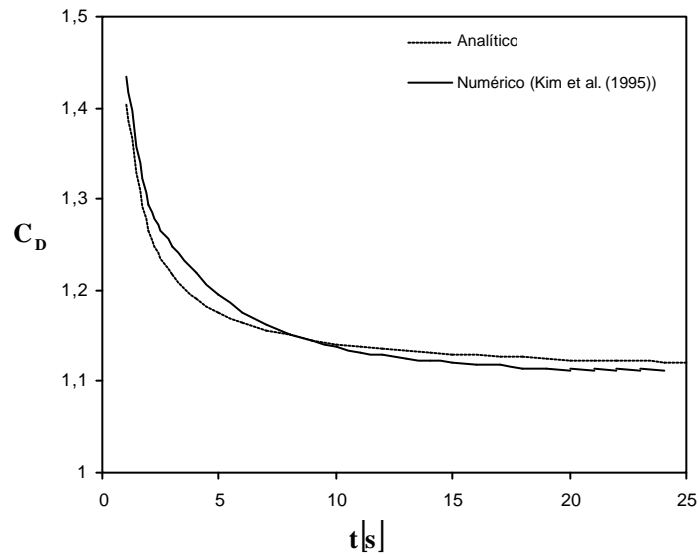
**FIGURA 4.12- Variação do coeficiente  $A$  com o número de Reynolds.**



A linha tracejada representa a aproximação de  $A$  pela expressão linear:

$$A = 0,00338Re - 0,038. \quad (4.29)$$

A Figura 4.13 mostra a comparação do resultado para o coeficiente de arrasto obtido com a aplicação da expressão (4.29), para o caso com  $Re = 100$  :



**FIGURA 4.13- Comparação do coeficiente de arrasto para  $Re = 100$  .**

A passagem do tubo de vórtice constitui, também um efeito transiente (conforme Figura 4.10) a ser incluído na expressão (4.26). Dessa forma, a expressão analítica que para o atual objetivo melhor descreve a passagem do tubo de vórtice atingindo o centro da partícula é dada como:

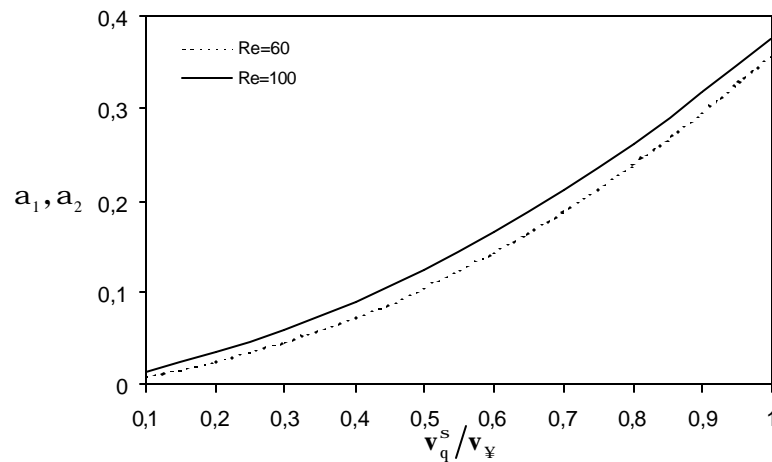
$$C_D^v(t) = \frac{1}{2} a_1 (t - b_1) e^{-g_1(t-b_1)^2} [1 - \text{sinal}(t - b_1)] + \frac{1}{2} a_2 (t - b_2) e^{-g_2(t-b_2)^2} [1 - \text{sinal}(t - b_2)], \quad (4.30)$$

onde os coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$  e  $g_i$  ( $i=1,2$ ) são funções do número de Reynolds, da intensidade e tamanho do vórtice, obtidas a partir da comparação de (4.30) com os resultados numéricos. Os dois últimos parâmetros (intensidade e tamanho do vórtice) podem ser agrupados em um único, o qual foi definido anteriormente como a relação entre o módulo da velocidade tangencial do núcleo do tubo de vórtice e o módulo da velocidade do escoamento livre, podendo ser expresso como:

$$\frac{v_q^s}{v_\infty} = \frac{G}{2\rho s v_\infty}. \quad (4.31)$$

A figuras abaixo mostram o comportamento de  $a_i$ ,  $b_i$  e  $g_i$  ( $i=1,2$ ) com o número de Reynolds e  $v_q^s/v_\infty$ .

Os valores de  $a_1$  e  $a_2$  são idênticos, sendo apresentados na Figura 4.14.

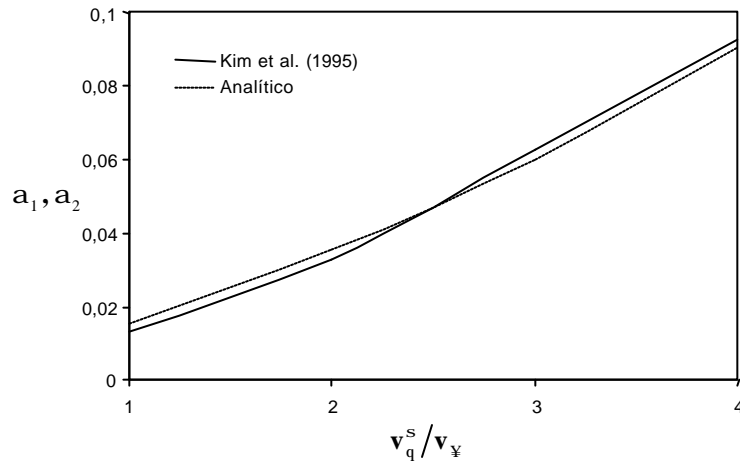


**FIGURA 4.14-Comportamento de  $a_1$  e  $a_2$  com  $v_q^s/v_\infty$  e número de Reynolds.**

Os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  podem ser modelados como função do número de Reynolds e da relação de módulos das velocidades, na seguinte forma:

$$a_i = \text{Re}^{-0,3} \frac{v_q^s \bar{\theta}^2}{v_\infty \bar{\theta}} + \text{Re}^{[\log_{10} \text{Re} - 2,45]} \frac{v_q^s}{v_\infty} + \text{Re}^{-3}. \quad (4.32)$$

A comparação da expressão acima desenvolvida neste trabalho com os resultados de Kim et al. (1995) é apresentada na Figura (4.15). A expressão (4.32) tem caráter par, o que já leva conta rotações inversas para o vórtice.

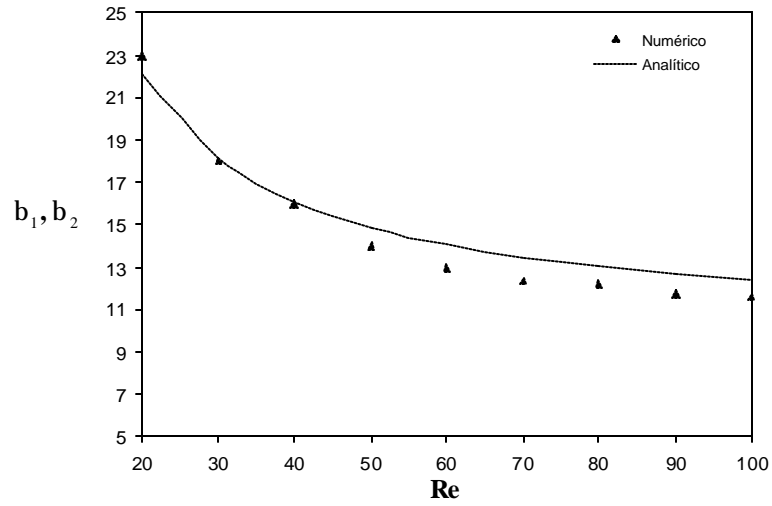


**FIGURA 4.15-** Comparação dos coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  para  $\text{Re} = 100$ .

Os coeficientes  $b_1$  e  $b_2$  podem ser aproximados a partir da seguinte expressão:

$$b_i = \frac{243,77}{\text{Re}} + 10,11, \quad (4.33)$$

a qual é independente de  $v_q^s / v_\infty$ . A figura logo abaixo mostra a comparação dos resultados numéricos e analíticos obtidos a partir de (4.33).



**FIGURA 4.16- Comparação dos coeficientes  $b_1$  e  $b_2$ .**

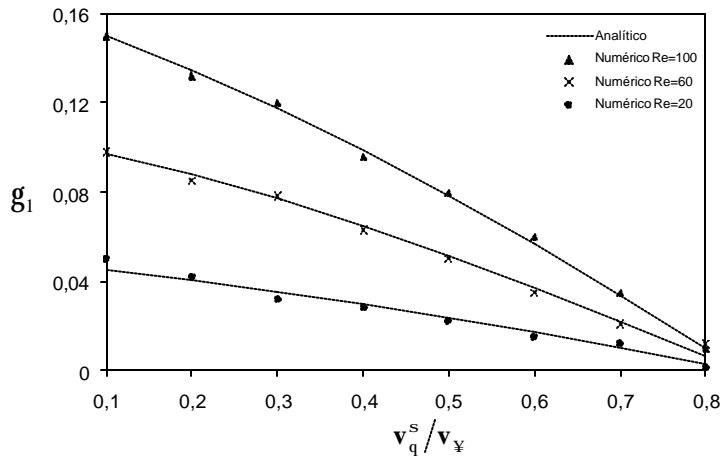
Os coeficientes  $g_1$  e  $g_2$  ( $i = 1, 2$ ) podem ser aproximados pelas seguintes expressões analíticas:

$$g_1 = - (0,00175 \mathbf{Re} + 0,025) \frac{\partial v_s}{\partial x} + 0,0014 \mathbf{Re} + 0,02, \quad (4.34)$$

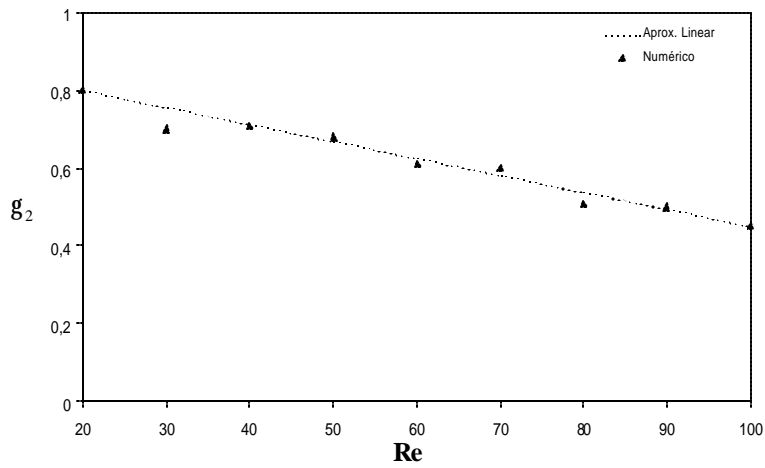
e

$$g_2 = -0,00438 \mathbf{Re} + 0,8875. \quad (4.35)$$

A comparação entre os resultados analíticos e numéricos de  $g_1$  e  $g_2$  ( $i = 1, 2$ ) são mostrados abaixo.

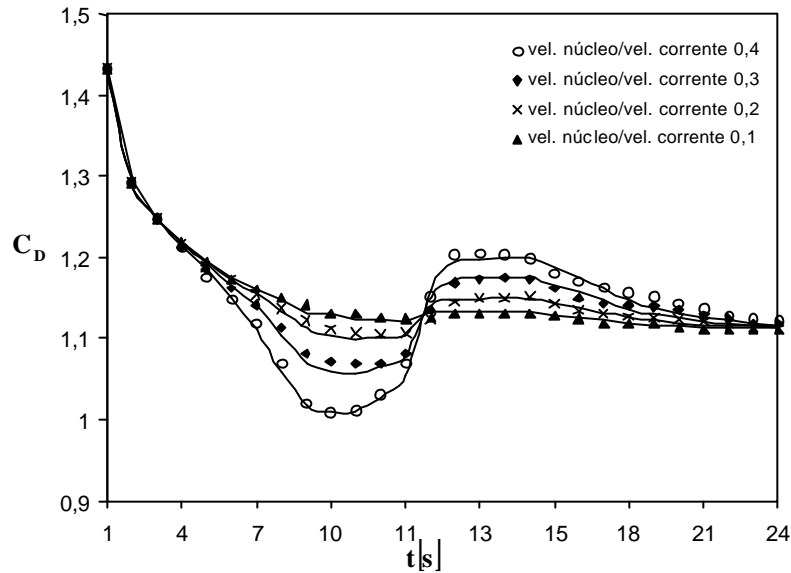


**FIGURA 4.17a - Coeficiente  $g_1$ .**



**FIGURA 4.17b - Coeficiente  $g_2$ .**

Aplicando as expressões para os coeficientes de (4.30) e, somando as expressões (4.27) e (4.28), encontra-se para o coeficiente de arrasto perturbado pela passagem do tubo de vórtice o seguinte resultado mostrado na Figura 4.18.



