



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14480-TDI/1161**

**TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS E DINÂMICAS NA VIZINHANÇA  
DOS PONTOS LAGRANGIANOS L1 E L2**

Annelisie Aiex Corrêa

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espacial /  
Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Teresinha de Jesus Stuchi e Antônio  
Fernando Bertachini de Almeida, aprovada em 08 de dezembro de 2005.

INPE  
São José dos Campos  
2007

521.13

Corrêa, A. A.

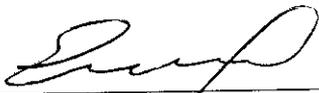
Transferências orbitais de dinâmicas na vizinhança dos pontos lagrangianos L1 e L2 / Annelisie Aiex Corrêa. -- São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2005.

162p.; (INPE-14480-TDI/1161)

1. Problema restrito de três corpos. 2. Pontos lagrangianos. 3. Órbitas periódicas. 4. Variedade hiperbólica. 5. Problema bicircular. 6. Transferências orbitais. 7. Problema quase bicircular. I. Título.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Doutor(a) em  
Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle

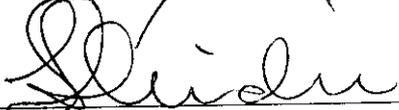
Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau



---

Presidente / INPE / SJCampos - SP

Dra. Teresinha de Jesus Stuchi



---

Orientador(a) / UFRJ / Rio de Janeiro - RJ

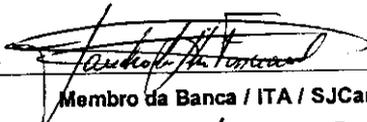
Dr. Antonio Fernando Bertachini de  
Almeida Prado



---

Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. Sandro da Silva Fernandes



---

Membro da Banca / ITA / SJCampos - SP

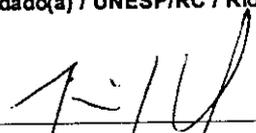
Dr. Tadashi Yokoyama



---

Convidado(a) / UNESP/RC / Rio Claro - SP

Dr. Jair Koiller



---

Convidado(a) / FGV / Rio de Janeiro - RJ

Aluno (a): Annelis Alex Corêa

São José dos Campos, 08 de dezembro de 2005



*"Pior que o simples desconhecimento, contudo, é a ignorância potenciada de uma falsa certeza - o acreditar convicto de quem está seguro de que sabe o que desconhece. Abrir-se à dúvida radical - à possibilidade de que estejamos seriamente enganados sobre nós mesmos e sobre às crenças, paixões e valores que nos governam - é abrir-se à oportunidade de rever e avançar."*

EDUARDO GIANNETTI  
*Auto-engano, Cia das Letras, 1997*



## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Fundação de Apoio a Pesquisa do Estado de São Paulo por financiar este trabalho e pela oportunidade do programa sanduíche realizado na Universidade de Barcelona, que foi de extrema relevância à minha formação. Agradeço aos orientadores Dr<sup>a</sup> Teresinha de Jesus Stuchi, por ter me ensinado parte de seu conhecimento em técnicas numéricas, e Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado. Agradeço também duas pessoas que contribuíram ao desenvolvimento deste trabalho: Dr. Cristian Beaugé, pela sua dedicação na fase inicial, e Dr. Gerard Gómez, que além de ter me recebido com muito esmero durante o período que permaneci sob sua supervisão acadêmica, me indicou o tema do quarto capítulo, fornecendo os códigos necessários a sua implementação e discussões sobre o mesmo. Agradeço aos amigos Dr<sup>a</sup> Walkiria Schulz e Dr. Gustavo Frederico Porto de Mello pelas correções de texto.



## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo da dinâmica na vizinhança dos pontos lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$  no problema restrito de três corpos nos modelos Terra-Lua e Terra-Sol. Apesar do caráter hiperbólico desses pontos, a redução à variedade central permite obter órbitas periódicas e quase periódicas existentes ao seu redor. Este procedimento é realizado através da forma normal, a qual desacopla as direções elípticas da hiperbólica na hamiltoniana do problema. A globalização das variedades invariantes hiperbólicas associadas às órbitas periódicas garante o estudo da dinâmica em uma grande vizinhança do ponto lagrangiano. Uma vez que essas variedades hiperbólicas dividem o espaço de fase no problema planar restrito de três corpos, definem-se dois tipos de trajetórias, a de trânsito, que é confinada na região interna da variedade, e a de não trânsito, que está na região externa da variedade. Estas trajetórias podem ser utilizadas para se projetar uma missão à Lua com baixo custo de combustível, onde é necessário utilizar um acoplamento de dois problemas de três corpos, Terra-Sol-veículo e Terra-Lua-veículo. Uma vez que a presença do Sol não deve ser desprezada na trajetória de trânsito, dada no modelo Terra-Lua, é necessário incluí-la. Para isto, foi utilizado o problema bicircular, onde a trajetória foi refinada através do método numérico de múltiplos tiros. São apresentadas também as trajetórias de transferência bi-impulsivas baseadas no problema do valor de contorno com o tempo de transferência fixo. Estas transferências são utilizadas para inserir um veículo espacial em uma órbita halo, considerando o problema restrito de três corpos e o problema quase bicircular, onde realiza-se uma comparação entre os impulsos de velocidade requeridos em cada modelo.



# TRANSFER ORBITS AND DYNAMICS AROUND THE LAGRANGIAN POINTS $L_1$ AND $L_2$

## ABSTRACT

In this work we present a study of the dynamics in the vicinity of the Lagrangian points  $L_1$  and  $L_2$  in the restricted three-body problem, considering the Sun-Earth and Earth-Moon models. Notwithstanding the hyperbolic character of these points, the reduction to the central manifold allows periodic and quasi-periodic orbits. This procedure is applied through the normal form calculations, which decouples the elliptical directions from the hyperbolic ones in the hamiltonian of the problem. The globalization of the hyperbolic invariant manifolds of these periodic orbits ensures the study of the dynamics in a large vicinity of the lagrangian point. Since these hyperbolic manifolds divide the phase space, in the planar restricted three-body problem, two types of trajectory are defined: transit ones, confined to the internal region of the manifold, and non-transit ones, external to the manifold. These trajectories can be employed to design a space mission from the Earth to the Moon with low fuel cost which we must couple two restricted three-body problems, Sun-Earth-spacecraf and Earth-Moon-spacecraft. Towards this goal we applied the bicircular problem, in which the trajectory was refined using the multiple shooting techniques. We also present the bi-impulsive transfer trajectories, based on the two point boundary value problem with a fixed transfer time. These transfers are employed to place a space vehicle in a halo orbit, within the framework of the restricted three-body problem and the quasi bicircular problem, and we carry out a comparison of the velocity impulses necessary for each model.



## SUMÁRIO

Pág.

### LISTA DE FIGURAS

### LISTA DE TABELAS

<b>1 - APRESENTAÇÃO</b>	<b>23</b>
1.1 - Introdução . . . . .	23
1.2 - Objetivos . . . . .	30
<b>2 - DINÂMICA NA VIZINHANÇA DOS PONTOS LAGRANGIA- NOS <math>L_1</math> e <math>L_2</math></b>	<b>33</b>
2.1 - Introdução . . . . .	33
2.2 - Equações de Movimento do PRTC . . . . .	35
2.3 - Forma Normal . . . . .	38
2.3.1 - Expansão da Hamiltoniana . . . . .	40
2.3.2 - Método de Lie . . . . .	44
2.4 - Redução à Variedade Central . . . . .	48
2.5 - Construção do Manipulador Algébrico . . . . .	48
2.5.1 - Ordenação de Polinômios . . . . .	50
2.5.2 - Operações Fundamentais . . . . .	55
2.5.3 - Transformação Inversa . . . . .	60
2.5.4 - Integração Numérica . . . . .	61
2.6 - Resultados na Variedade Central . . . . .	63
<b>3 - DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DAS VARIEDADES HIPER- BÓLICAS</b>	<b>73</b>
3.1 - Introdução . . . . .	73
3.2 - Continuação Analítica . . . . .	74
3.3 - Continuação Numérica das Soluções Periódicas . . . . .	78
3.4 - Estabilidade das Órbitas Periódicas . . . . .	83
3.5 - Variedades Invariantes Instáveis e Estáveis . . . . .	85
3.6 - Globalização das Variedades Hiperbólicas . . . . .	89

<b>4 - SUPERPOSIÇÃO DOS MODELOS</b>	<b>95</b>
4.1 - Introdução	95
4.2 - Regiões de Hill	96
4.3 - Transferências Orbitais Guiadas pelas Variedades	98
4.4 - Transformação Levi-Civita	102
4.5 - Superposição dos Modelos	104
4.5.1 - Variação da Constante de Jacobi	105
4.5.2 - Fases da Lua	108
4.6 - Refino Numérico das Trajetórias	110
4.6.1 - O Problema Bicircular	110
4.6.2 - Método de Múltiplos Tiros	112
4.7 - Resultados	115
<b>5 - TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS BI-IMPULSIVAS</b>	<b>123</b>
5.1 - Introdução	123
5.2 - O Problema de Três Corpos	124
5.2.1 - Resolução quase Bicircular do Problema de Três Corpos	125
5.3 - O Problema quase Bicircular	129
5.3.1 - A Hamiltoniana e as Equações de Movimento	133
5.3.2 - Pontos de Equilíbrio	136
5.4 - Comparação entre as Órbitas Halo	139
5.5 - Problema do Valor de Contorno	139
5.6 - Cálculo dos Impulsos	141
5.7 - Órbita Halo e de Estacionamento	142
5.8 - Transferências no PRTC	143
5.9 - Comparação do $\Delta V$ entre os Modelos	145
<b>6 - CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	<b>149</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>153</b>
<b>A - MISSÕES ESPACIAIS AOS PONTOS LAGRANGIANOS</b>	<b>159</b>
<b>B - TEOREMA DA VARIEDADE CENTRAL/ESTÁVEL/INSTÁVEL</b>	<b>161</b>
B.1 - Definição	161
B.2 - Teorema da Variedade Central para Órbitas Periódicas	161
B.3 - Teorema da Variedade Estável/Instável para Órbitas Periódicas	162

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Sistema de coordenadas sinódico do PRTC . . . . .	36
2.2 Secção de Poincaré $z = 0$ na variedade central ao redor de $L_1$ no sistema Terra-Sol. Nota-se a presença de uma bifurcação a partir do nível de energia $h = 0.4$ (tôpo à direita). O ponto fixo central corresponde à órbita vertical de Liapunov; as curvas fechadas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase periódicas de Lissajous; os pontos fixos laterais correspondem às órbitas halo; e, as curvas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase halo. . . . .	65
2.3 Secção de Poincaré $z = 0$ na variedade central ao redor de $L_2$ no sistema Terra-Sol. Nota-se a presença de uma bifurcação a partir do nível de energia $h = 0.4$ (tôpo à direita). O ponto fixo central corresponde à órbita vertical de Liapunov; as curvas fechadas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase periódicas de Lissajous; os pontos fixos laterais correspondem às órbitas halo; e, as curvas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase halo . . . . .	66
2.4 Secção de Poincaré $z = 0$ na variedade central ao redor de $L_1$ no sistema Terra-Lua. Nota-se a presença de uma bifurcação a partir do nível de energia $h = 0.2$ . O ponto fixo central corresponde à órbita vertical de Liapunov; as curvas fechadas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase periódicas de Lissajous; os pontos fixos laterais correspondem às órbitas halo; e, as curvas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase halo . . . . .	67

2.5	Secção de Poincaré $z = 0$ na variedade central ao redor de $L_2$ no sistema Terra-Lua. Nota-se a presença de uma bifurcação a partir do nível de energia $h = 0.4$ (tôpo à direita). O ponto fixo central corresponde à órbita vertical de Liapunov; as curvas fechadas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase periódicas de Lissajous; os pontos fixos laterais correspondem às órbitas halo; e, as curvas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase halo. . . . .	68
2.6	Órbita de Lissajous nas projeções da variedade central. . . . .	68
2.7	Quase halo na variedade central. . . . .	68
3.1	Ilustração do método de continuação numérica através de um parâmetro de arco. . . . .	78
3.2	Curva característica das órbitas da família de órbitas de Liapunov de $L_1$ (acima) e $L_2$ (abaixo) no sistema Terra-Sol. Nota-se que a família é instável. A letra "b" indica o ponto de bifurcação que origina a família das órbitas halos. . . . .	86
3.3	Curva característica das órbitas da família de órbitas de Liapunov de $L_1$ (acima) e $L_2$ (abaixo) no sistema Terra-Lua. Nota-se que a família é instável. A letra "b" indica o ponto de bifurcação que origina a família das órbitas halos. . . . .	87
3.4	Variedades invariantes instável e estável da órbita halo de $L_1$ no sistema Terra-Sol cuja constante de Jacobi é $C = 3.000829$ . $W^u$ corresponde ao tudo superior e $W^s$ ao inferior. As projeções da órbita halo correspondente encontram-se na Figura 3.5. O gráfico abaixo representa o corte das variedades na secção de Poincaré $x = -1 + \mu$ , a curva à esquerda da origem é a variedade estável enquanto que a curva à direita da origem é a variedade instável. . . . .	91
3.5	Projeções da órbita halo pertencente à família do ponto lagrangiano $L_1$ do sistema Terra-Sol cuja constante de Jacobi é $C = 3.000829$ . As variedades estável e instável correspondente a esta variedade central encontram-se desenhadas na Figura 3.4 . . . . .	92

3.6	O primeiro par horizontal de gráficos representa o ramo instável da variedade invariante de uma órbita de Liapunov ( $C = 3.160809$ ) referente à família $L_1$ do sistema Terra-Lua. O segundo par horizontal de gráficos é o ramo estável, que é simétrico ao primeiro. . . . .	92
3.7	Secção de Poincaré em $x = \mu$ de $W^u$ (à direita da origem) e $W^s$ (à esquerda da origem) de algumas órbitas de Liapunov pertencentes à família $L_1$ do sistema Terra-Lua. As constantes de Jacobi são $C = 3.174117$ , $C = 3.160809$ , $C = 3.142624$ , $C = 3.093237$ , $C = 3.063506$ , $C = 3.033054$ , respectivamente. . . . .	93
4.1	Regiões de Hill: a região cinza é a região proibida. . . . .	98
4.2	Retrato de fase do ponto sela-centro. . . . .	99
4.3	Órbita de trânsito de $W_{L_2}$ no sistema Terra-Lua. Os limites da região de Hill são representações gráficas. Nota-se que a trajetória transita entre as regiões externa e interna, aproximando-se da Lua. . . . .	100
4.4	Órbita de não trânsito de $W_{L_2}$ no sistema Terra-Sol. A trajetória de não trânsito inicia-se nas proximidades da Terra, aproximando-se do ponto $L_2$ onde faz um enlace e retorna em direção à Terra. Nota-se que a órbita permanece apenas na região interna de Hill. . . . .	101
4.5	Secção de Poincaré da órbita de trânsito e da órbita de não trânsito. . .	102
4.6	Transformação de Levi-Civita . . . . .	103
4.7	Secção de Poincaré em $x = -1 + \mu$ das variedades instáveis/estáveis no espaço físico (acima) e no espaço regularizado (abaixo) de $L_1$ do sistema Terra-Sol. . . . .	104
4.8	Conexão das órbitas na secção de Poincaré, localizada na Terra, das variedades instável de $L_2$ no sistema Terra-Sol com a variedade estável de $L_2$ no modelo Terra-Lua. O gráfico inferior exhibe a trajetória da transferência completa, órbitas de não trânsito e trânsito, no sistema sinódico Terra-Sol. . . . .	106

4.9	Conexão entre as secções de Poincaré ( $x = -1 + \mu_{TS}$ e $x = \mu_{TL}$ da variedade $W^u$ da família de Liapunov de $L_2$ no sistema Terra-Sol e de $W^s$ da família de Liapunov de $L_2$ no sistema Terra-Lua. . . . .	107
4.10	Limite da zona de intersecção entre os modelos. O índice TS representa o sistema Terra-Sol e o índice TL o Terra-Lua. A figura abaixo mostra uma ampliação da zona intersecção. . . . .	108
4.11	Órbitas de Liapunov que originam as variedades limites $W_{TS1}^u$ , $W_{TS2}^u$ , $W_{TL1}^s$ e $W_{TL1}^s$ . . . . .	109
4.12	Intersecção de $W_{TS}^u$ das órbitas de Liapunov de $L_2$ com $W_{TL}^s$ das órbitas de Liapunov de $L_2$ . As curvas de $W_{TS}^u$ representam o corte das variedades na secção $x = \mu - 1$ em diferentes níveis de energia. As curvas mais escuras representam $W_{TL}^s$ considerando a fase lunar. . . . .	110
4.13	Intersecção de $W_{TS}^u$ das órbitas de Liapunov de $L_1$ com $W_{TL}^s$ das órbitas de Liapunov de $L_2$ . As curvas de $W_{TS}^u$ representam o corte da variedade na secção $x = \mu - 1$ em diferentes níveis de energia. As curvas mais escuras representam $W_{TL}^s$ considerando a fase lunar. O segundo gráfico é uma ampliação da zona de intersecção do gráfico acima. . . . .	111
4.14	Trajetória de trânsito utilizando a conexão entre as variedades invariantes estável e instável referente ao ponto $L_2$ nos sistemas Terra-Sol e Terra-Lua.	116
4.15	Trajetória de trânsito (P1) refinada a partir do PRTC no PBC. A figura acima mostra a transferência completa, onde os pontos referem-se aos pontos nominais da trajetória; abaixo é exibido uma ampliação desta trajetória. Nota-se uma diferença entre a trajetória nominal e a trajetória refinada. . . . .	117
4.16	Trajetória de transito referente às condições iniciais do ponto P1 no referencial do problema bicircular e ampliações de algumas regiões. . . . .	118
4.17	Trajetória de trânsito utilizando a conexão entre as variedades invariantes estável e instável referente ao ponto $L_2$ nos sistemas Terra-Sol e Terra-Lua.	119

4.18	Trajétória de trânsito (P2) refinada a partir do PRTC no PBC. A figura acima mostra a transferência completa, onde os pontos referem-se aos pontos nominais da trajetória; abaixo é exibido uma ampliação desta trajetória. Nota-se uma diferença entre a trajetória nominal e a trajetória refinada. . . . .	120
4.19	Trajétória de transito referente às condições iniciais do ponto P2 no referencial do problema bicircular e ampliações de algumas regiões. . . . .	121
5.1	Sistema de coordenadas do problema de três corpos. . . . .	125
5.2	Modelo quase bicircular no sistema de referência inercial, as massas $m_1$ , $m_2$ e $m_3$ representam a Lua, a Terra e o Sol, respectivamente. . . . .	131
5.3	Órbita periódica relativa ao ponto $L_1$ no problema quase bicircular. . . . .	138
5.4	Órbita periódica relativa ao ponto $L_2$ no problema quase bicircular. . . . .	138
5.5	Comparação entre as órbitas halo de $L_1$ no PRTC e no PQBC. . . . .	140
5.6	Método do valor de contorno aplicado aos pontos da órbita de estacionamento com a mesma condição final na órbita halo. A partir da figura fica evidente a simetria entre as famílias. A Família 1 corresponde à órbita indireta e a Família 2 corresponde à órbita direta. O modelo dinâmico para a realização dessas transferências foi o PRTC. . . . .	142
5.7	Projeções $xy$ , $yz$ e $xz$ da órbita halo no PRTC e no PQBC. . . . .	144
5.8	Projeções $xy$ das órbitas de estacionamento 1 e 2 no PRTC e no quase bicircular. A Terra está localizada em $x = \mu$ de acordo com o sistema de referência adotado. . . . .	144
5.9	Condições de contorno que propiciaram transferências com impulso total menor que as outras possíveis combinações entre pontos dessas duas órbitas. . . . .	145
5.10	$\Delta V$ total considerando as condições de contorno da Figura 5.9 com o tempo de transferência igual a 0.6 unidades canônicas de tempo. . . . .	146

5.11 Comparação entre o impluso total  $\Delta V$  nos dois modelos dinâmicos estudados, as integrações foram realizadas considerando condições de contorno equivalentes e intervalos de tempo distintos, iniciando com  $\Delta t = 0.027113$  a  $\Delta t = 2.11332$ . . . . . 147

## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Posição dos Pontos Lagrangianos. . . . .	38
2.2 Ordem Lexográfica Inversa para um Polinômio de Três Variáveis. . . . .	51
2.3 Número de Termos de um Polinômio. . . . .	52
2.4 Monômios de Quarta Ordem de um Polinômio de Três Variáveis. . . . .	54
2.5 Possibilidades para que o Resultado de um Produto Seja Igual a 6. . . . .	57
2.6 Polinômio da Transformação Inversa. . . . .	60
2.7 Coeficientes de $\hat{H}$ , Terra-Sol ( $L_1$ ). . . . .	69
2.8 Coeficientes de $\hat{H}$ , Terra-Sol ( $L_2$ ). . . . .	70
2.9 Coeficientes de $\hat{H}$ , Terra-Lua ( $L_1$ ). . . . .	71
2.10 Coeficientes de $\hat{H}$ , Terra-Lua ( $L_2$ ). . . . .	72
4.1 Constante de Jacobi. . . . .	98
4.2 Condições iniciais das OP's limites. . . . .	109
4.3 Condições iniciais das transferências em P1 e P2. . . . .	118
5.1 Condições Iniciais das Órbitas ao redor de $L_1$ e $L_2$ no Sistema Sol-Terra-Lua. . . . .	137
5.2 Condições Iniciais da Órbita Halo no PRTC e no PQBC. . . . .	139
5.3 Condições Iniciais Utilizadas nas Simulações . . . . .	144
A.1 Missões Espaciais . . . . .	159



# 1 APRESENTAÇÃO

## 1.1 Introdução

O problema restrito de três corpos (PRTC) é o caso particular mais simples do problema de  $n$ -corpos, e pode-se pensá-lo como um problema de três corpos em que uma das massas tende a zero. Sendo assim, o PRTC descreve o movimento desta partícula de massa infinitesimal sob o campo gravitacional gerado pelos outros dois corpos que se movem em órbitas keplerianas ao redor de seu centro de massa. A restrição deste modelo está em considerar a massa dessa partícula desprezível em comparação com a massa dos corpos envolvidos - denotados como corpos primários, ou, simplesmente, primários - portanto, seu movimento não influencia o movimento dos primários. Esta idéia também é estendida aos modelos com mais de dois primários, como o modelo bicircular e o quase bicircular, que consideram o campo gravitacional gerado pelo movimento de três primários. No modelo bicircular, como o próprio nome sugere, as órbitas dos primários são tratadas como circulares - que são soluções triviais do problema de três corpos pleno -, ao passo que, no modelo quase bicircular, elas são consideradas como soluções não triviais do problema de três corpos pleno; isto é, utiliza-se uma aproximação da solução do problema de três corpos para o potencial efetivo da partícula de massa desprezível.

O PRTC é um dos modelos matemáticos mais antigos utilizados na compreensão do movimento de corpos celestes. Foi introduzido por Euler, em 1764, para estudar o movimento da Lua e continua sendo estudado, especialmente em Astrodinâmica, por possuir diversas aplicações em missões espaciais. Euler verificou que, sob certas condições iniciais, o PRTC apresentava soluções analíticas, descobrindo então três pontos de equilíbrio no eixo que une os primários; um deles situa-se entre os primários, geralmente denominado  $L_1$ , e os demais ao lado externo dos primários:  $L_2$  ao lado do primário de menor massa e  $L_3$  próximo ao de maior massa. Por estarem sob o mesmo eixo estes pontos são conhecidos como pontos colineares - ver Figura 2.1. Posteriormente, em 1772, Lagrange refez os cálculos de Euler para os pontos de equilíbrio colineares e também descobriu as soluções de equilíbrio triangulares,  $L_4$  e  $L_5$ , que formam triângulos equiláteros com os primários nos vértices. Por uma injustiça histórica, esses cinco pontos são, usualmente, conhecidos como pontos lagrangianos. Desde então, essas cinco soluções de equilíbrio intrigaram matemáticos e astrônomos em busca de análises matemáticas mais detalhadas em suas vizinhanças. Recentemente, estas soluções periódicas motivaram também os engenheiros espaciais

na investigação de órbitas estrategicamente bem localizadas e economicamente mais viáveis.

A análise da estabilidade linear dos pontos colineares caracteriza um comportamento instável das soluções na vizinhança dos mesmos, sendo uma vizinhança que apresenta uma direção hiperbólica e duas elípticas. Mas, apesar do caráter instável de  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , as direções elípticas levam à existência de soluções periódicas e quase periódicas em sua vizinhança, ou seja, soluções que se mantêm próximas a esses pontos quando o tempo tende a infinito. A busca de tais soluções foi um tema de grande interesse no final do século XIX e no começo do XX, onde vários cientistas centralizaram seus objetivos como Poincaré (1892) e Birkhoff (1927). Moulton (1920) e Ströengren (1922) determinaram sistematicamente famílias de órbitas periódicas no problema restrito de três corpos, estudando a estabilidade das soluções periódicas encontradas e catalogando-as de acordo com o sentido e com a posição geométrica das famílias. Moulton, através da linearização ao redor do equilíbrio, determinou três possibilidades de solução periódica tridimensional ao redor dos pontos colineares, sendo duas delas conferidas numericamente, exceto a terceira, devido à limitação computacional da época. Posteriormente, o grupo de Ströengren catalogou essas três famílias como famílias retrógradas ao redor de  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  (1), validando a existência de soluções ao redor do equilíbrio, o que já era postulado pelo teorema de Poincaré (2), o qual garante a existência de soluções periódicas ao redor de um ponto de equilíbrio para sistemas hamiltonianos.

Devido ao aprimoramento computacional, resultados numéricos mais precisos para as famílias das órbitas periódicas previamente determinadas foram aparecendo, assim como vários resultados inéditos. Goudas (3) foi um dos pioneiros na aplicação de técnicas puramente numéricas para a obtenção e no estudo da estabilidade das órbitas periódicas. Henón (4) introduziu o conceito de estabilidade vertical aplicado às soluções periódicas planas. Quando o parâmetro de estabilidade vertical passa por um valor crítico, a família se bifurca originando uma outra família topologicamente modificada, que são as órbitas tridimensionais; seu trabalho determina valores críticos para diversas famílias do modelo de Copenhague (massas iguais). Seguindo esta linha, a escola grega registrou sua contribuição nos seguintes trabalhos: Michalodimitrakis (5) estendeu o trabalho de Henón, estabelecendo uma conexão entre as famílias de órbitas periódicas do problema de Copenhague através do parâmetro de estabilidade. Icthiaroglou e Michalodimitrakis (6) provaram a existência das famílias

bifurcadas e demonstraram que as famílias tridimensionais podem se conectar com mais de uma família planar. Outros trabalhos também abordam este tema como (7, 8).

No final da década de sessenta iniciaram-se as discussões a respeito das vantagens e desvantagens em se explorar os pontos lagrangianos para fins observacionais. Começaram-se também os estudos mais elaborados sobre as soluções periódicas e quase periódicas na vizinhança dos pontos colineares e nas diversas maneiras de se transferir e manter um satélite artificial ao redor desses pontos. A vizinhança do ponto  $L_1$  do sistema Terra-Sol é um lugar bastante conveniente às observações solares: uma órbita tridimensional em sua vizinhança permite um constante apontamento do satélite para o Sol, evitando o ocultamento pela Terra ou por eclipse lunar; a órbita pode estar afastada o suficiente da Terra, evitando interferência eletromagnética, e aproximada o suficiente para que haja boa comunicação com a base terrestre; e, além disso, o satélite permanece longe da influência do campo magnético terrestre. Uma das desvantagens, sob o ponto de vista dinâmico, é o tempo exigido na trajetória de transferência para atingir a vizinhança dos pontos lagrangianos, podendo levar meses. Por outro lado, trajetórias com baixo custo de combustível são viabilizadas devido ao caráter instável dos pontos colineares.

Farquhar (9) foi o pioneiro na exploração das órbitas tridimensionais ao redor dos pontos lagrangianos, que foram batizadas como órbitas halo, pois, para um observador situado em um dos primários mirando em direção ao outro primário, idealiza a órbita periódica como uma auréola ao redor do primário observado. Uma das motivações do trabalho de Farquhar se fundamentou na exploração das órbitas halo referentes ao ponto  $L_2$  para observar o lado oculto da Lua, uma vez que o satélite não é ocultado pela sombra da Lua, permanecendo sempre em contato com a Lua e com a Terra simultaneamente. Mas, de fato, sua contribuição prática efetivou-se no planejamento da primeira missão a uma órbita halo em 1978, para observação solar.

Os primeiros trabalhos, a respeito das órbitas periódicas e quase periódicas tridimensionais ao redor dos pontos lagrangianos, podem ser divididos em duas partes: os que fornecem resultados numéricos e os que fornecem resultados analíticos ou semi-analíticos. Dentre o primeiro grupo, incluindo os trabalhos citados anteriormente, está o trabalho de Breakwell e Brown (10) que faz um ajuste das condições iniciais da órbita periódica através da matriz de transição calculada numericamente após meio período da mesma e estuda a estabilidade das órbitas determinadas pelo cálculo

dos autovalores da matriz de transição. Os autores consideram o sistema Terra-Lua e concluem que a parte estável da família de órbitas halo encontra-se a meia distância entre a Terra e a Lua. A determinação numérica das famílias referentes aos pontos  $L_1$  e  $L_2$  na vizinhança da Lua mostrou que as órbitas halo de  $L_2$  aparecem quase retilíneas e que a família de  $L_1$  termina em colisão com a Lua. Continuando nesta mesma linha, os trabalhos de Howell (11) e Howell e Breakwell (12) estendem tais cálculos e determinações para diferentes razões de massa do PRTC. Foi notado que há uma zona de órbitas halo estáveis para apenas alguns valores da razão de massa e que a amplitude das órbitas varia de acordo com o parâmetro de massa: quanto maior o parâmetro de massa, maior é a amplitude da família. No segundo grupo citam-se as referências (13, 14). Farquhar e Kamel (13) fizeram as primeiras determinações explícitas das órbitas halo e das órbitas quase periódicas de Lissajous para o ponto  $L_1$  utilizando o método analítico de Lindsted-Poincaré, expandindo em séries de potência até ordem três; e Richardson (14) estendeu o método até ordens mais elevadas.

Em meados da década de oitenta, outros trabalhos nesta linha foram desenvolvidos pela escola de Barcelona (15, 16, 17, 18) que, além de enfatizar bem os aspectos matemáticos, aplicando métodos perturbativos clássicos com uma linguagem moderna, também utiliza a análise computacional com proficiência, buscando sempre técnicas numéricas mais precisas e otimizadas. Pode-se dizer que esses quatro trabalhos são as mais completas contribuições nesse âmbito, pois estudam a dinâmica em uma grande vizinhança dos pontos lagrangianos, o que não era feito até o momento. Experiências práticas dentro da Engenharia Espacial, como as manobras de transferência para as órbitas halo, projeção das órbitas nominais nos modelos mais realísticos, manutenção e controle das órbitas, são conferidos nos trabalhos de Gómez et al (19, 20) e Simó et al (21). Além disso, tais trabalhos também desenvolvem técnicas de aproveitamento da dinâmica natural do problema como um mecanismo de manutenção e transferência orbital com custos bem reduzidos. Isto é feito através de transferências pelas direções ortogonais, na aproximação linear, às órbitas halo, através das quais um veículo pode se aproximar ou se afastar da órbita periódica naturalmente. Essas direções privilegiadas e invariantes são conhecidas como variedades estável e instável, respectivamente. Desde então apareceu uma vasta literatura do tema.

Basicamente, existem três tipos de órbitas capazes de sustentar uma missão aos pon-

tos lagrangianos: as órbitas halos (periódicas), as de Lissajous (quase periódicas) e as quase halos, que também são órbitas quase periódicas, sendo bons sítios para as constelações de satélites. O primeiro satélite a entrar em órbita halo foi o *International Sun Earth Explorer - 3* (ISEE-3) (22), da NASA, no ano de 1978, que serviu como observatório de raios cósmicos e vento solar. Após permanecer quatro anos em uma órbita halo, ele seguiu viagem ao encontro do cometa Giacobini-Zinner para observações de sua cauda. Outros cinco satélites já passaram ou permanecem em órbitas halo: o observatório solar *Solar Heliosphere Observatory* (SOHO), lançado em 1996 através da colaboração ESA-NASA; o satélite *Advanced Composition Explorer* (ACE), planejado para a observação do vento solar, foi lançado pela NASA em 1997; o satélite *Microwave Anisotropy Probe* (MAP), lançado em 2001 pela NASA, é um observatório para a coleta de radiação cósmica de fundo; o satélite *Genesis* (23), também lançado em 2001 pela NASA, foi um observatório de ventos solares; e o último satélite a ser colocado numa órbita halo foi o Nexus, que tem como propósito a observação da Terra. Outras missões têm sido planejadas pelas agências espaciais europeia e americana, como o *Far InfraRed and Submillimetre Telescope* (FIRST), o *Planck*, que servirá para observações da radiação cósmica de fundo, o *Next Generation Space Telescope* (NGST), e as constelações de satélite como *Terrestrial Planet Finder* (TPF) que ficará em órbita quase halo, o *Global Astrometric Interferometer for Astrophysics* (GAIA) e a *Constellation-X* planejada para astronomia de raios-X. Finalmente, o satélite *Single Aperture Far InfraRed Observatory* (SAFIR) está sendo planejado pela NASA para entrar em órbita ao redor de  $L_2$  em 2014.

Dentre os satélites citados, a missão *Genesis* foi a única a utilizar as variedades estável e instável de uma órbita halo para guiar sua trajetória de transferência, que foi dividida em quatro etapas: na primeira parte o satélite seguiu uma trajetória pertencente à variedade estável de uma órbita de  $L_1$  no sistema Terra-Sol levando 83 dias para atingir a órbita halo nominal; na segunda etapa, o satélite permaneceu quase dois anos nas proximidades da órbita halo, onde realizou quatro revoluções colhendo dados científicos do vento solar; na terceira fase, o satélite foi conduzido através de uma conexão heteroclínica até as proximidades do ponto  $L_2$ , o que levou quatro meses; e, finalmente, o veículo seguiu uma trajetória da variedade instável de uma órbita halo da família de  $L_2$  indo de encontro com a Terra. Ao todo foram dois anos e meio de missão. Embora tenham ocorrido falhas na última fase da reentrada do satélite na Terra, pode-se dizer que a parte dinâmica da missão foi bem sucedida.