**Figura 4.18 – Comparação dos resultados: numérico (pontos) e analítico ( ———), para distância nula entre trajetória do tubo de vórtice e centro da partícula.**

**FONTE: Kim et al. (1995).**

Para o caso em que o vórtice atinge a partícula em posições distantes do centro, a equação (4.30) pode ser generalizada na seguinte forma:

$$C_D^v = \frac{1}{2} f_1 \left\{ a_1 [(t - x_1) - b_1] e^{-g_1 [(t - x_1) - y_1 b_1]^2} \right\} \{ 1 - \text{sinal} [(t - x_1) - b_1] \} \\ + \frac{1}{2} f_2 \left\{ a_2 [(t - x_2) - b_2] e^{-g_2 [(t - x_2) - y_2 b_2]^2} \right\} \{ 1 - \text{sinal} [(t - x_2) - b_2] \}, \quad (4.36)$$

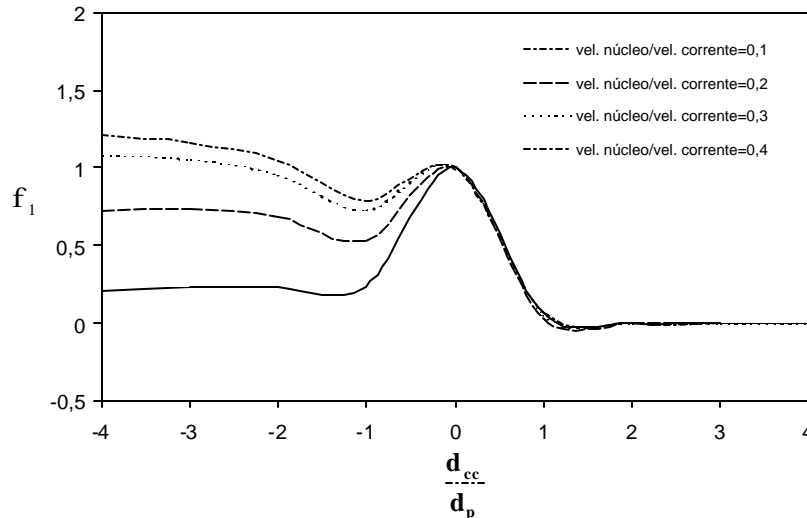
onde foram acrescentados os coeficientes  $f_i$ ,  $x_i$  e  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ). De forma particular, com valores específicos para  $f_i$ ,  $x_i$  e  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ) pode-se obter (4.30).

Neste trabalho, a partir dos resultados numéricos são obtidas as expressões analíticas aproximadas para  $f_i$ ,  $x_i$  e  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ).

A expressão para  $f_1$ , mostrada nas Figuras 4.19 e 4.20, pode ser dada na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 f_1 = & \frac{1}{2} \cosh \left( 7,5 \ln \frac{v^s}{v_\infty} \right)^{1,999} + 17,5 \frac{d_{cc}}{d_p} \frac{\dot{u}}{\dot{u}_p}^{-1} \\
 & + \frac{1,667}{\cosh \left( 7,5 \ln \frac{v^s}{v_\infty} \right)} + 0,9333 \frac{d_{cc}}{d_p} \frac{\dot{u}}{\dot{u}_p} \frac{1}{1 + \left| \frac{d_{cc}}{d_p} \right|} \frac{\dot{u}}{\dot{u}_p} \tanh \left( 7,5 \ln \frac{v^s}{v_\infty} \right)^{2,3} + 17,5 \frac{d_{cc}}{d_p} \frac{\dot{u}}{\dot{u}_p} \\
 & - \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh \left( 7,5 \ln \frac{v^s}{v_\infty} \right)} - 0,23 \frac{d_{cc}}{d_p} \frac{\dot{u}}{\dot{u}_p} \frac{1}{1 + \left| \frac{d_{cc}}{d_p} \right|} \frac{\dot{u}}{\dot{u}_p} \frac{\dot{u}}{\dot{u}_p} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh \left( 7,5 \ln \frac{v^s}{v_\infty} \right)} + 0,23 \frac{d_{cc}}{d_p} \frac{\dot{u}}{\dot{u}_p} \frac{1}{1 + \left| \frac{d_{cc}}{d_p} \right|} \frac{\dot{u}}{\dot{u}_p} \frac{\dot{u}}{\dot{u}_p}
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

onde  $d_{cc}$  é a distância entre centros do tubo de vórtice e partícula no plano  $xz$  definido na Figura 4.4.



**FIGURA 4.19 – Variação do coeficiente  $f_1$  com a distância entre centros da trajetória do vórtice e partícula.**

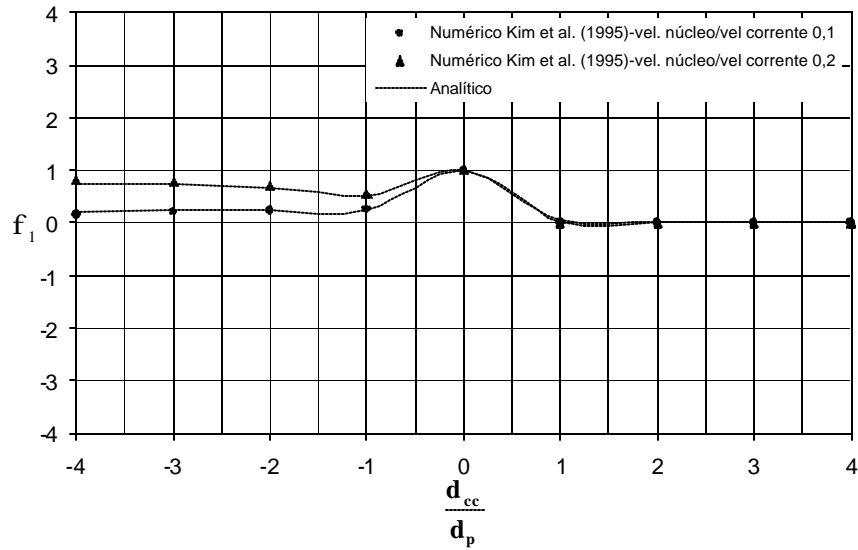


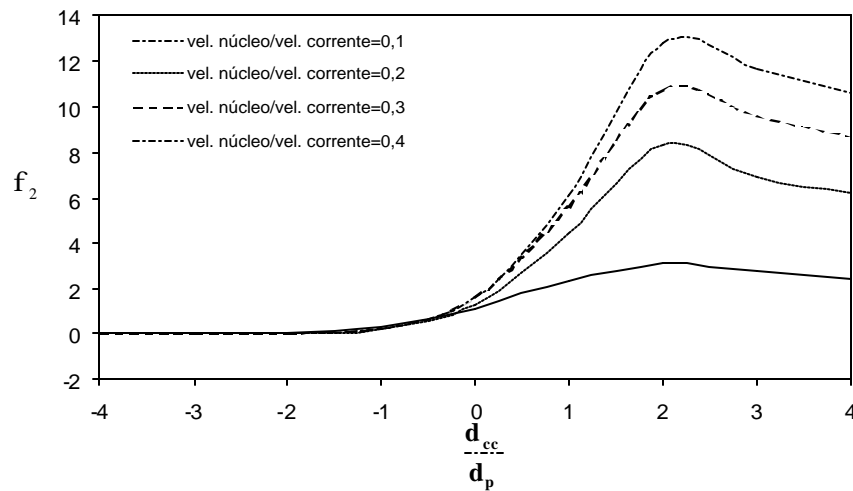
FIGURA 4.20 – Validação do coeficiente  $f_1$ .

Para  $f_2$ , a forma da expressão pode ser dada como:

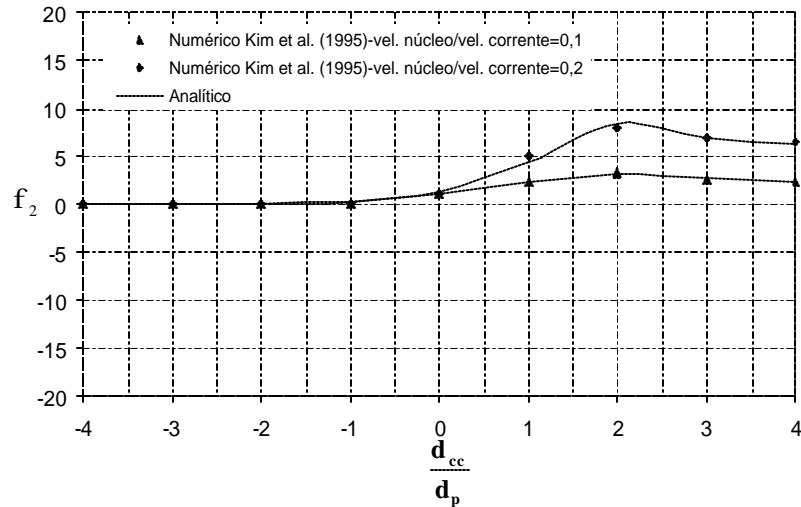
$$\begin{aligned}
 f_2 = & \frac{1}{2} \left[ 20 \ln \left( \frac{v_s}{v_\infty} \right) + 23 \exp \left( -0,3 \frac{d_{cc}}{d_p} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 - \sin \left( \frac{d_{cc}}{d_p} \right) - 1,2 \ln \left( \frac{v_s}{v_\infty} \right) + 3,2 \frac{v_s}{v_\infty} \right) \right] \\
 & + \frac{1}{2} \left[ 14,5 \ln \left( \frac{v_s}{v_\infty} \right) + 17,7 \exp \left( -0,1 \frac{d_{cc}}{d_p} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \sin \left( \frac{d_{cc}}{d_p} \right) - 1,2 \ln \left( \frac{v_s}{v_\infty} \right) + 3,2 \frac{v_s}{v_\infty} \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.38}$$



As Figuras 4.21 e 4.22 mostram o comportamento de  $f_2$  com  $d_{cc}/d_p$  e  $v_q^s/v_{\infty}$ .



**FIGURA 4.21 – Variação do coeficiente  $f_2$  com a distância entre centros da trajetória do vórtice e partícula.**

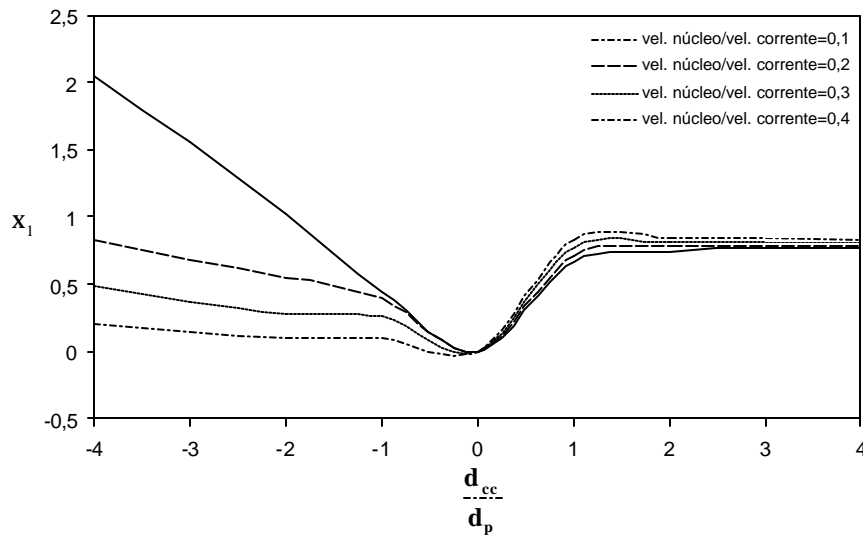


**FIGURA 4.22 – Validação do coeficiente  $f_2$ .**

A expressão para  $x_1$  pode ser dada como:

$$\begin{aligned}
x_1 = & \frac{1}{2} \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\beta}} \frac{(-5 v_q^s / v_\infty + 2,2) |d_{cc} / d_p|^{1,8}}{(-10 v_q^s / v_\infty + 6) + 2 |d_{cc} / d_p|^{(20 v_q^s / v_\infty - 0,7)}} + 0,22 |d_{cc} / d_p| e^{-15 (v_q^s / v_\infty)^{2,7}} \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\beta}} [1 - \text{sinal}(d_{cc} / d_p)] \\
& + \frac{1}{2} \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\beta}} \frac{|d_{cc} / d_p|^{0,9}}{(-v_q^s / v_\infty + 0,6) + |d_{cc} / d_p|} \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\beta}} [1 + \text{sinal}(d_{cc} / d_p)]. \quad (4.39)
\end{aligned}$$

As Figuras 4.23 e 4.24 mostram o comportamento de  $x_1$  com  $d_{cc} / d_p$  e  $v_q^s / v_\infty$ .



**FIGURA 4.23 – Variação do coeficiente  $x_1$  com a distância entre centros da trajetória do vórtice e partícula.**

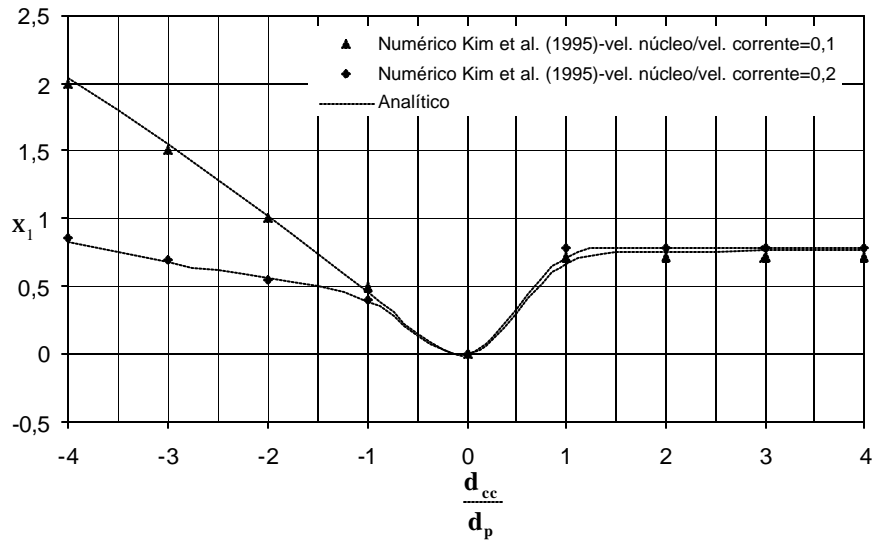
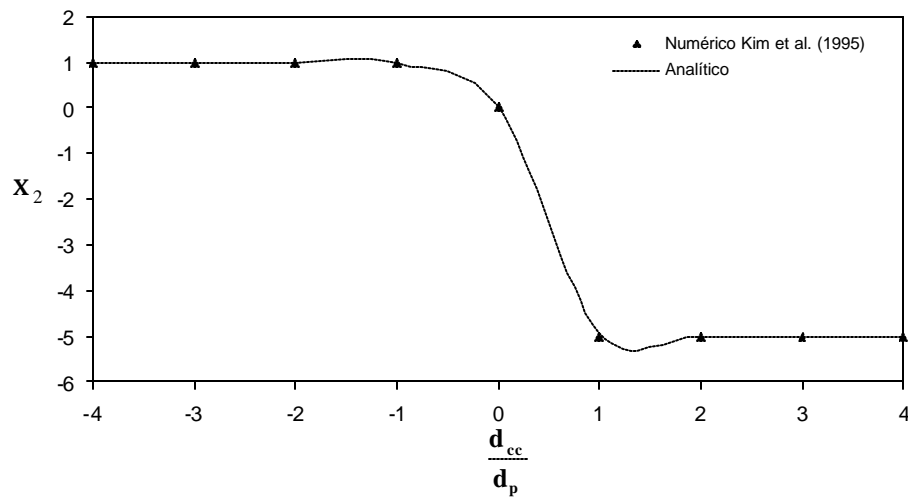


FIGURA 4.24 – Validação do coeficiente  $x_1$ .

A expressão para  $x_2$  pode ser apresentada na forma:

$$x_2 = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{d_{cc}}{d_p}\right) - 2 \frac{d_{cc}}{d_p} \frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3} + \frac{5}{2} \tanh\left(\frac{d_{cc}}{d_p}\right) - 2,35 \frac{d_{cc}}{d_p} \frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3} + \frac{d_{cc}}{d_p} \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad (4.40)$$

A Figura 4.25 mostra o comportamento de  $x_2$  com  $d_{cc}/d_p$ .



**FIGURA 4.25 – Variação do coeficiente  $x_2$  com a distância entre centros da trajetória do vórtice e partícula.**

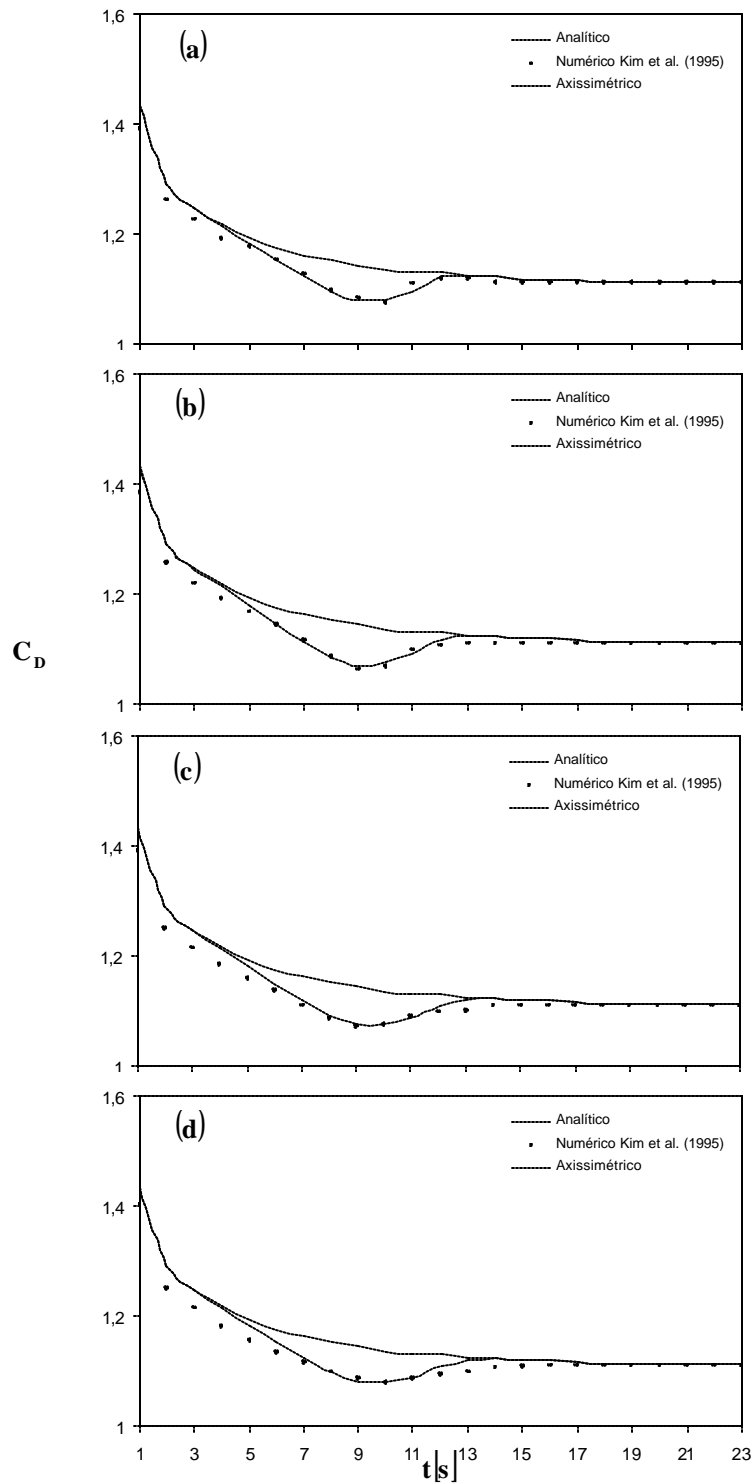
Os coeficientes  $y_i$  ( $i = 1,2$ ) apresentam valores fixos em:

$$y_1 @ 1,00, \tag{4.41}$$

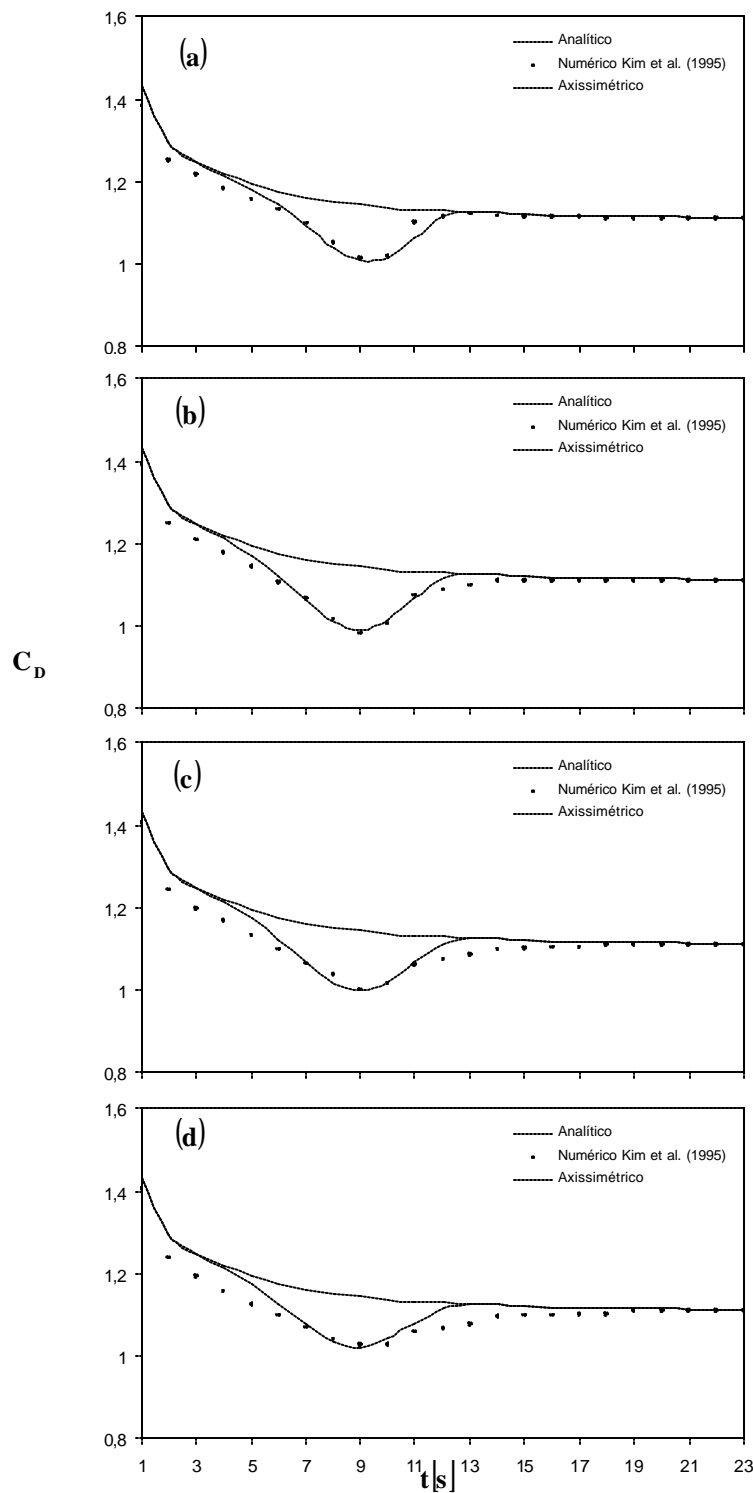
e

$$y_2 @ 1,00. \tag{4.42}$$

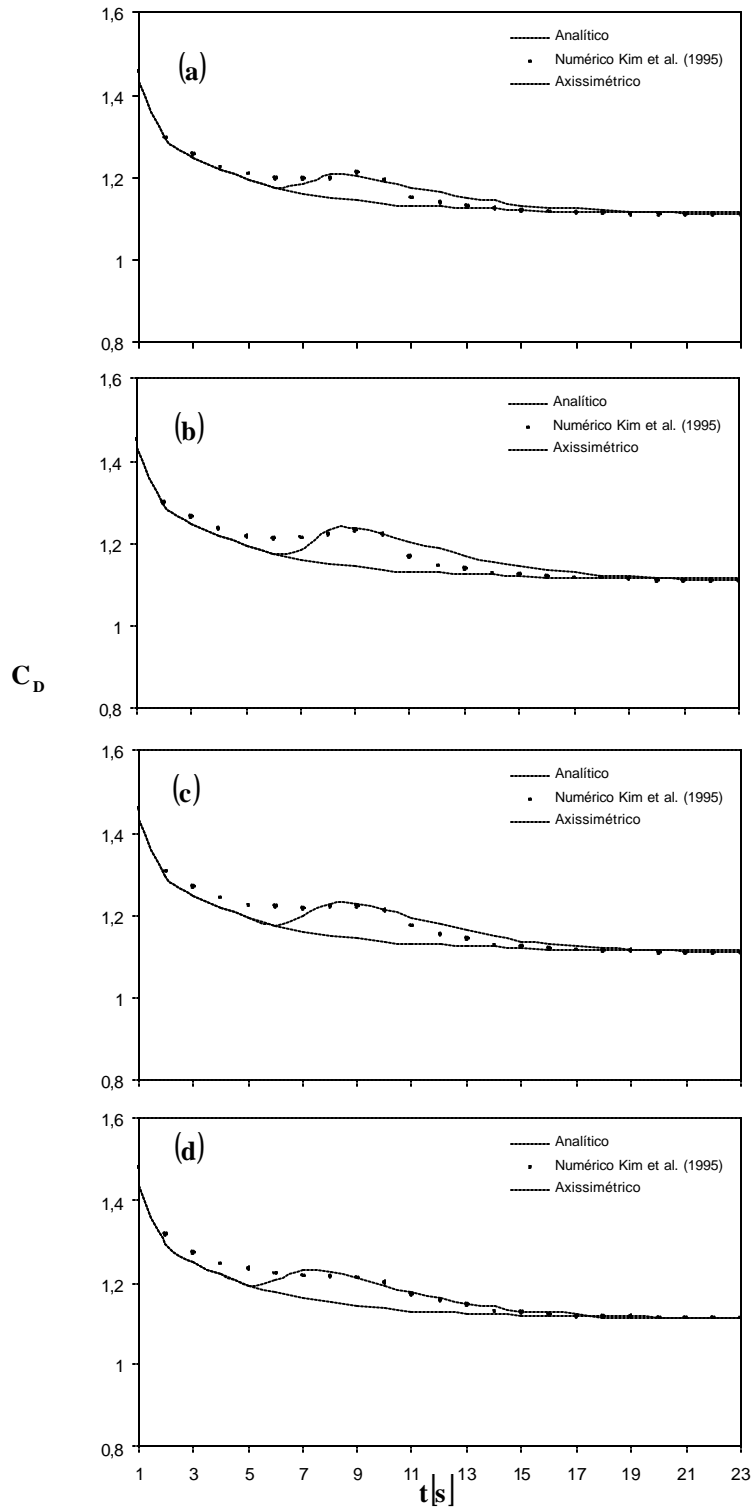
A validação dos resultados finais correspondentes ao coeficiente de arrasto obtidos pela expressão (4.36) são mostradas nas figuras abaixo.