Sendo o PRTC um sistema hamiltoniano não integrável, ele exibe um espaço de fase muito rico, repleto de objetos invariantes que formam o esqueleto da dinâmica, apesar de sua não integrabilidade e caos. Como exemplo desses objetos, citam-se os pontos lagrangianos, as órbitas periódicas e quase periódicas, as variedades invariantes estável e instável associadas às órbitas periódicas, e suas conexões homoclínicas e heteroclínicas etc. Esta é a principal motivação do emprego do PRTC, em primeira aproximação, ao estudo de uma partícula movendo-se sob um campo gravitacional gerado por mais de dois corpos. Porém, uma perturbação pode mudar o quadro qualitativo de um sistema; pode-se pensar que o problema restrito de quatro corpos é um PRTC acrescido de uma perturbação devido à presença de um terceiro corpo de massa não desprezível. Esta perturbação faz com que as famílias das órbitas periódicas - parametrizadas pelo período ou pela constante de Jacobi - existentes no problema restrito de três corpos desapareçam, restando, apenas, alguns elementos destas famílias, como as órbitas periódicas de período igual ou múltiplo do período da perturbação. Ou seja, neste problema essas órbitas periódicas já não aparecem mais em famílias, e sim, isoladas. Este fato restringe consideravelmente a presença dos objetos invariantes de interesse no espaço de fase. O que, usualmente, é feito, ao invés de se buscar soluções em um problema mais completo, seja o problema bicircular, o quase bicircular ou qualquer outro modelo de  $n$  corpos, é um refinamento numérico das soluções do PRTC nestes modelos dinâmicos. O refinamento numérico é um procedimento que ajusta as condições iniciais de uma trajetória nominal para que esta seja solução de um modelo dinâmico mais completo. Uma órbita periódica qualquer do PRTC quando "refinada" no modelo de quatro corpos, deixa de ser periódica. Um refinamento mais sofisticado considera todos os corpos do Sistema Solar, assim como suas reais posições. As efemérides mais utilizadas na literatura para este objetivo são as efemérides do *Jet Propulsion Laboratory* (JPL/NASA). O método numérico no qual baseia-se esta técnica é o método de múltiplos tiros (24), levando a solução em um modelo aproximado à solução em um sistema mais completo.

Uma outra missão que, embora não tenha permanecido em nenhuma órbita na vizinhança dos pontos lagrangianos, utilizou as variedades estável e instável para a guiagem de sua trajetória espacial, foi a missão japonesa *Hiten* em 1990. Inicialmente esta missão era composta de dois satélites, Muses-A e Muses-B. O menor deles, Muses-B, foi despreendido com o objetivo de ir à Lua utilizando a manobra de Hohmann, mas devido a uma perda de comunicação com este satélite, havia a possibilidade da missão não se efetivar. Para salvar a missão, Belbruno e Miller

(25) propuseram uma maneira alternativa de enviar o satélite Muses-A à Lua com baixo custo de combustível, uma vez que o satélite não estava projetado para isto, e portanto não carregava combustível suficiente para uma manobra convencional. A principal idéia foi utilizar as trajetórias das variedades estável e instável das órbitas dos pontos lagrangianos dos dois modelos Terra-Sol e Terra-Lua. Pela primeira vez idealizou-se um acoplamento de dois PRTC, ou, em outras palavras, um desacoplamento do problema restrito de quatro corpos em dois modelos de três corpos com um primário em comum. Esta técnica baseia-se na determinação de trajetórias de transferência em cada modelo de três corpos separadamente para, posteriormente, refiná-la no modelo bicircular ou no modelo mais completo utilizando as efemérides. O ponto de conexão entre os modelos é obtido em um plano passando pela Terra, que é o primário comum aos modelos. Uma vez que as variedades invariantes estável e/ou instável das órbitas dos pontos lagrangianos não se aproximam do primário de maior massa, uma transferência direta entre os primários do mesmo PRTC torna-se impossível, justificando o acoplamento dos dois PRTC. Seguindo esta técnica, Koon et al (26, 27) exploram as trajetórias de transferência partindo de uma órbita de estacionamento ao redor da Terra seguida de uma captura balística pela Lua, considerando que as trajetórias são guiadas pelas variedades instável e estável das órbitas de Liapunov da família de  $L_2$  nos dois modelos, Terra-Sol e Terra-Lua. Outros trabalhos como os de Gómez et al (28, 29) também aplicam este procedimento para projetar missões espaciais às luas de Júpiter, tendo como PRTC, os sistemas Júpiter-Europa-partícula e Júpiter-Ganimedes-partícula; neste trabalho, as trajetórias são guiadas pelas variedades estável e instável das órbitas halo. Este tipo de transferência foi batizada pelos autores como *Petit Grand Tour*. Koon et al (30) utilizam as conexões heteroclínicas entre  $L_1$  e  $L_2$  do mesmo modelo para explicar a captura de cometas por Júpiter, tais como Oterma e Geherls 3, que transitam entre órbitas exteriores e interiores da órbita de Júpiter passando pelos pontos lagrangianos.

Todavia, tais técnicas de transferência orbital ainda podem ser aplicadas a uma missão lunar, pois as missões tripuladas ao satélite natural da Terra não deixaram de ser planejadas. Em setembro de 2005 a agência espacial americana anunciou a retomada dessas missões com um lançamento previsto até o final da próxima década. O objetivo da futura missão é estabelecer uma base em solo lunar. O retorno à Lua oferecerá a oportunidade do desenvolvimento tecnológico necessário à exploração de novas fronteiras, como uma missão tripulada a Marte, permitindo, aos seres humanos, o aprendizado de como sobreviver por longos períodos afastados da vizinhança

de nosso planeta.

## 1.2 Objetivos

Este trabalho está basicamente dividido em quatro capítulos que formam o corpo principal da tese. Apesar de estarem interligados pelo tema central, transferência orbital e dinâmica ao redor dos pontos lagrangianos, e pelas técnicas derivadas da teoria de sistemas dinâmicos, cada capítulo apresenta objetivos independentes. A linha condutora deste trabalho é estritamente numérica, sendo assim, alguns métodos e teoremas são apenas citados e referenciados, sem a apresentação de uma prova matemática dos mesmos.

O Capítulo 2 aborda a dinâmica na vizinhança dos pontos lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$ , nos sistemas Terra-Sol e Terra-Lua, a partir do procedimento de redução à variedade central, realizado com a aplicação de um método semi-analítico derivado da teoria de formas normais. O objetivo da forma normal parcial - etapa precedente à redução à variedade central - é desacoplar a direção instável das direções centrais da hamiltoniana do PRTC na vizinhança do ponto de equilíbrio. Com esta hamiltoniana na forma normal parcial, o procedimento de redução à variedade central, torna-se uma tarefa simples, necessitando apenas a eliminação dos termos relacionados ao seu caráter instável, restando os termos relacionados ao seu caráter centro. No caso estudado, optou-se por expandir a hamiltoniana em termos de polinômios homogêneos complexos, o que facilita a manipulação dos mesmos. Os objetos da variedade central, as órbitas periódicas e quase periódicas, são integrados numericamente. Neste capítulo também é descrito minuciosamente o algoritmo para a construção de um manipulador algébrico especialista para se obter a forma normal parcial, que envolve principalmente expansões da hamiltoniana do problema em termos de polinômios homogêneos e operações com o colchete de Poisson.

O Capítulo 3 possui um enfoque metodológico, onde o método de continuação numérica de soluções através de um parâmetro de arco e a globalização das variedades hiperbólicas são apresentados. O primeiro método é aplicado na determinação das famílias de órbitas periódicas no PRTC, como as órbitas de Liapunov e as halos. A técnica numérica de globalização das variedades locais, estáveis e instáveis, permite o estudo em uma grande vizinhança do ponto de equilíbrio. Estas duas técnicas são de extrema importância nos capítulos subsequentes, pois é a partir delas que as manobras de interesse são determinadas.

O Capítulo 4 mostra uma aplicação das técnicas apresentadas no segundo e terceiro capítulos, porém outras metodologias são introduzidas como o refino numérico de trajetórias no modelo bicircular utilizando o método de múltiplos tiros, e a transformação de Levi-Civita para regularizar a singularidade de colisão das equações de movimento. O objetivo deste capítulo é a determinação de transferências orbitais guiadas pelas trajetórias das variedades instáveis e estáveis através do acoplamento de dois PRTC, Terra-Sol e Terra-Lua, onde a determinação do impulso requerido na conexão entre os modelos é calculado. Uma vez que se trata de conexões entre as variedades estável e instável de dois modelos dinâmicos, existe uma infinidade de combinações entre elas. Mas, para restringir o conjunto das possíveis combinações que se enquadram nas transferências desejadas, foram analisados os valores limites da constante de Jacobi das variedades estáveis (ou instáveis) em cada modelo, Terra-Sol e Terra-Lua, ou seja, foram consideradas apenas as que se aproximam dos primários de menor massa de cada modelo. As fases da Lua também foram consideradas na determinação de possíveis "conexões".

O Capítulo 5 apresenta transferências orbitais para as órbitas halo no PRTC e no modelo quase bicircular. As trajetórias de transferência são determinadas pelo método de Lambert: dados os pontos inicial e final, e o tempo desejado da transferência, o método se encarrega de determinar o vetor velocidade necessário para a partícula atingir o ponto final desejado. A comparação entre o impulso total em cada modelo é determinada.

O Capítulo 6 apresenta uma discussão geral dos modelos e dos resultados apresentados neste trabalho, bem como algumas sugestões para a extensão dos mesmos e aplicação das técnicas a outros problemas.



## 2 DINÂMICA NA VIZINHANÇA DOS PONTOS LAGRANGIANOS $L_1$ e $L_2$

### 2.1 Introdução

Em linhas gerais, o PRTC estuda o movimento de uma partícula de massa infinitesimal sob a ação do campo gravitacional de dois corpos, que se movem em órbita kepleriana ao redor do centro de massa do sistema. Esta formulação é o caso particular do problema de três corpos; ao se estipular que uma das três massas tenda a zero, restam dois corpos em movimento kepleriano e uma partícula movendo-se sob a ação gravitacional desses corpos. Sendo assim, o PRTC, é o caso mais simples do problema de  $n$  corpos. Embora sua formulação seja simples, isto não implica que o problema tenha solução analítica, ao contrário, trata-se de um problema não integrável, sendo necessário o emprego de técnicas semi-analíticas e numéricas sofisticadas para sua melhor compreensão. O PRTC é bastante utilizado como uma primeira aproximação ao estudo de diversos problemas no Sistema Solar, como os planetesimais, satélites naturais e artificiais, asteróides, cometas etc.

A busca por objetos invariantes no espaço de fase de um sistema dinâmico vem despertando interesse desde os primórdios da mecânica clássica, pois tais objetos, como os pontos de equilíbrio e suas variedades invariantes associadas, organizam o fluxo, gerando um retrato de fase razoavelmente compreensível, apesar de sua não integrabilidade. Sendo assim, este capítulo tem como foco principal o estudo de dois objetos invariantes do espaço de fase do PRTC: os pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  e suas variedades invariantes centrais associadas. Os outros objetos invariantes, como as variedades instável e estável, serão abordados no próximo capítulo.

O teorema de Hartman-Grobman (31) estabelece que os autovalores de partes reais negativas ou positivas determinam a equivalência topológica entre o campo vetorial linearizado e o campo vetorial não linear em uma pequena vizinhança do equilíbrio. Se existe algum autovalor cuja parte real seja nula, então o fluxo ao redor do ponto de equilíbrio pode ser mais complicado. Porém, o teorema da variedade central completa estes resultados para o caso em que o ponto de equilíbrio apresenta algum autovalor nulo ou cuja parte real é nula. Mostra-se que o comportamento do sistema dinâmico ao redor de um ponto de equilíbrio não hiperbólico pode ser reduzido ao estudo do comportamento na variedade central, que é tangente ao sub-espaço gerado pelos autovetores associados aos autovalores de parte real nula.

A linearização do campo vetorial, no PRTC, ao redor dos pontos colineares,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , apresenta um par de autovalores reais e dois pares de autovalores puramente imaginários. A redução à variedade central permite o estudo detalhado das soluções que se mantêm próximas ao ponto, como as órbitas periódicas - as de Liapunov e as órbitas halos - e as órbitas quase periódicas - como as de Lissajous, as quase halos e as quase Liapunov. Esta dinâmica na vizinhança do ponto de equilíbrio pode ser adquirida através de uma transformação canônica próxima à identidade, a qual reduz a hamiltoniana do sistema à forma normal.

A forma normal é um procedimento matemático que simplifica ao máximo a expressão analítica da parte não linear do campo vetorial, de modo que as novas equações de movimento contenham as informações relevantes do fluxo gerado pelas equações originais na vizinhança do ponto de equilíbrio. Seguindo os trabalhos da escola de Barcelona (20, 32, 33, 34), a forma normal do PRTC foi implementada através da série de Lie, a qual gera uma transformação que desacopla as direções hiperbólicas das elípticas até a ordem desejada da hamiltoniana. Deste ponto em diante inicia-se o processo de redução à variedade central, sendo suficiente aniquilar as direções correspondentes à dinâmica hiperbólica, reduzindo o sistema completo a uma hamiltoniana de dois graus de liberdade, a qual fornece o movimento na variedade central. A descrição qualitativa do fluxo das equações de Hamilton no espaço reduzido é dada através de uma secção de Poincaré adequada, onde aparecem claramente as órbitas periódicas, suas bifurcações, bem como os toros KAM correspondentes às órbitas quase periódicas.

Dentro destas breves descrições, este Capítulo pode ser dividido em três partes. A primeira parte apresenta o problema dinâmico estudado, suas equações de movimento e pontos de equilíbrio. A segunda parte descreve os passos teóricos para se determinar a forma normal parcial da hamiltoniana do PRTC, baseado na expansão da hamiltoniana em séries de Lie. Este passo é necessário ao procedimento de redução à variedade central ao redor dos pontos  $L_1$  e  $L_2$ . A terceira parte tem um enfoque computacional, onde descreve-se o algoritmo para a construção de um manipulador simbólico de polinômios. A construção deste manipulador algébrico é necessário para a execução do procedimento de redução à variedade central, pois é a ferramenta computacional utilizada nas expansões envolvidas na forma normal, visto que os softwares comerciais não estão preparados para efetuar manipulações com polinômios de maneira rápida e eficiente. Os resultados são mostrados ao final

do Capítulo.

## 2.2 Equações de Movimento do PRTC

O desenvolvimento completo das equações de movimento do PRTC pode ser encontrado em diversos trabalhos, porém, Szebehely (35) é a referência que mais se destaca pelo seu detalhamento matemático e pela completeza de suas discussões fundamentais. Sendo assim, optou-se por seguir a notação e as escalas desta referência.

Sejam  $m_1$  e  $m_2$  as massas de dois corpos, que no PRTC são denotados como corpos primários ou, simplesmente, primários. Tais corpos movem-se ao redor do centro de massa em órbitas circulares de acordo com a lei da gravitação de Newton, a qual estabelece uma mútua atração gravitacional. O modelo restrito de três corpos estuda o movimento de uma partícula de massa desprezível, quando comparada às massas  $m_1$  e  $m_2$ , movendo-se sob o campo gravitacional dos primários. A aproximação deste modelo está no fato de que a partícula se move sob a influência gravitacional dos corpos  $m_1$  e  $m_2$  sem causar nenhum tipo de perturbação ao movimento dos mesmos.

O sistema de coordenadas considerado é um sistema sinódico cuja velocidade angular é a velocidade dos primários. A origem deste sistema situa-se no centro de massa dos corpos  $m_1$  e  $m_2$ , e os eixos são escolhidos de forma que os primários permanecem em posições fixas sobre o eixo  $x$ . A medida de comprimento adotada é a distância entre os primários, a unidade de massa é a massa total dos primários ( $m_1 + m_2$ ) e a medida de tempo é escolhida de modo a fornecer  $2\pi$  como o período de revolução dos primários em relação a um sistema fixo de coordenadas. Com essas conversões, a constante gravitacional e o momento angular dos primários tornam-se unitários, e as posições fixas dos primários sob o eixo  $x$  são  $(\mu, 0, 0)$  e  $(\mu - 1, 0, 0)$ , onde a razão de massa ( $\mu$ ) é dada por

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

O potencial efetivo do PRTC nas coordenadas adimensionais citadas acima é dado por:

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(1 - \mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (2.1)$$

onde  $r_1$  e  $r_2$  correspondem às distâncias da partícula aos primários  $m_1$  e  $m_2$ , respec-

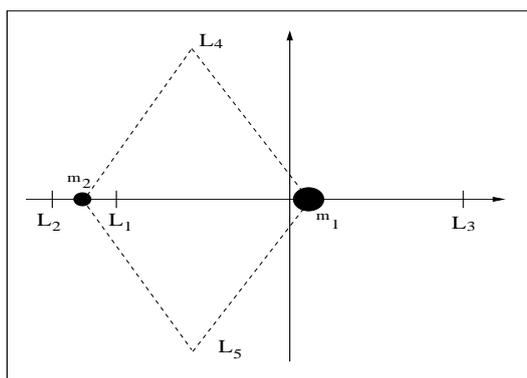


Figura 2.1 - Sistema de coordenadas sinódico do PRTC.

tivamente.

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x - \mu)^2 + y^2 + z^2 \\ r_2^2 &= [x - (\mu - 1)]^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

As equações de movimento são:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y \\ \ddot{z} &= \Omega_z. \end{aligned} \tag{2.2}$$

A integral primeira, associada ao sistema acima, é a integral de Jacobi que é dada por:

$$C = 2\Omega - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2.$$

Embora exista esta integral primeira de Jacobi, esta não é uma condição suficiente para a integrabilidade do sistema, pois, de acordo com o teorema Louville-Arnold (36), deveria existir três integrais primeiras ( $c_i, i = 1 \dots 3$ ) funcionalmente independentes e em involução, ou seja, seu parêntese de Poisson deve ser nulo,  $\{c_i, c_j\}$ . Mas, a existência da constante de Jacobi é de extrema utilidade na resolução numérica das equações de movimento, servindo para monitorar os cálculos e avaliar a precisão do integrador numérico utilizado. Uma outra importância se relaciona às curvas de velocidade zero que delimitam as regiões de possível movimento da partícula, que serão discutidas com mais detalhes no próximo Capítulo.

Pode-se escrever as equações de movimento (Equação 2.2) utilizando o formalismo hamiltoniano. Sejam os momenta  $p_x = \dot{x} - y$ ,  $p_y = \dot{y} + x$  e  $p_z = \dot{z}$ , obtem-se a seguinte hamiltoniana para o PRTC:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \quad (2.3)$$

e as equações de movimento são:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (2.4)$$

o índice  $i = 1, 2, 3$  refere-se às variáveis  $(x, y, z)$ .

### Pontos de Equilíbrio

No PRTC, existem três pontos de equilíbrio sobre o eixo que passa pelo centro dos primários, conhecidos como pontos de equilíbrio colineares e denotados  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ . Os outros dois pontos,  $L_4$  e  $L_5$ , pertencem ao plano dado pelo movimento dos primários e formam triângulos equiláteros com os primários em seus vértices, por esta razão, estes pontos são conhecidos como pontos triangulares. Não há uma convenção universal a respeito dos índices dos pontos, mas, usualmente, denota-se por  $L_1$  o ponto de equilíbrio situado entre os primários.

Uma vez que os pontos de equilíbrio de um sistema são dados pelos pontos críticos da função potencial, portanto, para a determinação dos pontos lagrangianos, é necessário a resolução do seguinte sistema:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = y\left(1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -z\left(\frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0 \quad (2.7)$$

Para o cálculo dos pontos colineares,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  toma-se  $y = z = 0$  na Equação 2.5, enquanto que para a solução triangular,  $L_4$  e  $L_5$  é suficiente fornecer  $r_1 = 1$  e

$r_2 = 1$  na Equação 2.6 com  $y \neq 0$  e  $z = 0$ , e, de maneira direta obtém-se:

$$x = \mu - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

o sinal positivo corresponde ao ponto  $L_4$  e o negativo ao ponto  $L_5$ .

Já o cálculo dos pontos colineares,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , exige uma solução numérica, pois gera um polinômio de quinto grau, conhecido como quártica de Euler. Os passos para sua implementação numérica estão descritos no Capítulo 4 de (35).

No caso em que o primário de maior massa é o Sol e o segundo primário é o baricentro do sistema Terra-Lua, a razão de massa é dada por

$$\mu = 3.0404233984 \times 10^{-6}.$$

quando o primário de maior massa é a Terra e o de menor massa é a Lua, a razão de massa é dada por:

$$\mu = 0.0121505816.$$

As coordenadas dos pontos de equilíbrio para os dois sistemas, Terra-Sol e Terra-Lua, estão na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Posição dos Pontos Lagrangianos.

$L_i$	Terra Sol			Terra Lua		
	$x$	$y$	$z$	$x$	$y$	$z$
1	-0.989986	0	0	-0.836915	0	0
2	-1.010075	0	0	-1.155682	0	0
3	+1.000001	0	0	+1.005063	0	0
4,5	-0.4999970	$\pm 0.866026$	0	-0.487849	$\pm 0.8660254$	0

### 2.3 Forma Normal

De maneira objetiva, nesta Seção, é apresentada a teoria da forma normal, estabelecendo-se um roteiro simples e resumido, que pode ser comparado com sua implementação prática ao PRTC.

Seja um conjunto de equações diferenciais autônomas de primeira ordem,

$$\dot{X} = f(X).$$

Admita-se que exista um ponto de equilíbrio,  $X_0$ . Uma vez que o objetivo final é estudar a dinâmica ao redor do ponto de equilíbrio, é conveniente transladar a origem do sistema para o ponto de equilíbrio, portanto a mudança de coordenadas é dada por:

$$X' = X - X_0,$$

desta forma  $f(X' + X_0) = 0$  para  $X'_0 = 0$ . Genericamente, a função  $f$  é composta de uma parte linear e de uma não linear. É conveniente que a parte linear esteja diagonalizada. Se esta parte ainda não se encontra nesta forma, aplica-se uma outra transformação de coordenadas que a escreva na forma desejada.

$$X' = C \cdot Y$$

Esta transformação é uma transformação linear, onde a matriz  $C$  é dada pelos autovalores associados aos autovalores da matriz jacobiana do sistema acima, desde que os autovalores tenham divisor elementar simples. A matriz  $C$  é avaliada no ponto de equilíbrio. Este procedimento, simplifica ao máximo a parte linear da Equação 2.3. Entretanto, isto não implica que a parte não linear esteja numa forma simples. Ainda é necessário buscar uma transformação de coordenadas que simplifique, na medida do possível, a parte não linear do campo vetorial, de modo que as novas expressões preservem as características mais relevantes do campo vetorial. Transformar na medida do possível significa eliminar os termos não ressonantes do campo vetorial, sendo este capaz de reproduzir o retrato de fase do sistema. Estes campos vetoriais simplificados, são chamados de formas normais (33, 37). Os autovalores são ressonantes se existe um conjunto de números inteiros,  $m_i$ ,  $i = 1..n$ , não nulos tais que  $\sum_{i=1}^n m_i \lambda_i = 0$ , onde  $\sum_{i=1}^n m_i \lambda_i$  é a ordem da ressonância.

O primeiro resultado da teoria de formas normais é o teorema de Poincaré: se os autovalores de matriz diagonal ( $A$ ) são não ressonantes, então o sistema  $\dot{X} = f(X)$  pode ser transformado no sistema linear  $\dot{Y} = A \cdot Y$  por uma mudança formal de variáveis.

Quando o ponto de equilíbrio apresenta, além da direção hiperbólica, direções elípticas, como é o caso dos pontos colineares, pode-se proceder a forma normal parcial. Neste procedimento, busca-se uma transformação que desacople as direções hiperbólica e elíptica do fluxo para, posteriormente, eliminar os termos relacionados à direção hiperbólica. Para isso utiliza-se uma transformação de coordenadas, pró-

xima à identidade, que é descrita pela série de Lie. Neste trabalho, a forma normal parcial da hamiltoniana ao redor dos pontos lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$  foi determinada seguindo os passos de (32).

### 2.3.1 Expansão da Hamiltoniana

Esta Seção descreve o primeiro passo do procedimento para se obter a redução à variedade central do sistema na vizinhança dos pontos de equilíbrio. Primeiramente, concentra-se em expandir as equações de movimento em termos dos polinômios de Legendre, para, posteriormente, escrever a hamiltoniana do PRTC em função de um polinômio homogêneo. A metodologia seguida encontra-se detalhada nas referências (33, 32, 20), e, somente os passos relevantes à compreensão desta metodologia serão, aqui, apresentados.

Primeiramente, translada-se a origem do sistema de coordenadas sinódico, do centro de massa, para o ponto de equilíbrio desejado, que no caso estudado corresponde ao ponto  $L_1$ . Seja  $\gamma$  a distância de  $L_1$  ao primário de menor massa. Este valor também é dado pela única solução positiva da quártica de Euler, citada anteriormente,

$$\gamma_j^5 \pm (\mu - 3)\gamma_j^4 + (3 - 2\mu)\gamma_j^3 - \mu\gamma_j^2 + 2\mu\gamma_j - \mu = 0 \text{ para } L_j \text{ tal que } j = 1, 2.$$

Este polinômio é resolvido iterativamente, tendo como o ponto inicial  $(\mu/3)^{1/3}$ . O sinal superior corresponde ao ponto  $L_1$  e o inferior ao  $L_2$ . As variáveis devem ser redimensionadas de forma que a distância entre o primário de menor massa e a nova origem seja unitária (14). Portanto, as velhas variáveis são expressas em função das novas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= \pm\gamma_j x' + \mu - 1 + \gamma_j \\ y &= \pm\gamma_j y' \\ z &= \gamma_j z' \end{aligned} \tag{2.8}$$

Introduzindo-as nas equações de movimento (Equação 2.2) e expandindo as distâncias  $r_1^{-1}$  e  $r_2^{-1}$  em séries de potência (32) dadas por:

$$\frac{1}{\sqrt{(x' - A)^2 + (y' - B)^2 + (z' - C)^2}} = \frac{1}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n\left(\frac{Ax' + By' + Cz'}{D\rho}\right),$$

em que  $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$ , chega-se a:

$$\begin{aligned} \ddot{x}' - 2\dot{y}' - (1 + c_2)x' &= \frac{\partial}{\partial x'} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x'}{\rho}\right) \\ \ddot{y}' + 2\dot{x}' + (c_2 - 1)y' &= \frac{\partial}{\partial y'} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x'}{\rho}\right) \\ \ddot{z}' + c_2 \dot{z}' &= \frac{\partial}{\partial z'} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x'}{\rho}\right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $\rho^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$  e  $P_n$  é o polinômio de Legendre de grau  $n$ . O lado esquerdo das Equações 2.9 contém os termos lineares enquanto que o direito os não lineares. Neste momento, pode-se abolir o uso de apóstrofo nas novas variáveis sem que haja confusão com as velhas. Os coeficientes  $c_n$  são funções de  $\mu$  e expressos como:

$$c_n = \frac{1}{\gamma_j^3} \left( \mu + (-1)^n \frac{(1 - \mu)\gamma_j^{n+1}}{(1 - \gamma_j)^{n+1}} \right)$$

Rearranjando as equações de movimento e usando-se as relações anteriores para os momenta,  $p_x = \dot{x} - y$  e  $p_y = \dot{y} + x$ , obtém-se a seguinte hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y - \sum_{n \geq 2} c_n(\mu) \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) - \frac{1}{2\gamma_j^2} \left[ (\mu + \gamma - 1)^2 + \mu(1 - \mu) \right] \quad (2.10)$$

A relação entre a constante de Jacobi e a hamiltoniana expandida (Equação 2.10) em termos das novas coordenadas é  $H\gamma_j^2 = -2C$ . Nesta etapa a hamiltoniana encontra-se escrita de uma maneira adequada ao desenvolvimento computacional do método de Lie, ou seja, em termos de polinômios homogêneos, os quais são fornecidos pela quantidade  $\rho^n P_n(x/\rho)$ .

A parte não linear da hamiltoniana pode ser gerada confortavelmente através da fórmula de recorrência, derivada da fórmula da expansão de Legendre para os polinômios  $P_n$ . Define-se:

$$T_n(x, y, z) = \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right)$$

e a fórmula de recorrência para o polinômio de ordem  $n$  é dada por

$$T_n = \frac{2n - 1}{n} x T_{n-1} - \frac{n - 1}{n} (x^2 + y^2 + z^2) T_{n-2} \quad (2.11)$$

iniciando-se com  $T_0 = 1$  e  $T_1 = x$ .

Para a aplicação do método de Lie é mais conveniente que a parte linear das equações esteja escrita na forma diagonal, implicando uma transformação de coordenadas lineares, onde os novos eixos do espaço de fase são os autovetores da parte linear do sistema. Selecionando-se os termos quadráticos da hamiltoniana (Equação 2.10), tem-se:

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y - c_2x^2 + \frac{c_2}{2}y^2 + \frac{1}{2}(p_z^2 + c_2z^2).$$

Se  $c_2 > 0$ , que é o caso dos pontos colineares para  $0 < \mu < 0.5$ , verifica-se que a direção vertical é um oscilador harmônico simples de frequência  $\omega_2 = \sqrt{c_2}$ . Uma vez que esta direção já se encontra desacoplada das demais, todos os seguintes cálculos serão para desacoplar as direções  $x$  e  $y$ . Portanto, a hamiltoniana considerada nas próximas expansões é:

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y - c_2x^2 + \frac{c_2}{2}y^2. \quad (2.12)$$

A direção  $z$  será re-introduzida brevemente.

Seja  $M$  a matriz  $JHess(H_2)$ , definida por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2c_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

em que

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

representa as equações de movimento da parte linear plana do sistema. O polinômio característico da matriz  $M$  é  $p(\lambda) = \lambda^4 + (2 - c_2)\lambda^2 + (1 + c_2 - 2c_2^2)$ . Definindo-se  $\lambda^2 = \eta$ , as quantidades  $\eta_1$  e  $\eta_2$  se tornam raízes do polinômio  $p(\eta) = \eta^2 + (2 - c_2)\eta + (1 + c_2 - 2c_2^2)$ , então:

$$\eta_1 = \frac{c_2 - 2 - \sqrt{9c_2^2 - 8c_2}}{2} \quad \text{e} \quad \eta_2 = \frac{c_2 - 2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2}}{2}. \quad (2.14)$$

Se  $c_2 > 1$  então  $\eta_1 < 0$  e  $\eta_2 > 0$ , tem-se um par de autovalores puramente complexo e outro puramente real, evidenciando-se, desta forma, o caráter centro-sela da estabilidade linear do ponto de equilíbrio. Ao se considerar os autovalores da direção  $z$ , que são puramente complexos conjugados, caracteriza-se que o equilíbrio é do tipo sela  $\times$  centro  $\times$  centro. Neste momento, busca-se uma transformação simplética de coordenadas, que coloque a parte linear da hamiltoniana (Equação 2.12) diagonalizada. A nova base tem como eixos os autovetores correspondentes aos autovalores de  $M$ . Para certificar-se de que se trata de uma transformação simplética, a matriz tem que obedecer à seguinte relação:

$$C^T J C = J \quad (2.15)$$

onde  $J$  é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No caso em questão é preciso normalizar adequadamente as componentes dos autovetores para satisfazer a condição simplética acima mencionada (Equação 2.15). Definindo  $\omega_1 = \sqrt{-\eta_1}$  e  $\lambda = \sqrt{\eta_2}$  como quantidades reais positivas, e inserindo a frequência  $\omega_2$  referente à direção  $z$ , a matriz de transformação  $C$  é:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda}{s_1} & 0 & 0 & \frac{-2\lambda}{s_1} & \frac{2\omega_1}{s_2} & 0 \\ \frac{\lambda^2 - 2c_2 - 1}{s_1} & \frac{-\omega_1^2 - 2c_2 - 1}{s_2} & 0 & \frac{\lambda^2 - 2c_2 - 1}{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda^2 + 2c_2 + 1}{s_1} & \frac{-\omega_1^2 + 2c_2 + 1}{s_2} & 0 & \frac{\lambda^2 + 2c_2 + 1}{s_1} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda^3 + (1 - 2c_2)\lambda}{s_1} & 0 & 0 & \frac{-\lambda^3 - (1 - 2c_2)\lambda}{s_1} & \frac{-\omega_1^3 + (1 + 2c_2)\omega_1}{s_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\omega_2} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

onde os fatores de normalização são:

$$\begin{aligned} s_1 &= +\sqrt{2\lambda((4 + 3c_2)\lambda^2 + 4 + 5c_2 - 6c_2^2)} \\ s_2 &= +\sqrt{\omega_1((4 + 3c_2)\omega_1^2 - 4 - 5c_2 + 6c_2^2)}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Esta matriz está ordenada para o vetor  $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ , porém o ordenamento implementado computacionalmente foi  $(x, p_x, y, p_y, z, p_z)$  o que implica na permutação dos termos de  $C$ . A transformação simplética descrita acima coloca a hamiltoniana linearizada (Equação 2.12) na forma normal quadrática

$$H = \lambda \bar{x} \bar{p}_x + \frac{\omega_1}{2} (\bar{y}^2 + \bar{p}_y^2) + \frac{\omega_2}{2} (\bar{z}^2 + \bar{p}_z^2) \quad (2.18)$$

evidenciando-se novamente que o ponto  $L_1$  é do tipo sela  $\times$  centro  $\times$  centro. A fim de simplificar os cálculos, principalmente no que diz respeito ao uso da fórmula homológica que será visto, foi utilizada a transformação de coordenadas reais para coordenadas complexas,

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{p}_x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{p}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{p}_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_3 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

que transcreve a hamiltoniana (Equação 2.18) na sua forma normal complexa:

$$H_2 = \lambda q_1 p_1 + i \omega_1 q_2 p_2 + i \omega_2 q_3 p_3. \quad (2.20)$$

### 2.3.2 Método de Lie

Inicia-se expandindo a hamiltoniana (Equação 2.10) escrita em termos das variáveis complexas (Equação 2.19), na qual  $H_2$  já se encontra diagonalizada. Os passos para a obtenção desta expansão são os mesmos descritos e realizados anteriormente: expande-se a hamiltoniana em polinômios de Legendre e aplica-se as transformações de coordenadas, Equações (2.16) e (2.19), com isto, a hamiltoniana escrita nas coordenadas complexas é expressa em termos de um polinômio de grau  $n$ , assumindo a forma:

$$H(q, p) = H_2(q, p) + \sum_{n \geq 3} H_n(q, p) \quad (2.21)$$

A forma normal que se deseja determinar é definida em termos da série de Lie (37) por:

$$\hat{H} = H + \{H, G\} + \frac{1}{2!} \{\{H, G\}, G\} + \frac{1}{3!} \{\{\{H, G\}, G\}, G\} + \dots \quad (2.22)$$

onde  $G = G(q, p)$  é a função geratriz e  $\{.\}$  denotam os parêntesis de Poisson:

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q}$$

A hamiltoniana  $\hat{H}$  é o resultado de uma transformação canônica próxima à identidade; tanto  $H$  como  $\hat{H}$  são compostas de polinômios de grau  $n$ . Se  $F$  e  $G$  são dois polinômios homogêneos de ordem  $s$  e  $r$  respectivamente, então  $\{H, G\}$  é um polinômio homogêneo de ordem  $r + s - 2$ . Esta propriedade é de grande utilidade na construção do manipulador algébrico, que será apresentado brevemente.

Neste caso, a função geratriz  $G$  é escolhida de forma a eliminar de  $H$  os monômios, nos quais  $q_1$  e  $p_1$  apresentam expoentes,  $k_{q_1}$  e  $k_{p_1}$ , diferentes, restando, portanto, os monômios dependentes da quantidade  $(q_1 p_1)^i$ , ou seja,  $\hat{H} = \hat{H}(q_1 p_1, q_2, q_3, p_2, p_3)$ . Este é o procedimento da forma normal parcial, porque não há necessidade de se colocar as demais direções em forma normal. Poderia-se aniquilar outros termos, por exemplo, quando  $k_1 + k_2 = 1$  (38), entretando, os resultados qualitativos permaneceriam iguais.

Os termos da hamiltoniana normalizada (Equação 2.22) são coletados ordenadamente e dados por:

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 &= H_2 \\ \hat{H}_3 &= H_3 + \{H_2, G_3\} \\ \hat{H}_4 &= H_4 + \{H_3, G_3\} + \frac{1}{2!} \{\{H_2, G_3\}, G_3\} + \{H_2, G_4\} \\ &\dots \end{aligned}$$

Visto que os cálculos para se obter  $\hat{H}_2$  já foram apresentados na seção anterior, o que será apresentado nas seguintes linhas serve para o cálculo das demais ordens de  $\hat{H}$ . Se o objetivo é determinar  $\hat{H}_3$ , primeiramente selecionam-se os termos indesejáveis de  $H_3$  (Equação 2.21), portanto  $H_3$  terá termos que se deseja eliminar, contidos no polinômio  $S_3$ , e outros que se deseja preservar, em  $Z_3$ , portanto, pode-se separá-lo

em duas partes:

$$H_3 = Z_3 + S_3$$

onde  $Z_3 = H_3(q_1 p_1, q_2, q_3, p_2, p_3)$  e  $S_3 = H_3(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ . Desta forma,

$$\hat{H}_3 = Z_3 + S_3 + \{H_2, G_3\}$$

e  $\{H_2, G_3\}$  deve satisfazer a equação homológica, de onde tem-se:

$$\{H_2, G_3\} = -S_3, \quad (2.23)$$

para se obter como resultado final, para a ordem  $n = 3$ , apenas os termos desejados,

$$\hat{H}_3 = Z_3. \quad (2.24)$$

Explicitamente, tem-se:

$$H_3(q, p) = \sum_{|k_p|+|k_q|=3} h_{k_q, k_p} q^{k_q} p^{k_p}, \quad G_3(q, p) = \sum_{|k_p|+|k_q|=3} g_{k_q, k_p} q^{k_q} p^{k_p}$$

$$\text{e} \quad H_2(q, p) = \sum_{i=1}^3 \eta_i q_i p_i$$

onde  $\eta_1 = \lambda$ ,  $\eta_2 = -i\omega_1$  e  $\eta_3 = -i\omega_2$ . A equação homológica (Equação 2.24) torna-se:

$$\{H_2, G_3\} = \sum_{|k_p|+|k_q|=3} \langle k_p - k_q, \eta \rangle g_{k_q, k_p} q^{k_q} p^{k_p}$$

portanto, a função  $G_3$  procurada tem a forma:

$$G_3(q, p) = \sum_{|k_p|+|k_q|=3} \frac{-h_{k_q, k_p} q^{k_q} p^{k_p}}{\langle k_p - k_q, \eta \rangle} \quad (2.25)$$

onde  $h_{k_q, k_p}$  são os coeficientes dos termos de  $S_3$  e  $\langle k_p - k_q, \eta \rangle$  representa o produto interno,  $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ . Esta forma vale, somente, se  $\langle k_p - k_q, \eta \rangle$  é diferente de zero, ou seja, não existe ressonância, além da ressonância característica dos sistemas hamiltonianos. No caso ressonante os termos singulares não devem ser eliminados, deve-se, então, gerar uma forma normal ressonante.

O mesmo procedimento é aplicado aos termos de ordens superiores de  $\hat{H}$ , lembrando

que a cada passo da transformação mudam-se os termos de ordens superiores, o que torna o procedimento não trivial. Este procedimento pode ser descrito pelo seguinte algoritmo, que está apresentado em detalhes em (33):

$$\{G_k, H_2\} + Z_k = F_k \quad \text{para} \quad k \geq 3, \quad \text{com} \quad F_3 = H_3, \quad (2.26)$$

$$F_k = \sum_{m=1}^{k-3} \{Z_{k-m}, G_{2+m}\} + \sum_{m=1}^{k-2} \frac{m}{k-2} H_{2+m, k-m-2} \quad \text{para} \quad k \geq 4,$$

onde

$$H_{2+m, k-m-2} = \sum_{i=1}^{k-m-2} \frac{i}{k-m-2} \{H_{2+m, k-m-2-i}, G_{2+i}\}$$

são os termos do triângulo de Lie:

$$\begin{array}{ll} H_{2,0} & \rightarrow k = 2 \\ H_{3,0} \quad H_{2,1} & \rightarrow k = 3 \\ H_{4,0} \quad H_{3,1} \quad H_{2,2} & \rightarrow k = 4 \\ H_{5,0} \quad H_{4,1} \quad H_{3,2} \quad H_{2,3} & \rightarrow k = 5 \\ H_{6,0} \quad H_{5,1} \quad H_{4,2} \quad H_{3,3} \quad H_{2,4} & \rightarrow k = 6 \\ \dots & \end{array}$$

onde a quantidade  $Z_k$  é dada pela somatória dos termos da linha  $k$  do triângulo de Lie acima. Esta propriedade pode ser utilizada para conferir a consistência da implementação computacional da Equação 2.26, uma vez determinado o processo até uma dada ordem  $k$ . A função geratriz  $G_k$  é retirada da Equação 2.26 para cada ordem  $k$  do método, ou seja, o valor de  $G_k$  é desconhecido quando calcula-se  $F_k$ , pois  $F_k$  depende somente dos valores de  $G_3 \dots G_{k-1}$ . A determinação de  $G_k$  é feita ao mesmo tempo que  $Z_k$ .

A transformação inversa de coordenadas da variedade central às coordenadas correspondentes à hamiltoniana expandida em coordenadas complexas (Equação 2.21),

é dada por:

$$q_i = \hat{q}_i + \{\hat{q}_i, G\} + \frac{1}{2!} \{\{\hat{q}_i, G\}, G\} + \frac{1}{3!} \{\{\{\hat{q}_i, G\}, G\}, G\} + \dots \quad (2.27)$$

$$p_i = \hat{p}_i + \{\hat{p}_i, G\} + \frac{1}{2!} \{\{\hat{p}_i, G\}, G\} + \frac{1}{3!} \{\{\{\hat{p}_i, G\}, G\}, G\} + \dots$$

## 2.4 Redução à Variedade Central

Uma vez que a direção central da hamiltoniana normalizada encontra-se desacoplada da direção hiperbólica, a redução à variedade central se torna uma tarefa simples. A hamiltoniana parcialmente normalizada assume a forma

$$\hat{H}(q, p) = \hat{H}(q_1 p_1, q_2, q_3, p_2, p_3) \quad (2.28)$$

onde a quantidade  $q_1 p_1$  é uma integral primeira do sistema, pois, em coordenadas ação-ângulo, este produto depende somente da coordenada ação  $I_1$ . Considerando  $I_1 = 0$ , isto é, eliminando-se o comportamento hiperbólico, obtém-se uma hamiltoniana  $\hat{H}$  de dois graus de liberdade,  $\hat{H} = \hat{H}(q_2, q_3, p_2, p_3)$  que descreve a dinâmica do sistema na variedade central. Se o interesse é por trajetórias que se mantêm na variedade central, mesmo quando incluídos os termos não lineares, é suficiente que  $q_1(t) = p_1(t) = 0$  para todo  $t$ , portanto, ao considerar  $q_1(0) = p_1(0) = 0$  e  $\dot{q}_1(0) = \dot{p}_1(0) = 0$ , garante-se a permanência na variedade central.

Uma vez que o procedimento da forma normal foi escolhido de tal maneira a fornecer variáveis complexas, é necessário utilizar a transformação inversa à Equação (2.19) para obter a hamiltoniana expressa em coordenadas reais. A análise da dinâmica ao redor do equilíbrio é feita através da secção de Poincaré, em  $z = 0$  - a secção de Poincaré é uma superfície arbitrária e invariante,  $S(X, \dot{X}) = 0$ , transversal ao movimento; toda vez que a trajetória cruza esta superfície em uma direção fixa e arbitrariamente escolhida é registrado um ponto (39). Este procedimento gera um mapa ou secção de Poincaré. No caso de sistemas hamiltonianos, com dois graus de liberdade, gera uma aplicação de  $S \rightarrow S$  que preserva a área no mapa  $S$ .

## 2.5 Construção do Manipulador Algébrico

O conjunto de rotinas computacionais que visam realizar operações aritméticas com polinômios é conhecido como manipulador algébrico de polinômios, sendo utilizado

como uma ferramenta de trabalho em que o usuário tem plena autonomia dos cálculos realizados. As motivações de sua construção neste trabalho são a precisão numérica e a alta velocidade nos cálculos da teoria apresentada até o momento. É importante notar que os softwares comerciais não suportam o volume dos cálculos efetuados nas expansões da hamiltoniana (Equação 2.22) para ordens superiores à quarta ordem ( $\geq 5$ ).

Existem basicamente duas estratégias no desenvolvimento de um manipulador algébrico: a esparsa e a plena. Se o número de monômios com coeficientes nulos é suficientemente grande, ou seja, monômios esparsos, justifica-se apenas o armazenamento dos coeficientes não nulos, de seus expoentes e de um vetor auxiliar de monitoramento do número de termos existentes em cada grau do polinômio. Por outro lado, se há poucos coeficientes nulos, torna-se conveniente o armazenamento de todos os coeficientes do polinômio e de nenhum expoente, isto é, trabalha-se como se a estrutura fosse plena. Nesta estrutura, cada coeficiente é alocado em um determinado local do vetor polinomial e, dado o local pode-se determinar os expoentes correspondentes a este local. Por isto, é suficiente saber apenas o local do monômio, sendo esta principal diferença entre as estratégias. Neste trabalho escolheu-se a estrutura plena na construção do manipulador.

Um dos itens fundamentais na manipulação de estruturas polinomiais é a ordenação dos monômios. Uma vez feito o ordenamento dos monômios, pode-se calcular, com a ajuda da fórmula binomial, o número de monômios e o local de armazenamento dos mesmos. Além disso, deve-se responder às seguintes perguntas básicas: (i) dados os expoentes de um monômio de grau  $g$  com  $n$  variáveis, qual o seu local na estrutura? (ii) dado o local, quais são os expoentes do monômio que ocupam este local? Estes passos são prévios à expansão da hamiltoniana em função dos polinômios de Legendre e a obtenção de formas normais totais ou parciais. Neste trabalho utiliza-se a implementação do algoritmo em linguagem Fortran, como foi feito em (40) para a determinação da variedade central do problema de Hill plano. Jorba (34) detalha a metodologia da computação numérica para formas normais, variedades centrais e integrais primeiras de sistemas hamiltonianos, em linguagem de programação C/C++, além disto, o autor fornece uma direção virtual, onde as sub-rotinas estão disponíveis.

### 2.5.1 Ordenação de Polinômios

Os monômios de um polinômio homogêneo de grau  $g$  com  $n$  variáveis  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  são ordenados na ordem lexográfica inversa, isto é, do grau menor para o maior. Sejam dois monômios de um mesmo polinômio,

$$\begin{aligned}m_1 &= c_1 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}} x_n^{k_n} \\m_2 &= c_2 x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_{n-1}^{h_{n-1}} x_n^{h_n}\end{aligned}$$

que ocupam os lugares  $l_1$  e  $l_2$  respectivamente. A ordenação dos monômios é feita da seguinte forma:

- i - se  $\sum_i k_i < \sum_i h_i$  então  $l_1 < l_2$ ;
- ii - se  $\sum_i k_i = \sum_i h_i$  e  $k_1 > h_1$  então  $l_1 < l_2$ ;
- iii - se  $\sum_i k_i = \sum_i h_i$ ,  $k_1 = h_1$  e  $k_2 > h_2$  então  $l_1 < l_2$ ;

e assim sucessivamente. Se um determinado expoente  $i$  dos monômios se iguala, testa-se o expoente seguinte, em algum momento aparecerá a desigualdade, neste caso se  $k_j > h_j$  então  $l_1 < l_2$ . Se todos os expoentes dos dois monômios forem idênticos, então estes ocuparão o mesmo lugar,  $l_1 = l_2$ . A Tabela 2.2 clarifica a ordem lexográfica inversa para um polinômio de terceiro grau com três variáveis. O índice  $k_i$  representa o expoente da variável  $x_i$ .

#### Número de Monômios e Tabela Auxiliar

O número de monômios  $N_g$  de um polinômio com  $n$  variáveis e grau  $g$  é dado pelo número binomial

$$N_g = \binom{n+g}{n} = \frac{(n+g)!}{g! n!} \quad (2.29)$$

Com esta fórmula constrói-se uma tabela auxiliar com o número total de termos de um polinômio homogêneo de grau  $g$  com  $n$  variáveis. Esta tabela é bastante utilizada na construção do manipulador algébrico, pois permite uma consulta rápida do número de monômios existentes em cada ordem do polinômio.

Um polinômio homogêneo de grau três com três variáveis tem 20 termos, o que pode ser conferido na Tabela 2.3. O termo 56 da sexta linha nesta tabela indica que

um polinômio de quinta ordem com três variáveis tem 56 termos, já o termo 56 da quarta linha indica que um polinômio de terceira ordem com cinco variáveis tem 56 termos.

A Tabela 2.3 cumpre um papel essencial para o funcionamento do manipulador sendo bastante acionada na determinação do local e dos expoentes do monômio desejado. Se a intenção é saber o número de monômios de grau três de um polinômio de duas variáveis, então subtrai-se do número total de monômios do polinômio completo (10) o número total de termos do polinômio da ordem imediatamente inferior à ordem desejada (6), então o número de monômios de ordem três com duas variáveis é  $10 - 6 = 4$ . Na verdade, o que foi descrito é a aplicação da seguinte fórmula:

$$N_g - N_{g-1} = \binom{n+g}{n} - \binom{n+(g-1)}{n}.$$

Tabela 2.2 - Ordem Lexográfica Inversa para um Polinômio de Três Variáveis.

lugar	coeficiente	$k_1$	$k_2$	$k_3$
1	$c_1$	0	0	0
2	$c_2$	1	0	0
3	$c_3$	0	1	0
4	$c_4$	0	0	1
5	$c_5$	2	0	0
6	$c_6$	1	1	0
7	$c_7$	1	0	1
8	$c_8$	0	2	0
9	$c_9$	0	1	1
10	$c_{10}$	0	0	2
11	$c_{11}$	3	0	0
12	$c_{12}$	2	1	0
13	$c_{13}$	2	0	1
14	$c_{14}$	1	2	0
15	$c_{15}$	1	1	1
16	$c_{16}$	1	0	2
17	$c_{17}$	0	3	0
18	$c_{18}$	0	2	1
19	$c_{19}$	0	1	2
20	$c_{20}$	0	0	3

Tabela 2.3 - Número de Termos de um Polinômio.

grau	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
0	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
2	3	6	10	15	21	28
3	4	10	20	35	56	84
4	5	15	35	70	126	210
5	6	21	56	126	252	462
...	..	...	..	...	..	..

### Expoente-Local

Para um polinômio homogêneo de  $n$  variáveis e ordem  $m$ , o número  $(N_{m-1} + 1)$  é o local onde iniciam-se os monômios desta ordem; e  $N_m$  é o local onde terminam os monômios da ordem  $m$ . Portanto, dados o número de variáveis do polinômio e a ordem de um dos monômios é possível determinar facilmente em qual intervalo do vetor de armazenamento o monômio se encontra.

O próximo passo é determinar com exatidão o local que um determinado monômio ocupa, dados os expoentes e o número de variáveis do mesmo. Vale ressaltar que para armazenar os coeficientes de um polinômio foi adotada a forma vetorial, por esta razão saber o local que o coeficiente ocupa é importante e possuindo o local é possível determinar os expoentes, como será visto brevemente.

Sejam  $g$  e  $k_i$ , o grau e os expoentes de um monômio com  $n$  variáveis, então:

$$g = \sum_{i=1}^n k_i;$$

o local do monômio está entre os dois números binomiais abaixo:

$$\binom{n + (g - 1)}{n} + 1 \leq local \leq \binom{n + g}{n} \quad (2.30)$$

que fornece um primeiro intervalo do local procurado. A relação que fornece o local exato é dada por:

$$local = \sum_{i=n}^1 \binom{S_i + i - 1}{i} + 1. \quad (2.31)$$

onde

$$S_i = \sum_{j=1}^i k_{n+1-j}.$$

### Local-Expoente

O objetivo nesta Seção é determinar os expoentes de um monômio a partir do local em que este se encontra. Vale lembrar que a ordem do mesmo não é conhecida, portanto esta informação deverá ser a primeira a ser buscada. Da Tabela 2.3 retira-se a informação desejada, a qual obedece a Equação 2.29.

Exemplificando, considera-se  $n = 6$  e  $local = 150$ . Da tabela lê-se diretamente que o grau do monômio é 4. Esta informação está entre a quarta e a quinta linha da coluna  $x_6$ , pois o número 85 acrescido de uma unidade delimita o local onde os monômios de quarta ordem começam e o número 210 corresponde ao local do último monômio de quarta ordem, dado por  $c_{210} x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^0 x_5^0 x_6^4$ .

O expoente é determinado da seguinte forma:

$$\text{Se } \binom{n + (g - 1)}{n} + 1 \leq local \leq \binom{n + (g - 1)}{n} + \binom{(n - 1) + j}{(n - 1)} \quad (2.32)$$

onde  $j$  varia de 0 até  $g$ , for verdadeiro, então  $k_1 = g - j$ .

$$\text{Seja } I_j = \binom{n + (n - 1)}{n} + \binom{(n - 1) + j}{(n - 1)} \text{ com } j \neq 0$$

$$\text{Se } I_j + 1 \leq local \leq \binom{n + (n - 1)}{n} + \binom{(n - 1) + j}{(n - 1)}$$

for verdadeiro então  $k_1 = n - j$ .

O mesmo se aplica ao cálculo dos demais expoentes. Seguindo com o exemplo anterior de um polinômio homogêneo de três variáveis, deseja-se calcular seus expoentes dado o local,  $local = 150$ . Aplica-se a formulação acima da seguinte forma:

$$\text{Se } \binom{3 + 3}{3} + 1 \leq local \leq \binom{3 + 3}{3} + \binom{2 + 0}{2} \Rightarrow k_1 = 4$$

$$\text{Se } \binom{3+3}{3} + \binom{2+0}{2} + 1 \leq \text{local} \leq \binom{3+3}{3} + \binom{2+1}{2} \Rightarrow k_1 = 3$$

$$\text{Se } \binom{3+3}{3} + \binom{2+1}{2} + 1 \leq \text{local} \leq \binom{3+3}{3} + \binom{2+2}{2} \Rightarrow k_1 = 2$$

$$\text{Se } \binom{3+3}{3} + \binom{2+2}{2} + 1 \leq \text{local} \leq \binom{3+3}{3} + \binom{2+3}{2} \Rightarrow k_1 = 1$$

$$\text{Se } \binom{3+3}{3} + \binom{2+3}{2} + 1 \leq \text{local} \leq \binom{3+3}{3} + \binom{2+4}{2} \Rightarrow k_1 = 0$$

O mesmo aplica-se ao cálculo dos demais expoentes. Da Tabela 2.4 nota-se que os expoentes  $k_2$  e  $k_3$  representam um polinômio de duas variáveis completo, isto é, com todos os monômios de grau 0 até o grau 4. A partir desta propriedade o cálculo dos expoentes se torna mais fácil.

Tabela 2.4 - Monômios de Quarta Ordem de um Polinômio de Três Variáveis.

coeficiente	local	$k_1$	$k_2$	$k_3$
$c_{21}$	21	4	0	0
$c_{22}$	22	3	1	0
$c_{23}$	23	3	0	1
$c_{24}$	24	2	2	0
$c_{25}$	25	2	1	1
$c_{26}$	26	2	0	2
$c_{27}$	27	1	3	0
$c_{28}$	28	1	2	1
$c_{29}$	29	1	1	2
$c_{30}$	30	1	0	3
$c_{31}$	31	0	4	0
$c_{32}$	32	0	3	1
$c_{33}$	33	0	2	2
$c_{34}$	34	0	1	3
$c_{35}$	35	0	0	4

## 2.5.2 Operações Fundamentais

Antes do próximo passo na construção do manipulador algébrico especialista, é preciso certificar-se que as sub-rotinas anteriores estão bem consolidadas, pois elas formam o arcabouço do código, e se alguma fórmula não estiver bem implementada comprometerá o funcionamento das próximas operações, conseqüentemente, do resultado. Portanto são duas sub-rotinas fundamentais que serão mais utilizadas: *local-exp*, dado o local determina os expoentes, e *exp-local*, dados os expoentes determina o local.

Passa-se agora à descrição de algumas operações aritméticas com polinômios que são: (1) soma; (2) diferença; (3) produto por uma constante; (4) produto de dois polinômios; (5) derivada parcial de um polinômio; e (6) parêntesis de Poisson. As três primeiras sub-rotinas mencionadas são bastantes simples, pois necessitam somente da informação do número de monômios em cada polinômio, já as três últimas necessitam o uso das sub-rotinas *local-exp* e *exp-local*.

Como visto, os coeficientes dos polinômios são armazenados na forma vetorial, sendo o índice do vetor o próprio local do monômio. Além disso, para agilizar o andamento das operações os expoentes são guardados em uma matriz  $M$ , onde o índice da linha da matriz é o local do monômio, e o índice da coluna se relaciona com os índices dos expoentes das variáveis. Guardar os expoentes dessa forma evita o constante uso das sub-rotinas *local-exp* e/ou *exp-local*, economizando tempo de CPU.

### (1) Soma

Dados dois polinômios  $P_1$  e  $P_2$  cujos coeficientes são  $p_1(\cdot)$  e  $p_2(\cdot)$ , o polinômio soma é facilmente obtido a partir de  $s(i) = p_1(i) + p_2(i)$  onde  $i$  varia do local 1 até o número de monômios dos polinômios, se  $P_1$  e  $P_2$  possuírem o mesmo grau. Se os polinômios não possuírem o mesmo grau, uma condição a mais deverá ser implementada:

- se  $g_1 > g_2$  então:

$$s(i) = p_1(i) + p_2(i), \quad \text{para } 1 \leq i \leq \binom{n+g_2}{n} \text{ e}$$
$$s(i) = p_1(i), \quad \text{para } \binom{n+g_2}{n} \leq i \leq \binom{n+g_1}{n}$$

Para o caso  $g_2 > g_1$  o raciocínio é análogo.

## (2) Diferença

A diferença é obtida da mesma forma que a soma  $d(i) = p_1(i) - p_2(i)$ , onde  $i$  varia do local 1 até o número de monômios dos polinômios, se  $P_1$  e  $P_2$  possuírem o mesmo grau. Se os polinômios não possuem o mesmo grau o procedimento explicado acima deverá ser aplicado.

A diferença também pode ser realizada de uma outra maneira, utilizando-se uma constante multiplicativa  $\xi = -1$ , desta forma  $P_2 = \xi P_2$ , em seguida soma-se  $d(i) = p_1(i) + \xi p_2(i) = p_1(i) - p_2(i)$ .

## (3) Multiplicação por uma Constante

Seja  $P$  um polinômio de grau  $g$ ;  $p(i)$ 's os coeficientes dos monômios e  $\xi$  uma constante. Os coeficientes  $c_p$ 's do polinômio produto são dados por:

$$c_p(i) = \xi p(i) \quad \forall i, \text{ tal que } 1 \leq i \leq \binom{n+g}{n}$$

## (4) Produto

Sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois polinômios de  $n$  variáveis e de grau  $g_1$  e  $g_2$ , respectivamente. No produto destes dois polinômios o número resultante de monômios é

$$N_p = \binom{n+g_P}{n}$$

onde  $g_P = g_{P_1} + g_{P_2}$ .

Como foi dito anteriormente, os expoentes são armazenados numa matriz  $M$ , uma vez dado o local do monômio, obtém-se diretamente seus expoentes. Esta matriz funciona como uma tabela de consulta, o que evita recalculá-los quando necessário. Esta matriz é gerada tanto para os polinômios a serem manipulados como para o resultado de algumas operações.

O produto é feito de forma ordenada, isto é, o grau do resultado é obtido na ordem crescente, de  $g_P = 0$  à ordem  $g_P = g_{P_1} + g_{P_2}$ . Multiplica-se o monômio de grau  $i$

do polinômio  $P_1$ , pelo o monômio de grau  $j$  do polinômio  $P_2$ , o grau resultante do produto é  $i + j = k$ . Para percorrer em ordem crescente do grau do produto, faz-se uma multiplicação em blocos; isto é, coleta-se qual a combinação entre os graus  $i$  e  $j$  de cada polinômio  $P_1$  e  $P_2$ , que fornece o grau desejado  $k$ . Por exemplo: para se obter o grau 6 do polinômio produto percorre-se os graus de  $P_1$  e de  $P_2$  respeitando a igualdade  $g_{P_1} + g_{P_2} = 6$ . A Tabela 2.5 mostra todas as possibilidades para que o grau do produto seja 6.

Sejam  $Q_1$  um monômio qualquer do polinômio  $P_1$  que ocupa o local  $l_1$  e  $Q_2$  um monômio do polinômio  $P_2$  que ocupa o local  $l_2$ . A partir da matriz de armazenamento dos expoentes, retira-se diretamente os expoentes dos monômios:

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_1 x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} x_4^{k_4} x_5^{k_5} x_6^{k_6} \\ Q_2 &= c_2 x_1^{h_1} x_2^{h_2} x_3^{h_3} x_4^{h_4} x_5^{h_5} x_6^{h_6} \end{aligned}$$

Quando se multiplica dois monômios quaisquer, o resultado tem como coeficiente, o produto dos coeficientes, e como expoente, a soma dos expoentes, portanto:

$$Q_1 Q_2 = (c_1 c_2) x_1^{k_1+h_1} x_2^{k_2+h_2} x_3^{k_3+h_3} x_4^{k_4+h_4} x_5^{k_5+h_5} x_6^{k_6+h_6}$$

Após esta operação o local do produto deverá ser recalculado acionando a sub-rotina *exp-local*, que armazenará o coeficiente obtido  $c_1 c_2$  no local de seu monômio equivalente, cujos expoentes são  $k_1 + h_1, \dots, k_6 + h_6$ . Em uma multiplicação de polinômios surgirão termos que ocupam o mesmo local, estes devem ser somados e armazenados devidamente. Por esta razão a implementação de uma rotina de armazenamento vetorial é necessária.

Pode-se também implementar uma multiplicação de polinômios utilizando a simetria

Tabela 2.5 - Possibilidades para que o Resultado de um Produto Seja Igual a 6.

$g_{P_1}$	$g_{P_2}$	$g_P = g_{P_1} + g_{P_2}$
6	0	6
5	1	6
4	2	6
3	3	6
2	4	6
1	5	6
0	6	6

do produto, isto gera rapidez na execução do mesmo. Sejam  $Q_1$  e  $R_1$  monômios de um polinômio  $P_1$ ; e  $Q_2$  e  $R_2$  monômios de  $P_2$ ; e, se  $Q_1 = c_1 x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$  e  $R_1 = d_1 x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n}$ ,  $Q_2 = c_2 x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$  e  $R_2 = d_2 x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n}$ , os monômios produto  $Q_1 R_2$  e  $Q_2 R_1$  são calculados simultaneamente.

## (5) Derivada Parcial

Derivar parcialmente um polinômio não é uma tarefa muito difícil desde que a sub-rotina *exp-local* esteja funcionando bem. A fórmula geral de uma derivada parcial em relação a  $x_i$  é dada por:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_i} = k_i c_1 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_i^{k_i-1} \dots x_n^{k_n}$$

Portanto, derivar um polinômio em relação a uma variável é fazer o produto do coeficiente pelos expoentes da mesma variável para cada monômio. Porém, ao subtrair uma unidade do expoente, este deixará de ocupar seu lugar de origem, é neste momento que deve-se chamar a sub-rotina *exp-local* e redeterminar o local do novo monômio e armazená-lo.

Após a derivada, o grau do polinômio cai de uma unidade e o número de termos resultante é:

$$N = \binom{n + (g - 1)}{n}$$

A derivada parcial será usada futuramente para se obter as equações de Hamilton, Equação 5.29, uma vez obtida a hamiltoniana na forma normal.

## (6) Parêntesis de Poisson

Dado que o parêntese de Poisson de duas funções  $f$  e  $g$  em coordenadas canônicas  $(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$  é:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$$

e sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois polinômios de graus  $g_1$  e  $g_2$ , respectivamente. O grau do parêntese de Poisson  $\{P_1, P_2\}$  é dado por  $g_{cp} = g_1 + g_2 - 2$  e o número de monômios

por:

$$\binom{n + g_{cp}}{n}$$

Observando a definição de parêntese de Poisson, nota-se que seria necessário usar as sub-rotinas do produto, da derivada e da diferença de polinômios. Há, porém, uma maneira mais eficiente de estruturar o cálculo dos parênteses sem precisar utilizar tantas sub-rotinas e com isso otimizar seu cálculo.

O cálculo efetivo do parêntese de Poisson pode ser feito observando que, dados dois monômios  $Q_i = c_i x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} y_1^{k_4} y_2^{k_5} y_3^{k_6}$  e  $Q_j = c_j x_1^{h_1} x_2^{h_2} x_3^{h_3} y_1^{h_4} y_2^{h_5} y_3^{h_6}$ , tem-se:

$$\{Q_i, Q_j\} = \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial Q_i}{\partial x_l} \frac{\partial Q_j}{\partial y_l} - \frac{\partial Q_i}{\partial y_l} \frac{\partial Q_j}{\partial x_l} \right)$$

$$\begin{aligned} \{Q_i, Q_j\} = & c_i c_j [(k_1 h_4 - k_4 h_1) x_1^{k_1+h_1-1} x_2^{k_2+h_2} x_3^{k_3+h_3} y_1^{k_4+h_4-1} y_2^{k_5+h_5} y_3^{k_6+h_6} + \\ & + (k_2 h_5 - k_5 h_2) x_1^{k_1+h_1} x_2^{k_2+h_2} x_3^{k_3+h_3-1} y_1^{k_4+h_4} y_2^{k_5+h_5-1} y_3^{k_6+h_6} + \\ & + (k_3 h_6 - k_6 h_3) x_1^{k_1+h_1} x_2^{k_2+h_2} x_3^{k_3+h_3-1} y_1^{k_4+h_4} y_2^{k_5+h_5} y_3^{k_6+h_6-1}] \end{aligned}$$

Esta propriedade permite elaborar uma sub-rotina mais veloz, pois só resta ordenar o resultado do parêntese. Para tal procedimento, utiliza-se a sub-rotina *exp-local* que coloca o coeficiente  $c_i c_j (k_1 h_4 - k_4 h_1)$  no local do monômio  $x_1^{k_1+h_1-1} x_2^{k_2+h_2} x_3^{k_3+h_3} y_1^{k_4+h_4-1} y_2^{k_5+h_5} y_3^{k_6+h_6}$ ; o coeficiente  $c_i c_j (k_2 h_5 - k_5 h_2)$  no local do monômio  $x_1^{k_1+h_1} x_2^{k_2+h_2} x_3^{k_3+h_3-1} y_1^{k_4+h_4} y_2^{k_5+h_5-1} y_3^{k_6+h_6}$ ; e, finalmente, o coeficiente  $c_i c_j (k_3 h_6 - k_6 h_3)$  no local do monômio  $x_1^{k_1+h_1} x_2^{k_2+h_2} x_3^{k_3+h_3-1} y_1^{k_4+h_4} y_2^{k_5+h_5} y_3^{k_6+h_6-1}$ .

Como esta estratégia é bastante similar à do produto, não é preciso o uso das sub-rotinas derivada, produto e diferença. O fato da sub-rotina *exp-local* ser acionada um número menor de vezes faz com que o programa se torne mais rápido. Da seção anterior observa-se que o manipulador algébrico passa grande parte do tempo avaliando os parêntesis de Poisson.

Portanto, de posse destas sub-rotinas, pode-se agora expandir a hamiltoniana em polinômios de Legendre e implementar a forma normal parcial usando as fórmulas vistas anteriormente (Seção 2.3).

### 2.5.3 Transformação Inversa

As subrotinas apresentadas até o momento são suficientes para a implementação computacional da Equação 2.26. O procedimento seguinte é a implementação da transformação inversa, de coordenadas complexas para coordenadas reais. Esta operação é realizada para cada ordem do polinômio  $\hat{H}(q, p)$  separadamente, através da transformação inversa à da Equação (2.19):

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_3 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ p_z \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

No caso estudado, o par ordenado  $(q_1, p_1)$  referente à parte hiperbólica do sistema não é transformado, pois já é real, agilizando, assim, a manipulação dos monômios, pois o número de variáveis a serem transformadas é reduzido para  $n = 4$ .

Da Equação 2.33 inicia-se escrevendo as coordenadas  $q_2$  e  $p_2$  como polinômios de duas variáveis e de grau unitário,  $q_2 = q_2(y, p_y)$  e  $p_2 = p_2(y, p_y)$  (ver Tabela 2.6).

A partir desses polinômios e com o auxílio da sub-rotina que realiza o produto entre dois polinômios, criam-se os polinômios auxiliares

$$q_2(\cdot) = q_2^1(\cdot) + q_2^2(\cdot) + q_2^3(\cdot) + \dots + q_2^n(\cdot) \quad \text{e} \quad p_2(\cdot) = p_2^1(\cdot) + p_2^2(\cdot) + p_2^3(\cdot) + \dots + p_2^n(\cdot)$$

até a ordem desejada. Uma propriedade desta transformação, que pode ser útil na ordenação das coordenadas transformadas de  $H(q, p)$ , é a simplicidade da alocação de seus expoentes: dados o grau  $m$  de um monômio de  $q_2$  ou  $p_2$  e o expoente  $k_1$  de sua coordenada  $y$ , sabe-se que o expoente da coordenada  $p_y$  será  $k_2 = m - k_1$ , para  $m \geq 1$ .

A razão para se armazenar a transformação em outros dois vetores auxiliares é a economia nos cálculos da transformação subsequente do par  $(q_3, p_3)$ , que é idêntica a esta apresentada, podendo ser realizada com os mesmos polinômios acima e da

Tabela 2.6 - Polinômio da Transformação Inversa.

	$k_1$	$k_2$		$k_1$	$k_2$
$q_2(0) = 0.$	0	0	$p_2(0) = 0.$	0	0
$q_2(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	$p_2(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0
$q_2(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1	$p_2(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1

mesma maneira.

Primeiramente, insere-se o resultado da transformação no polinômio inicial  $\hat{H}(xp_x, q_2, p_2, q_3, p_3)$  que se transformará em  $\hat{H}(xp_x, y, p_y, q_3, p_3)$ . Neste passo se faz necessária a re-ordenação dos coeficientes provenientes da multiplicação das variáveis  $(q_2, p_2)$  pela transformação inversa e sua inserção no polinômio principal. Sejam  $i$  e  $m$  o grau de  $q_2$  e o grau do monômio, respectivamente, sabe-se então, que  $j = m - i$ , portando o local do novo monômio será dado pela sub-rotina *exp-local* com os expoentes

$$k_1 = k_1, \quad k_2 = k_2, \quad k_3 = k_3 + i, \quad k_4 = k_3 + (m - i), \quad k_5 = k_5, \quad k_6 = k_6$$

e seu coeficiente é dado pelo produto dos coeficientes envolvidos na transformação com os coeficientes do polinômio inicial  $\hat{H}(xp_x, q_2, p_2, q_3, p_3)$ . O mesmo aplica-se à variável  $p_2$ . Isto não significa que existirá apenas um único coeficiente neste local, pois coeficientes provenientes de outras operações podem ocupar o mesmo local.