**FIGURA 4.26a – Comparação dos resultados: numéricos (+) e analíticos (-----) com  $v_q^s/v_{\Psi} = 0,1$ , para distâncias entre trajetória do tubo de centro da partícula de (a) -  $1 \cdot d_p$ , (b) -  $2 \cdot d_p$ , (c) -  $3 \cdot d_p$ , (d) -  $4 \cdot d_p$ . FONTE: Kim et al. (1995).**

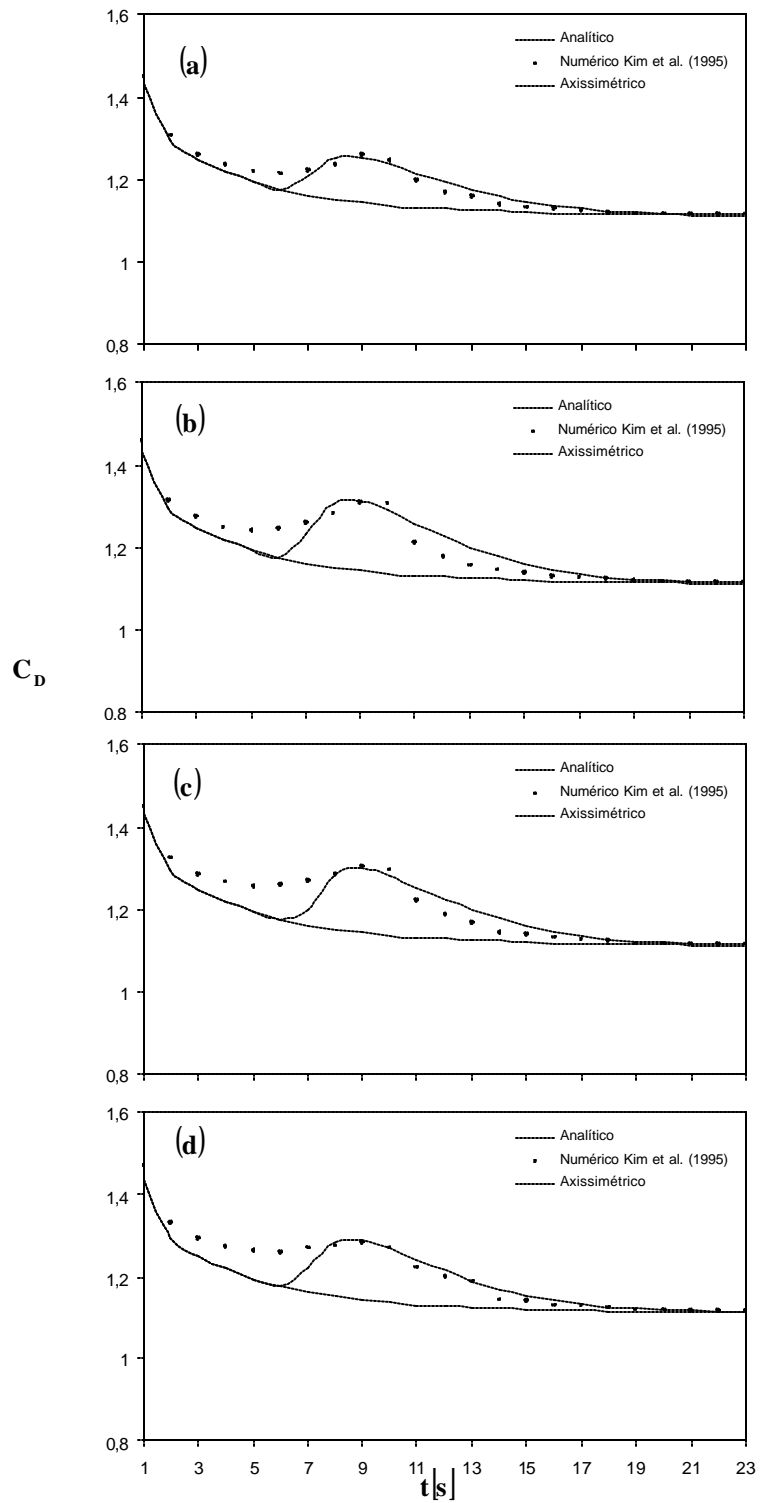


**FIGURA 4.26b** – Comparação dos resultados: numéricos (+) e analíticos (-----) com  $v_q^s/v_{\infty} = 0,2$ , para distâncias entre trajetória do tubo de centro da partícula de (a) -  $1 \cdot d_p$ , (b) -  $2 \cdot d_p$ , (c) -  $3 \cdot d_p$ , (d) -  $4 \cdot d_p$ .  
**FONTE: Kim et al. (1995)**



**FIGURA 4.26c – Comparação dos resultados: numéricos ( + ) e analíticos (-----) com  $v_q^s/v_{\infty} = 0,1$ , para distâncias entre trajetória do tubo de centro da partícula de (a)  $1 \cdot d_p$ , (b)  $2 \cdot d_p$ , (c)  $3 \cdot d_p$ , (d)  $4 \cdot d_p$ .**

**FONTE: Kim et al. (1995)**



**FIGURA 4.26d – Comparação dos resultados: numéricos (+) e analíticos (-----) com  $v_q^s/v_{\infty} = 0,2$ , para distâncias entre trajetória do tubo de centro da partícula de (a)  $1 \cdot d_p$ , (b)  $2 \cdot d_p$ , (c)  $3 \cdot d_p$ , (d)  $4 \cdot d_p$ .**

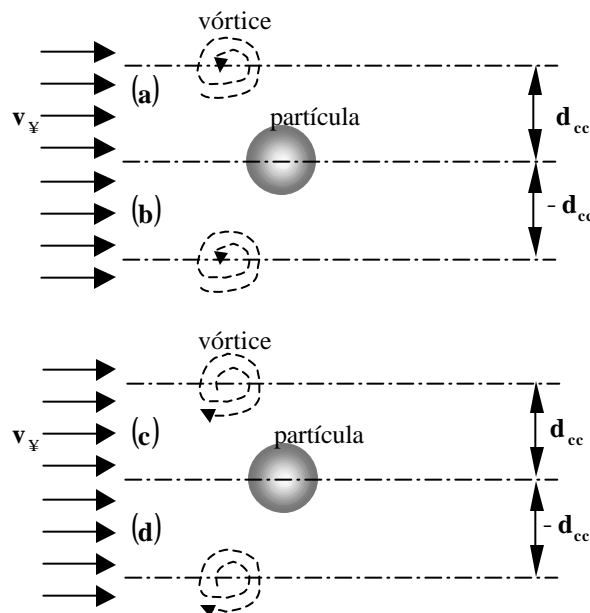
**FONTE: Kim et al. (1995)**



Das Figuras 4.26, pode-se observar que se tem uma boa concordância entre os resultados para os casos com o mesmo sinal da distância entre centros e sentido de rotação do tubo de vórtice.

#### 4.5 – Análise do Sentido de Rotação dos Vórtices:

A análise numérica da interação vórtice partícula apresentada na seção precedente foi elaborada para tubos de vórtices com rotação anti-horária. A extensão para o caso horário é feita analisando-se a disposição da passagem do tubo de vórtice com relação à partícula conforme é mostrado abaixo:



**FIGURA 4.27 – Disposições para a passagem do tubo de vórtice com relação ao centro da partícula.**

As disposições (a) e (d) são semelhantes no aspecto hidrodinâmico e, da mesma forma que (b) e (c). Portanto, as disposições podem ser descritas por vórtices anti-horários somente e extendidas aos vórtices horários. Para o caso do vórtice centralizado o efeito do tubo de vórtice anti-horário é semelhante ao horário, uma vez que inicialmente ocorre uma diminuição do  $C_D$  e, logo após a passagem do tubo de vórtice ocorre o aumento do  $C_D$ .



## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS FINAIS, CONCLUSÕES e TRABALHOS FUTUROS

Nesta seção são apresentados os resultados finais obtidos neste trabalho. O contexto deste trabalho é associado com os efeitos da turbulência sobre as partículas da fase dispersa, podendo ser dividido em três ramos de análise: estatística da turbulência, modulação da turbulência e interação vórtice partícula. O primeiro e o segundo ramo de análise podem ser comparados diretamente com experimentos, podendo assim mostrar a concordância dos resultados e a faixa de aplicação dos modelos (ver Capítulo 2 e 3). Porém o terceiro ramo de análise é discutido somente de forma intuitiva, deixando as validações para formas indiretas de comparação com os resultados gerais de escoamentos bifásicos fluido-partícula. O principal resultado da combinação destes três ramos de análise é uma equação analítica na forma integral, a qual leva em consideração os efeitos de concentração e tamanho de vórtice, velocidade da fase dispersa e velocidade do escoamento da fase contínua.

#### **5.1-Resultados Finais:**

No estudo do escoamento bifásico a solução numérica para as equações de conservação é normalmente obtida de forma isolada para cada uma das fases. Para a fase líquida ou gasosa aplica-se um método numérico com malhas tipo volumes finitos, diferenças finitas ou elementos finitos, associado a um algoritmo para acoplamento da pressão e velocidade ou uma equação de estado. Para a fase dispersa, normalmente partículas ou gotas, aplica-se equações referentes ao movimento destas, considerando as forças de contato como o efeito da interação entre as fases. Este tipo de modelagem é conhecido como formulação Euleriana-Lagrangeana.

No caso de escoamentos bifásicos com número de Reynolds elevado surge mais um efeito presente na fase contínua que é referente à turbulência do escoamento. Para incluir os efeitos da turbulência na modelagem do escoamento existem vários métodos, como por exemplo: modelo de fechamento em dois pontos ou duas equações, onde o modelo  $k - \epsilon$  é

um dos mais conhecidos. Este modelo é formalizado com uma equação de conservação para a energia da turbulência e outra para a dissipação. Porém, conforme Kartushinsky e Michaelides (2004), a interação entre a turbulência e a fase dispersa é fundamental, sobretudo para se constituir a equação de conservação da energia turbulenta.

Dessa forma, a equação (3.38) que com as aproximações apresentadas no Capítulo 3 é levada a forma da equação (3.57), pode representar o termo fonte de energia da turbulência a ser empregado em modelos do tipo  $k - \epsilon$ . Mesmo com estas simplificações, a equação supra citada é uma boa aproximação para os efeitos das partículas sobre o escoamento, justamente por representar todos os aspectos desta interação. Isto pode comprovado a partir da Figura 3.8, onde partículas consideradas pequenas com relação à escala principal de vórtices tendem a diminuir os efeitos da turbulência em função do fato de serem arrastadas pelos vórtices, partículas relativamente grandes tendem a produzir mais vórtices na esteira e conseqüentemente mais perturbações no escoamento contínuo. A forma da equação que representa a curva da Figura 3.8 foi obtida a partir da análise dos efeitos de interação, considerando uma distribuição uniforme e isotrópica de vórtices, porém sem nenhum ajuste a dados experimentais. Contrariamente, Crowe (2000) apresenta uma equação para a variação da energia da turbulência baseada em dados empíricos, a qual mostra-se bastante longe dos resultados experimentais para pequenas partículas.

Um resultado mais geral pode ser obtido considerando-se uma distribuição de vórtices que satisfaça a teoria apresentada no Capítulo 2. Com isso, tomando-se a equação (3.38) e introduzindo o principal resultado do Capítulo 4,  $C_D(\mathbf{t})$  representado pela expressão (4.36) para a distribuição de vórtices obtidas em (2.67), obtém-se uma equação geral para dos efeitos da fase dispersa sobre a energia da turbulência da fase contínua, a qual é dada pela seguinte expressão:

$$Dk = \frac{1}{2} \frac{\alpha_p}{\alpha_f} \frac{d_{esteira}}{d_p^2} St \frac{|\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}|^3}{2} \int_0^{t_p} \dot{\theta} \exp\left(-\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}_0}\right) \frac{9}{4} \frac{m_f}{d_p^2 r_{p0}} \dot{\theta} f_{C_D} dt \frac{d}{dt} \int_0^{t_c} \dot{\theta} dt$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3 a_p}{4 a_f} \mathbf{n}_v \mathbf{V}_x \frac{n_f}{d_p^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e}{s^* \sqrt{2p(1 - q \ln(s^*/s_0))}} \\
& \int_0^{t^c} [(\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0}) \times (\bar{\mathbf{v}}_f - \bar{\mathbf{v}}_{p0})] \mathbf{f}_{C_D} \exp\left[-\frac{3 m_f}{2 d_p^2 r_p} \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t} dt\right] du, \quad (5.1)
\end{aligned}$$

com  $\mathbf{f}_{C_D}$  dado por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{C_D} &= \frac{1}{2 \text{Re}_p} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_{a_s,1}^* f_1 \left\{ a_1 [(t - x_1) - b_1] e^{-g_1 [(t - x_1) - y_1 b_1]} \right\} \left\{ 1 - \text{sinal} [(t - x_1) - b_1] \right\} du \frac{d\mathbf{c}}{d_p} \frac{\partial}{\partial t} \\
&+ \frac{1}{2 \text{Re}_p} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}_2 \left\{ a_2 [(t - x_2) - b_2] e^{-g_2 [(t - x_2) - y_2 b_2]} \right\} \left\{ 1 - \text{sinal} [(t - x_2) - b_2] \right\} du \frac{d\mathbf{c}}{d_p} \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}$$

Esta equação pode ser resolvida numericamente, juntamente com um algoritmo de solução numérica para as equações de Navier-Stokes.

Neste caso, a distribuição de partículas foi considerada homogênea e uniforme, podendo-se incluir a modificação da distribuição de partículas ao longo do tempo.

A equação (5.1) é constituída de dois termos principais, um referente à geração de turbulência (termo positivo) e outro referente à diminuição da turbulência. O primeiro termo é linearmente pelo tamanho da esteira (quanto maior a esteira maior é a densidade de vórtices gerados); pela frequência de geração dos vórtices (número de Strouhal); pela diferença inicial de velocidades entre as fases (quanto maior esta diferença maior é a camada cisalhante onde são gerados vórtices). O segundo termo é afetado pela distribuição de vórtices e partículas.