Este mesmo procedimento é aplicado ao vetor  $(q_3, p_3)$  até se determinar a transformação completa da hamiltoniana na forma normal, encontrando-se

$$\hat{H} = \hat{H}(xp_x, y, p_y, z, p_z). \quad (2.34)$$

Para a conferência do resultado, pode-se fazer um teste numérico bastante simples: associa-se valores numéricos para as coordenadas  $(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3)$  e as transforma com a Equação 2.19 gerando o vetor de coordenadas reais equivalente  $(x, p_x, y, p_y, z, p_z)$ . Avalia-se numericamente o valor das hamiltonianas  $H(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3)$  e  $H(x, p_x, y, p_y, z, p_z)$ . Se a implementação da transformação inversa tiver sido bem sucedida, o resultado numérico final deverá ser o mesmo, isto é,  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{p}_\mathbf{x})$ . Vale ressaltar que este teste prova, somente, a coerência da aplicação da transformação inversa, pois se houver, algum outro passo equivocado, principalmente na implementação do triângulo de Lie, este teste não é capaz de detetá-lo.

#### 2.5.4 Integração Numérica

Após a realificação da hamiltoniana, executa-se o processo de redução à variedade central, que a esta etapa se torna uma tarefa fácil. Dada a hamiltoniana na forma

normal parcial (Equação 2.28) em termos dos polinômios homogêneos, impõe-se a seguinte condição aos coeficientes do par ordenado  $(x, p_x)$ :

$$\text{se } k_1 = k_2 \text{ e } k_1 \neq 0 \text{ então } c_k = 0.$$

Obtem-se, assim, a hamiltoniana reduzida à variedade central, tornando-se função apenas das coordenadas  $(y, p_y, z, p_z)$ . As equações de Hamilton que descrevem o movimento na variedade central, são:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial \hat{H}_c}{\partial p_y}, & \dot{p}_y &= -\frac{\partial \hat{H}_c}{\partial y}, \\ \dot{z} &= \frac{\partial \hat{H}_c}{\partial p_z}, & \dot{p}_z &= -\frac{\partial \hat{H}_c}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.35)$$

A sub-rotina responsável pela derivada parcial deverá ser acionada para gerar o campo vetorial acima. Os valores das componentes do vetor de estado são valores numéricos, portanto não há necessidade de se obter uma expressão analítica do campo. Tais expressões podem ser introduzidas na sub-rotina do campo vetorial através de funções, onde os parâmetros de entrada são os valores numéricos das variáveis e os coeficientes de  $\hat{H}_c$ , e o de saída é o próprio campo avaliado adequadamente. Desta forma, o valor numérico de  $\hat{H}_c$  é calculado a cada passo do integrador.

Nesta etapa, pode-se implementar o teste de consistência numérica, que validará os resultados obtidos na variedade central. A idéia deste teste é a comparação entre a integração do sistema, a partir do ponto fixo, no espaço físico e no espaço normalizado. Inicialmente, considera-se uma distância  $\rho_1$  do ponto de equilíbrio no espaço físico (em coordenadas do PRTC), geralmente  $\rho_1$  é da ordem  $10^{-3}$ . Com a transformação inversa à Equação 2.27, este deslocamento, cujas coordenadas no espaço físico são dadas por  $x_0$ , é levado às coordenadas normalizadas tornando-se  $x'_0$ . Integra-se este ponto em um intervalo de tempo  $t_1$  nos dois espaços, isto gerará ponto  $x'_f$  no espaço normalizado, e ao mesmo tempo, o ponto  $x_f$  no espaço físico. Se não houvesse erros de precisão, devido às integrações numéricas envolvidas, ao transformar o ponto  $x'_f$  para o espaço físico, este deveria coincidir com o ponto  $x_f$ , porém isto não ocorre. A distância entre o ponto  $x_f$  e o ponto  $x'_f$  transformado no espaço físico é denotado por  $\epsilon_1$ . O próximo passo é tomar um deslocamento  $\rho_2 = \frac{\rho}{2}$ , e integrá-lo em um mesmo intervalo de tempo  $t_1$ , que gerará uma diferença  $\epsilon_2$ . Se a razão  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = 2^{k-1}$ , onde  $k$  é a ordem das expansões envolvidas na forma normal, então

o método foi implementado com sucesso.

## 2.6 Resultados na Variedade Central

A hamiltoniana na forma normal foi obtida até a ordem 10, sendo suficiente para o estudo qualitativo da dinâmica na variedade central ao redor dos pontos de equilíbrio. A manipulação algébrica desta expansão requereu dois minutos em um computador Pentium IV com 512 MB de memória RAM. Os resultados qualitativos na variedade central em torno dos pontos lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$  nos sistemas Terra-Sol e Terra-Lua são analisados na secção de Poincaré em  $z_c = 0$ , ver Figuras 2.2-2.5.

As Tabelas 2.7-2.10 listam os coeficientes da hamiltoniana na variedade central, onde os termos  $(q_1^{k_1} p_1^{k_2})$ , em que  $k_1 \neq k_2$ , foram aniquilados na forma normal parcial. Outra redução na forma normal poderia ter sido implementada, como aniquilar os termos em que  $k_1 + k_2 = 1$ , mas geraria o mesmo resultado qualitativo, como feito em (38).

Para se obter o valor inicial do momento  $p_z$  em função da energia, e com isso, garantir que as órbitas permaneçam na mesma superfície de energia, fixa-se um valor para  $\hat{H} = h_0$ , reduzindo o sistema um grau de liberdade, portanto  $p_{z_0} = p_{z_0}(h_0, y_0, p_{y_0})$ . O valor de  $p_{z_0}$  é obtido numericamente através do método de Newton tomando como aproximação inicial o valor positivo da raiz quadrada de  $p_z$  em função de  $h_0$ , avaliado somente com  $H_2$ . Portanto, para adquirir o retrato de fase da variedade central na secção de Poincaré  $z = 0$ , é suficiente selecionar os valores  $h_0$  e  $(y, p_y)$  desejados. Logo, a condição inicial é usada na integração numérica das equações de Hamilton referentes à hamiltoniana  $\hat{H}_c$ .

Os resultados para o sistema Terra-Sol estão apresentados nas Figuras 2.2 e 2.3, onde a primeira refere-se a  $L_1$  e a segunda a  $L_2$ ; e para o sistema Terra-Lua estão nas Figuras 2.4 e 2.5, referentes à  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente. Uma vez que a hamiltoniana é positiva definida na origem, isto pode ser clarificado através do sinal dos coeficientes da segunda ordem (ver Tabelas 2.7- 2.10), cada nível de energia define uma região fechada na secção de Poincaré. O limite desta região coincide com a família das órbitas de Liapunov sendo órbitas periódicas planas contidas integralmente no plano  $z = p_z = 0$ .

Nas secções de Poincaré da Figura 2.2, as órbitas planas de Liapunov aparecem com uma envoltória externa, limitando as curvas tracejadas internas. Para descrever a dinâmica ao redor dos pontos lagrangianos, foram considerados quatro níveis de

energia para cada sistema, Terra-Sol e Terra-Lua,  $h_0 = 0.2$ ,  $h_0 = 0.4$ ,  $h_0 = 0.6$  e  $h_0 = 1.0$ . Em  $h_0 = 0.2$ , nota-se, claramente, que o movimento dentro desta região é quase periódico com um ponto fixo central que corresponde à órbita vertical de Liapunov. À medida que o valor da energia aumenta (em  $h_0 = 0.4$ ), ocorre uma bifurcação, pois surgem dois pontos fixos próximos ao limite da órbita plana de Liapunov. Esta bifurcação corresponde ao nascimento da família das órbitas halo. O ponto fixo referente à órbita halo também está rodeado de toros invariantes que são as órbitas quase halos, isto também é evidenciado na secção de Poincaré em  $h_0 = 0.6$ . O limite entre os toros ao redor da halo e os toros ao redor da Liapunov vertical é a trajetória homoclínica da órbita plana de Liapunov.

Os outros mapas de Poincaré (Figuras 2.3-2.5) são bastante similares entre si, cuja dinâmica segue as mesmas características das secções de Poincaré explicadas no parágrafo acima. A Figura 2.6 corresponde a uma órbita de Lissajous em várias projeções e a Figura 2.7 mostra uma órbita quase halo, ambas integradas em coordenadas da variedade central.

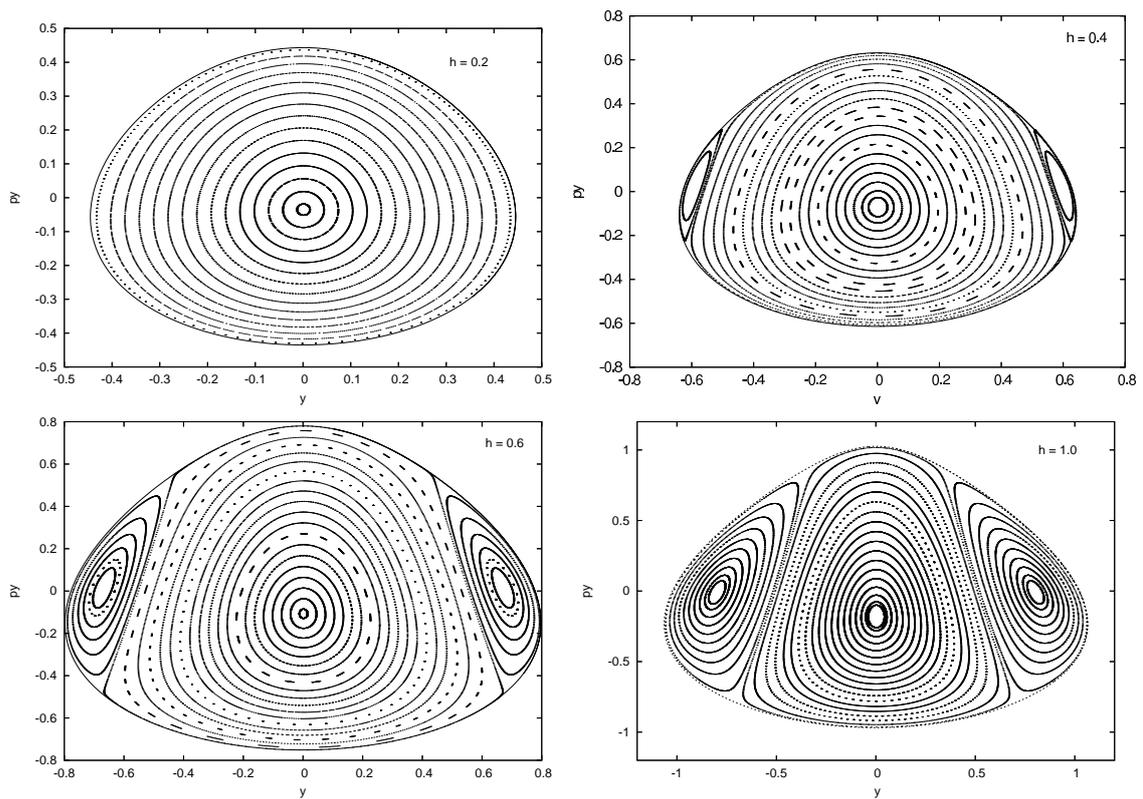


Figura 2.2 - Seccção de Poincaré  $z = 0$  na variedade central ao redor de  $L_1$  no sistema Terra-Sol. Nota-se a presença de uma bifurcação a partir do nível de energia  $h = 0.4$  (tôpo à direita). O ponto fixo central corresponde à órbita vertical de Liapunov; as curvas fechadas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase periódicas de Lissajous; os pontos fixos laterais correspondem às órbitas halo; e, as curvas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase halo.

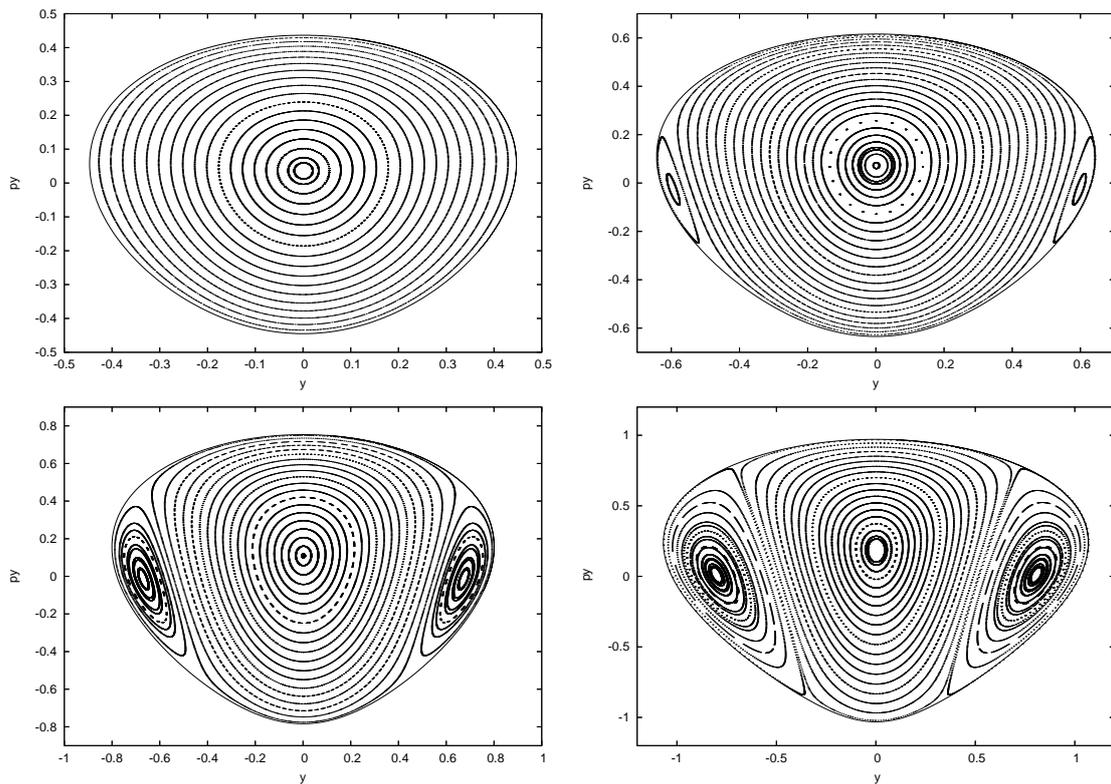


Figura 2.3 - Seccção de Poincaré  $z = 0$  na variedade central ao redor de  $L_2$  no sistema Terra-Sol. Nota-se a presença de uma bifurcação a partir do nível de energia  $h = 0.4$  (tôpo à direita). O ponto fixo central corresponde à órbita vertical de Liapunov; as curvas fechadas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase periódicas de Lissajous; os pontos fixos laterais correspondem às órbitas halo; e, as curvas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase halo.

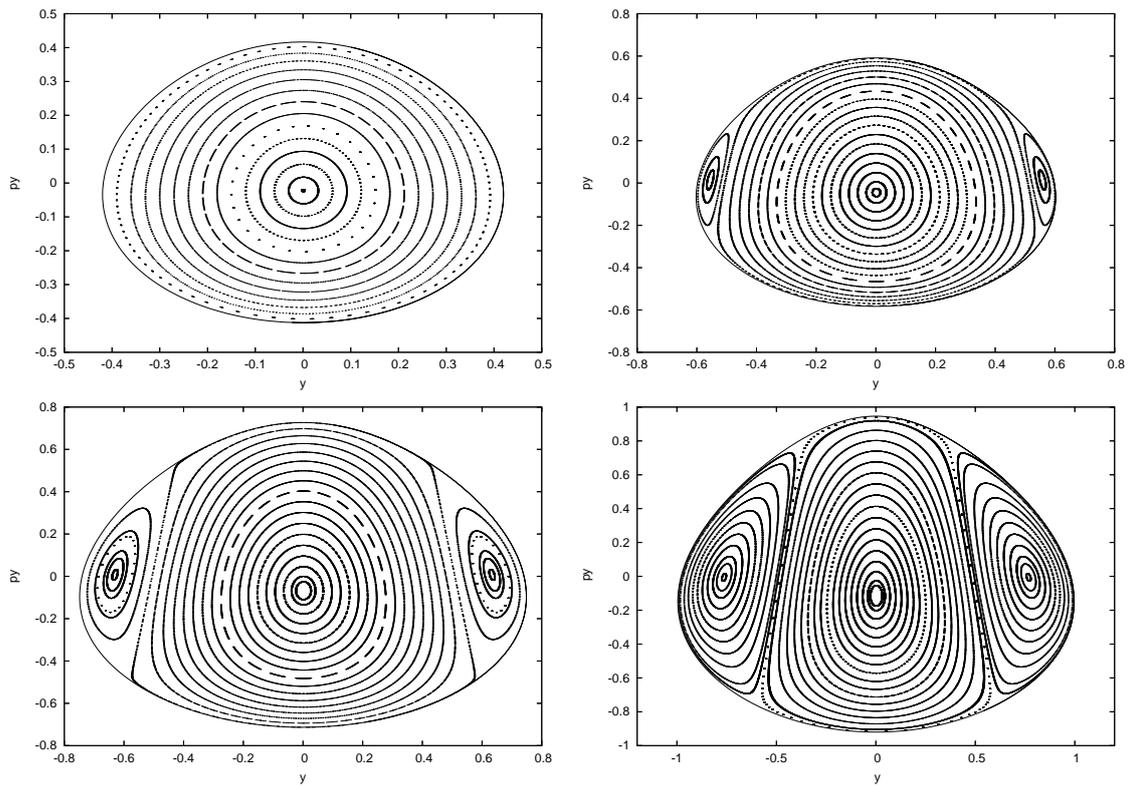


Figura 2.4 - Secção de Poincaré  $z = 0$  na variedade central ao redor de  $L_1$  no sistema Terra-Lua. Nota-se a presença de uma bifurcação a partir do nível de energia  $h = 0.2$ . O ponto fixo central corresponde à órbita vertical de Liapunov; as curvas fechadas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase periódicas de Lissajous; os pontos fixos laterais correspondem às órbitas halo; e, as curvas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase halo.

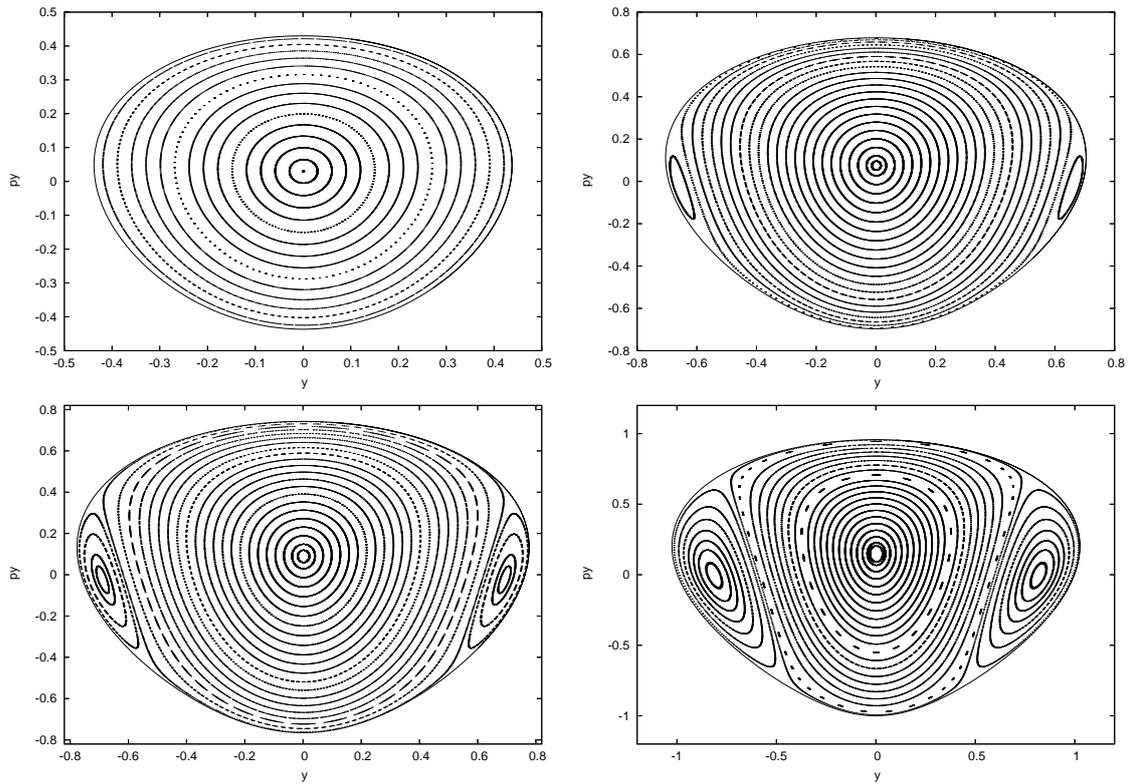


Figura 2.5 - Secção de Poincaré  $z = 0$  na variedade central ao redor de  $L_2$  no sistema Terra-Lua. Nota-se a presença de uma bifurcação a partir do nível de energia  $h = 0.4$  (tôpo à direita). O ponto fixo central corresponde à órbita vertical de Liapunov; as curvas fechadas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase periódicas de Lissajous; os pontos fixos laterais correspondem às órbitas halo; e, as curvas ao redor destes pontos correspondem às órbitas quase halo.

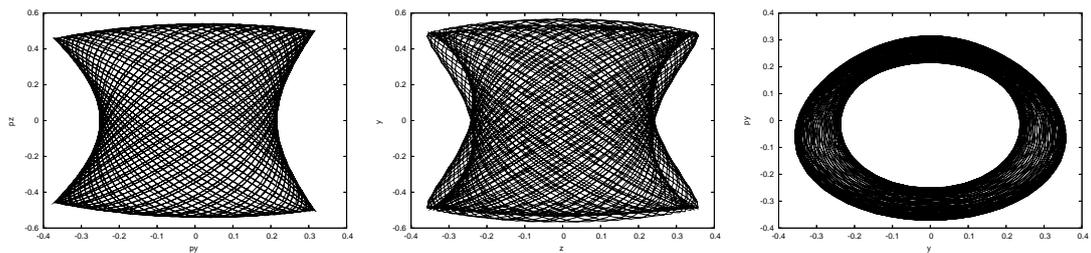


Figura 2.6 - Órbita de Lissajous nas projeções da variedade central.

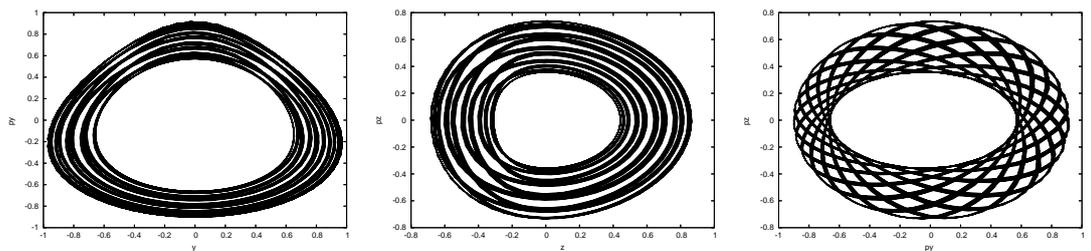


Figura 2.7 - Quase halo nas projeções da variedade central.

Tabela 2.7 - Coeficientes da Hamiltoniana na Variedade Central,  $L_1$ , Terra-Sol.

$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$c_k$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$c_k$
2	0	0	0	1.0432268024	1	1	3	1	-0.0893439728
0	2	0	0	1.0432268024	1	1	1	3	0.0461308413
0	0	2	0	1.0076052798	0	6	0	0	-0.0051089250
0	0	0	2	1.0076052798	0	4	2	0	0.0553501778
2	1	0	0	0.6516513909	0	4	0	2	-0.0127551598
0	3	0	0	-0.0416596683	0	2	4	0	0.0236948658
0	1	2	0	0.5391153662	0	2	2	2	0.1104976629
4	0	0	0	-0.0857873390	0	2	0	4	-0.0084847871
2	2	0	0	0.4116144617	0	0	6	0	0.0022735019
2	0	2	0	-0.1404371633	0	0	4	2	-0.0209262759
2	0	0	2	0.1501839624	0	0	2	4	0.0271362917
1	1	1	1	0.0624903965	0	0	0	6	-0.0010199303
0	4	0	0	-0.0265636532	6	1	0	0	0.0002834383
0	2	2	0	0.2792795889	5	0	1	1	-0.0000373914
0	2	0	2	-0.0288035020	4	3	0	0	-0.0363704001
0	0	4	0	-0.0574686312	4	1	2	0	0.0030181154
0	0	2	2	0.1242481533	4	1	0	2	0.0214627697
4	1	0	0	-0.0713878004	3	2	1	1	-0.1533896814
3	0	1	1	-0.0433754263	3	0	3	1	0.0002398829
2	3	0	0	0.2576663440	3	0	1	3	-0.0115113366
2	1	2	0	-0.0755612506	2	5	0	0	0.0914961856
2	1	0	2	0.1609758113	2	3	2	0	0.0333488634
1	2	1	1	0.1090920281	2	3	0	2	0.1020662414
1	0	3	1	-0.0356919967	2	1	4	0	0.0040776905
1	0	1	3	0.0192026094	2	1	2	2	-0.0218190379
0	5	0	0	-0.0128479387	2	1	0	4	0.0269378458
0	3	2	0	0.1341324509	1	4	1	1	0.0972914834
0	3	0	2	-0.0224356572	1	2	3	1	-0.0931186839
0	1	4	0	-0.0138158400	1	2	1	3	0.0715408127
0	1	2	2	0.1375149811	1	0	5	1	0.0002186857
0	1	0	4	-0.0088509984	1	0	3	3	-0.0154814096
6	0	0	0	0.0025410240	1	0	1	5	0.0048223300
4	2	0	0	-0.0559815057	0	7	0	0	-0.0018750697
4	0	2	0	0.0075587821	0	5	2	0	0.0195860567
4	0	0	2	0.0057080296	0	5	0	2	-0.0060488475
3	1	1	1	-0.1193581962	0	3	4	0	0.0394568232
2	4	0	0	0.1555233151	0	3	2	2	0.0713384936
2	2	2	0	-0.0120946488	0	3	0	4	-0.0060606671
2	2	0	2	0.1347841934	0	1	6	0	0.0014736127
2	0	4	0	0.0072622343	0	1	4	2	-0.0096078109
2	0	2	2	-0.0253412681	0	1	2	4	0.0375662636
2	0	0	4	0.0231228233	0	1	0	6	-0.0018396617
1	3	1	1	0.1166501669					

Tabela 2.8 - Coeficientes da Hamiltoniana na Variedade Central,  $L_2$ , Terra-Sol.

$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$c_k$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$c_k$
2	0	0	0	1.0285070783	1	1	3	1	-0.0911998995
0	2	0	0	1.0285070783	1	1	1	3	0.0507114906
0	0	2	0	0.9925374049	0	6	0	0	-0.005292740
0	0	0	2	0.9925374049	0	4	2	0	0.0572871530
2	1	0	0	-0.6726508046	0	4	0	2	-0.0134566429
0	3	0	0	0.0441440107	0	2	4	0	0.0271707577
0	1	2	0	-0.5530110665	0	2	2	2	0.1167617518
4	0	0	0	-0.0790376128	0	2	0	4	-0.0090948629
2	2	0	0	0.4307058862	0	0	6	0	0.0017878714
2	0	2	0	-0.1284198007	0	0	4	2	-0.0203703488
2	0	0	2	0.1572392284	0	0	2	4	0.0289191113
1	1	1	1	0.0673308607	0	0	0	6	-0.0011277569
0	4	0	0	-0.0281976390	6	1	0	0	0.0010386356
0	2	2	0	0.2881837191	5	0	1	1	0.0008775521
0	2	0	2	-0.0309573859	4	3	0	0	0.0345576439
0	0	4	0	-0.0521564164	4	1	2	0	-0.0008429826
0	0	2	2	0.1292721763	4	1	0	2	-0.0246791468
4	1	0	0	0.0673063798	3	2	1	1	0.1611978152
3	0	1	1	0.0439400326	3	0	3	1	0.0010790694
2	3	0	0	-0.2730445830	3	0	3	1	0.0010790694
2	1	2	0	0.0677382952	2	5	0	0	-0.0992697538
2	1	0	2	-0.1694045481	2	3	2	0	-0.0411628137
1	2	1	1	-0.1183673182	2	3	0	2	-0.1103192235
1	0	3	1	0.0359192320	2	1	4	0	-0.0030923526
1	0	1	3	-0.0209857329	2	1	2	2	0.0204478441
0	5	0	0	0.0134995561	2	1	0	4	-0.0288612521
0	3	2	0	-0.1388161191	1	4	1	1	-0.1068618225
0	3	0	2	0.0239391201	1	2	3	1	0.0958016734
0	1	4	0	0.0103670224	1	2	1	3	-0.0789656615
0	1	2	2	-0.1436818574	1	0	5	1	0.0003005541
0	1	0	4	0.0096488211	1	0	3	3	0.0162489965
6	0	0	0	0.0015671881	1	0	1	5	-0.0053981602
4	2	0	0	-0.0533491871	0	7	0	0	0.0018941810
4	0	2	0	0.0052597846	0	5	2	0	-0.0200519346
4	0	0	2	0.0073146607	0	5	0	2	0.0062771044
3	1	1	1	-0.1232066715	0	3	4	0	-0.0430556221
2	4	0	0	0.1669015097	0	3	2	2	-0.0758348562
2	2	2	0	-0.0048014545	0	3	0	4	0.0064380242
2	2	0	2	0.1439791429	0	1	6	0	-0.0014019037
2	0	4	0	0.0054395207	0	1	4	2	0.0084904009
2	0	2	2	-0.0238948325	0	1	2	4	-0.0403362369
2	0	0	4	0.0245332258	0	1	0	6	0.0019951110
1	3	1	1	0.1272599395					

Tabela 2.9 - Coeficientes da Hamiltoniana na Variedade Central,  $L_1$ , Terra-Lua.

$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$c_k$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$c_k$
2	0	0	0	1.1671928960	1	3	1	1	0.0576928592
0	2	0	0	1.1671928960	1	1	3	1	-0.0722234473
0	0	2	0	1.1344154685	1	1	1	3	0.0209757854
0	0	0	2	1.1344154685	0	6	0	0	-0.0035878393
2	1	0	0	0.4955522250	0	4	2	0	0.0415690029
0	3	0	0	-0.0256836471	0	4	0	2	-0.0079141161
0	1	2	0	0.4277093926	0	2	4	0	0.0053219442
4	0	0	0	-0.1405298966	0	2	2	2	0.0711879714
2	2	0	0	0.2885097231	0	2	0	4	-0.0046554902
2	0	2	0	-0.2415054088	0	0	6	0	0.0087033157
2	0	0	2	0.0993730913	0	0	4	2	-0.0217152543
1	1	1	1	0.0329515641	0	0	2	4	0.0159603664
0	4	0	0	-0.0158545104	0	0	0	6	-0.0004142140
0	2	2	0	0.2164712950	6	1	0	0	0.0100416240
0	2	0	2	-0.0154510258	5	0	1	1	0.0049296682
0	0	4	0	-0.1037567546	4	3	0	0	-0.0364193141
0	0	2	2	0.0857685676	4	1	2	0	0.0220411823
4	1	0	0	-0.0881974470	4	1	0	2	0.0070698192
3	0	1	1	-0.0378854818	3	2	1	1	-0.1005578582
2	3	0	0	0.1644073294	3	0	3	1	0.0085456628
2	1	2	0	-0.1143705819	3	0	1	3	-0.0075822104
2	1	0	2	0.1086364237	2	5	0	0	0.0488204785
1	2	1	1	0.0555040043	2	3	2	0	-0.0012041698
1	0	3	1	-0.0326034012	2	3	0	2	0.0561693173
1	0	1	3	0.0088103698	2	1	4	0	0.0155571028
0	5	0	0	-0.0082750743	2	1	2	2	-0.0234577376
0	3	2	0	0.1013080831	2	1	0	4	0.0158725765
0	3	0	2	-0.0128199535	1	4	1	1	0.0460563715
0	1	4	0	-0.0331035786	1	2	3	1	-0.0699548746
0	1	2	2	0.0973289703	1	2	1	3	0.0321302723
0	1	0	4	-0.0041311924	1	0	5	1	0.0037026382
6	0	0	0	0.0130435371	1	0	3	3	-0.0096816885
4	2	0	0	-0.0597723693	1	0	1	5	0.0018780206
4	0	2	0	0.0342066923	0	7	0	0	-0.0015166521
4	0	0	2	-0.0013087583	0	5	2	0	0.0154710131
3	1	1	1	-0.0896413978	0	5	0	2	-0.0041782100
2	4	0	0	0.0902836889	0	3	4	0	0.0195659572
2	2	2	0	-0.0424593859	0	3	2	2	0.0441935556
2	2	0	2	0.0806952371	0	3	0	4	-0.0035733868
2	0	4	0	0.0298909013	0	1	6	0	0.0034651264
2	0	2	2	-0.0288723742	0	1	4	2	-0.0134753568
2	0	0	4	0.0142173041	0	1	2	4	0.0214099384
					0	1	0	6	-0.0009121115

Tabela 2.10 - Coeficientes da Hamiltoniana na Variedade Central,  $L_2$ , Terra-Lua.

$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$c_k$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$c_k$
2	0	0	0	0.9313229004	1	1	3	1	-0.0998671926
0	2	0	0	0.9313229004	1	1	1	3	0.0965404176
0	0	2	0	0.8930880718	0	6	0	0	-0.0062906790
0	0	0	2	0.8930880718	0	4	2	0	0.0716698415
2	1	0	0	-0.8307461076	0	4	0	2	-0.0188248644
0	3	0	0	0.0652851187	0	2	4	0	0.0615371314
0	1	2	0	-0.6490632663	0	2	2	2	0.1718689344
4	0	0	0	-0.0309866708	0	2	0	4	-0.0143825945
2	2	0	0	0.5938868483	0	0	6	0	0.0002448986
2	0	2	0	-0.0470165353	0	0	4	2	-0.0131312547
2	0	0	2	0.2113991877	0	0	2	4	0.0445376619
1	1	1	1	0.1105661530	0	0	0	6	-0.0021515388
0	4	0	0	-0.0415820344	6	1	0	0	0.0086671623
0	2	2	0	0.3569431232	5	0	1	1	0.0084511514
0	2	0	2	-0.0498391299	4	3	0	0	-0.0059526662
0	0	4	0	-0.0178188329	4	1	2	0	0.0067956590
0	0	2	2	0.1651665244	4	1	0	2	-0.0642258048
4	1	0	0	0.0208257418	3	2	1	1	0.2197552645
3	0	1	1	0.0466076707	3	0	3	1	0.0120594435
2	3	0	0	-0.4143687080	3	0	1	3	0.0132302029
2	1	2	0	-0.0105717033	2	5	0	0	-0.1789287599
2	1	0	2	-0.2448796521	2	3	2	0	-0.1364844721
1	2	1	1	-0.2063563236	2	3	0	2	-0.1937952560
1	0	3	1	0.0361656164	2	1	4	0	-0.0040443796
1	0	1	3	-0.0375142212	2	1	2	2	-0.0041647279
0	5	0	0	0.0183662415	2	1	0	4	-0.0476102006
0	3	2	0	-0.1756391646	1	4	1	1	-0.2066443577
0	3	0	2	0.0365674840	1	2	3	1	0.1073029836
0	1	4	0	-0.0208545332	1	2	1	3	-0.1568631493
0	1	2	2	-0.1959391944	1	0	5	1	0.0042872053
0	1	0	4	0.0169100226	1	0	3	3	0.0211510272
6	0	0	0	-0.0028464726	1	0	1	5	-0.0115903656
4	2	0	0	-0.0089892693	0	7	0	0	0.0016647962
4	0	2	0	-0.0039543320	0	5	2	0	-0.02223574619
4	0	0	2	0.0252287870	0	5	0	2	0.0074703819
3	1	1	1	-0.1484084568	0	3	4	0	-0.0786056473
2	4	0	0	0.2776643784	0	3	2	2	-0.1172655497
2	2	2	0	0.0815086532	0	3	0	4	0.0094851776
2	2	0	2	0.2311975872	0	1	6	0	-0.0031982388
2	0	4	0	-0.0010388969	0	1	4	2	-0.0061453679
2	0	2	2	-0.0054955348	0	1	2	4	-0.0667180052
2	0	0	4	0.0370035211	0	1	0	6	0.0034332401
1	3	1	1	0.2331444390					

## 3 DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DAS VARIEDADES HIPERBÓLICAS

### 3.1 Introdução

O teorema de Poincaré (2) garante que, em sistemas hamiltonianos, uma órbita periódica não aparece isolada, mas sim em família. Pode-se pensar que o ponto de equilíbrio lagrangiano é uma órbita periódica de amplitude zero, portanto, ao seu redor, existe uma família de órbitas periódicas oriundas dele, que são as órbitas de Liapunov.

Como no próximo Capítulo é feito um estudo sistemático das variedades invariantes hiperbólicas das órbitas periódicas planas ao redor dos pontos lagrangianos dos sistemas Terra-Sol e Terra-Lua, é necessária a determinação da família das órbitas de Liapunov planas. Existem vários métodos analíticos e numéricos para se determinar as órbitas periódicas de uma mesma família, neste trabalho optou-se em seguir um método numérico. A idéia básica dos métodos de continuação de soluções, seja este analítico ou numérico, concentra-se em determinar condições iniciais da solução vizinha a uma solução dada, a partir de soluções conhecidas, gerando um continuum de soluções para o sistema em estudo. O modelo teórico de continuação analítica também serve para mostrar a existência de soluções periódicas de um sistema. Este será brevemente descrito na primeira seção deste Capítulo.

O método empregado nesta aplicação foi o método de continuação numérica através de um parâmetro de arco (18), que busca as condições iniciais da órbita periódica ao longo da curva característica do problema; no PRTC, a curva característica é dada pela constante de Jacobi versus uma variável do problema ou pelo período. Paralelamente ao método de continuação numérica, é apresentado um estudo da estabilidade linear das soluções determinadas, pois a existência das variedades invariantes desejadas está vinculada ao caráter instável da órbita periódica.

Se uma órbita é periódica e instável, os autovetores - associados aos autovalores reais - de seu sistema variacional integrado após um período da órbita, fornecem a direção do espaço tangente à variedade invariante estável ou instável no ponto inicial. Lembrando que a variedade invariante estável da órbita periódica, ou de qualquer objeto invariante sob o fluxo, é o conjunto de pontos que tendem assintoticamente à órbita periódica, ou a qualquer outro objeto invariante considerado, quando o tempo

tende a infinito. A variedade invariante instável segue o mesmo conceito, porém o tempo deverá tender a menos infinito.

Este Capítulo tem como objetivos principais a determinação numérica das órbitas periódicas, o estudo da aproximação local e a globalização das variedades invariantes estável e instável das órbitas periódicas, de Liapunov e halos. O segundo e o presente Capítulos complementam o estudo da dinâmica ao redor dos pontos  $L_1$  e  $L_2$ .

### 3.2 Continuação Analítica

O método de continuação analítica, devido a Poincaré, consiste em se determinar soluções periódicas a partir de uma solução periódica conhecida, através de pequenas modificações nas condições iniciais e no parâmetro de cada solução. Este método permite provar analiticamente a existência de órbitas periódicas no problema restrito de três corpos, bem como em outros problemas. A teoria descrita nesta Secção é encontrada em (41).

Seja o seguinte sistema de equações diferenciais de ordem  $n$ :

$$\dot{X} = g(X, \epsilon) \quad (3.1)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro escalar. A solução que satisfaz uma dada condição inicial  $X_0$  em  $t = 0$  é escrita como

$$X = X(t, X_0, \epsilon) \quad (3.2)$$

que só será periódica se satisfizer à condição de periodicidade,

$$X(t, X_0^*, \epsilon^*) = X(t + T^*, X_0^*, \epsilon^*) \quad (3.3)$$

onde  $T^*$  é o período da órbita;  $X_0^*$  e  $\epsilon^*$  são as condições iniciais da solução periódica, ou de maneira análoga,

$$X(0, X_0^*, \epsilon^*) = X(T^*, X_0^*, \epsilon^*) = X_0^* \quad (3.4)$$

Para que uma solução vizinha a esta seja periódica,

$$f(X_0, \epsilon) \equiv X(T^*, X_0, \epsilon) - X_0 = 0 \quad (3.5)$$

tem que ser satisfeita para todas as variáveis do sistema. Este sistema é satisfeito

para  $X_0 = X_0^*$  e  $\epsilon = \epsilon^*$ , visto que a solução de partida é periódica 3.4. Se o jacobiano do sistema (Equação 3.5) for diferente de zero para  $X_0 = X_0^*$  e  $\epsilon = \epsilon^*$ , então o teorema da função implícita garante a existência da solução para  $\epsilon$  na vizinhança de  $\epsilon^*$  com as diferenças  $X - X^*$  expressas em termos de série de potência em  $\epsilon - \epsilon^*$ . Seja  $f$  uma função regular no espaço de fase,

$$f_i(X_k, \epsilon) = 0 \quad (3.6)$$

onde  $i, k = 1, 2, \dots, n$ , sendo que sua solução para a órbita periódica é dada por  $(X_k = \bar{X}_k, \epsilon = \bar{\epsilon})$ . Ao escrever a função acima em séries de Taylor ao redor de  $\bar{X}_k, \bar{\epsilon}$

$$f_i(X_k, \epsilon) = f_i(\bar{X}_k, \bar{\epsilon}) + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial f_i}{\partial X_k} \right]_{\bar{\epsilon}, \bar{X}_k} (X_k - \bar{X}_k) + \left[ \frac{\partial f_i}{\partial \epsilon_k} \right]_{\bar{\epsilon}, \bar{X}_k} (\epsilon - \bar{\epsilon}) + \dots$$

segue que, se o determinante formado pelos coeficientes for diferente de zero

$$D = \frac{\partial f_i}{\partial X_k} \neq 0$$

então, existe uma solução na vizinhança de  $\bar{\epsilon}$  que pode ser representada através de uma série

$$X_k - \bar{X}_k = A_k(\epsilon - \bar{\epsilon}) + B_k(\epsilon - \bar{\epsilon})^2 + \dots \quad (3.7)$$

onde os coeficientes  $A_k, B_k, \dots$  são constantes.

Deseja-se determinar uma solução periódica do sistema de equações diferenciais (Equação 3.1), tal que a solução seja próxima da solução periódica conhecida

$$X = X(t, X_0^*, \epsilon^*) \quad (3.8)$$

A solução da órbita periódica desejada deverá ter seu parâmetro, seu período e suas condições iniciais próximos dos valores da órbita periódica conhecida, porém diferentes dos mesmos, ou seja:

$$\begin{aligned} \epsilon &\neq \epsilon^* \\ X_0 &\neq X_0^* \\ T &\neq T^* \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pela definição de órbita periódica, a solução  $X^*$  deve satisfazer:

$$X(T^*, X_0^*, \epsilon^*) - X_0^* = 0 \quad (3.10)$$

e a Equação 3.6 para a órbita gerada fica:

$$f(T, X_0, \epsilon) = X(T, X_0, \epsilon) - X_0 = 0 \quad (3.11)$$

sendo que existem  $n + 1$  grandezas a serem determinadas para cada valor de  $\epsilon$ :  $n$  componentes do vetor  $x$  mais o período  $T$ . Porém, pode-se considerar um novo vetor de condições iniciais que não resulte em uma nova solução periódica, se  $X_0 \neq X_0^*$ , mas  $X_0$  representa um outro ponto da solução conhecida; isto é,  $X_0$  pode ser o vetor  $X_0^*$  em um outro instante. A fim de se eliminar tal possibilidade, fixa-se uma componente do vetor  $X_0^*$  em  $X_0^{(n)}$  e mudam-se as demais:

$$X_0^{(n)} = X_0^{*(n)}$$

$$X_0^{(k)} \neq X_0^{*(k)}$$

Este procedimento também é adotado quando um certo  $X_i^*$  considerado gera uma matriz jacobiana de determinante nulo  $D = 0$ . O sistema

$$f(T, X_0, \epsilon) = 0$$

tem sua solução em  $\epsilon = \epsilon^*$ ,  $X_0 = X_0^*$  e  $T = T^*$ . Mas, para buscar outra solução periódica, é necessário determinar a solução do sistema acima na vizinhança de  $\epsilon^*$ , após verificar se a solução desejada realmente existe; isto é, se  $D \neq 0$ . Então seja o sistema de  $n + 1$  equações:

$$\begin{aligned} f_1 & (T, X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, \dots, X_0^{(k)}, \dots, X_0^{(n)}, \epsilon) = 0 \\ f_2 & (T, X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, \dots, X_0^{(k)}, \dots, X_0^{(n)}, \epsilon) = 0 \\ & \vdots \\ f_k & (T, X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, \dots, X_0^{(k)}, \dots, X_0^{(n)}, \epsilon) = 0 \\ & \vdots \\ f_n & (T, X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, \dots, X_0^{(k)}, \dots, X_0^{(n)}, \epsilon) = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$X_0^{(n)} = X_0^{*(n)}$$

O determinante funcional deste sistema é dado por:

$$D = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_0^{(1)}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_0^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_0^{(n-1)}} & \frac{\partial f_1}{\partial T^0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_0^{(1)}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_0^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_0^{(n-1)}} & \frac{\partial f_2}{\partial T^0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_0^{(1)}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_0^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_0^{(n-1)}} & \frac{\partial f_n}{\partial T^0} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

que deve ser avaliado em  $T = T^*$ ,  $x_0 = x_0^*$  e  $\epsilon = \epsilon^*$ . O vetor da última coluna é dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial T^0} = \dot{X}(T, X_0, \epsilon) = \chi[X(T, X_0, \epsilon), \epsilon] \quad (3.14)$$

e pode ser reescrito para  $T = T^*$ ,  $X_0 = X_0^*$  e  $\epsilon = \epsilon^*$ , na seguinte forma:

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \chi(X_0^*, \epsilon^*) \quad (3.15)$$

desde que as condições iniciais não dependam explicitamente do tempo.

Diferenciando as equações de movimento em relação às condições iniciais, obtém-se:

$$\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_0^k} = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial X_0^k} \quad (3.16)$$

Se as condições iniciais não dependerem explicitamente do tempo, a relação acima pode ser reescrita na forma,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial X_i}{\partial X_0^k} = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial X_0^k} \quad (3.17)$$

que são as equações variacionais de  $X = \chi(X, \epsilon)$ , onde

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial X_j} = Y_{ij}[X(t, X_0^*, \epsilon^*), \epsilon^*] \quad (3.18)$$

é avaliada ao longo da solução gerada pela condição inicial. Se  $D \neq 0$ , pode-se resolver o sistema de  $n$  equações com  $n$  variáveis desconhecidas. As soluções são:

$$X_{0i} - X_{0i}^* = A_i(\epsilon - \epsilon^*) + B_i(\epsilon - \epsilon^*)^2 + \cdots \quad (3.19)$$

para  $i = 1, \dots, n-1$ ; e

$$X_0^n - X_0^{*(n)} = 0 \quad (3.20)$$

$$T - T^* = A(\epsilon - \epsilon^*) + B(\epsilon - \epsilon^*)^2 + \dots$$

### 3.3 Continuação Numérica das Soluções Periódicas

Dada a variedade central ao redor dos pontos lagrangianos, é possível refinar e continuar suas soluções periódicas, utilizando a técnica numérica de continuação de soluções através de um parâmetro de arco (18). Esta técnica permite percorrer toda a família da solução periódica e explorar o problema sistematicamente de maneira eficiente. Inicialmente, o método será apresentado para o caso espacial, e logo reduzido ao caso planar.

A idéia básica deste método é dar um passo ( $ds$ ) no espaço de fase do problema em direção ao ponto de uma órbita periódica vizinha, ilustrada na Figura 3.1. A órbita inicial previamente encontrada é representada por  $P'$ , cujas condições iniciais na secção de Poincaré ( $y = 0$ ) são  $(x_j, z_j, \dot{y}_j)$ , e as condições iniciais da órbita periódica vizinha a uma distância  $ds$  da órbita inicial é representada por  $P''$ , cujas coordenadas são  $(x_{j+1}, z_{j+1}, \dot{y}_{j+1})$ .

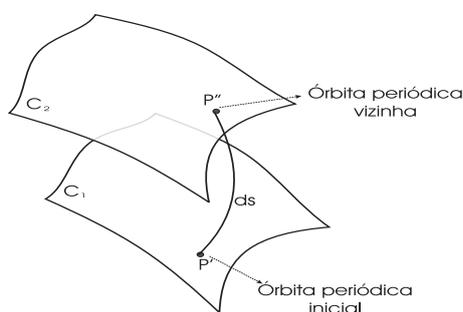


Figura 3.1 - Ilustração do método de continuação numérica através de um parâmetro de arco.

Segundo a estratégia de Birkhoff (42), se uma trajetória cruza o eixo de simetria ortogonalmente ao mesmo, nos instantes  $t = 0$  e  $t = T/2$ , então a órbita é fechada e de período  $T$ . Lembrando que as soluções do PRTC seguem a simetria  $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \rightarrow (x, -y, z, -\dot{x}, \dot{y}, -\dot{z})$  sendo o eixo de simetria  $y = 0$ .

Em linhas gerais, determinar uma solução periódica de um sistema autônomo

$$\dot{X} = g(X) \tag{3.21}$$

significa encontrar os zeros da função  $f(X_0) = X(T, X_0) - X_0 = 0$ , onde  $X(T, X_0)$  é o fluxo do campo após um período da órbita periódica. As equações variacionais de primeira ordem relacionadas são:

$$\dot{\chi} = Dg(X)\chi \quad (3.22)$$

sendo  $\chi = (\gamma(t), \eta(t), \zeta(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\eta}(t), \dot{\zeta}(t))^T$  a sua solução. Equivalentemente, tem-se:

$$D_X f(X_0) = D_X X(T, X_0) - I \quad (3.23)$$

para a condição de solução periódica. É mais fácil pensar em se determinar a solução periódica em termos do mapa de Poincaré, isto é, determinar o ponto fixo associado à solução periódica  $X(t, X_0)$  do mapa  $S$ . Se  $\Sigma$  é uma secção transversal ao fluxo gerado pela solução das equações diferenciais, então a solução que se busca é:

$$f(X_0) = (X(t, X_0) \cap \Sigma) - X_0 = S(X_0) - X_0 = 0 \quad (3.24)$$

que pode ser transformada em um problema de continuação pela homotopia

$$R(X, \mu) = g(X)\mu + L(X)(1 - \mu) \quad (3.25)$$

onde  $\mu \in [0, 1)$  e  $L(X)$  é a solução periódica conhecida. Enquanto  $\mu$  varia de 0 a 1,  $R(X, \mu)$  varia de  $L(X)$  à  $g(X)$ , com isto são obtidos os zeros da função  $f(X)$  se a matriz  $DR(X)\Delta X$  for regular ao longo da solução.

### (i) Determinação de uma Órbita no PRTC

Seja o conjunto de condições iniciais da órbita periódica num ponto  $P_0$  da secção de Poincaré em  $y = 0$  com  $\dot{y} > 0$ , tal que:

$$P_0 = (x_0, y_0 = 0, z_0, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 > 0, \dot{z}_0 = 0) = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_0 \quad (3.26)$$

e seja o ponto  $P_f$  a primeira intersecção da mesma órbita com a secção  $y = 0, \dot{y} < 0$ ,

$$P_f = (x_f, y_f = 0, z_f, \dot{x}_f, \dot{y}_f < 0, \dot{z}_f) \equiv (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_f \quad (3.27)$$

Devido à simetria anteriormente discutida, as relações abaixo são suficientes para a

determinação da órbita:

$$\begin{aligned} f^1 &= (x, z, \dot{y})_0 = \dot{x}_f = 0 \\ f^2 &= (x, z, \dot{y})_0 = \dot{z}_f = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

isto é, busca-se soluções que interceptem  $y = 0$  com  $\dot{x}_f = \dot{z}_f = 0$  e  $\dot{y} < 0$ . Este método é um método de tiro simples, pois busca-se um ajuste nas condições iniciais da órbita aproximada na secção de Poincaré, para que a mesma se feche.

Em resumo, definindo os conjuntos  $X = (x, z, \dot{y})$  e  $F = (f^1, f^2)$ , busca-se um  $X_0 = (x_0, z_0, \dot{y}_0)$  que seja solução do sistema não linear, dado pela Equação 3.28:

$$F(X_0) = 0 \quad (3.29)$$

onde  $X_0$  representa a solução da órbita periódica desejada na secção  $y = 0$ .

Supondo que o posto da matriz jacobiana de  $F$ ,

$$G = D_X F \quad (3.30)$$

seja dois, então  $F(X_0) = 0$  descreve uma curva característica no espaço  $(x, z, \dot{y})_0$ . O próximo valor de  $X = X_0 + dX$  representará as coordenadas iniciais de uma órbita periódica vizinha, onde  $dX$  é o incremento que se deseja determinar.

## (ii) Continuação Numérica

A fim de se obter a família de órbitas periódicas, foi utilizado o método de continuação de soluções para se determinar os pontos da curva característica. A idéia do método é integrar esta curva ao longo de um parâmetro de arco  $\epsilon = s$ . Este parâmetro pode ser considerado como uma coordenada adicional, então  $X_{n+1} = \epsilon$ . De  $F(X) = 0$ , tem-se que a matriz  $\Delta F(X)\Delta X = 0$ , onde  $\Delta F(X)$  é a matriz do mapa linear de  $R^{n+1} \rightarrow R^n$ . Seja  $A_i$  o determinante da matriz  $\Delta F(X)$  obtida para a órbita periódica, eliminando-se a coluna  $i$  e multiplicando por  $(-1)^{i+1}$ . Então tem-se as relações:

$$\frac{\Delta x_0}{A_0} = \frac{\Delta x_1}{A_1} = \frac{\Delta x_2}{A_2} = \dots = \frac{\Delta x_n}{A_n} \quad (3.31)$$

Pode-se definir o tamanho do comprimento de arco em  $R^{n+1}$  como:

$$\Delta s = A_0 = \left( \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 \right)^{1/2} \quad (3.32)$$

desta forma, é obtido o conjunto de equações diferenciais que será integrado numericamente ao longo do comprimento de arco  $s$ :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \frac{A_1}{A_0} \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{A_2}{A_0} \\ \frac{d\dot{y}}{ds} &= \frac{A_3}{A_0}\end{aligned}\tag{3.33}$$

onde,

$$A_1 = (f_z^1 f_{\dot{y}}^2 - f_{\dot{y}}^1 f_z^2), \quad A_2 = -(f_x^1 f_{\dot{y}}^2 - f_{\dot{y}}^1 f_x^2), \quad A_3 = (f_x^1 f_z^2 - f_z^1 f_x^2),$$

os índices subscritos de  $f$  representam as derivadas parciais de  $f^{1(2)}$  em relação às respectivas coordenadas. Este método permite passar por pontos de retorno da curva característica, pois avançar ao longo da mesma não privilegia nenhuma das variáveis, com isto, pode-se atravessar o ponto de bifurcação de uma família de órbitas periódicas sem problemas.

O conjunto de equações diferenciais acima pode ser integrado por qualquer método numérico de solução de equações diferenciais ordinárias. Foi implementado um método do tipo preditor-corretor, sendo o preditor o método de Euler e para o corretor foi utilizado o método de Newton modificado, que segue abaixo.

Suponha que:

$$X^k = X^{k-1} + \Delta X^{k-1}\tag{3.34}$$

sendo que a grandeza  $\Delta X^{k-1}$  deve obedecer à seguinte relação:

$$G(\Delta X^{k-1}) = -F(X^{k-1})\tag{3.35}$$

o lado direito representa a quantidade que falta para se atingir a curva característica mais refinada. A norma é definida por:

$$\Delta X^T \Delta X\tag{3.36}$$

e minimizada por:

$$\Delta X^{k-1} = -G^T (GG^T)^{-1} F(X^{k-1})\tag{3.37}$$

Com este método, após poucos passos, chega-se às condições da órbita periódica com a precisão requerida.

### (iii) Implementação do Método

Dadas as condições iniciais  $(x_0, 0, z_0, 0, \dot{y}_0, 0)$  para o ponto  $P_0$  na secção de Poincaré com  $y = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , o próximo ponto  $P_f$  na secção com  $y = 0$  e  $\dot{y} < 0$ , é determinado após meio período  $T/2$ , onde a matriz solução das equações variacionais,  $A = A(T/2)$ , também é calculada. A matriz  $A$  é uma matriz  $6 \times 6$ , pois a matriz inicial é uma matriz identidade  $6 \times 6$ ; ou seja, para cada integração, toma-se o valor unitário de uma das variações e zera-se as outras da mesma coluna. Isto significa que necessita-se integrar simultaneamente 42 equações: 6 equações de movimento e 6 conjuntos com 6 condições iniciais para as variações, definidas por  $A(t = 0) = I$ . A matriz  $G$  é obtida a partir dos elementos de  $A(T/2)$  (18), sendo:

$$G = \begin{pmatrix} a(4, 1) + \beta_4 a(2, 1) & a(4, 3) + \beta_4 a(2, 3) & a(4, 5) + \beta_4 a(2, 5) \\ a(6, 1) + \beta_6 a(2, 1) & a(6, 3) + \beta_6 a(2, 3) & a(6, 5) + \beta_6 a(2, 5) \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

onde  $\beta_4 = -v_4/v_2$  e  $\beta_6 = -v_6/v_2$ ;  $v_2, v_4$  e  $v_6$  representam o campo vetorial no ponto  $P_f$  da órbita. As parcelas que envolvem o  $\beta_4$  e o  $\beta_6$  representam as correções para a diferença de tempo para se atingir a secção, entre a órbita nominal e suas variações.

Com isto, calcula-se os  $A_i$ 's e os incrementos que faltam ( $dx = (dx, dz, dij)$ ) para atingir o ponto desejado de uma órbita periódica vizinha, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_1 &= g(1, 2)g(2, 3) - g(1, 3)g(2, 2) \\ A_2 &= -g(1, 1)g(2, 3) + g(1, 3)g(2, 1) \\ A_3 &= g(1, 1)g(2, 2) - g(1, 2)g(2, 1) \\ A_0 &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \end{aligned} \quad (3.39)$$

visto que,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{A_1}{A_0} ds \\ dz &= \frac{A_2}{A_0} ds \\ dij &= \frac{A_3}{A_0} ds \end{aligned} \quad (3.40)$$

O passo  $ds$  é fornecido ao programa; o preditor fornece os valores aproximados de  $dx = (dx, dz, d\dot{y})$  através da integração das Equações 3.33; em seguida, os valores das condições iniciais da órbita periódica obtida são refinados com o método de Newton modificado descrito pelas Equações 3.34 a 3.37.

Esta continuação numérica para o caso tridimensional é aplicada à continuação da família das órbitas halos, que será abordada no capítulo seguinte. Para implementar o método no caso bidimensional, é suficiente fornecer  $z = 0$  e  $\dot{z} = 0$ , portanto as equações envolvidas tornam-se:

$$f^1 = (x, \dot{y}) = \dot{x} = 0$$

$$\begin{aligned} g(1, 1) &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} - \beta_4 \frac{\partial y}{\partial x} \\ g(1, 2) &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} - \beta_4 \frac{\partial y}{\partial \dot{y}} \end{aligned}$$

$$dx = g(1, 1)ds$$

$$d\dot{y} = g(1, 2)ds$$

com  $A_0 = \sqrt{g(1, 1)^2 + g(1, 2)^2}$ .

### 3.4 Estabilidade das Órbitas Periódicas

A dinâmica linearizada garante o caráter instável em uma pequena vizinhança ao redor dos pontos lagrangianos colineares do PRTC. Para certificar-se que as soluções, continuadas a partir destes pontos de equilíbrio, não se bifurcam, tornando-se, eventualmente, uma solução estável - o que implicaria a inexistência de  $W^u$  e  $W^e$  - é necessário o estudo numérico de sua estabilidade.

A solução das equações variacionais (Equação 3.22) após um período  $T$  da órbita periódica e tendo como condição inicial a matriz identidade  $I$  é conhecida como matriz de monodromia. Esta matriz é obtida numericamente com a integração da órbita periódica e das equações variacionais. Um bom refino numérico no fechamento da órbita é fundamental para a obtenção precisa da matriz de monodromia, sendo um item bastante relevante na determinação dos autovalores e autovetores da variedade.

Devido ao caráter hamiltoniano do PRTC, isto é, nesta dinâmica, existe uma quantidade que se mantém constante que é a integral de Jacobi, a matriz de monodromia apresenta algumas propriedades importantes, que são:

- (i)  $Det(A) = 1$
- (ii)  $\lambda_1 = \lambda$  e  $\lambda_2 = \lambda^{-1}$
- (iii)  $Tr(A) = 2 + \sum_i \lambda_i$

A primeira propriedade provém do teorema de Liouville que é a conservação do volume no espaço de fase do sistema. A segunda propriedade, como consequência de uma característica de matrizes simpléticas, afirma que os autovalores aparecem em pares recíprocos, ou seja, para todo autovalor  $\lambda$  existe um autovalor  $\lambda^{-1}$ . Ambas propriedades podem ser conferidas em (42). A parcela 2 na propriedade (iii), corresponde à soma de um autovalor duplo em  $\lambda = 1$ , que são os autovalores das soluções periódicas. A segunda propriedade está provada em (43).

Sejam os autovalores da matriz de monodromia:

$$\lambda_1, \frac{1}{\lambda_1}, \lambda_2, \frac{1}{\lambda_2} \quad (3.41)$$

e seu polinômio característico:

$$det|A - \lambda I| = s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1 = 0 \quad (3.42)$$

Como decorrência da reciprocidade dos autovalores, os coeficientes do polinômio característico são simétricos para qualquer ordem da matriz fundamental. Os coeficientes,  $a_1$  e  $a_2$  estão fortemente vinculados ao cálculo do parâmetro de estabilidade das órbitas periódicas. Os parâmetros  $k_1$  e  $k_2$  são definidos como sendo a soma dos autovalores:

$$\begin{aligned} k_1 &= \lambda_1 + \lambda_1^{-1} \\ k_2 &= \lambda_2 + \lambda_2^{-1} \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação característica em termos de suas raízes ou autovalores, ela assume a forma:

$$p(\lambda) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_1^{-1})(s - \lambda_2)(s - \lambda_2^{-1}) = 0 \quad (3.43)$$

que, quando expandida e comparada com o polinômio da Equação 3.42, obtém-se as relações dos coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  em função dos autovalores ou dos parâmetros  $k_1$  e  $k_2$ .

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\lambda_1 + \lambda_1^{-1} + \lambda_2 + \lambda_2^{-1}) = -(k_1 + k_2) \\ a_2 &= 2 + (\lambda_1 + \lambda_1^{-1})(\lambda_2 + \lambda_2^{-1}) = 2 + k_1 k_2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Resolvendo o sistema acima, chega-se à seguinte solução:

$$\left. \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix} \right\} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8}}{2} \quad (3.45)$$

nesta situação,  $k_1$  representa o parâmetro de estabilidade horizontal e  $k_2$  o vertical. A solução em termos dos autovalores é dada por:

$$\left. \begin{matrix} \lambda_{1,2} \\ \lambda_{1,2}^{-1} \end{matrix} \right\} = \frac{k_{1,2} \pm \sqrt{k_{1,2}^2 - 4}}{2} \quad (3.46)$$

A estabilidade das soluções periódicas no PRTC é usualmente estudada através da curva característica dos parâmetros de estabilidade com a constante de Jacobi de cada solução, como mostram as Figuras 3.2 e 3.3. Broucke (43) define sete regiões de estabilidade: seis instáveis e uma estável, que, resumidamente, traduzem-se em: se  $-2 < k_1 < 2$  e  $-2 < k_2 < 2$ , então a solução é estável; e para todas as demais combinações entre os parâmetros  $k_1$  e  $k_2$  a solução periódica é instável. Quando a órbita é estável seus autovalores são complexos conjugados e estão sobre um círculo unitário.

### 3.5 Variedades Invariantes Instáveis e Estáveis

Uma vez determinada a variedade central, o próximo passo é a compreensão do comportamento na vizinhança de uma órbita periódica pertencente à variedade central determinada. As órbitas periódicas, bem como as órbitas quase periódicas de  $L_1$ ,

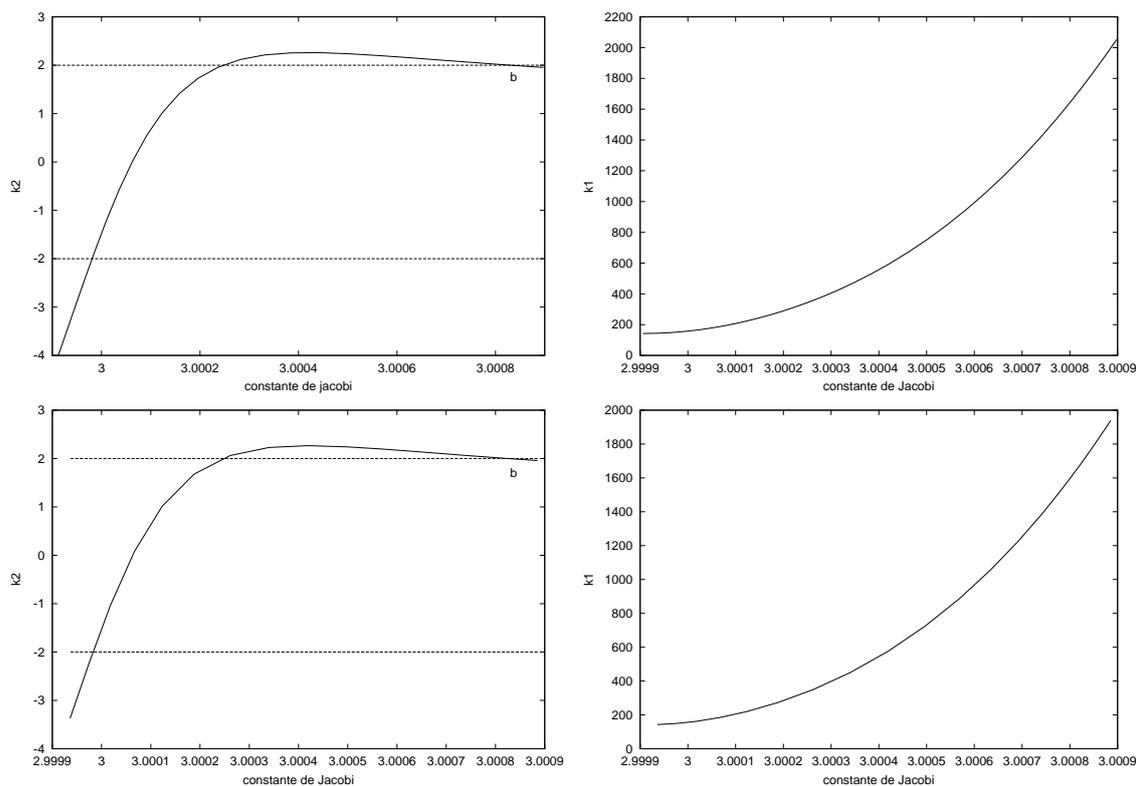


Figura 3.2 - Curva característica das órbitas da família de órbitas de Liapunov de  $L_1$  (acima) e  $L_2$  (abaixo) no sistema Terra-Sol. Nota-se que a família é instável. A letra "b" indica o ponto de bifurcação que origina a família das órbitas halos.

têm dois subespaços invariantes bidimensionais, um estável e outro instável, associados ao caráter hiperbólico, conhecidos como variedades invariantes estável ( $W^s$ ) e instável ( $W^u$ ) - justamente os subespaços eliminados pelo processo de redução à variedade central apresentado no capítulo anterior. O estudo de tais variedades invariantes é um item fundamental na realização de manobras de correção e na exploração de transferências com baixo custo de combustível, pois um veículo espacial pode ter sua trajetória guiada por estes caminhos naturais, não havendo a necessidade de grandes impulsos de velocidade. Nesta seção é apresentado um estudo da determinação local dessas variedades.