## 5.2-Conclusões:

Dentro do contexto da estatística da turbulência, a expressão (2.26) obtida neste trabalho representa uma forma alternativa para a obtenção do valor médio da variância da distribuição de flutuações paralelas ao escoamento proposta por Castaing et al. (1990), produzindo valores iguais à expressão original mostrada em (2.25). Os valores de  $s^*$  são não simétricos em virtude dos efeitos de estiramento sobre os vórtices. Por outro lado, a expressão (2.32) representa uma expressão analítica para a obtenção de  $s^*$  como função da velocidade ou intensidade da perturbação provocada pelo vórtice e da variância do variável lognormal. Esta expressão mostra uma boa concordância com os resultados obtidos numericamente pela solução de (2.25).

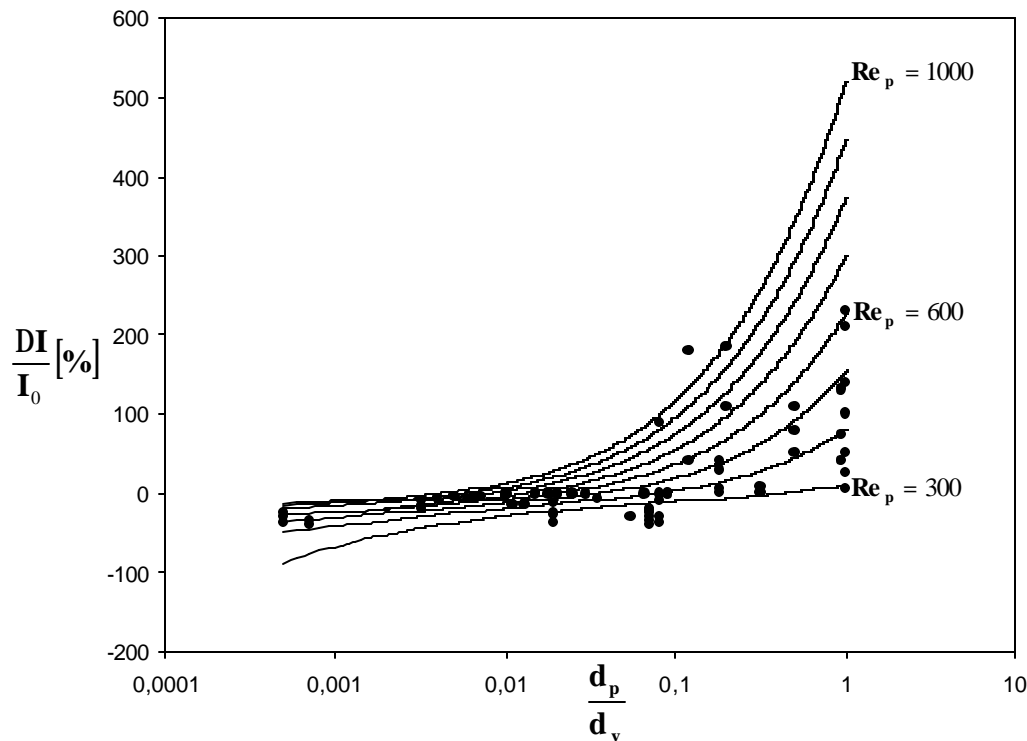
A expressão (2.67) obtida a partir da expressão integral de Castaing et al. (1990), a qual mostra uma boa concordância com os experimentos é uma prova da hipótese de Kolmogorov sobre a distribuição de lognormal.

Os resultados mostrados nas Figuras 2.13 mostram que o método empregado para se modelar a função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices é bastante razoável. A divergência cresce com o aumento de  $l$ , justamente onde  $0,4 \leq l \leq 0,5$ , pois neste intervalo em diante  $s_0$  deixa de ser próximo da unidade. Por outro lado, com  $l \geq 0,5$  cai-se fora da faixa inercial, com vórtices relativamente grandes, sendo isto inviável para o modelo empregado.

A formulação empregada para análise dos efeitos da turbulência sobre a fase dispersa é baseada em resultados analíticos. Com a simplificação do modelo dinâmico de BBO (equação (3.2)) definiu-se o tempo característico da partícula o qual foi generalizado neste trabalho e mostrado em (3.12). Isto permitiu a elaboração da expressão (3.17) a qual generaliza a velocidade terminal da partícula no escoamento com um modelo geral de coeficiente de arrasto. Em fim, a equação (3.24) é o resultado de uma teoria geral de interação partícula-turbulência para a redução da energia presente no vórtice. De forma semelhante, introduzindo o efeito de interação fluido-estrutura, a expressão (3.35)

representa uma teoria geral para o crescimento dos efeitos da turbulência no escoamento contínuo. Combinando as expressões (3.17) e (3.24), chega-se ao conceito de variação da energia da turbulência. Diante da dificuldade de se encontrar uma representação consistente para o comportamento desta variação com o tamanho adimensional do vórtice, emprega-se a expressão (3.41) validada com a hipótese de Hetsroni (1989) que com os conceitos de distribuição de partícula e vórtice fornece o modelo expresso na Figura 3.8 e, cujos pontos importantes foram citados acima.

A modelagem da variação da energia cinética da turbulência, onde de acordo com Crowe (2000) empregou-se um  $Re_p \sim 500$ , pode assim deixar alguma dúvida, uma vez que os resultados por ele compilados são originados de vários autores. A Figura 5.1 pode elucidar esta dúvida, mostrando os resultados para uma grande faixa do número de Reynolds da partícula.



**Figura 5.1- Variação da intensidade da turbulência: comparação dos resultados experimentais ( ? ) e analíticos ( — ).**

Como pode ser visto os resultados produzidos pela equação (3.57) correspondem aos dados experimentais. A primeira parcela da equação (3.57) está associada com a produção de energia da turbulência, sendo proporcional à relação de inércia das fases e a relação de áreas de ataque entre partícula e vórtice. A segunda parcela se refere à atenuação da turbulência, sendo fortemente dependente do número de Reynolds da partícula, isto é, partículas com velocidades altas atenuam pouco os efeitos da turbulência.

Buscando complementar a teoria de interação partícula-turbulência descrita no Capítulo 3 e sedimentada pelas conclusões acima, o aspecto referente a parâmetros de tempo da partícula e tempo de interação foram obtidos inicialmente de forma simplificada, mostrando algumas tendências do comportamento matemático das equações. Porém com introdução do conceito de vórtice, juntamente com a simulação numérica da interação estes valores podem ser mais bem caracterizados. A Figura 4.3 mostra a caracterização de um tubo de vórtice em um escoamento viscoso, onde o tempo de dissipação pode ser obtido. Estes resultados estão de acordo com o modelo de dissipação de Saffman (1995). Além disso, o modelo numérico da implementação do vórtice foi validado com os resultados de Kim (1997) e apresentados na Figura 4.8. A malha foi validada com o modelo experimental de obtenção do coeficiente de arrasto em esferas obtido Clift et al. (1978).

A variação da passagem do vórtice pela esfera provoca uma variação do coeficiente de arrasto no tempo caracterizada pelo número de Reynolds e no espaço caracterizada pela distância entre centro do vórtice e centro da esfera. O efeito da intensidade do vórtice e sentido de rotação é mostrado na Figura 4.18, e o efeito da distância entre centros é mostrado nas Figuras 4.26. Inicialmente, o coeficiente de arrasto recebe uma variação decrescente (vórtice anti-horário) provocada pela diminuição da intensidade do campo de velocidade no lado de ataque da esfera e logo após, na fuga, recebe uma variação crescente provocada pelo aumento de pressão devido à estagnação do escoamento. O comportamento do coeficiente de arrasto foi modelado analiticamente sobre os valores numéricos sendo apresentado de forma geral pela expressão (4.36).



Todos estes resultados são compilados no modelo expresso na equação (5.1) e serão introduzidos no código CFD empregado neste trabalho.

### **5.3-Trabalhos Futuros:**

Para trabalhos futuros têm-se três sugestões principais e que visam a consolidação do modelo de interação turbulência-escoamento bifásico proposto:

- implementação da equação (5.1), visando-se conhecer o comportamento da energia da turbulência em escoamentos bifásicos, considerando os efeitos transientes no coeficiente de arrasto;
- modelagem mais detalhada da função de distribuição de velocidade de rotação dos vórtices, buscando obter uma quantidade maior de resultados experimentais para a obtenção dos coeficientes de forma;
- análise dos efeitos interativos de um conjunto de vórtices, sendo que a atual análise considera a simples sobreposição dos efeitos.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abramowitz, M.; Stegun, I. **Handbook of mathematical functions**. New York: Dover Publications, 1972.

Agrawal, A.; Prasad, A.K. Properties of vortices in the self-similar turbulent jet. **Experiments in Fluids**, v.33, n.4, p.565-577, 2002.

Aísa, L.; Garcia, J.A.; Cerecedo, L.M.; García Palacín, I.; Calvo, E. Particle concentration and local mass flux measurements in two-phase flows with PDA. Application to a study on the dispersion of spherical particles in a turbulent air jet. **International Journal of Multiphase Flow**, v.28, n.2, p.301-324, 2002.

Andrews, L.C.; Phillips, R.L.; Shivamoggi, B.K.; Beck, J.K. A statistical theory for the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence. **Physics of Fluids A**, v.1, n. 6, p.999-1006, 1989.

Andrews, M.J.; O'rourke, P.J. The multiphase particle-in-cell (mp-pic) method for dense particulate flows. **International Journal of Multiphase Flow**, v.22, n.2, p.379-402, 1996.

Anselmet, F.; Gagne, Y.; Hopfinger E.J.; Antonia, R.A. High-order velocity structure functions in turbulent shear flows. **Journal of Fluid Mechanics**, v.140, p.63-89, 1984.

Antonia, R.A.; Satyaprakash, B.R. and Chambers, A.J. Reynolds number dependence of velocity structure functions in turbulent shear flows. **Physics of Fluids**, v.25, n.1, p.29, 1982.

Arimitsu, T.; Arimitsu, N. PDF of velocity fluctuation in turbulence by a statistics based on generalized entropy. **Physica A**, v.305, n.1-2, p.218-226, 2002.

Asmolov, E. Flow past a sphere undergoing unsteady rectilinear motion and unsteady drag at small Reynolds number. **Journal of Fluid Mechanics**, v.446, p.95-119, 2001.

Batchelor, G.K. **An introduction to fluid dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.

Beck, C. Superstatistics, escort distributions, and applications. **arXiv: cond-mat/0312134**, v1, 4 Dec 2003. Disponível em: <http://scholar.google.com>. Acesso em: 07 ago 2005.

Beck, C. Superstatistics in hydrodynamic turbulence. **Physica D**, v.193, n.1-4, p.195-207, 2004a.

Beck, C. Superstatistics: theory and applications. **Continuum Mech. Thermodyn.**, v.16: p.293-304, 2004b.

Birouk, M.; Chauveau, C.; Sarh, B.; Quilgars, A.; Gökalp, I. Turbulence effects on the Vaporization of Monocomponent Single Droplets. **Combustion Science and Technology**, v.113-114, p.413-428, 1996.

Bleistein, N.; Handelsman, R.A. **Asymptotic expansions of integrals**. New York: Dover Publications, 1986.

Boffetta, G.; Musacchio, S. Predictability of the energy cascade in 2D turbulence. **arXiv: nlin.CD/0006014**, v1, 9 Jun 2000. Disponível em: <http://scholar.google.com>. Acesso em: 07 ago 2005.

Boivin, M.; Simonin, O.; Squires, K.D. Direct numerical simulation of turbulence modulation by particles in isotropic turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**, v.1998, p. 235-263, 1998.

Cao, N.; Chen, S.; Sreenivasan, K.R. Properties of Velocity Circulation in Three-Dimensional Turbulence. **Physical Review Letters**, v.76, n.4, 1996.

Castaing, B.; Gagne, Y.; Hopfinger, E.J. Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. **Physica D**, v.46, p.177-200, 1990.

Castiglione, P.; Mazzino, A.; Muratone-Ginanneschi, P. and Vulpiani, A. On strong anomalous diffusion. **Physica D**, v.134, p.75-93, 1999.

**CFX5 5.7**: reference manual. Canada, 2002.

Clamen, A.; Gauvin, W. H. Effects of Turbulence on the Drag Coefficients of spheres in a Supercritical Flow Regime. **AIChE Journal**, v.15, n.2, p.184-189, 1969.

Clift, R.; Grace, J.R.; Weber, M.E. **Bubbles, drops and particles**. New York: Academic Press, 1978.

Crowe, C.T.; Sharma, M.P.; Stock, D.E. The particle-source-in cell (PSI-CELL) model for gas-droplet flows. **Journal of Fluids Engineering**, Transactions of the ASME, p.325-332, june 1977.

Crowe, C.T. On models for turbulence modulation in fluid-particle flows. **International Journal of Multiphase Flow**, v.26, n.5, p.719-727, 2000.

Elcrat, A.; Fornberg, B.; Miller, K. Some steady axisymmetric vortex flows past a sphere. **Journal of Fluid Mechanics**, v.433, p.315-328, 2001.

Ender, A. Ya. and Ender, I. A. Polynomial expansions for the isotropic Boltzmann equation and invariance of the collision integral with respect to the choice of basis functions. **Physics of Fluids**, v.11, n.9, p.2720-2730, 1999.

Ender, A. Ya.; Ender, I. A. The most recent results in moment method to solve the Boltzman equation and setting of the boundary problems of gas and plasma kinetic theory. 30<sup>th</sup> EPS Conference on Contr. Fusion and Plasma Phys., St. Petersburg: **ECA**, v.27A, P-3.189, 7-11 July 2003.

Ferrand, V.; Bazile, R.; Borée, J.; Charnay, G. Gas-droplet turbulent velocity correlations and two-phase interaction in an axisymmetric jet laden with partly responsive droplets. **International Journal of Multiphase Flow**, v.29, n.2, p.195-217, 2003.

Fornberg, B. Steady viscous flow past a sphere at high Reynolds numbers. **Journal of Fluid Mechanics**, v.190, p.471-489, 1988.

Frisch, U. **Turbulence: The legacy of A.N. Kolmogorov**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

Gargett, A.E.; Osborn, T.R.; Nasmyth, P.W. Local isotropy and the decay of turbulence in a stratified fluid. **Journal of Fluid Mechanics**, v.144, p.231-280, 1984.

Gore, R.A.; Crowe, C.T. Effect of particle size on modulating turbulent intensity. **International Journal of Multiphase Flow**, v.15, n.2, p.279-285, 1989.

Gossler, A.A.; Marshall, J.S. Simulation of normal vortex-cylinder interaction in a viscous fluid. **Journal of Fluid Mechanics**, v.431, p.371-405, 2001.

Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M. **Table of integrals, series, and products**. New York: Academic Press, 2000.

Guj, G.; Camussi, R. Statistical analysis of local turbulent energy fluctuations. **Journal of Fluid Mechanics**, v.382, p.1-26, 1999.

Harlow, F.H.; Amsden, A.A. Numerical calculation of almost incompressible flow. **Journal of computational physics**, v.3, p.80-93, 1968.

Hetsroni, G.; Sokolov, M. Distribution of mass, velocity, and intensity of turbulence in a two-phase turbulent jet. **Journal of Applied Mechanical**, p.315-327, june 1971.

Hetsroni, G. Particles-turbulence interaction. **International Journal of Multiphase Flow**, v.15, n.5, p.735-746, 1989.

Howe, M. S.; Lauchie, G. C.; Wang, J. Aerodynamic lift and drag fluctuations of a sphere. **Journal of Fluid Mechanics**, v.436, p.41-57, 2001.

Jeong, J.; Hussain, F.; Schoppa, W.; Kim, J. Coherent structures near the wall in a turbulent channel flow. **Journal of Fluid Mechanics**, v.332, p.185-214, 1997.

Jiménez, Javier. Turbulent velocity fluctuations need not be Gaussian. **Journal of Fluid Mechanics**, v.376, p.139-147, 1998.

Kaftori, D.; Hetsroni, G.; Banerjee, S. The effect of particles on the wall turbulence. **International Journal of Multiphase Flow**, v.24, n.3, p.359-386, 1998.

Kailasnath, P.; Sreenivasan, K.R. and Stolovitzky, G. Probability density of velocity increments in turbulent flows. **Physical Review Letters**, v.68, n.18, p.18, 1992.

Kartushinsky, A.; Michaelides, E. An analytical approach for the closure equations of gas-solid flows with inter-particle collisions. **International Journal of Multiphase Flow**, v.30, n.2 , p.159-180, 2003.

Kataoka, I. Local instant formulation of two-phase flow. **International Journal of Multiphase Flow**, v.12, n.5, p.745-758, 1986.

Kataoka, I.; Serizawa, A. Basic equations of turbulence in gas-liquid two-phase flow. **International Journal of Multiphase Flow**, v.15, n.5, p.843-855, 1989.

Kevorkian, J.; Cole, J.D. **Perturbation methods in applied mathematics**. New York: Springer-Verlag, 1981.

Kenning, V.M.; Crowe, C.T. On the effect of particles on carrier phase turbulence in gas-particle flows. **International Journal of Multiphase Flow**, v.23, n.2, p.403-408, 1997.

Kim, I.; Elghobashi, S.; Serignano, W.A. Unsteady flow interactions between an advected cylindrical vortex tube and a spherical particle. **Journal of Fluid Mechanical**, v.288, p.123-155, 1995.

Kim, I.; Elghobashi, S.; Serignano, W.A. Unsteady flow interactions between a pair of advected vortex tubes and rigid sphere. **International Journal of Multiphase Flow**, v.23, n.1, p.1-23, 1997.

Kim, I.; Elghobashi, S.; Serignano, W.A. On the equation for spherical-particle motion: effect of Reynolds and acceleration numbers. **Journal of Fluid Mechanical**, v.367, p.221-253, 1998.

Kolmogorov, A.N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. **Journal of Fluid Mechanical**, v.13, p.82-85, 1962.

Kraichnan, R. H. On Kolmogorov's inertial-range theories. **Journal of Fluid Mechanical**, v.62, n.2, p.305-330, 1974.

Lamb, H. **Hydrodynamics**. New York: Dover Publications, 1932.



Laín, A.; Bröder, D.; Sommerfeld, M.; Göz, M.F. Modelling hydrodynamics and turbulence in a bubble column using the Euler-Lagrange procedure. **International Journal of Multiphase Flow**, v.28, n.8, p.1381-1407, 2002.

Lavenda, B.H. Fundamental inconsistencies of 'Superstatistics'. **arXiv: cond-mat/0408485**, v1, 23 Aug 2004. Disponível em: <http://scholar.google.com>. Acesso em: 07 ago 2005.

Lee, S.L.; Durst, F. On the motion of particles in turbulent duct flows. **International Journal of Multiphase Flow**, v.8, n.2, p.125-146, 1982.

Lesieur, M. **Turbulence in fluids**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers , 2000.

Levy, Y.; Lockwood, F.C. Velocity measurements in a particle laden turbulent free jet. **Combustion and Flame**, v.40, p.333-339, 1981.

Leweke, T.; Meunier, P.; Laporte, F.; Darracq, D. Controlled interaction of co-rotating vortices. In: ONERA-DLR Aerospace Symposium, 3., 2001, Paris. **Symposium...** Paris: ODAS, 2001. Disponível em: <http://scholar.google.com>. Acesso em: 09 ago 2006.

Lewis, G. S.; Swinney, H. L. Velocity structure functions, scaling, and transitions in high-Reynolds-number Couette-Taylor flow. **Physical Review E**, v.59, n.5, p.5457-5467, 1999.

Loyalka, S.K.; Hamoodi, S.A.; Tompson, R.V. Isothermal condensation on a plane surface. **Physics of Fluids A**, v.1, n.2, p.384-388, 1989.

Lumley, J. L. **Stochastic tools in turbulence**. New York: Academic Press, 1970.

Lun, C.K.K. Numerical simulation of dilute turbulent gas-solid flows. **International Journal of Multiphase Flow**, v.26, n.3, p.1707-1736, 2000.

L'vov, V.S.; Ooms, G.; Pomyalov, A. Effect of particle inertia on turbulence in a suspension. **Physical Review E**, v.67, p.046314-1-046314-21, 2003.

Maeda, M.; Hishida, K.; Furtani, T. Velocity distributions of air-solid suspension in upward pipe flow (effect of particles on air velocity distribution). **Transactions of Japan Society of Mechanical Engineers Service B**, v.46, p.2313-2320, 1980.

Mandelbrot, B.B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. **Journal of Fluid Mechanical**, v.62, n.2, p.331-358, 1974.

Marshall, J.S.; Brancher, P.; Giovannini, A. Interaction of unequal anti-parallel vortex tubes. **Journal of Fluid Mechanical**, v.446, p.229-252, 2001.

Mashayek, F. Droplet-turbulence interactions in low-Mach-number homogeneous shear two-phase flows. **Journal of Fluid Mechanical**, v.367, p.163-203, 1998.

Masoudi, M.; Sirignano, W.A. Collision of a vortex with a vaporizing droplet. **International Journal of Multiphase Flow**, v.26, n.12, p.1925-1949, 2000.

Mattner, T.W.; Joubert, P.N.; Chong, M.S. Vortical flow. Part 2. Flow past a sphere in a constant-diameter pipe. **Journal of Fluid Mechanical**, v.481, p.1-36, 2003.

Maxey, M. R.; Riley, J. J. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. **Physics of Fluids**, v.26, n.4, p.883-889, April 1983.

Meiburg, E.; Wallner, E.; Pagella, A.; Riaz, A.; Härtel, C.; Necker, F. Vorticity dynamics of dilute two-way-coupled particle-laden mixing layers. **Journal of Fluid Mechanical**, v.421, p.185-227, 2000.

Meneveau, C.; Lund, T. S. On the Lagrangian nature of the turbulence energy cascade. **Physics of Fluids**, v.6, n.8, p.2820-2825, 1994.

Michaelides, E.E. On the drag coefficient and the correct integration of the equation of motion of particles in gases. **Journal of Fluids Engineering**, Transactions of the ASME, v.110, p.339-341, september1988.

Migdal, A.A. Turbulence as statistics of vortex cells. **PUPT-1409, hep-th/9306152;1993**.  
Disponível em: <http://scholar.google.com>. Acesso em: 07 ago 2005.

Migdal, A.A. Loop equation and area law in turbulence. **International Journal of Modern Physics**, s.A, n.9, p.1197-1238, 1994.

Modaress, D., Tan, H.; Elghobashi, S. Two-component LDA measurement in a two-phase turbulent jet. **AIAA Journal**, v.22, p.624-630, 1984.

Modaress, D., Wuerer, J.; Elghobashi, S. An experimental study of a turbulent round two-phase jet. **Chemical Engineering Communications**, v.28, p.341-354, 1984.

Monin, A.S.; Yaglom, A.M. **Statistical fluid mechanics: mechanics of turbulence**. Volume 2. Cambridge: MIT Press, 1975.

Mood, A.M.; Graybill, F.A.; Boes, D.C. **Introduction to the theory of statistics**. New York: McGraw-Hill, 1987.

Moriconi, L. Statistics of Intense Turbulent Vorticity Events. **Physical Review E**, v.70, 2004.

Moriconi, L.; Takakura, F.I. Circulation statistics in three-dimensional turbulent flows. **Physical Review E**, v.58, n.3, p.3187-3201, 1998.

Mouri, H.; Hori, A; Kawashima Y. Vortex tubes in turbulence velocity fields at Reynolds numbers  $Re_\lambda \cong 300-1300$ . **Physical Letters**, v.A276, p.115-121, 2000.

Nayfeh, A.H. **Perturbation methods**. New York: John Wiley & Sons, 1973.

Noullez, A.; Wallace, G.; Lempert, W.; Miles, R.B.; Frisch, U. Transverse velocity increments in turbulent flow using the relief technique. **Journal of Fluid Mechanics**, v.339, p.287-307, 1997.

Oboukhov; A.M. Some specific features of atmospheric turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**, v.13, p.77-81, 1962.

Ooms, G.; Jansen, G.H. Particles-turbulence interaction in stationary, homogeneous, isotropic turbulence. **International Journal of Multiphase Flow**, v.26, n.11, p.1831-1850, 2000.

Ossiander, M.; Waymire, E. C. On stimation theory for multiplicative cascades. **The Indian Journal of Statistics**, v.64, s.A, p. 323-343, 2002.

Overman II, E.A.; Zabusky, N.J. Evolution and merger of isolated vortex structures. **Physics of Fluids**, v.25, n.8, p.1297-1305, august 1982.

Pai, S.-I. **Two-phase flows**. Braunschweig: Vieweg & Sohn, 1977.

Parthasarathy, R.N.; Faeth, G.M. Structure of particle-laden turbulent water jets in still water. **International Journal of Multiphase Flow**, v.13, n.5, p.699-716, 1987.

Patankar, N. A.; Joseph, D.D. Modeling and numerical simulation of particulate flows by the Eulerian-Lagrangian approach. **International Journal of Multiphase Flow**, v.27, n.10, p.1659-1684, 2001a.

Patankar, N. A.; Joseph, D.D. Lagrangian numerical simulation of particulate flows. **International Journal of Multiphase Flow**, v.27, n.10, p.1685-1706, 2001b.

Pearson, B.R.; Antonia, R.A. Reynolds-number dependence of turbulent velocity and pressure increments. **Journal of Fluid Mechanics**, v.444, p.343-382, 2001.

Pekeris, C.L.; Alterman, Z.; Finkelstein, L.; Frankowski, K. Propagation of sound in a Gas of Rigid Spheres. **Physics of Fluids**, v.5, n.12, p.1608-1616, 1962.

Ramos, F.M.; Rosa, R.R.; Rodrigues Neto, C.; Bolzan, M.J.A.; Sá, L.D.A.; Velho, H.F.C. Nonextensive statistics and three-dimensional fully developed turbulence. **Physica A**, v.295, p.250-253, 2001.

Rhie, C.M. and Chow, W.L. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation. In: American Institute of Aeronautics and Astronautics Joints, 3., 1982, St Louis. **Proceedings...** St Louis: AIAA, 1982.12p. (**AIAA paper 82-0998**)

Rivlin, J.T. **An introduction to the approximation of functions**. New York: Dover 1969.

Saffman, P.G. **Vortex dynamics**. USA: Cambridge University Press, 1995.

Schmidt, D.P.; Rutland, C.J. A New Droplet Collision Algorithm. **Journal of Computational Physics**, v.164, p.62-80, 2000.

Schoppa, W.; Hussain, F. Coherent structure generation in near-wall turbulence. **Journal of Fluid Mechanical**, v.453, p.57-108, 2002.

Schouveiler, L.; Brydon, A., Leweke, T.; Thompson, M.C. Interactions of the wakes of two spheres placed side by side. **European Journal of Mechanics B/Fluids**, v.23, p.137-145, 2004.