Os três pares de autovalores da matriz de monodromia ( $A$ ), no PRTC tridimensional, têm o seguinte significado geométrico (15):

- (a) O primeiro par real  $(\lambda_1, \lambda_2)$  com  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ , está associado ao caráter hiperbólico da órbita periódica. O autovalor de maior valor, denotado por  $\lambda_1$ , é o autovalor dominante e o autovetor ( $\hat{e}_1$ ) a ele associado fornece a direção

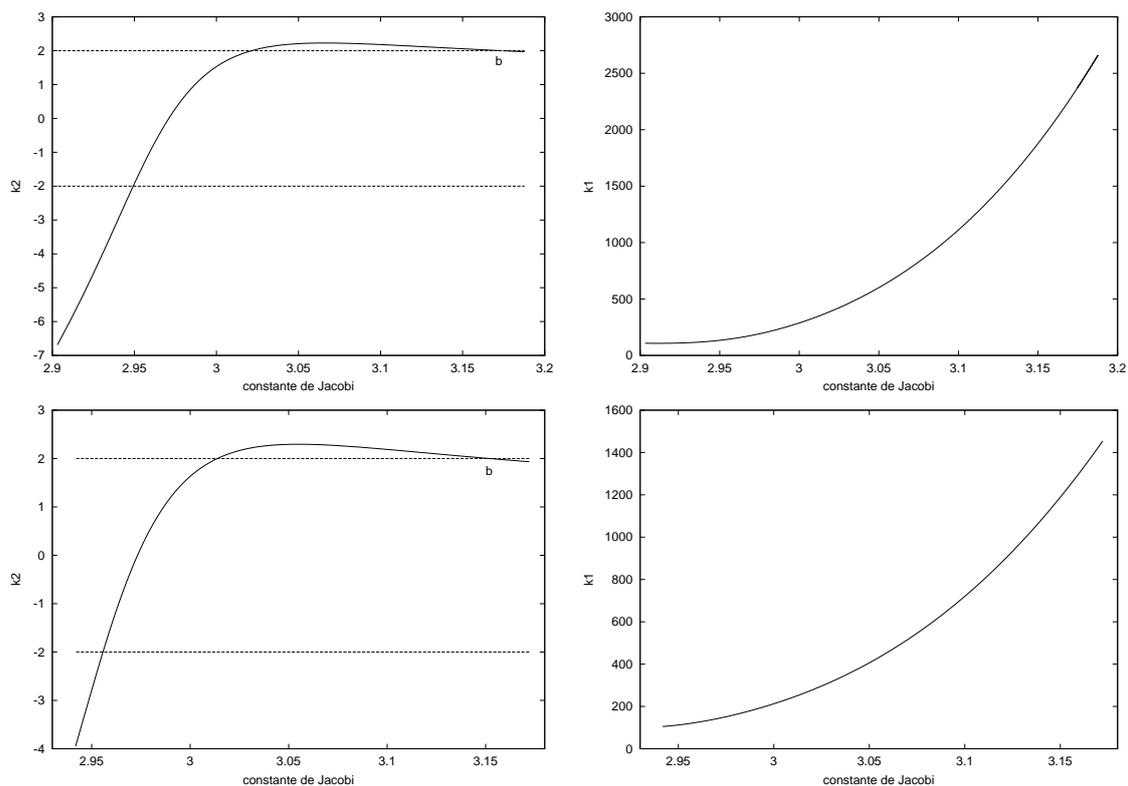


Figura 3.3 - Curva característica das órbitas da família de órbitas de Liapunov de  $L_1$  (acima) e  $L_2$  (abaixo) no sistema Terra-Lua. Nota-se que a família é instável. A letra "b" indica o ponto de bifurcação que origina a família das órbitas halos.

expansiva do fluxo. Utilizando  $D\phi_\tau$ , (onde  $\phi_\tau$  é o fluxo) pode-se obter a imagem de  $\hat{e}_1(0)$  sob o fluxo variacional:  $\hat{e}_1(\tau) = D\phi_\tau \hat{e}_1(0)$ , portanto, a cada ponto da órbita periódica. O vetor  $\hat{e}_1(\tau)$ , junto com o vetor tangente à órbita periódica em  $\tau$ , gera um plano tangente à variedade instável local,  $W_{loc}^u$ . Através de uma continuação dos pontos de  $W_{loc}^u$  sob o fluxo, pode-se produzir por completo a variedade instável local. O raciocínio é análogo ao autovetor  $\hat{e}_2$  que está associado ao autovalor  $\lambda_2$  - lembre-se que  $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$ . Analogamente,  $\hat{e}_2(\tau) = D\phi_\tau \hat{e}_2(0)$  gera, junto com o vetor tangente à órbita periódica, a variedade estável local. Uma maneira mais direta de adquiri-la, a partir da variedade instável, é utilizando a simetria do PRTC.

- (b) O segundo par  $(\lambda_3, \lambda_4) = (1, 1)$  está associado às variáveis neutras, isto é, aos modos não instáveis. Sempre há, neste tipo de sistema, um autovetor de  $A$  cujo autovalor é unitário, sendo tangente ao vetor da órbita. O outro autovalor unitário está associado às variações da energia ou de outra quantidade equivalente. Na órbita periódica, estes dois vetores geram uma



$$\hat{e}_2(t) = (\bar{\gamma}(-t), -\bar{\eta}(-t), \bar{\zeta}(-t), -\dot{\bar{\gamma}}(-t), \dot{\bar{\eta}}(-t), -\dot{\bar{\zeta}}(-t))^T$$

O terceiro modo é o vetor tangente à órbita, que também é uma função periódica  $\bar{e}_3(t)$ .

Os demais modos são um pouco mais complexos de serem definidos. Não serão aqui mencionados, pois fogem do escopo deste capítulo, porém seu detalhamento completo encontra-se na referência seguida (15).

### 3.6 Globalização das Variedades Hiperbólicas

A determinação local das variedades invariantes é equivalente à determinação numérica dos vetores  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$  acima. Através de uma continuação dos pontos da variedade local ( $W_{loc}$ ) sob o fluxo pode-se estender a variedade local, este procedimento é conhecido como globalização de variedades invariantes. Com as condições iniciais da órbita periódica e da integração da Equação 3.22 por um período, determinam-se as direções:

$$\hat{e}_1(t) = \exp(-\lambda_1 t/T)A(t)\hat{e}_1(0) \quad \text{e/ou} \quad \hat{e}_2(t) = \exp(\lambda_1 t/T)A(t)\hat{e}_2(0)$$

A determinação numérica da variedade globalizada é realizada da seguinte forma: sejam  $\epsilon$  um pequeno deslocamento a partir da variedade instável local;  $\mathbf{x}_i$  um ponto na órbita periódica da qual deseja-se determinar a variedade instável; e,  $\mathbf{x}_W$  as condições iniciais da aproximação linear da variedade instável que são dadas por:

$$\mathbf{x}_W = \mathbf{x}_i + \epsilon \hat{e}_1 \tag{3.49}$$

Os pontos na variedade central  $\mathbf{x}_i$  devem estar igualmente espaçados garantindo sua determinação homogênea. Lembrando que cada ponto da variedade central carrega o carácter hiperbólico da hamiltoniana linearizada nas direções ortogonais à órbita, isto é,  $W_{LOC}^s$  e  $W_{LOC}^u$  contêm dois ramos coalescendo na órbita periódica. Portanto, o sinal de  $\epsilon$  define qual ramo destas variedades se deseja determinar, o da direita ou o da esquerda. A Figura 3.6 exhibe os dois ramos de  $W^u$  e  $W^s$ , respectivamente (a falta de um ajuste na escala dos gráficos, pode-se levar a uma falsa impressão de que se trata de órbitas diferentes, o que não é verdadeiro).

A determinação numérica da variedade estável é realizada de maneira similar, diferindo apenas no sentido da integração numérica das equações de movimento, que é feita para trás, i. e., com o tempo negativo. Uma outra alternativa é determiná-la diretamente da simetria do problema, uma vez determinada a variedade instável.

Vale ressaltar que a magnitude do deslocamento  $\epsilon$  não deve ser muito pequena, pois senão não há escape da variedade local, e, nem muito grande, para que a aproximação linear seja válida perto de cada ponto  $\mathbf{x}_i$ . Uma boa estimativa, é que  $\epsilon$  seja da ordem de 200 a 250 km da variedade central.

A matriz  $A$  foi numericamente determinada integrando-se o sistema de equações variacionais da trajetória periódica por um período da mesma, tendo a matriz identidade  $I$  como condição inicial. Para o refino da trajetória foi utilizado o método de Newton modificado, que forneceu uma precisão de fechamento da órbita periódica da ordem de  $10^{-13}$ . Nesta etapa, o refino é um passo fundamental e deve estar precisamente bem determinado, pois de acordo com a natureza do problema, sua dinâmica é muito sensível às condições iniciais. Se alguma variável não estiver bem determinada, os resultados diferem do desejado.

Determina-se o autovetor inicial  $\hat{e}_1(0)$  correspondente ao autovetor dominante usando-se o método das potências (??). Outros métodos para se determinar o autovetor poderiam ser aplicados. A simetria produz imediatamente o autovetor  $\hat{e}_2(0) = \hat{e}_2(0)$  que quando aplicado à globalização da variedade, requer a integração para trás, pois trata-se do autovalor referente à variedade estável local. Uma outra maneira mais simples para a obtenção da variedade estável é aplicar diretamente a simetria do problema. Alguns resultados encontram-se nas Figuras 3.4 e 3.6 deste capítulo.

O primeiro gráfico da Figura 3.4 mostra  $W^u$  e  $W^s$  de uma órbita halo pertencente à família de  $L_1$  do sistema Terra-Sol. A variedade  $W^u$  corresponde ao tubo superior, enquanto que  $W^s$ , seguindo a simetria, corresponde ao tubo inferior. O gráfico abaixo nesta mesma figura representa a secção de Poincaré em  $x = -1 + \mu$  das respectivas variedades. A curva fechada à esquerda é o corte de  $W^s$  e à direita é  $W^u$ . As projeções,  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  e  $(y, z)$ , da órbita halo associada encontram-se na Figura 3.5, respectivamente.

O primeiro par de gráficos da Figura 3.6 representa o ramo instável da variedade de

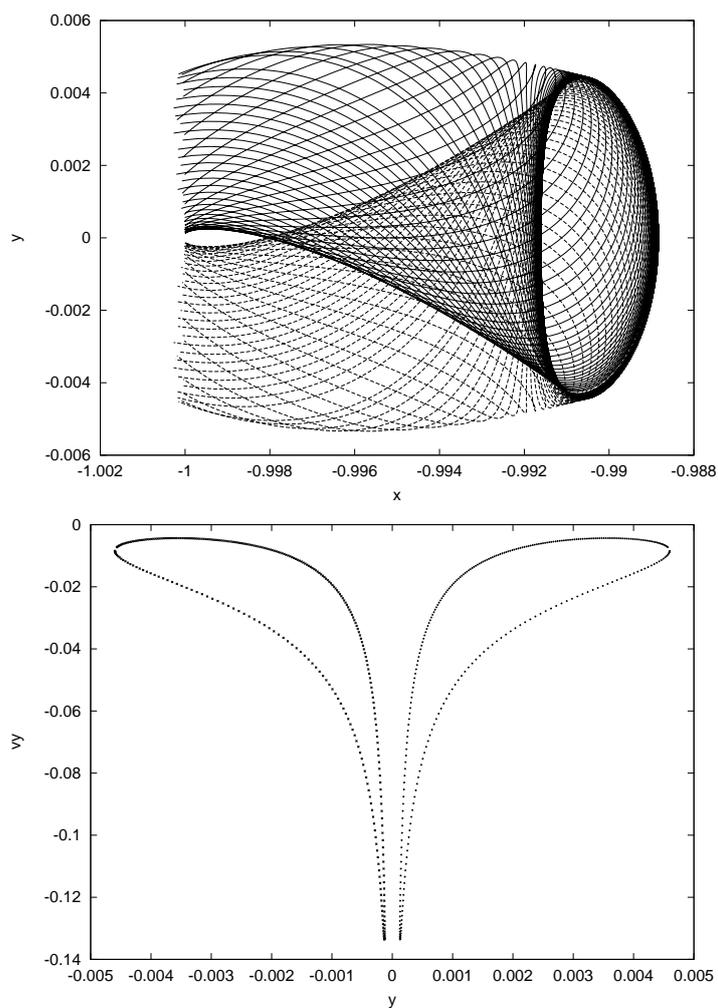


Figura 3.4 - Variedades invariantes instável e estável da órbita halo de  $L_1$  no sistema Terra-Sol cuja constante de Jacobi é  $C = 3.000829$ .  $W^u$  corresponde ao tudo superior e  $W^s$  ao inferior. As projeções da órbita halo correspondente encontram-se na Figura 3.5. O gráfico abaixo representa o corte das variedades na secção de Poincaré  $x = -1 + \mu$ , a curva à esquerda da origem é a variedade estável enquanto que a curva à direita da origem é a variedade instável.

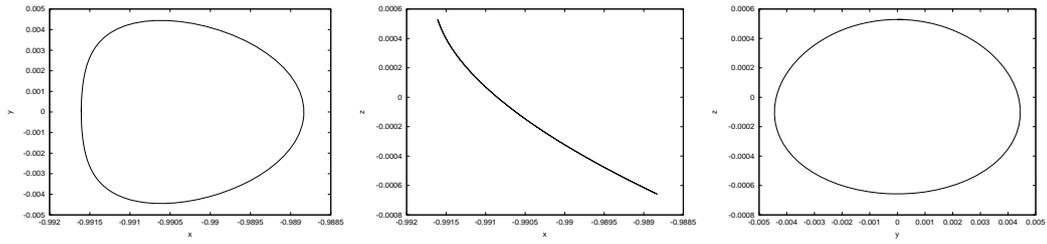


Figura 3.5 - Projeções da órbita halo pertencente à família do ponto lagrangiano  $L_1$  do sistema Terra-Sol cuja constante de Jacobi é  $C = 3.000829$ . As variedades estável e instável correspondente a esta variedade central encontram-se desenhadas na Figura 3.4

uma órbita de Liapunov plana de  $L_1$  do sistema Terra-Lua, e o segundo par o ramo estável. Evidencia-se, claramente, a simetria entre os ramos. A constante de Jacobi da órbita considerada é  $C_J = 3.160809$ .

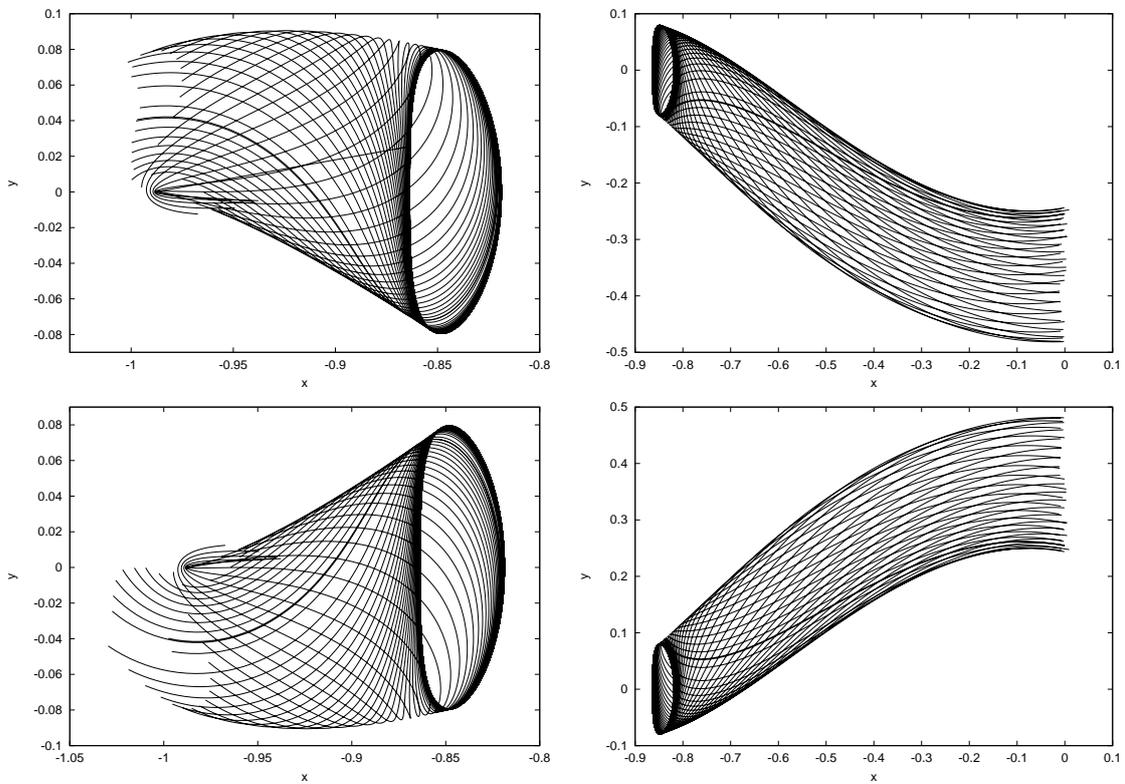


Figura 3.6 - O primeiro par horizontal de gráficos representa o ramo instável da variedade invariante de uma órbita de Liapunov ( $C = 3.160809$ ) referente à família  $L_1$  do sistema Terra-Lua. O segundo par horizontal de gráficos é o ramo estável, que é simétrico ao primeiro.

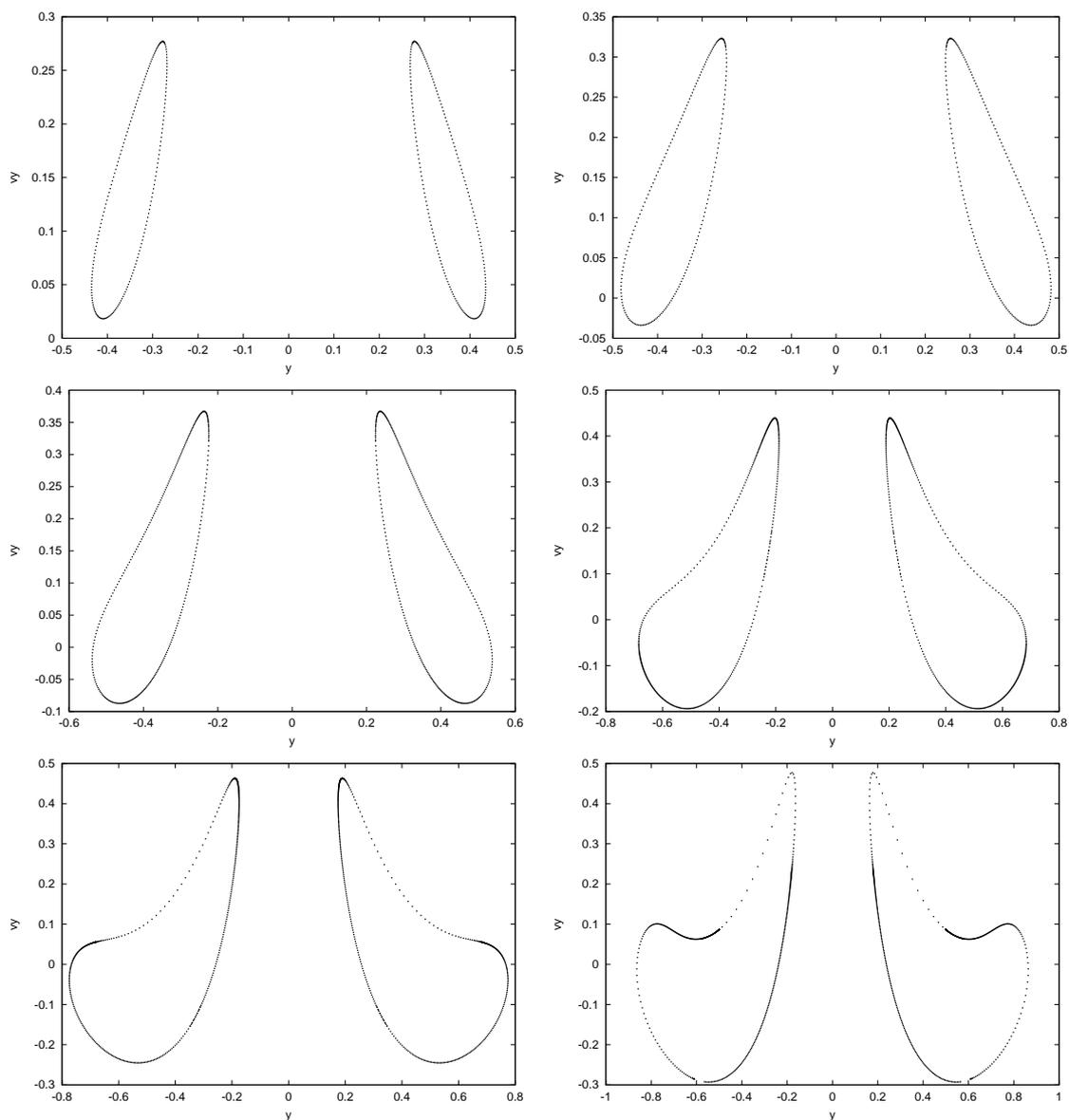


Figura 3.7 - Secção de Poincaré em  $x = \mu$  de  $W^u$  (à direita da origem) e  $W^s$  (à esquerda da origem) de algumas órbitas de Liapunov pertencentes à família  $L_1$  do sistema Terra-Lua. As constantes de Jacobi são  $C = 3.174117$ ,  $C = 3.160809$ ,  $C = 3.142624$ ,  $C = 3.093237$ ,  $C = 3.063506$ ,  $C = 3.033054$ , respectivamente.



## 4 SUPERPOSIÇÃO DOS MODELOS

### 4.1 Introdução

Este Capítulo apresenta como linha principal o uso das técnicas vistas nos Capítulos anteriores com a finalidade de investigar possíveis trajetórias de transferência para uma missão lunar, através de trajetórias guiadas pelas variedades invariantes estáveis e instáveis dos pontos lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$ . Por seguirem as trajetórias dessas variedades, tais missões permitem uma economia considerável de combustível, embora o tempo de transferência requerido seja grande. Sendo, portanto, adequadas a missões não tripuladas.

Pode-se entender as variedades invariantes como separatrizes do espaço de fase, dividindo-o em duas regiões, portanto há trajetórias que seguem por dentro das variedades e outras que vão por fora. Além disto, ao projetar essas trajetórias nas regiões de Hill, nota-se que as trajetórias que transitam por dentro da variedade atravessam as regiões exterior e interior, ao passo que, as que seguem por fora da variedade, confinam-se apenas em uma das regiões, ou na interior ou na exterior. Tais trajetórias foram classificadas (26, 29) como órbitas de trânsito e de não trânsito, respectivamente.

As variedades invariantes, sejam estas estáveis ou instáveis, dos pontos lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$  não se aproximam do primário de maior massa do PRTC, impossibilitando, desta forma, uma transferência direta entre os primários de um mesmo modelo. Portanto, se o objetivo é chegar à Lua seguindo caminhos naturais - dados pela própria dinâmica do problema - há esta barreira dinâmica que o impede. Em outras palavras, no sistema Terra-Lua, se o veículo abandona as proximidades da Terra seguindo o fluxo na vizinhança da variedade estável, seja de  $L_1$  ou  $L_2$ , este não atingirá a órbita lunar através, somente, dessas artérias naturais. Por outro lado, pode-se acoplar, em primeira aproximação, dois PRTC com um primário em comum e determinar as possíveis intersecções entre as variedades hiperbólicas dos dois modelos.

Considera-se que a partícula, ou veículo espacial, abandona a Terra numa trajetória de não trânsito próxima à variedade estável da órbita de Liapunov de  $L_1$  ou  $L_2$  no modelo Terra-Sol, até um ponto de intersecção no interior da variedade estável de outra órbita de Liapunov de  $L_2$  no modelo Terra-Lua, onde o veículo seguirá uma órbita de trânsito até ser capturado em órbita lunar. A conexão entre os dois

modelos é feita em uma secção de Poincaré apropriada, onde a condição final de uma trajetória é a condição inicial da trajetória do outro sistema, a menos de uma coordenada, pois as constantes de Jacobi de cada variedade diferem. Uma vez que o Sol, devido a sua massa, causa uma influência não desprezível ao sistema Terra-Lua, busca-se uma trajetória de trânsito mais realística, isto é, que considere o efeito do potencial solar. Na verdade, busca-se uma trajetória que seja solução do modelo restrito de quatro corpos tendo como ponto de partida a trajetória de transferência previamente adquirida. Este procedimento é conhecido como refino de uma solução de um modelo simples em um modelo mais completo. Para a execução desta tarefa é aplicado o método numérico de múltiplos tiros, levando uma solução do PRTC ao problema restrito de quatro corpos. Neste caso foi adotado o modelo bicircular, onde os primários são a Terra, o Sol e a Lua.

Como o objetivo é lançar a partícula das proximidades da Terra, ou seja, a partir de uma órbita de estacionamento baixa, é possível que apareça singularidade nas equações de movimento, dado que a distância entre a partícula e o primário pode se tornar muito pequena, ocasionando erros nas integrações numéricas, mesmo que não haja uma colisão física. Para contornar este problema, trabalha-se no espaço regularizado, que elimina a singularidade de colisão das equações de movimento, proporcionando segurança computacional. Para este problema foi adotada a transformação de Levi-Civita, que é uma transformação apropriada ao caso planar.

Neste Capítulo também é apresentado um estudo sistemático sobre as possíveis intersecções entre as variedades hiperbólicas do PRTC envolvidos em função da constante de Jacobi e da variação da fase lunar.

## 4.2 Regiões de Hill

O modelo considerado nas transferências envolvidas neste Capítulo é o PRTC planar cujo espaço de fase é quadridimensional,  $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ . É suficiente inserir  $z = \dot{z} = 0$  nas equações de movimento (Equação 2.2) para obter as equações de movimento correspondentes. Portanto, o potencial efetivo torna-se:

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(1 - \mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu)$$

onde,  $r_1^2 = (x - \mu)^2 + y^2$  e  $r_2^2 = [x - (\mu - 1)]^2 + y^2$ , e a constante de Jacobi é reduzida a:

$$C = 2\Omega - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \quad (4.1)$$

As superfícies definidas pela constante de Jacobi, são subespaços invariantes tridimensionais. Seja  $\Gamma$  a superfície de energia constante,

$$\Gamma(\mu, C) = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mid C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \text{constante}\},$$

a projeção desta superfície no espaço de configuração  $(x, y)$  é conhecida como região de Hill, limitada por

$$T(\mu, C) = \{(x, y) \mid \Omega(x, y) \geq \frac{C}{2}\}$$

O limite de  $T$  é a curva de velocidade zero que define as possíveis regiões de movimento da partícula. Basicamente, há duas grandes regiões, a interior e a exterior que podem se conectar dependendo do valor de  $C$ . Sejam  $C_i$  as constantes de Jacobi referentes aos pontos lagrangianos  $L_i$ . Se  $C \geq C_2$  o movimento é permitido na região exterior e nas regiões fechadas ao redor de cada primário, e corresponde às áreas claras na Figura 4.1 (alto à esquerda). Se  $C_2 > C \geq C_1$  o movimento é possível na região exterior e ao redor de cada primário ou ao redor dos dois primários na região interna, (Figura 4.1 - alto à direita); neste caso há uma comunicação entre as regiões interiores de cada primário, mas a energia não atingiu o valor necessário para que haja uma conexão entre as regiões interna e externa. Se  $C_1 > C \geq C_3$ , o lóbulo se abre em  $L_2$  e o movimento é permitido em qualquer região, tanto na externa como na interna, ocasionando uma conexão entre estas duas regiões (baixo à esquerda). Este tipo de conexão é importante para o estudo de capturas pelo primário de menor massa. Se  $C_3 > C \geq C_4$  o movimento pode ocorrer em qualquer parte do espaço exceto nas regiões cinzas (baixo à direita), acabando em  $C = C_4$  ou em  $C = C_5$ , pois correspondem ao valor mínimo do potencial efetivo  $\Omega(x, y)$ . Em particular, o interesse deste trabalho concentra-se nos valores de  $C$  para os quais há conexão entre as regiões, se o sistema considerado é o Terra-Lua. Para o sistema Terra-Sol, não há vínculo em relação aos valores de energia considerados, neste caso  $C$ , pode assumir qualquer valor, desde que seja maior que  $C_1$ , pois, no mínimo este lóbulo deverá estar aberto. A Tabela 4.1 lista os valores de  $C_i$  nos pontos lagrangianos para cada PRTC, o Terra-Sol e o Terra-Lua.

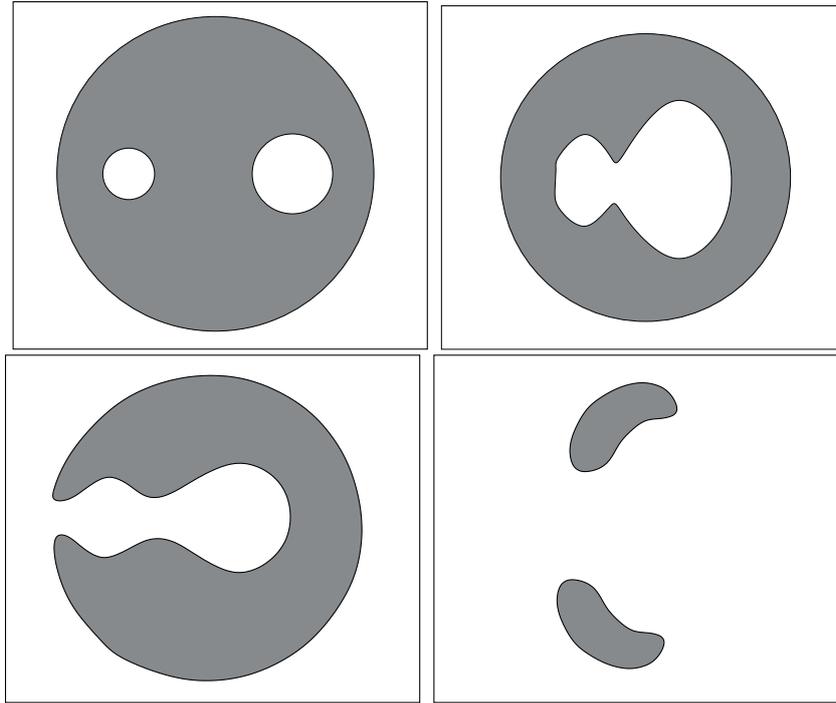


Figura 4.1 - Regiões de Hill: a região cinza é a região proibida.

Tabela 4.1 - Constante de Jacobi.

	Terra - Sol	Terra - Lua
$C_1$	3.00089793	3.18834108
$C_2$	3.00089387	3.17216043
$C_3$	3.00000304	3.01214715
$C_{4,5}$	2.99999696	2.98799706

### 4.3 Transferências Orbitais Guiadas pelas Variedades

Como foi visto no capítulo anterior, a linearização da hamiltoniana na vizinhança dos pontos de equilíbrio é um item fundamental à compreensão de sistemas não lineares. Dada a hamiltoniana linearizada

$$H_2 = \lambda q_1 p_1 + i\omega_1 q_2 p_2 + i\omega_2 q_3 p_3,$$

com  $q_3 = p_3 = 0$ , as respectivas equações linearizadas são:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \lambda q_1 & \dot{p}_1 &= -\lambda p_1 \\ \dot{q}_2 &= \omega_1 p_2 & \dot{p}_2 &= -\omega_1 q_2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_1^0 e^{\lambda t} & p_1(t) &= p_1^0 e^{-\lambda t} \\ q_2(t) + ip_2(t) &= (q_2^0 + ip_2^0) e^{-i\omega_1 t} \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $q_1^0, p_1^0, q_2^0, p_2^0$  são as condições iniciais. Tais equações linearizadas admitem integrais primeiras em adição à hamiltoniana, o que os torna um sistema integrável com constantes de movimento  $q_1 p_1$  e  $q_2^2 + p_2^2$ .

Seja  $h = H_2$  o valor da hamiltoniana, então,

$$q_1 p_1 + \frac{\omega_1}{2} (q_2^2 + p_2^2) = h$$

define uma esfera.

Para analisar o fluxo linearizado no espaço de fase, consideram-se projeções desacopladas de  $(q_1, p_1)$  e  $(q_2, p_2)$ . No primeiro caso, tem-se um retrato de fase de um ponto sela e, no segundo caso, o de um oscilador harmônico simples. A Figura 4.2 ilustra esquematicamente o fluxo nestas duas situações. No retrato de fase em que  $q_2^2 + p_2^2 = 0$ , as linhas de fluxo dadas por  $q_1 p_1 = h/\lambda$  são hipérbolas características das selas onde as retas  $q_1 p_1 = 0$  são separatrizes. Seguindo a terminologia de (26, 29), convencionam-se que o eixo  $q_1 + p_1 = 0$  é o equador definindo dois hemisférios: o norte, para  $q_1 + p_1 > 0$ , e o sul, para  $q_1 + p_1 < 0$  e o eixo vertical  $q_1 - p_1 = 0$  define os hemisférios leste e oeste. Os segmentos hiperbólicos determinados por  $q_1 p_1 > 0$  atravessam as regiões de leste a oeste e vice-versa, por esta razão tais trajetórias são classificadas como trajetórias de trânsito. Os segmentos hiperbólicos em que  $q_1 p_1 < 0$  confinam-se em uma única região, desta forma, eles não transitam entre as regiões, são conhecidas como trajetórias de não trânsito.

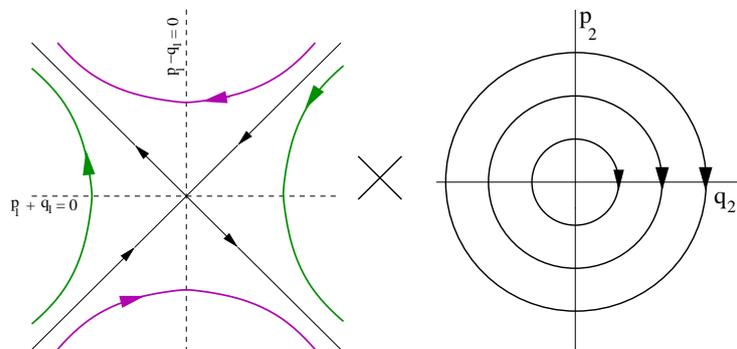


Figura 4.2 - Retrato de fase de um ponto sela-centro.

O produto cartesiano dessas assíntotas pela órbita periódica formam cilindros; quando se inclui os termos não lineares, estes cilindros deformam-se e curvam-se, gerando assim as variedades invariantes estável e instável. O espaço de fase, no PRTC planar, é quadridimensional, mas ao considerar a constante de Jacobi, o movimento fica restrito a uma superfície tridimensional, portanto esses cilindros dividem o espaço de fase em duas regiões: a região interna e a região externa a eles, sendo separatrizes do espaço, assim como as assíntotas hiperbólicas de equilíbrio no modelo linear. Transportando essas idéias ao caso de interesse, há dois tipos de trajetórias relacionadas às variedades hiperbólicas: as órbitas de trânsito, que seguem por dentro da variedade, e as órbitas de não trânsito, que seguem por fora da variedade considerada. As trajetórias de trânsito transitam entre as regiões interna e externa limitadas pela curva de velocidade zero, isto só ocorre quando o lóbulo em  $L_2$  se abre. Também, são classificadas trajetórias de trânsito as que transitam entre as duas regiões internas das curvas de velocidade zero (ver Figura 4.1 alto à direita), isto é quando o lóbulo em  $L_1$  já está aberto e a trajetória pode passar entre essas regiões internas. As órbitas de não trânsito permanecem em apenas uma das regiões, podendo transitar apenas entre os hemisférios norte e sul, mas nunca passar de leste a oeste ou vice-versa.

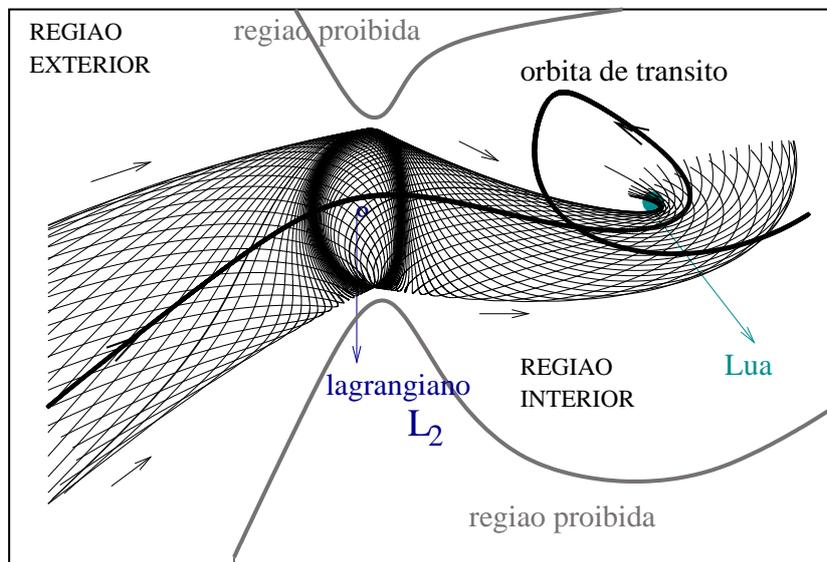


Figura 4.3 - Órbita de trânsito de  $W_{L_2}$  no sistema Terra-Lua. Os limites da região de Hill são representações gráficas. Nota-se que a trajetória transita entre as regiões externa e interna, aproximando-se da Lua.