Serizawa, A.; Kataoka, I.; Michigoshi, I. Turbulence structure of air-water bubbly flow-II. Local properties. **International Journal of Multiphase Flow**, v.12, n.3, p.235-246, 1975.

Shuen, J.-S.; Solomon, A. S. P.; Zhang, Q. -F.; Faeth, G. M. Structure of particle-laden jets: measurements and predictions. **AIAA Journal**, v.23, p.235-246, 1975.

Snider, D.M. An incompressible three-dimensional multiphase particle-in-cell model for dense particle flows. **Journal of Computational Physics**, v.170, p.523-549, 2001.

Sreenivasan, K.R.; Antonia, R.A. The phenomenology of small-scale turbulence. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v.29, p.435-472, 1997.

Sreenivasan, K.R.; Juneja, A.; Suri, A.K. Scaling properties of circulation in moderate-Reynolds-number turbulent wakes. **Physical Review Letters**, v.75, n.3, p.433-436, 1995.

Sun, T. Y.; Faeth, G. M. Structure of turbulent bubbly jets-I. Methods and centerline properties. **International Journal of Multiphase Flow**, v.12, n.1, p.99-114, 1986.

Sundaram, S.; Collins, L.R. A numerical study of the modulation of isotropic turbulence by suspended particles. **Journal of Fluid Mechanics**, v.379, p.105-143, 1999.

Tabeling, P., Zocchi, G., Belin, F., Maurer, J.; Willaime, H. Probability density functions, skewness, and flatness in large Reynolds number turbulence. **Physical Review E**, v.53, n.2, p.1613-1621, 1996.

Takahashi, N., Kambe, T., Nakano, T., Gotoh, T.; Yamamoto, K Probability density function of longitudinal velocity increment in homogeneous turbulence. **arXiv: chaos-dyn/9803010**, v1, 9 Mar 1998. Disponível em: <http://scholar.google.com>. Acesso em: 07 ago 2005.

Tennekes, H.; Lumley, J.L. **A first course in turbulence**. Cambridge: MIT Press, 1974.

Theofanous, T.G.; Sullivan, J. Turbulence in two-phase dispersed flows. **Journal of Fluid Mechanics**, v.116, p.343-362, 1982.

Thomas, P.J. On the influence of the Basset history force on the motion of a particle through a fluid. **Physics of Fluids A**, v.4, n.9, p.2090-2093, 1992.

Thomas, P.J. A numerical study of the influence of the Basset force on the statistics of LDV velocity data sampled in a flow region with a large spatial velocity gradient. **Experiments in Fluids**, v.23, p.48-53, 1997.

Touchette, H.; Beck, C. Asymptotics of Superstatistics. **arXiv: cond-mat/0408091**, v1, 4 Aug 2004. Disponível em: <http://scholar.google.com>. Acesso em: 07 ago 2005.

Travis, J. R.; Harlow, F. H.; Amsden, A. A. Numerical calculation of two-phase flows. **Nuclear Science and Engineering**, v.61, p.1-10, 1976.

Tsuji, Y.; Morikawa. LDV measurements of an air-solid two-phase flow in a horizontal pipe. **Journal of Fluid Mechanics**, v.120, p.385-409, 1982.

Tsuji, Y.; Morikawa, Y.; Shiomi, H. LDV measurements of an air-solid two-phase flow in a vertical pipe. **Journal of Fluid Mechanics**, v.139, p.417-434, 1984.

Tsuji, T.; Narutomi, R.; Yokomine, T.; Ebara, S.; Shimizu, A. Unsteady three-dimensional simulation of interactions between flow and two particles. **International Journal of Multiphase Flow**, v.29, n.9 , p.1431-1450, 2003.

Van Atta, C.W.; Antonia, R.A. Reynolds number dependence of skewness and flatness factors of turbulent velocity derivatives. **Physics of Fluids**, v.23, n.2, p.252-257, 1980.

Villa Nova, H. F. **Uma análise da modelagem numérica de escoamentos bifásicos baseada em mp-pic**. Exame de proposta de tese (Computação Aplicada)-Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São dos Campos. 2004.

Vincent, A.; Meneguzzi, M. The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**, v.225, p.1-20, 1991.

Vincent, W.G.; Kruger, C.H. **Introduction to physical gas dynamics**. New York: Wiley, 1965.

Voth, G. A.; La Porta, A.; Crawford, A.M.; Alexander, J.; Bodenschatz, E. Measurement of particle accelerations in fully developed turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**, v.469, p.121-160, 2002.

Wang, S.K.; Lee, S.J.; Jones, O.C.; Lahey, R.T. 3-D turbulence structure and phase distribution measurements in bubbly two-phase flows. **International Journal of Multiphase Flow**, v.13, p.327-343, 1987.

Wang, J.; Joseph D. D. Potential flow of a second-order fluid over a sphere or an ellipse. **Journal of Fluid Mechanics**, v.511, p.201-215, 2004.

Yamamoto, Y.; Potthoff, M.; Tanaka, T.; Kajishima, T.; Tsuji, Y. Large-eddy simulation of turbulent gas-particle flow in a vertical channel: effect of considering inter-particle collisions. **Journal of Fluid Mechanics**, v.442, p.303-334, 2001.



Yang, Y.; Crowe, C.T., Chung, J.N.; Troutt, T.R. Experiments on particle dispersion in a plane wake. **International Journal of Multiphase Flow**, v.26, n.10, p.1583-1607, 2000.

Young, J.B. The fundamental equations of gas-droplet multiphase flow. **International Journal of Multiphase Flow**, v.21, n.2, p.175-191, 1995.

Young, J.; Leeming, A. A theory of particle deposition in turbulent pipe flow. **Journal of Fluid Mechanics**, v.340, p.129-159, 1997.

Yuan, Z.; Michaelides, E.E. Turbulence modulation in particulate flows-A theoretical approach. **International Journal of Multiphase Flow**, v.18, n.5, p.770-785, 1992.

Zhang, D. Z.; Prosperetti, A. Momentum and energy equations for disperse two-phase flows and their closure for dilute suspensions. **International Journal of Multiphase Flow**, v.23, n.3, p.425-453, 1997.

Zhang, Y.; Reese, J. M. Particle-gas turbulence interactions in a kinetic theory approach to granular flows. **International Journal of Multiphase Flow**, v.27, n.11, p.1945-1964, 2001.

Zhang, Y.; Reese, J. M. Gas-turbulence modulation in a two-fluid model for gas-solid flows. **AIChE Journal**, v.49, n.12, p. 3048-3065, december 2003.

Zisselmar, R.; Molerus, O. Investigation of solid-liquid pipe flow with regard to turbulence modification. **Chemical Engineering Journal**, v.18, p.233-239, 1979.



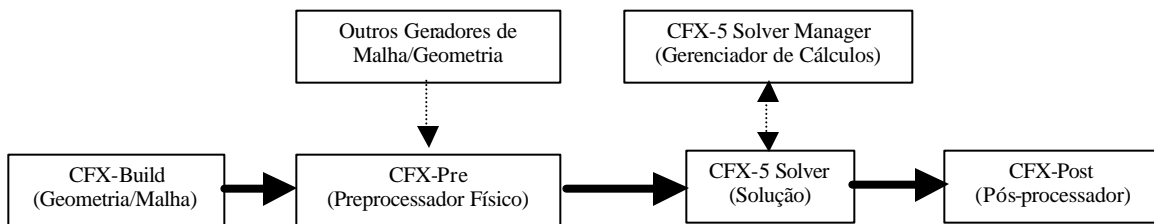
## APÊNDICE A

### CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA CÁLCULO FLUIDO-DINÂMICO DE ESCOAMENTOS LAMINARES

Neste apêndice é mostrada a estrutura do código computacional para cálculo fluido-dinâmico, conhecido comercialmente como CFX<sup>®</sup>. Este código foi elaborado pela AEA *technology*, podendo ser aplicado em diversas formas de análise de escoamentos de fluidos.

#### A.1-Introdução:

O CFX na versão 5.7 consiste de um *software* para elaboração, cálculo e análise de resultados de dinâmica dos fluidos computacional. Este *software* é estruturado da seguinte forma:



**Figura A.1-Estrutura do *software* CFX-5.7.**

Para este trabalho, foram empregadas as seguintes capacidades de modelamento do CFX:

- Escoamentos estacionário e transiente;
- Escoamento laminar;
- Escoamento subsônico;

#### A.2-Discretização do Domínio Computacional:

A discretização do domínio computacional, que constitui a malha é elaborada no CFX a partir da discretização das superfícies de fronteira (contornos) sendo em seguida estendida ao volume. Para a topologia 2 - **D** o algoritmo de geração da malha emprega dois métodos:

o método de Delaunay (mais rápido) e o *Advancing Front* (melhor qualidade), ambos geram malhas triangulares. Para a topologia 3 - **D** emprega-se o *Advancing Front Inflation*, o qual gera malha tetraedral (pirâmides ou prismas).

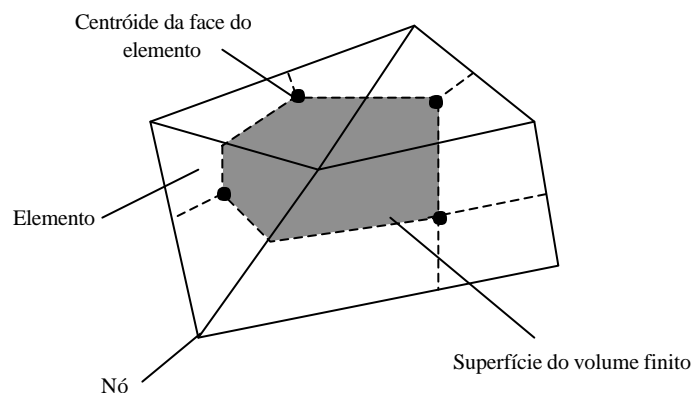
### A.3-Discretização Numérica:

Soluções analíticas para as equações de Navier-Stokes existem somente para uma classe restrita de problemas de escoamentos, normalmente em condições ideais. A solução para problemas mais complexos deve ser obtida por soluções numéricas de aproximações algébricas das equações de Navier-Stokes.

#### A.3.1-Discretização das Equações Governantes:

O método empregado no CFX envolve uma discretização no domínio espacial em volumes de controle finitos usando-se uma malha. As equações governantes são integradas sobre cada volume de controle, tal que a quantidade relevante (massa, quantidade de movimento, energia etc.) é conservada no sentido discreto para cada volume de controle.

A figura abaixo mostra uma unidade típica da malha e suas vizinhanças (no espaço 2 - **D**), no qual uma superfície do volume finito é representada pela área hachuriada.



**Figura A.2-Superfície do volume finito.**

É claro que cada nó é contornado por um conjunto de superfícies as quais formam o volume finito. Todas as variáveis são armazenadas nos nós dos elementos.

Considerando a forma principal das equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia, expressas em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j v_i) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho m_{eff} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho f) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j f) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho G_{eff} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) + S_f$$

Estas equações podem ser integradas sobre um volume de controle fixo, usando-se o teorema da divergência de Gauss para converter a integral de volume em integral de superfície, como segue:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho v_j dn_j = 0$$

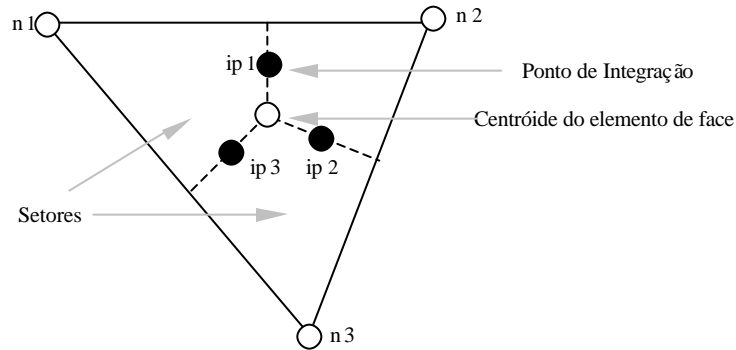
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV + \int_S \rho v_j v_i dn_j = - \int_S p dn_j + \int_S \rho m_{eff} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dn_j + \int_V \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V S_{v_i} dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho f dV + \int_S \rho v_j f dn_j = \int_S \rho G_{eff} \frac{\partial f}{\partial x_j} dn_j + \int_V S_f dV$$

onde  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{S}$  denotam as integrais de volume e superfície respectivamente e  $dn_j$  são as componentes cartesianas do vetor normal saindo das superfícies. A integral de superfície

são as integrações de fluxos, onde as integrais de volume representam as fontes ou termos de acumulação.

O primeiro passo na solução numérica destas equações contínuas é aproximá-las usando funções discretas. Considere agora um elemento de malha isolado tal como este mostrado abaixo:



**Figura A.3-Elemento isolado.**

Os fluxos através das superfícies devem ser discretamente representados nos pontos de integração para completar a conversão da equação contínua em sua forma discreta. Os pontos de integração **ip n** são localizados no centro de cada segmento de superfície em um elemento 3 - **D** vizinho do volume finito.

A forma discreta das equações integrais é escrita como:

$$r \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \dot{a} (rv_j Dn_j)_{ip} = 0$$

$$r \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \dot{a} m_{ip} (v_i)_{ip} = \dot{a} (p Dn_i)_{ip} + \dot{a} \frac{\partial}{\partial \xi} m_{eff} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{v_i}{x_j} + \frac{v_j}{x_i} \right) Dn_j + \overline{S}_{v_i} V$$

$$rV \frac{\rho f - \rho^0}{\Delta t} + \dot{m}_{ip} f_{ip} = \dot{m}_{ip} G_{eff} \frac{\rho f}{\rho_j} Dn_j + \overline{S_f} V$$

onde  $V$  é o volume de controle, o subscrito  $ip$  denota um ponto de integração, a somatória é sobre todos os pontos de integração do volume finito,  $Dn_j$  é o vetor perpendicular a superfície,  $\Delta t$  é o passo no tempo.

Um esquema de primeira ordem atrasado tipo Euler foi empregado nestas equações, embora um esquema de segunda ordem está disponível também. Sobrescritos 0 indicam tempo passado. O fluxo de massa discreto através das superfícies do volume finito é indicado por  $\dot{m}_{ip}$  e é dado por:

$$\dot{m}_{ip} = (rv_j Dn_j)_{ip}^0$$

### A.3.2-Acoplagem Pressão-Velocidade:

O CFX emprega uma célula singular, não sobreposta, com malha colocada para sobrepor a desacoplagem de pressão e, ou velocidade. A representação unidimensional da conservação da massa pode ser escrita como:

$$\frac{\rho v}{\rho_i} + \frac{Dx^3 A}{4\dot{m}} \frac{\rho^4 p}{\rho_i} = 0$$

onde

$$\dot{m} = rv_j Dn_j$$

A equação da continuidade é uma aproximação de segunda ordem com diferença centrada para a derivada de primeira ordem da velocidade, modificada por uma derivada de quarta ordem na pressão as quais atuam para redistribuir a influência da pressão. Isto atenua o

problema de oscilação que são normais com malha colocalizada. Este método é similar àquele empregado por Rhie & Chow (1982), com um número de extensões que melhoram a robustez da discretização quando a pressão varia rapidamente ou, é afetada por forças de corpo.

Com malha refinada, a magnitude do termo de segunda ordem na equação acima tende a zero com uma taxa de  $\Delta x^3$  com relação à derivada da velocidade, obtendo-se assim a equação da continuidade rapidamente.

### A.3.3-Termo Transiente:

O termo transiente é aproximado por esquema de Euler de primeira ordem atrasado, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho f dV = \rho V \frac{f - f^0}{\Delta t}$$

Este esquema é robusto, totalmente implícito, limitado, conservativo no tempo e sem limitações de passo no tempo. O termo transiente não tem influência sobre o termo estacionário, sendo de precisão de primeira ordem, o que induz à difusão numérica no tempo, similar ao que ocorre com esquemas *upwind* para discretização do termo de advecção.

O esquema de Euler de segunda ordem atrasado aproxima o termo transiente como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho f dV = \frac{\rho V}{2} \frac{3f - 2f^0 + f^{00}}{\Delta t}$$

onde  $f^{00}$  representa o campo de solução do tempo antes do tempo anterior. Este esquema é também robusto, implícito, conservativo no tempo e sem limitações de passo no tempo. Ele também é de precisão de segunda ordem no tempo, porém não é limitado podem levar a resultados fisicamente não coerentes.



### A.3.4-Funções de Forma:

O campo de soluções é armazenado nos nós da malha. Contudo, vários termos nas equações requerem soluções ou soluções de gradientes para serem avaliados nos pontos de integração. Por esta razão, deve-se ter um modo para calcular a variação da solução dentro do elemento. Isto é possível com as funções de forma de elementos finitos.

A variável  $f$  varia dentro de um elemento como:

$$f = \sum_{i=1}^{N_{\text{nó}}} N_i f_i$$

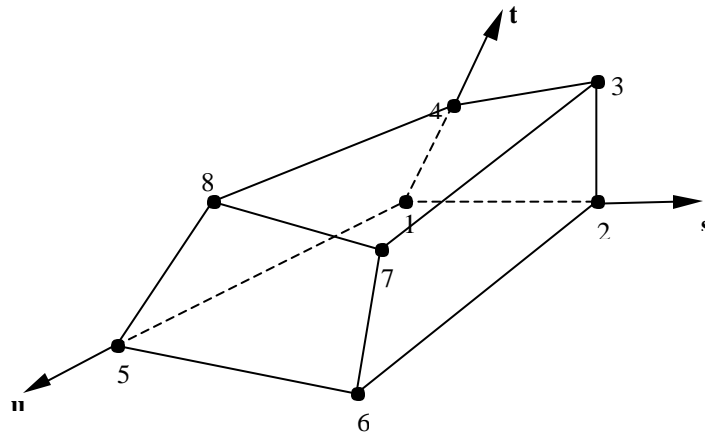
onde  $N_i$  é a função de forma para o nó  $i$  e  $f_i$  é o valor de  $f$  no nó  $i$ . A somatória é sobre todos os nós de um elemento. As propriedades importantes da função de forma incluem:

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{nó}}} N_i = 1$$

e, no nó  $j$

$$N_i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

As funções de forma usadas no CFX-5 são lineares em termos de coordenadas paramétricas. Por exemplo, considerando o seguinte elemento hexahedral:



**Figura A.4-Elemento hexahedral.**

As funções de forma tri-linear para cada nó são dadas por:

$$N_1(s,t,u) = (1-s)(1-t)(1-u)$$

$$N_2(s,t,u) = s(1-t)(1-u)$$

$$N_3(s,t,u) = st(1-u)$$

$$N_4(s,t,u) = (1-s)t(1-u)$$

$$N_5(s,t,u) = (1-s)(1-t)u$$

$$N_6(s,t,u) = s(1-t)u$$

$$N_7(s,t,u) = stu$$

$$N_8(s,t,u) = (1-s)tu$$

As funções de forma são também usadas para calcular várias quantidades geométricas, tal como as coordenadas  $\mathbf{ip}$ , os vetores direcionais das superfícies etc. Isto é possível pois:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N_{n6}} \mathbf{N}_i \mathbf{x}_i \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N_{n6}} \mathbf{N}_i \mathbf{y}_i \quad \mathbf{z} = \sum_{i=1}^{N_{n6}} \mathbf{N}_i \mathbf{z}_i .$$

### A.3.5- Termo de Difusão:

Seguindo a discretização padrão para elementos finitos, as funções de forma são usadas para avaliar as derivadas para todos os termos de difusão. Por exemplo, para uma derivada na direção  $\mathbf{x}$  em um ponto de integração  $\mathbf{ip}$ ,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\mathbf{ip}} = \sum_n \left. \frac{\partial \mathbf{N}_n}{\partial x} \right|_{\mathbf{ip}} f_n$$

A somatória é feita sobre todas as funções de forma para o elemento. As derivadas em coordenadas cartesianas das funções de forma podem ser expressas em termos das derivadas locais via transformação Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{v}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{w}} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{w}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{w}} \\ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{w}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{v}} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{w}} \end{pmatrix} .$$

Os gradientes das funções de forma podem ser avaliados em cada ponto de integração (trilinear integração), ou nas intersecções de superfície (linear-linear interpolação).

### A.3.6-Termo de Gradiente de Pressão:

A integração de superfície do gradiente de pressão na equação do momento envolve avaliação da expressão:

$$\left( \mathbf{p} \mathbf{D} \mathbf{n}_{ip} \right)_{ip} .$$

O valor de  $\mathbf{p}_{ip}$  é determinado usando-se as funções de forma:

$$\mathbf{p}_{ip} = \sum_n \dot{\mathbf{a}}_n \mathbf{N}_n (\mathbf{s}_{ip}, \mathbf{t}_{ip}, \mathbf{u}_{ip}) \mathbf{p}_n .$$

Assim como feito para os termos de difusão, as funções de forma usadas para interpolar  $\mathbf{p}$  podem ser determinadas para cada ponto de integração, ou na intersecção das superfícies.

### A.3.7-Termo de Advecção:

Para completar a discretização do termo de advecção, a variável  $f_{ip}$  deve ser relacionada aos valores de  $f$  nos nós. O esquema para o termo de advecção implementado no CFX-5 pode ser colocado na seguinte forma:

$$f_{ip} = f_{up} + b \tilde{\mathbf{N}} f \times \mathbf{D} \bar{\mathbf{r}}$$

onde  $f_{up}$  é o valor no nó a frente (*upwind*),  $\tilde{\mathbf{N}} f$  é o gradiente de  $f$  e  $\bar{\mathbf{r}}$  é o vetor do nó à frente até  $\mathbf{ip}$ . Escolhas particulares para  $b$  fornecem esquemas diferentes.

#### A.3.7.1- Esquema *Upwind* de Diferenças de Primeira Ordem:

Um valor de  $b = 0$  leva ao esquema *upwind* de diferenças de primeira ordem. Muitos esquemas de diferenças desenvolvidos para o cálculo computacional de escoamentos são

baseados em expansão em séries (séries de Taylor) para as funções contínuas. Quanto mais termos na expansão maior a precisão da aproximação, porém é maior a carga computacional. A ordem do esquema empregado é dada pela ordem do maior termo da parte truncada da série usada na expansão.

O esquema *upwind* de diferenças de primeira ordem é muito robusto (numericamente estável) e é garantido não introduzir resultados não coerentes fisicamente, porém ele é susceptível à difusão numérica.

#### **A.3.7.2- Esquema de Correção da Advecção:**

Com valores de  $0 < b < 1$  os efeitos difusivos são reduzidos. A quantidade  $b\tilde{N}f \times D\tilde{r}$ , chamada correção da advecção pode ser visto como um termo antidifusivo adicionado ao esquema *upwind*. A escolha de  $b = 1$  fornece um esquema de segunda ordem, porém com perda de estabilidade.

#### **A.3.7.3- Esquemas de Alta Ordem:**

Para os esquemas de alta ordem,  $b$  deve ser o mais próximo possível de 1, sendo calculado localmente segundo uma expressão. Os esquemas de alta resolução são precisos e estáveis.

#### **A.3.7.4- Esquemas de Diferença Central:**

Para este esquema o valor de  $f_{ip}$  é obtido usando funções de forma trilinear, isto é:

$$f_{ip} = \sum_n \hat{a}_n N_n(s_{ip}, t_{ip}, u_{ip}) f_n$$

Embora este esquema seja de segunda ordem de precisão, ele apresenta sérios problemas de desacoplagem.

### A.3.8-Compressibilidade:

A acoplagem de pressão/velocidade de escoamentos incompressíveis e, pressão/densidade de escoamentos compressíveis é modelada a partir da equação da conservação da massa, aproximando-se o fluxo de massa como:

$$(\mathbf{r}\mathbf{v})^n \mathbf{A} \approx \mathbf{r}^n \mathbf{v}^0 \mathbf{A} + \mathbf{r}^0 \mathbf{v}^n \mathbf{A} - \mathbf{r}^0 \mathbf{v}^0 \mathbf{A}$$

onde os sobrescrito **n** se refere a nova iteração e 0 a iteração anterior.

### A.3.9-Sistema de Equações:

O conjunto de equações lineares que surge da aplicação do método de volumes finitos constituem equações de conservação discretas. Este sistema pode ser escrito na seguinte forma:

$$\sum_{nb_i} \mathbf{a}_i^{nb} f_i = \mathbf{b}_i$$

onde **f** é a solução, **b** o lado direito, **a** os coeficientes da equação, **i** é o índice que identifica o número do volume finito ou nó em questão, e **nb** significa o vizinho. O nó pode ter qualquer número de vizinhos, de forma que o método se aplica à malhas gerais. Para uma equação escalar, cada  $\mathbf{a}_i^{nb}$ ,  $f_{nb}$  e  $\mathbf{b}_i$  é um número singular. Para acoplado 3 - **D** conjunto de equações massa-quantidade de movimento eles são uma matriz (4 × 4) ou um vetor (4 × 1), o qual pode ser expresso como:

$$\mathbf{a}_i^{nb} = \begin{matrix} \hat{e} & \mathbf{a}_{uu} & \mathbf{a}_{uv} & \mathbf{a}_{uw} & \mathbf{a}_{up} & \hat{u}^{nb} \\ \hat{e} & \mathbf{a}_{vu} & \mathbf{a}_{vv} & \mathbf{a}_{vw} & \mathbf{a}_{vp} & \hat{u} \\ \hat{e} & \mathbf{a}_{wu} & \mathbf{a}_{wv} & \mathbf{a}_{ww} & \mathbf{a}_{wp} & \hat{u} \\ \hat{e} & \mathbf{a}_{pu} & \mathbf{a}_{pv} & \mathbf{a}_{pw} & \mathbf{a}_{pp} & \hat{u}_i \end{matrix}$$

e

$$f_i = \begin{matrix} \hat{e}_u \hat{u} \\ \hat{e}_v \hat{v} \\ \hat{e}_w \hat{w} \\ \hat{e}_p \hat{p} \end{matrix} \hat{u}_i$$

$$b_i = \begin{matrix} \hat{e}_b \hat{u} \\ \hat{e}_v \hat{v} \\ \hat{e}_w \hat{w} \\ \hat{e}_p \hat{p} \end{matrix} \hat{u}_i$$

#### A.4-Método de Solução:

Algoritmos segregados de solução empregam uma estratégia de solução onde as equações da quantidade de movimento são inicialmente resolvidas, usando um valor provisório para pressão, e em seguida obtendo-se uma equação para a pressão. Em função disso, um grande número de iterações é necessário para se obter a solução com determinado nível de precisão.

O CFX-5 emprega um algoritmo de solução acoplado, o qual resolve as equações hidrodinâmicas (para  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{p}$ ) como um sistema único. Esta solução emprega uma discretização implícita das equações em qualquer passo no tempo. Para o caso permanente, o passo no tempo comporta-se como um parâmetro de aceleração.