A divisão do espaço de fase em duas regiões permite que a determinação numérica das trajetórias de trânsito e de não trânsito seja feita com o auxílio de uma secção de Poincaré. Um ponto interno ao corte da variedade, estável ou instável, na secção de Poincaré gera uma órbita de trânsito, como está indicado na Figura 4.5 (esquerda). Se o objetivo é determinar trajetórias que aproximam-se do primário de menor massa passando na vizinhança de  $L_2$ , há duas possibilidades: se o ponto selecionado estiver dentro do corte de  $W^s$ , a trajetória de trânsito pode ser expandida diretamente através de uma integração para frente, mas se o mesmo pertencer à  $W^u$ , este deverá ser integrado para trás. A determinação da órbita de não trânsito é bastante similar à da anterior, porém o ponto deve estar externo, mas próximo, ao corte de  $W^u$  ou  $W^s$  na secção de Poincaré (ver Figura 4.5 - direita); como mostra Koon et al (26), se o ponto, for externo nas proximidades de  $W^u$ , ao ser integrado para trás, sua trajetória será encaminhada até as proximidades de  $W^s$  de mesma energia.

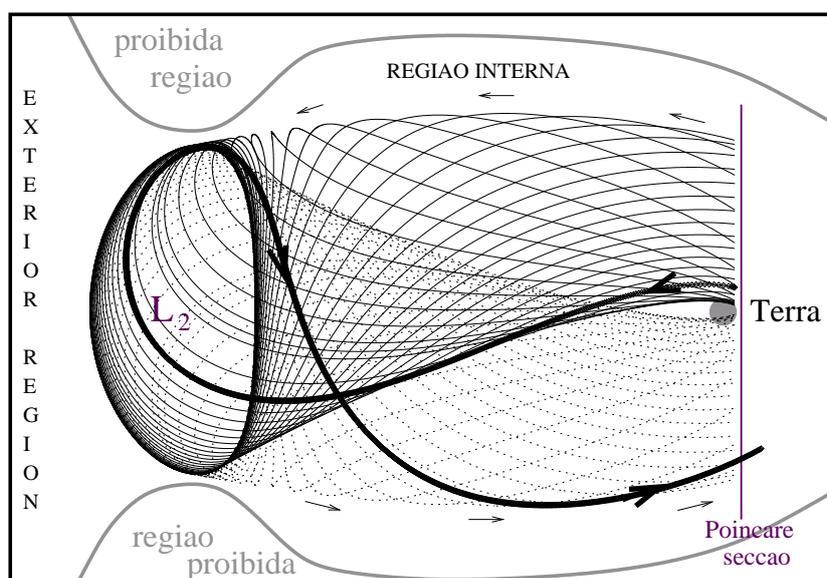


Figura 4.4 - Órbita de não trânsito de  $W_{L_2}$  no sistema Terra-Sol. A trajetória de não trânsito inicia-se nas proximidades da Terra, aproximando-se do ponto  $L_2$  onde faz um enlace e retorna em direção à Terra. Nota-se que a órbita permanece apenas na região interna de Hill.

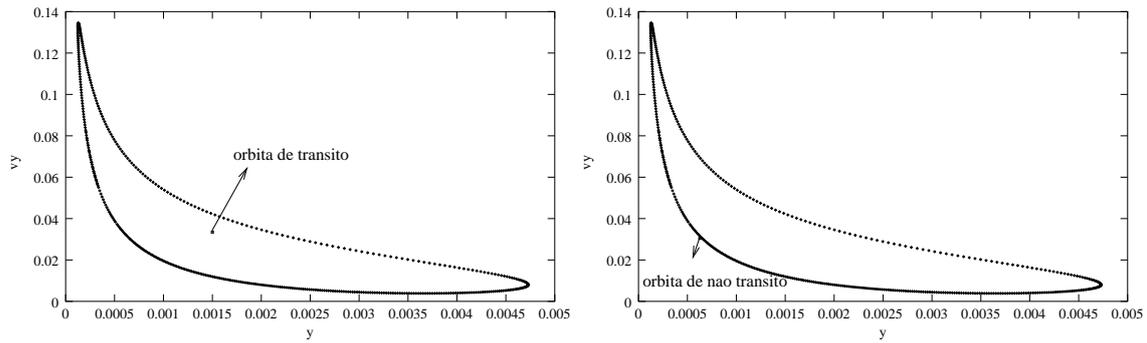


Figura 4.5 - Secção de Poincaré da órbita de trânsito e da órbita de não trânsito.

#### 4.4 Transformação Levi-Civita

Para extrair a singularidade de colisão das equações de movimento que afetam o movimento da partícula quando passa muito perto de algum dos primários, seja este o de menor ou o de maior massa, é necessária a aplicação de algum método de regularização. No caso estudado, optou-se em utilizar as transformações de Levi-Civita. A descrição completa desta metodologia está em (44), aqui a abordagem será sucinta.

No PRTC a partícula guiada pelas variedades  $W^u$  ou  $W^s$  está vulnerável à colisão com o primário de menor massa, seja no sistema Terra-Sol ou no Terra-Lua. As variedades instável e estável de  $L_{1,2}$  não se aproximam do primário de maior massa, seja do Sol, para o caso Terra-Sol, ou da Terra, para o caso Terra-Lua. Sendo esta, a principal motivação do acoplamento dos sistemas, pois, se as variedades  $W^u$  ou  $W^s$  se aproximassem dos primários de um único modelo, não seria necessária a superposição de dois PRTC, neste caso a conexão entre os primários se daria de maneira direta.

Portanto, a transformação de Levi-Civita remove a singularidade de colisão das equações de movimento do caso planar, permitindo um trabalho computacional confortável. Porém, se o sistema possui três graus de liberdade, a aplicação do método de regularização é um pouco mais complexa, pois requer uma extensão do espaço de fase, de três para quatro graus de liberdade com um vínculo, neste caso, é necessário a aplicação do método de Kustaanheimo-Stiefel, que é uma generalização do método de Levi-Civita. Esta parte do trabalho lida apenas com o caso bidimensional, sendo suficiente a aplicação do método de Levi-Civita.

Primeiramente, faz-se uma translação da origem, do centro de massa para o primário de menor massa  $x = x_{cm} - (\mu - 1)$  e aplica-se a transformação :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

o vetor velocidade associado é dado por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{2}{r} \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = u_1^2 + u_2^2$ . Para completar o procedimento de regularização é necessário um escalonamento temporal, dado por:

$$\frac{d}{ds} = r \frac{d}{dt}$$

Inserese a transformação nas equações de movimento (Equação 2.2), em que  $z = \dot{z} = 0$ , e integra-se no tempo  $s$ . A volta da trajetória do espaço regularizado  $(u, u', s)$  para o espaço físico  $(x, \dot{x}, t)$  é dada pelas transformações inversas, lembrando que esse espaço é duplicado no espaço regularizado.

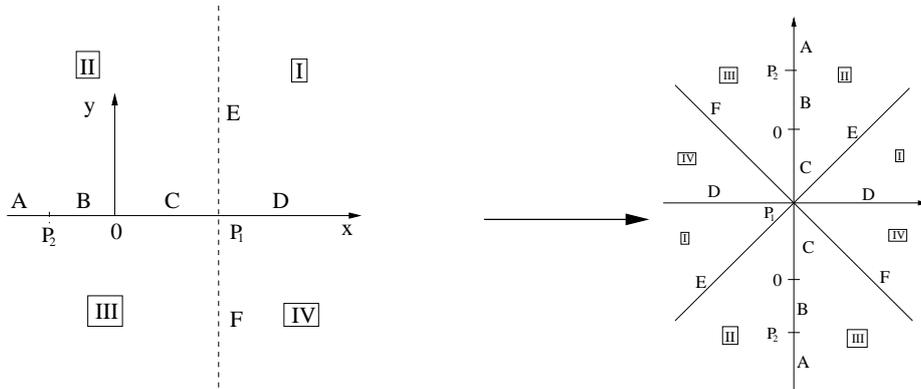


Figura 4.6 - Transformação de Levi-Civita

A Figura 4.7 compara o corte na secção de Poincaré das variedades estável e instável de uma órbita de Liapunov de  $L_1$  no sistema Terra-Sol, nos espaços regularizado e físico. A secção de Poincaré no espaço regularizado exhibe uma curva fechada mais regular, enquanto que, no espaço físico, a mesma é bastante deformada. Este fato

não implica grandes conclusões, apenas ratifica que trabalhar computacionalmente no espaço regularizado é mais confortável.

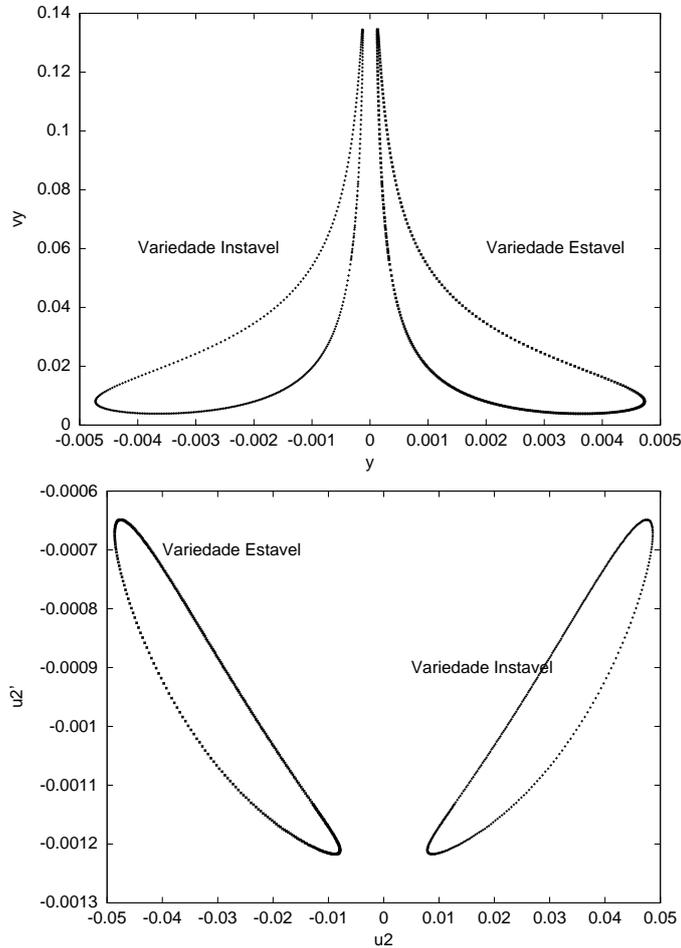


Figura 4.7 - Secção de Poincaré em  $x = -1 + \mu$  das variedades instáveis/estáveis no espaço físico (acima) e no espaço regularizado (abaixo) de  $L_1$  do sistema Terra-Sol.

## 4.5 Superposição dos Modelos

As conexões homoclínicas são trajetórias biassíntotas a uma mesma órbita periódica enquanto que as heteroclínicas são trajetórias biassíntotas a duas órbitas periódicas ao redor de pontos de equilíbrio distintos de mesma energia. Inspirado nesta idéia das conexões homoclínicas e heteroclínicas, esta seção apresenta um tipo de "conexão" que pode ser utilizada às transferências de satélites artificiais.

Primeiramente, considera-se o problema restrito de quatro corpos, Terra-Sol-Lua-

partícula, como dois modelos restritos de três corpos com um primário comum a ambos; neste caso são os sistemas Terra-Sol e Terra-Lua. A conexão de interesse é entre uma órbita de não trânsito no modelo Terra-Sol e outra de trânsito no modelo Terra-Lua.

O veículo espacial abandona a vizinhança da Terra seguindo uma órbita de não trânsito associada à variedade invariante estável de  $L_1$  ou  $L_2$  no sistema Terra-Sol, lembrando que a órbita de trânsito alcança os pontos  $L_1$  ou  $L_2$  retornando então à vizinhança da Terra. Em algum momento de seu trajeto é fornecido um pequeno incremento de velocidade, para que o mesmo seja forçado a entrar em órbita de trânsito guiada pela variedade invariante estável de  $L_2$  no sistema Terra-Lua. A intersecção entre as órbitas desses dois modelos dinâmicos é feita na secção de Poincaré, localizada em um plano passando pelo primário comum aos modelos. No modelo Terra-Sol (TS), este plano localiza-se em  $x = -1 + \mu_{TS}$  enquanto que no Terra-Lua (TL) está em  $x = \mu_{TL}$ . Para que os dois planos sejam coincidentes, deve-se aplicar uma mudança de escala adequada.

A transferência completa pode ser entendida a partir da Figura 4.8. O primeiro mapa é a secção de Poincaré das variedades nos dois sistemas considerados. (em  $x = -1 + \mu_{TS}$  e em  $x = \mu_{TL}$ ). Um ponto dentro do corte de  $W_{TL}^s$  gera uma órbita de trânsito, ao passo que, um ponto fora, mas nas proximidades, do corte de  $W_{TS}^s$  gera uma trajetória de não trânsito. Sendo o interesse por trajetórias de não trânsito que aproximam-se da vizinhança da Terra, as condições iniciais do ponto na secção de Poincaré foram integradas para trás. A figura inferior mostra as trajetórias adquiridas por esta intersecção no sistema de coordenadas sinódico do sistema Terra-Sol.

#### 4.5.1 Variação da Constante de Jacobi

Uma vez que o sistema dinâmico considerado é hamiltoniano, há inúmeras combinações entre as trajetórias de trânsito e não trânsito, devido ao continuum de soluções periódicas, parametrizadas pela constante de Jacobi, ao redor de cada ponto de equilíbrio e, conseqüentemente, a existência de infinitas variedades invariantes estável e instável em cada sistema considerado. Isto pode ser elucidado através da secção de Poincaré como mostra a Figura 4.9; a curva preenchida (negra) corresponde ao corte das variedades estáveis das órbitas periódicas planas ao redor de  $L_2$  no sistema Terra-Lua para diferentes valores da constante de Jacobi, isto é, para o continuum de

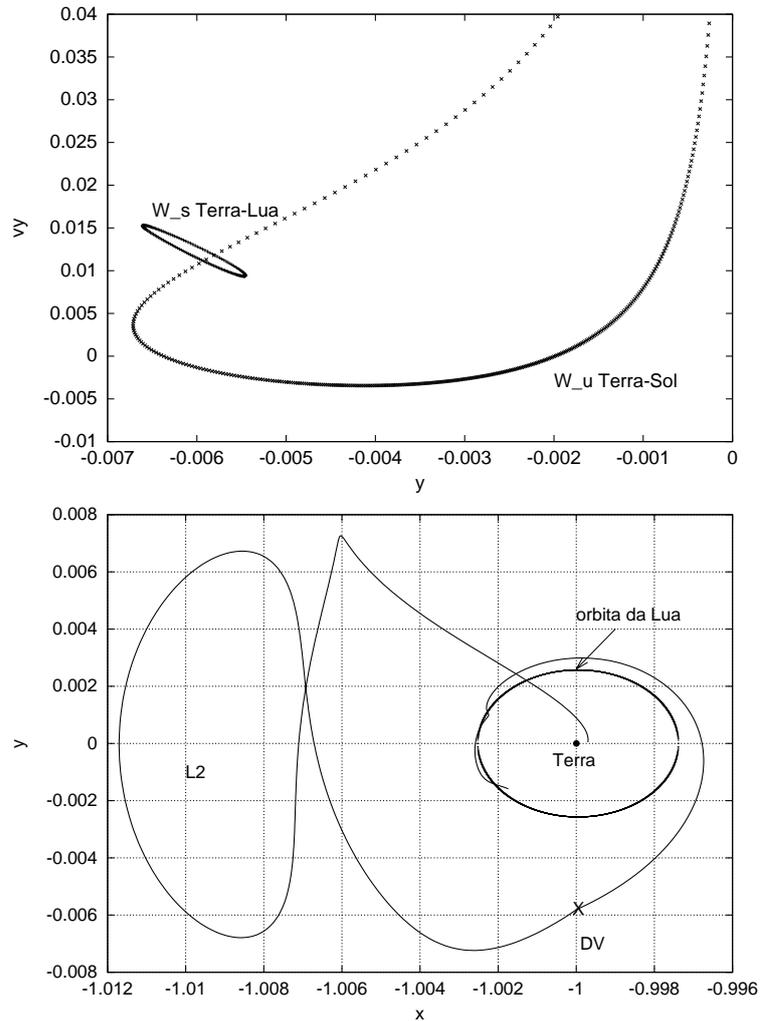


Figura 4.8 - Conexão das órbitas na secção de Poincaré, localizada na Terra, das variedades instável de  $L_2$  no sistema Terra-Sol com a variedade estável de  $L_2$  no modelo Terra-Lua. O gráfico inferior exibe a trajetória da transferência completa, órbitas de não trânsito e trânsito, no sistema sinódico Terra-Sol.

soluções periódicas ao redor de  $L_2$ . Para não sobrecarregar a figura, apenas algumas variedades instáveis das órbitas de Liapunov ao redor de  $L_2$  no sistema Terra-Sol foram desenhadas.

Para restringir a busca pelas conexões entre os dois modelos, foi adotado um critério de distância mínima entre as variedades ( $W^{u,s}$ ) e o primário de menor massa. Visto que o veículo deve partir das proximidades da Terra, que é o primário de menor massa do sistema Terra-Sol, e chegar na vizinhança da Lua, que é o primário de menor massa do sistema Terra-Lua, definiu-se uma esfera ao redor de cada corpo,

descartando as variedades  $W^{u,s}$  que passam por fora desta esfera em cada modelo. As variedades invariantes hiperbólicas, geralmente associadas às órbitas periódicas de pequena amplitude, não se aproximam do primário de menor massa (Figura 4.10).

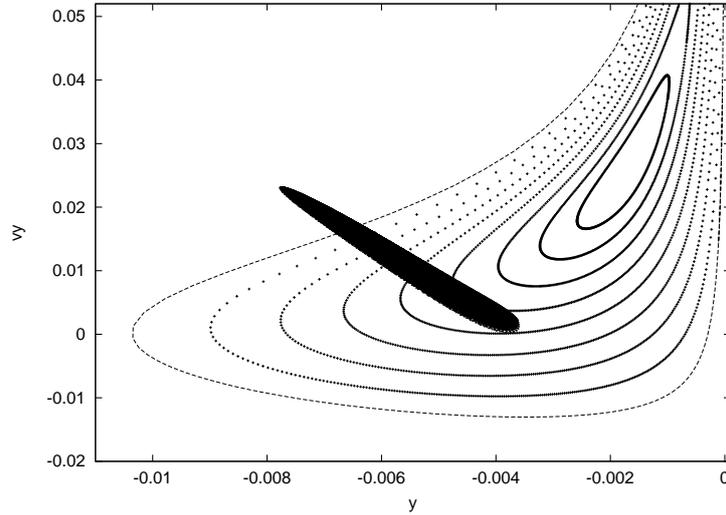


Figura 4.9 - Conexão entre as secções de Poincaré ( $x = -1 + \mu_{TS}$  e  $x = \mu_{TL}$  da variedade  $W^u$  da família de Liapunov de  $L_2$  no sistema Terra-Sol e de  $W^s$  da família de Liapunov de  $L_2$  no sistema Terra-Lua.

Visto que as órbitas de estacionamento ao redor da Terra podem atingir uma altura de até 30 mil km, estipula-se que o limite de distância, entre a borda superior ou inferior do tubo da variedade estável (de  $L_1$  ou  $L_2$ ) e a Terra no sistema Terra-Sol, deve ser de aproximadamente 0.00020 em unidades canônicas. Para a inserção do veículo em órbita lunar considerou-se que a distância máxima entre a borda inferior do tubo da variedade instável referente às órbitas de  $L_2$  deve ser de 5000 km que corresponde a 0.013028 unidades canônicas. Isto não significa que todos os pontos pertencentes à zona de intersecção geram trajetórias interessantes ao objetivo do trabalho, pois nem toda trajetória de não trânsito, guiada por uma dessas variedades, pertencente à zona de intersecção aproxima-se da Terra o quanto se deseja.

As condições iniciais das órbitas de Liapunov (Figura 4.11) que geram essas variedades invariantes limites estão na Tabela 4.5.1.

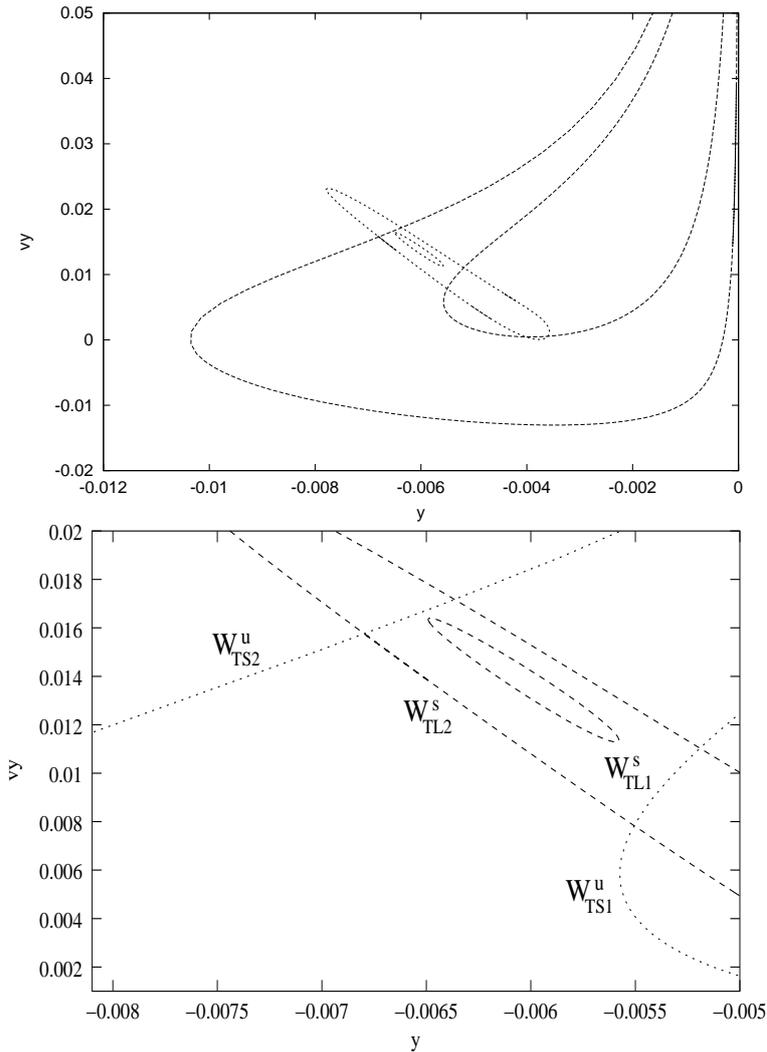


Figura 4.10 - Limite da zona de intersecção entre os modelos. O índice TS representa o sistema Terra-Sol e o índice TL o Terra-Lua. A figura abaixo mostra uma ampliação da zona intersecção.

#### 4.5.2 Fases da Lua

Dentro deste contexto uma possibilidade a ser explorada é considerar a fase da Lua na obtenção das intersecções das variedades nos dois modelos. Para isto, fixa-se um dos referenciais e estuda-se o outro em relação a este sistema. Optou-se por fixar o sistema Terra-Lua, isto é, um observador no Terra-Lua enxergará o sistema Terra-Sol em movimento, mas isto não impede que a integração dos modelos seja feita separadamente em seus respectivos sistemas sinódicos. O que, de fato, é realizado, é um ajuste no corte da secção de Poincaré do Terra-Lua, das coordenadas sinódicas para as coordenadas fixas em escala do sistema Terra-Sol. Portanto, a intersecção da

Tabela 4.2 - Condições iniciais das OP's limites.

	$x_0$	$\dot{y}_0$	$C_J$	$k_1$	$k_2$	T/2
TS1	-1.01149819	0.01093317	3.00079083	1560.83607	2.02573493	1.5558992
TS2	-1.020392633	0.35059982	3.0005689	886.953969	2.19676591	1.67918158
TL1	-1.18212003	0.16488212	3.14962509	1184.34113	2.00859114	1.69580095
TL2	-1.20351928	0.3476276	3.0654849	488.94977	2.28655205	1.87911492

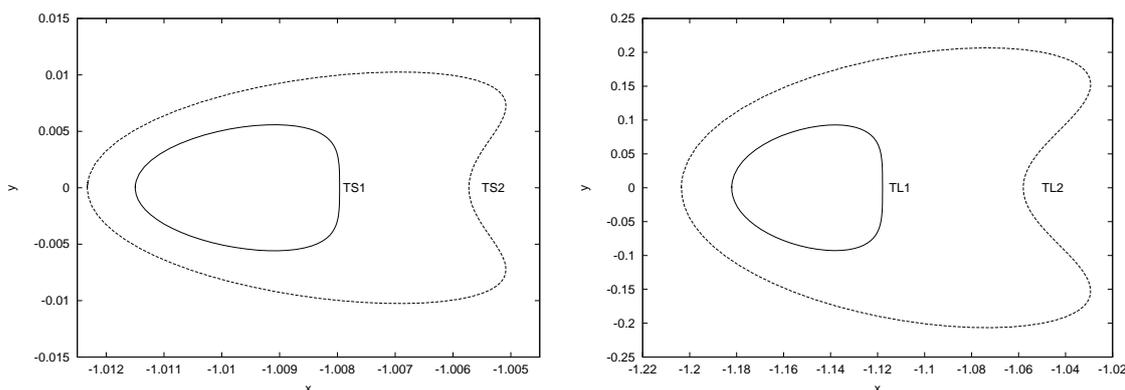


Figura 4.11 - Órbitas de Liapunov que originam as variedades limites  $W_{TS1}^u$ ,  $W_{TS2}^u$ ,  $W_{TL1}^s$  e  $W_{TL1}^s$ .

variedade estável de  $L_2$  no Terra-Lua com a variedade instável no Terra-Sol, depende do ângulo de fase da Lua. A superfície de Poincaré escolhida, no sistema Terra-Sol, é:

$$x = -1 + \mu_{TS}$$

e no Terra-Lua,

$$x = -\mu_{TL} + \alpha y$$

onde  $\alpha$  é a fase da Lua,  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . As duas secções são sobrepostas com um ajuste de escala entre os dois sistemas, Terra-Sol e Terra-Lua. Optou-se em escrever todas as coordenadas com as unidades do sistema Terra-Sol.

A Figura 4.12 mostra a intersecção das variedades instáveis associadas a  $L_2$  (Terra-Sol) com a variedade estável associada a  $L_2$  (Terra-Lua) considerando a fase lunar. A secção de Poincaré de  $W_{TS}^u$  exhibe várias curvas internas, que representam o corte da variedade para diferentes níveis de energia. Nota-se que é possível obter a intersecção desejada considerando diversos ângulos da posição lunar, o que já não ocorre para a intersecção entre  $W_{TS}^u$  de  $L_1$  com  $W_{TL}^s$  de  $L_2$  - ver Figura 4.13.

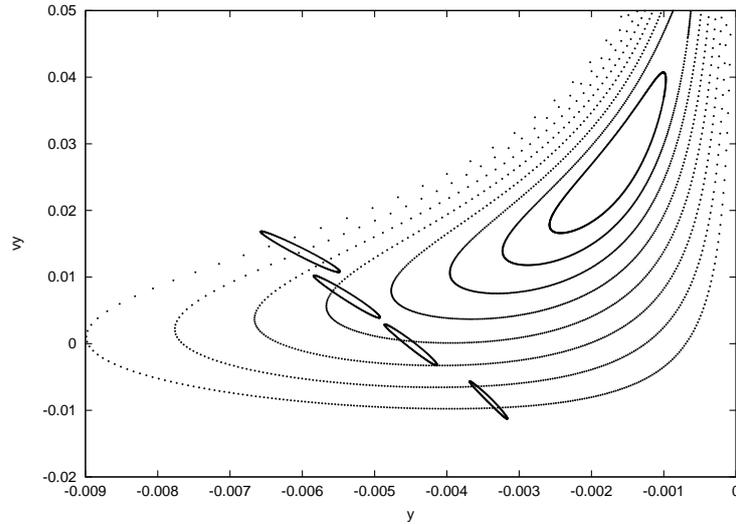


Figura 4.12 - Intersecção de  $W_{TS}^u$  das órbitas de Liapunov de  $L_2$  com  $W_{TL}^s$  das órbitas de Liapunov de  $L_2$ . As curvas de  $W_{TS}^u$  representam o corte das variedades na secção  $x = \mu - 1$  em diferentes níveis de energia. As curvas mais escuras representam  $W_{TL}^s$  considerando a fase lunar.

## 4.6 Refino Numérico das Trajetórias

As trajetórias de trânsito adquiridas no PRTC são trajetórias aproximadas de um modelo mais completo, pois neste caso a presença do Sol não deve ser negligenciada. A técnica numérica de múltiplos tiros permite que tais trajetórias, adquiridas no modelo Terra-Lua, sejam soluções do modelo dinâmico Terra-Sol-Lua. Escolheu-se o problema bicircular, porém modelos mais completos poderiam ser utilizados com a mesma técnica.

### 4.6.1 O Problema Bicircular

O problema bicircular considera o movimento de dois primários, no caso estudado, da Terra e da Lua, em órbita circular ao redor de seu centro de massa,  $B_{TL}$ . Ao mesmo tempo, este centro de massa  $B_{TL}$  e o terceiro corpo, o Sol, movem-se em órbitas circulares ao redor do centro de massa do sistema completo. Este problema é o caso mais simples de um modelo restrito de quatro corpos. A descrição completa deste modelo pode ser facilmente encontrada em diversos trabalhos (45), aqui serão apresentadas somente as equações de movimento.

Como no PRTC, neste caso algumas hipóteses são seguidas como: o movimento dos primários, Terra, Lua e Sol, é planar; e a partícula tem massa desprezível quando

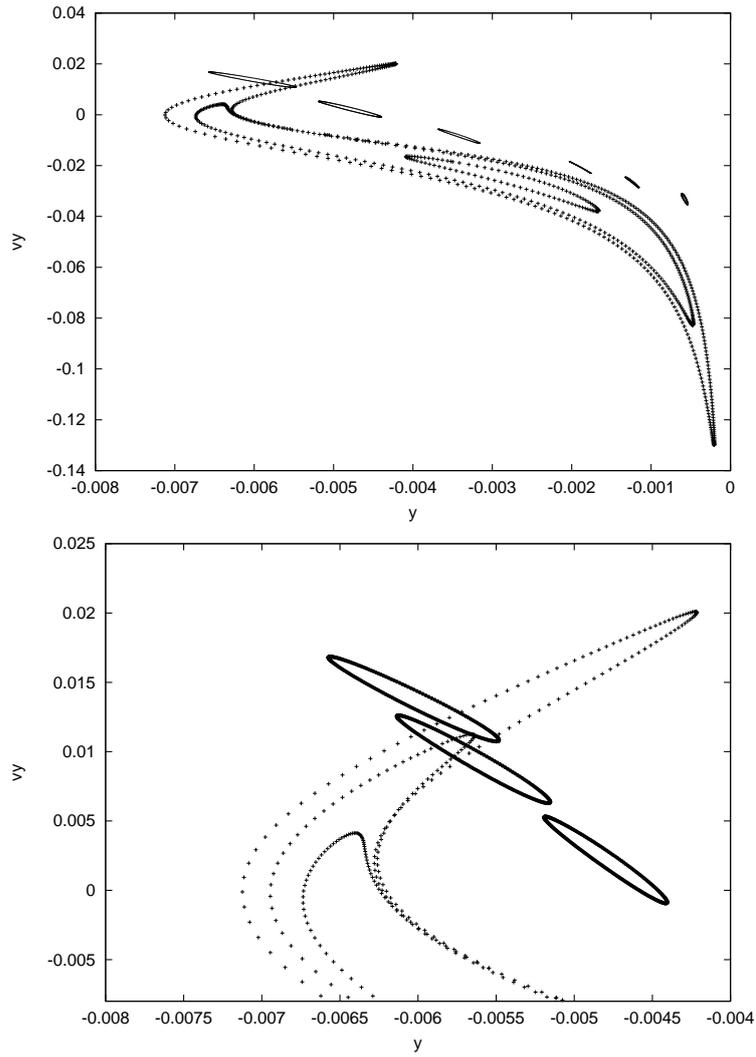


Figura 4.13 - Intersecção de  $W_{TS}^u$  das órbitas de Liapunov de  $L_1$  com  $W_{TL}^s$  das órbitas de Liapunov de  $L_2$ . As curvas de  $W_{TS}^u$  representam o corte da variedade na secção  $x = \mu - 1$  em diferentes níveis de energia. As curvas mais escuras representam  $W_{TL}^s$  considerando a fase lunar. O segundo gráfico é uma ampliação da zona de intersecção do gráfico acima.

comparada às massas dos primários.

A hamiltoniana do problema bicircular é dada por:

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x + \frac{m_S}{a_S^2} (x \cos \theta - y \sin \theta) - \frac{(1 - \mu)}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{m_S}{r_S} \quad (4.6)$$

onde

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x - \mu)^2 + y^2 + z^2 \\ r_2^2 &= [x - (\mu - 1)]^2 + y^2 + z^2 \\ r_S^2 &= (x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + z^2 \end{aligned}$$

as coordenadas  $x_S$  e  $y_S$  são as coordenadas do Sol,

$$x_S = a_S \cos \theta \quad \text{e} \quad y_S = -a_S \sin \theta$$

As quantidades  $m_S$ ,  $a_S$  e  $\theta$  são a massa solar, a distância entre o Sol e o baricentro  $B_{TL}$  e o ângulo entre o eixo Terra-Lua e o Sol, respectivamente.

Nota-se que a hamiltoniana deixou de ser um sistema autônomo, sendo periodicamente dependente do tempo nas coordenadas  $\theta$  e  $r_S$ . As equações de movimento são:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y \\ \dot{y} &= p_y - x \\ \dot{z} &= p_z \\ \dot{p}_x &= p_y - (1 - \mu) \frac{x - \mu}{r_1^3} - \mu \frac{x - \mu + 1}{r_2^3} - m_S \frac{x - x_S}{r_S^3} - \frac{m_S \cos \theta}{a_S^2} \\ \dot{p}_y &= -p_x - (1 - \mu) \frac{y}{r_1^3} - \mu \frac{y}{r_2^3} - m_S \frac{y - y_S}{r_S^3} + \frac{m_S \sin \theta}{a_S^2} \\ \dot{p}_z &= -(1 - \mu) \frac{z}{r_1^3} - \mu \frac{z}{r_2^3} - m_S \frac{z}{r_S^3} \end{aligned} \tag{4.7}$$

#### 4.6.2 Método de Múltiplos Tiros

O método de múltiplos tiros é aplicado ao refino de trajetórias de um modelo preliminar, usado como primeira aproximação, a um modelo mais completo. Este modelo pode ser um dos problemas restritos de quatro corpos, como o bicircular ou o quase bicircular (46) ou um modelo mais realístico envolvendo todos os corpos do Sistema Solar com suas posições reais. Isto pode ser realizado utilizando as efemérides do JPL/NASA.

A idéia geral do método de múltiplos tiros é similar à utilizada no método de tiro

simples, que encontra-se em ((24, 47)). Primeiramente divide-se o intervalo de tempo da trajetória nominal em subintervalos iguais, desta maneira obtém-se  $N$  pontos igualmente espaçados no tempo,  $t_1, t_2, \dots, t_N$  ( $t_1$  é o tempo inicial e  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ ). Portanto, seja

$$Q_i = (t_i, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)^T, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.8)$$

os  $N$  pontos da trajetória nominal igualmente espaçados no tempo. Seja  $\phi(Q_i)$  a imagem de  $Q_i$  sob o fluxo associado ao modelo em que se deseja refinar a trajetória. Uma vez que todos os pontos estão na mesma trajetória das novas equações de movimento, então,  $\phi(Q_i) = Q_{i+1}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N-1$ . Assim, deve-se resolver o seguinte sistema de  $N-1$  equações não lineares, que são escritas como:

$$F \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(Q_1) \\ \phi(Q_2) \\ \vdots \\ \phi(Q_{N-1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{N-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = 0 \quad (4.9)$$

Para resolvê-las pode-se utilizar o método de Newton. Se  $Q^{(j)} = (x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)^T$  denota a  $j$ -ésima iteração deste procedimento, então o método de Newton pode ser escrito como:

$$DF(Q^{(j)}) \cdot (Q^{(j+1)} - Q^{(j)}) = -F(Q^{(j)}), \quad (4.10)$$

onde o diferencial da função  $F$  tem a seguinte estrutura:

$$DF = \begin{pmatrix} A_1 & -I & & & & \\ & A_2 & -I & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & A_{N-1} & -I \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

com

$$D\Phi = \begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & A_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & \\ & & & & & A_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Cada matriz de transição  $A_i$  contida em  $D\Phi$  é de dimensão  $6 \times 6$ , portanto a cada passo do método é necessário a resolução de  $(N-1) \times 6$  equações. Como o sistema tem mais variáveis desconhecidas que equações, em geral, se tem um hiperplano de soluções, porém ao se introduzir um vínculo no problema, reduz-se o conjunto



Portanto, com esta fatorização, a Equação (4.16) pode ser resolvida recursivamente usando-se as variáveis intermediárias,  $X, Y$  com as componentes em blocos  $X_1 \dots X_N, Y_1 \dots Y_N$ , tais que  $Y = Z^{(j)}$  e  $F = (F_1 \dots F_N)$ .

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1(Q^{(j)}), \\ X_k &= F_k(Q^{(j)}) - L_k X_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, N-1, \\ Y_{N-1} &= D_{N-1}^{-1} X_{N-1}, \\ Y_k &= D_k^{-1} X_k - L_{k+1}^T Y_{k+1}, \quad k = N-2, N-3, \dots, 1 \end{aligned}$$

O valor de  $\Delta Q^{(j)}$  é computado da relação Equação (4.17).

#### 4.7 Resultados

Mesmo após restringir a área de intersecção entre  $W_{TS}^u$  e  $W_{TL}^s$  na secção de Poincaré, infinitas possibilidades de combinação entre a órbita de não trânsito e a órbita de trânsito continuaram a existir. Para a ilustração mais detalhada do método adotado, foram selecionados dois pontos na secção de Poincaré cujas trajetórias de trânsito e não trânsito foram integradas e seus respectivos impulsos de velocidade calculados.

A Figura 4.14 mostra uma trajetória de transferência completa. A trajetória de não trânsito partiu nas proximidades de  $W_{TS}^s$  da órbita de Liapunov de  $L_2$  cuja constante de Jacobi é  $C_J = 3.0005689$ , e a de trânsito, cuja conexão foi realizada no ponto  $P_1$  da secção, refere-se à  $W_{TL}^s$  de uma órbita de  $L_2$  com  $C_J = 3.0654849$ . As condições iniciais das órbitas de trânsito e de não trânsito encontram-se na Tabela 4.3. A Figura 4.15 mostra a órbita de trânsito refinada no problema bicircular no referencial inercial do modelo Terra-Sol. A mesma trajetória é apresentada no referencial do modelo bicircular na Figura 4.16, onde algumas ampliações evidenciando as trajetórias nominal e refinada também são mostradas. A média da diferença entre os pontos da trajetória de trânsito  $P_1$  no PRTC e no PBC é 0.00696 unidades canônicas, que correspondem a 2672.74 quilômetros.

A Figura 4.17 é análoga à Figura 4.14, porém o ponto de conexão considerado ( $P_2$ ) está em outra região da intersecção, mais próximo dos limites  $W_{TS}^u$  e  $W_{TL}^s$ . A Figura 4.18 mostra esta órbita de trânsito refinada no problema bicircular no referencial inercial do modelo Terra-Sol. A mesma trajetória é apresentada no referencial do modelo bicircular na Figura 4.19, onde algumas ampliações evidenciando as trajetórias nominal e refinada também são mostradas. A média da diferença entre os

pontos da trajetória de trânsito  $P2$  no PRTC e no PBC é de 0.00634 unidades canônicas, que correspondem a 2434.56 quilômetros. As condições iniciais das trajetórias encontram-se na Tabela 4.7.

Uma vez que os modelos são conectados na superfície de Poincaré que passa pela Terra, pois o primário é comum aos dois sistemas, Terra-Sol e Terra-Lua, as componentes do vetor de estado de ambas trajetórias diferem apenas em  $\dot{x}$ . As componentes  $(y_{NT}, \dot{y}_{NT})$  são iguais às  $(y_T, \dot{y}_T)$  na secção  $x_{NT} = -1 + \mu = x_T = \mu$ . Portanto o

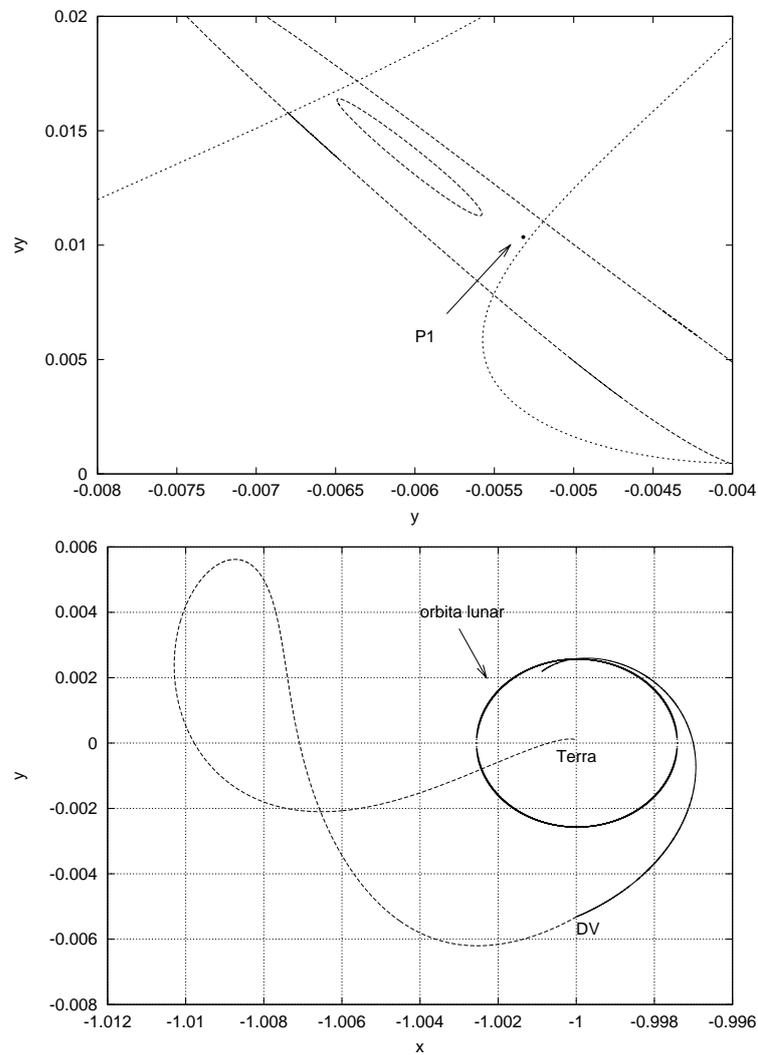


Figura 4.14 - Trajetória de trânsito utilizando a conexão entre as variedades invariantes estável e instável referente ao ponto  $L_2$  nos sistemas Terra-Sol e Terra-Lua.

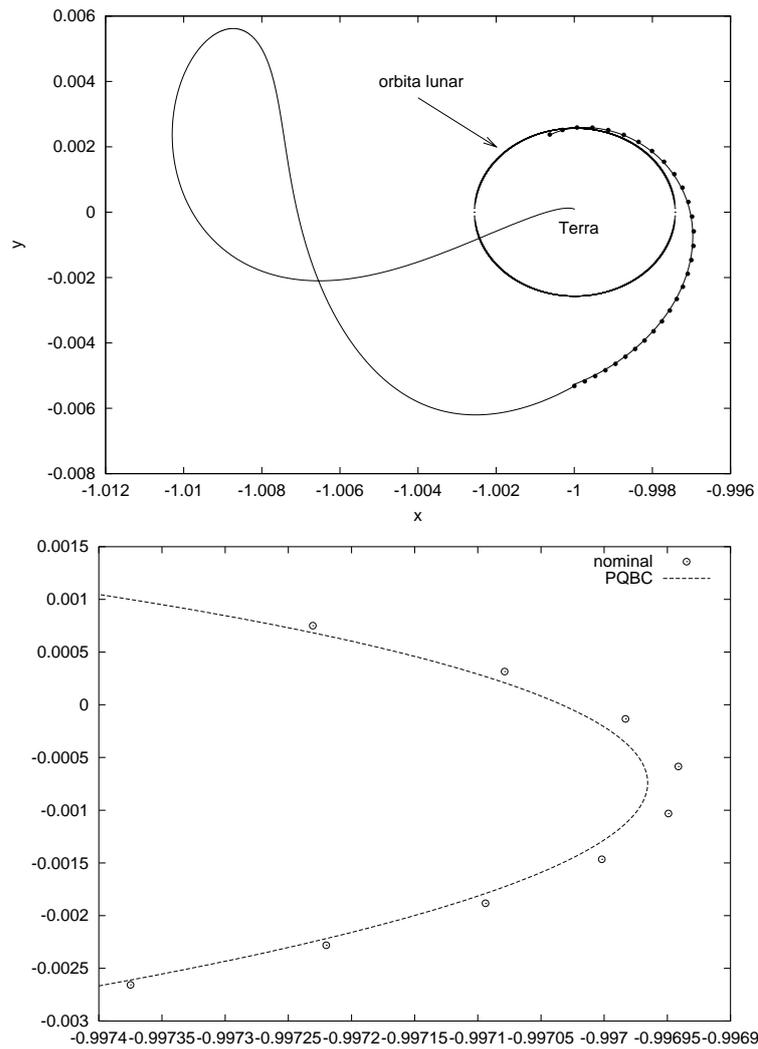


Figura 4.15 - Trajetória de trânsito (P1) refinada a partir do PRTC no PBC. A figura acima mostra a transferência completa, onde os pontos referem-se aos pontos nominais da trajetória; abaixo é exibido uma ampliação desta trajetória. Nota-se uma diferença entre a trajetória nominal e a trajetória refinada.

cálculo do impulso de velocidade é dado por:

$$\Delta v = \Delta \dot{x} = |\dot{x}_{NT} - \dot{x}_T|.$$

Os valores encontrados foram:  $\Delta \dot{x}_{P1} = 0.0652245$  e  $\Delta \dot{x}_{P2} = 0.076355$  em unidades canônicas do sistema Terra-Sol, sendo bem inferiores aos impulsos requeridos pelos métodos tradicionais.

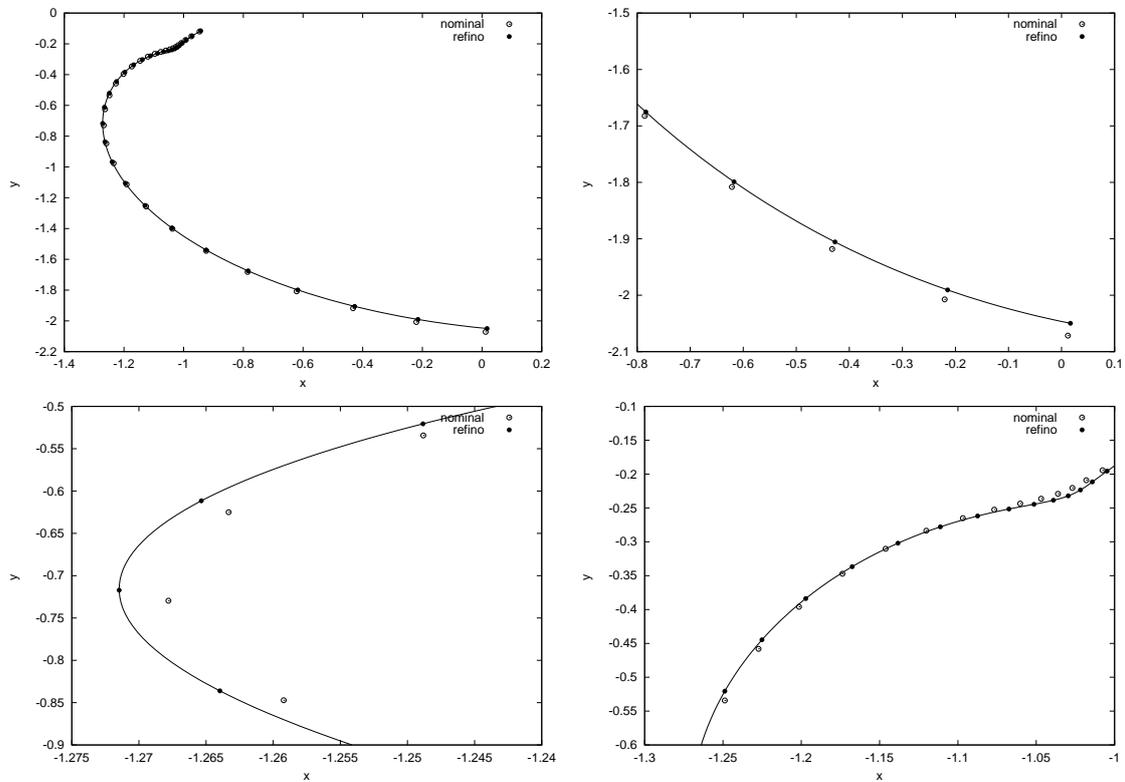


Figura 4.16 - Trajetória de transito referente às condições iniciais do ponto P1 no referencial do problema bicircular e ampliações de algumas regiões.

Tabela 4.3 - Condições iniciais das transferências em P1 e P2.

	sistema	$x_0$	$y_0$	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	$C_J$
P1 (NT)	TS	-0.99999696	0.00531754	-0.0153392457	0.01035272	3.0005689
P1 (T)	TL	0.0121504425	-2.07159546	-1.44913727	0.300740256	3.0654849
P2 (NT)	TS	-0.99999696	0.00646100007	-0.00888263874	0.014789998	3.0006314
P2 (T)	TL	0.0121504425	-2.51706211	-1.96002245	0.429640551	3.10336526

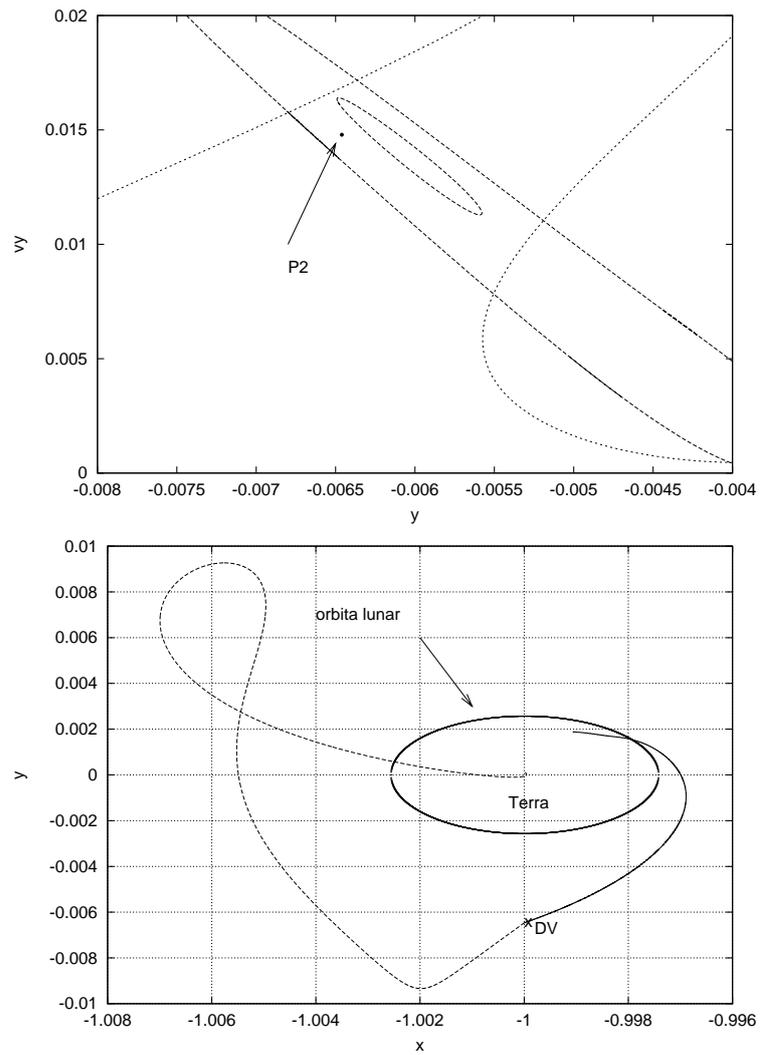


Figura 4.17 - Trajetória de trânsito utilizando a conexão entre as variedades invariantes estável e instável referente ao ponto  $L_2$  nos sistemas Terra-Sol e Terra-Lua.

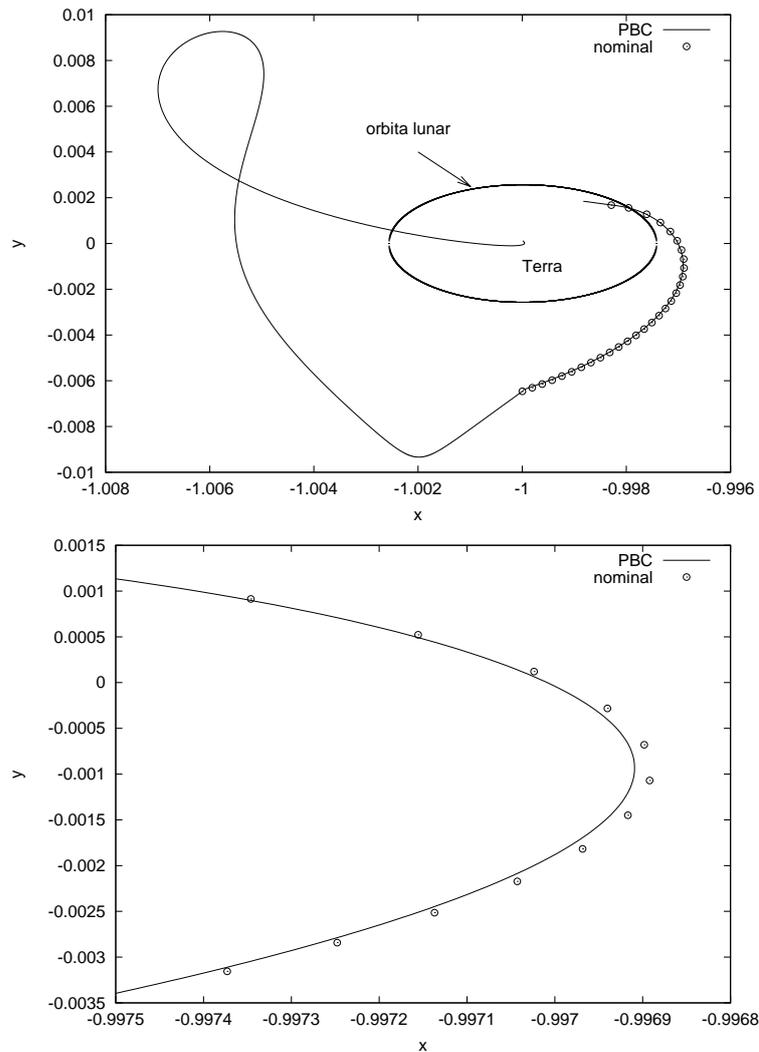


Figura 4.18 - Trajetória de trânsito (P2) refinada a partir do PRTC no PBC. A figura acima mostra a transferência completa, onde os pontos referem-se aos pontos nominais da trajetória; abaixo é exibido uma ampliação desta trajetória. Nota-se uma diferença entre a trajetória nominal e a trajetória refinada.

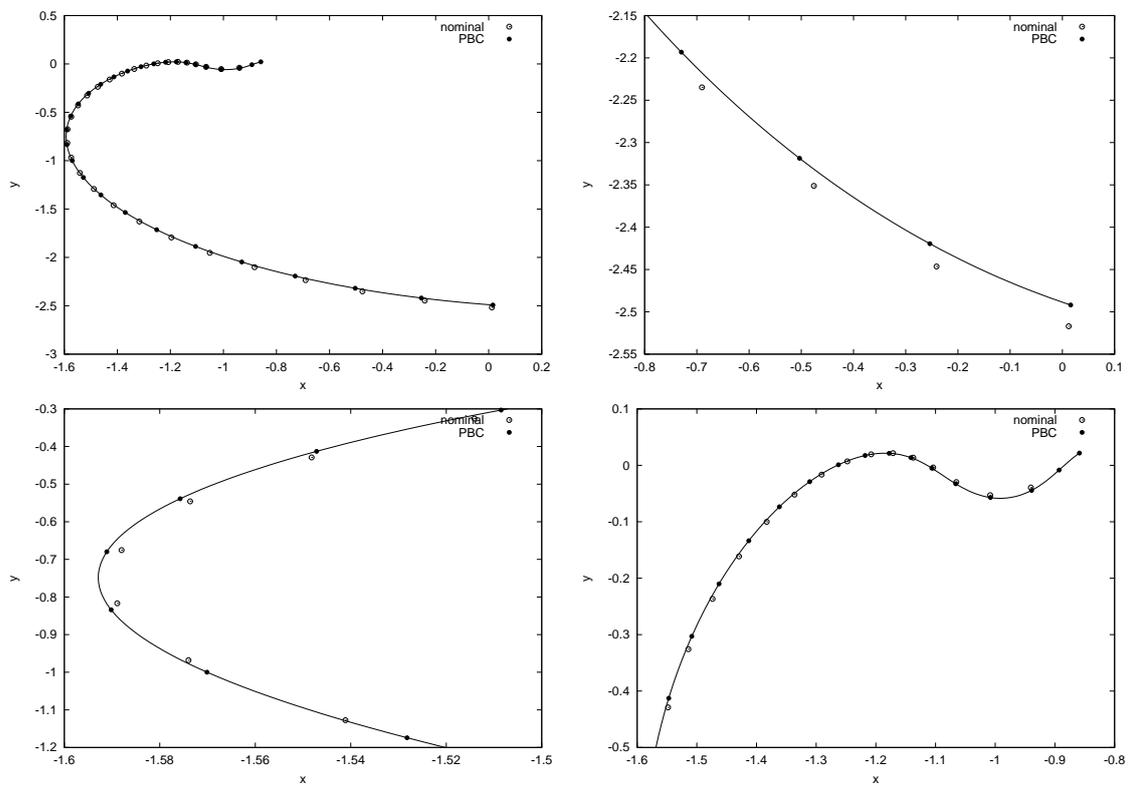


Figura 4.19 - Trajetória de transito referente às condições iniciais do ponto P2 no referencial do problema bicircular e ampliações de algumas regiões.



## 5 TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS BI-IMPULSIVAS

### 5.1 Introdução

Como foi visto, as transferências orbitais assumem uma grande importância dentro da engenharia aeroespacial, pois, a partir de seu estudo, pode-se controlar as trajetórias seguidas pelos veículos de uma missão espacial. Suas aplicações podem ser encontradas em diversas atividades espaciais: na colocação de um satélite em órbita, na manutenção de uma órbita, no deslocamento de uma estação espacial, no envio de sondas interplanetárias e nas manobras de rendezvous.

Este Capítulo lida com as trajetórias de transferência bi-impulsivas, isto é, as que requerem dois impulsos, diferenciando-se, desta maneira, das trajetórias abordadas no Capítulo anterior. O primeiro impulso força o veículo espacial a deixar a órbita de estacionamento enquanto que o segundo o insere na órbita final desejada. Existem vários critérios para se definir uma órbita de transferência ótima. Neste Capítulo, definem-se trajetórias ótimas àquelas que fornecem a menor soma dos impulsos de velocidade envolvidos dentro de um determinado intervalo de tempo. Há autores que abordam a trajetória ótima baseado no critério do tempo mínimo de transferência, da velocidade final mínima, do consumo de combustível sem vínculo temporal entre outros. A escolha deste critério depende dos objetivos da missão.

A determinação de uma trajetória de transferência conectando dois pontos - condições de contorno - com um intervalo de tempo fixo, dentro do modelo dinâmico de dois corpos, é conhecido como o problema de Lambert clássico, onde as órbitas envolvidas são keplerianas. A formulação clássica do problema de Lambert foi amplamente aplicada por diversos autores, sendo Battin (48) e Godding (49) as contribuições mais relevantes, onde desenvolvem-se algoritmos sofisticados e métodos numéricos acurados para resolver o problema. Uma nova versão do método de Lambert foi estudada por Prado e Broucke (50), substituindo o vínculo de que a trajetória deve ser completada em um determinado intervalo de tempo pelo vínculo do mínimo impulso num dado um intervalo de tempo. Estas idéias podem ser aplicadas a outros modelos como o PRTC, sendo conveniente não denotá-lo como problema de Lambert para que não haja dúvida quanto a dinâmica estudada.

Neste Capítulo as condições de contorno consideradas são um ponto na órbita de estacionamento ao redor da Terra, como condição inicial, e um ponto na órbita halo

da família de  $L_1$ , como condição final. O método é aplicado a dois modelos: no PRTC e no modelo quase bicircular, que é um problema restrito de quatro corpos onde as órbitas dos primários não são circulares. O impulso total exigido nas transferências em cada um desses modelo é comparado. O método numérico aplicado na realização desta tarefa foi o método de tiro simples, que é a versão mais simplificada do método de múltiplos tiros apresentado anteriormente.

O problema quase bicircular, introduzido por Andreu (46) em 1998, serve para modelar a dinâmica do sistema Terra-Lua-Sol com bastante eficácia, pois carrega a solução do problema de três corpos pleno. Por esta razão, serão apresentadas as equações de movimento do problema de três corpos, onde as três massas tratadas são como puntiformes,  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , assumem valores diferentes de zero e se atraem mutuamente de acordo com a lei gravitacional de Newton. A solução do problema quase bicircular, tal como a solução do PRTC, não é analítica, necessitando o uso de técnicas numéricas e semi-analíticas para se chegar a resultados qualitativos.

## 5.2 O Problema de Três Corpos

No problema geral de três corpos não há restrições quanto às massas dos corpos envolvidos; estes movimentam-se em órbitas quase circulares ao redor do centro de massa do sistema.

Para se obter as equações de movimento do problema de três corpos foi utilizada a formulação de Jacobi, que encontra-se detalhada em (51). Sendo  $\vec{r}$  o raio vetor que une os corpos de massas  $m_1$  ao  $m_2$  e  $\vec{R}$  o raio vetor que une o baricentro  $B_{12}$  de  $(m_1, m_2)$  com o corpo de massa  $m_3$ . A Figura 5.1 apresenta uma visualização melhor da configuração problema.

Considerando as seguintes igualdades,

$$\begin{aligned}\alpha &= m_1/(m_1 + m_2) \\ \beta &= m_2/(m_1 + m_2) = 1 - \alpha \\ M &= m_1 + m_2 + m_3\end{aligned}$$

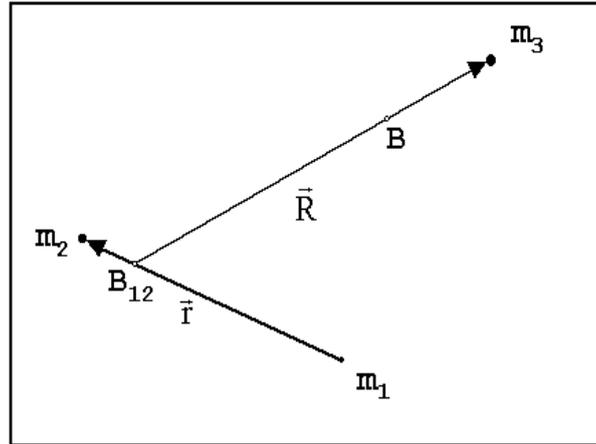


Figura 5.1 - Sistema de coordenadas do problema de três corpos.

os raios vetores relativos se tornam:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{13} &= \vec{R} + \beta\vec{r} \\ \vec{r}_{23} &= \vec{R} - \alpha\vec{r} \\ \vec{R} &= \alpha\vec{r}_{13} + \beta\vec{r}_{23}\end{aligned}$$

e as equações de Jacobi são:

$$\ddot{\vec{r}} = -G(m_1 + m_2)\frac{\vec{r}}{r^3} + Gm_3\left(\frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} - \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3}\right) \quad (5.1)$$

$$\ddot{\vec{R}} = -GM\left(\beta\frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} + \alpha\frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3}\right) \quad (5.2)$$

### 5.2.1 Resolução quase Bicircular do Problema de Três Corpos

Sejam dois valores fixos  $a_i$  e  $a_e$ , deseja-se obter soluções quase circulares para o movimento dos três primários tais que  $r \approx a_i$  e  $R \approx a_e$ , onde os índices  $i$  e  $e$  referem-se às massas interna e externa. De acordo com a terceira lei de Kepler obtém-se os seguintes movimentos angulares médios para os respectivos raios vetores:

$$n_i^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{a_i^3}$$

$$n_e^2 = \frac{GM}{a_e^3}$$

Supondo o movimento planar, isto é, a componente  $z$  dos raios vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{R}$  é nula, pode-se escrevê-los em coordenadas complexas. Portanto, a partir de agora,  $\vec{r}$  e  $\vec{R}$  são raios vetores bidimensionais que correspondem às variáveis complexas  $z$  e  $Z$ , respectivamente. As Equações 5.1 e 5.2 de movimento são reescritas na forma complexa:

$$\ddot{z} = -G(m_1 + m_2)\frac{z}{r^3} + Gm_3\left(\frac{Z - \alpha z}{r_{23}^3} - \frac{Z + \beta z}{r_{13}^3}\right) \quad (5.3)$$

$$\ddot{Z} = -GM\left(\alpha\frac{Z + \beta z}{r_{13}^3} + \beta\frac{Z - \alpha z}{r_{23}^3}\right) \quad (5.4)$$

onde

$$r = |z|$$

$$r_{13} = |Z + \beta z|$$

$$r_{23} = |Z - \alpha z|$$

Ao utilizar coordenadas complexas, o problema de se encontrar uma solução quase bicircular para as Equações 5.1 e 5.2, pode ser reestabelecido em se encontrar uma solução para as Equações 5.3 e 5.4 com:

$$z \approx a_i e^{i(n_i t + \theta_i)}$$

$$Z \approx a_e e^{i(n_e t + \theta_e)}$$

Assumindo que no instante inicial as três massas  $m_1$ ,  $m_e$  e  $m_3$  encontram-se no eixo real  $x$ , os ângulos de fase  $\theta_i$  e  $\theta_e$  podem ser considerados nulos.

É possível encontrar uma solução da forma sugerida acima em termos de série de

Fourier da forma:

$$z = a_i e^{in_i t} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j e^{ijnt} \quad (5.5)$$

$$Z = a_e e^{in_e t} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijnt} \quad (5.6)$$

sendo  $n = n_i - n_e$  a velocidade angular média relativa do movimento interno em relação ao externo. O caminho para se obter a solução desejada é substituir as relações 5.5 e 5.6 nas Equações 5.3 e 5.4 a fim de se determinar os coeficientes  $b_j$  e  $c_j$  por identificação dos termos. Para isto, é conveniente introduzir o uso de um pequeno parâmetro. No caso do sistema Sol-Terra-Lua esse parâmetro pode ser:

$$\epsilon = \frac{a_i}{a_e}$$

que é aproximadamente 1/389. A solução desejada em termos do pequeno parâmetro, torna-se:

$$\begin{aligned} z &= a_i e^{in_i t} \sum_{k=0}^m \epsilon^k u_k \\ Z &= a_e e^{in_e t} \sum_{k=0}^m \epsilon^k v_k \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde  $u_k$  e  $v_k$  são funções complexas periódicas de frequência  $n$ . Substituindo o termo de ordem zero nas equações de movimento, Equações 5.3 e 5.4, a solução fornecida é a solução bicircular de raios  $a_i$  e  $a_e$ , como o esperado.

Simplificando as unidades das equações de movimento, escrevendo-as em unidades adimensionais, como foi feito na seção anterior, têm-se:

$$\begin{aligned} G &= 1, \quad m_1 + m_2 = 1, \quad a_i = 1, \\ n_i &= 1, \quad \alpha = \mu, \quad \beta = 1 - \mu, \\ n &= 1 - n_s \end{aligned}$$

Considerando a mudança de unidades, as equações de movimento ficam:

$$\ddot{z} = -\frac{z}{r^3} + m_s \left( \frac{Z - \mu z}{r_{23}^3} - \frac{Z + (1 - \mu)z}{r_{13}^3} \right) \quad (5.8)$$

$$\ddot{Z} = -(1 - m_s) \left( \mu \frac{Z + (1 - \mu)z}{r_{13}^3} + (1 - \mu) \frac{Z - \mu z}{r_{23}^3} \right) \quad (5.9)$$

e as expressões 5.7 tornam-se:

$$\begin{aligned} z &= e^{it} \left( 1 + \sum_{k=1}^m \epsilon^k u_k \right) \\ Z &= a_s e^{in_s t} \left( 1 + \sum_{k=1}^m \epsilon^k v_k \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Substituindo a expressão 5.10 no lado esquerdo da Equação 5.8, tem-se:

$$\ddot{z} = e^{it} \left( -1 + \sum_{k=1}^m \epsilon^k (\ddot{u}_k + 2i\dot{u}_k - u_k) \right),$$

destacando-se o  $m$ -ésimo termo em  $\epsilon$ , pode-se escrever:

$$\ddot{z} \Big|_m = e^{it} (\ddot{u}_m + 2i\dot{u}_m - u_m) \quad (5.11)$$

O mesmo procede-se à Equação 5.9:

$$\ddot{Z} \Big|_m = a_s e^{in_s t} (\ddot{v}_m + 2in_s \dot{v}_m - n_s^2 v_m) \quad (5.12)$$

Inserindo as expansões de  $z$  e  $\bar{z}$  no lado direito das Equações 5.8 e 5.9, obtém-se vários termos, como segue:

$$\begin{aligned} \frac{z}{r^3} &= \frac{z}{(z\bar{z})^{3/2}} = z^{-1/2} \bar{z}^{-3/2} = e^{it} \left( 1 + \sum_{k=1}^m \epsilon^k u_k \right)^{-1/2} \left( 1 + \sum_{k=1}^m \epsilon^k \bar{u}_k \right)^{-3/2} \\ &= e^{it} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^m \epsilon^k u_k \right) - \frac{1}{8} \left( \sum_{k=1}^m \epsilon^k u_k \right)^2 + \dots \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \left( \sum_{k=1}^m \epsilon^k \bar{u}_k \right) + \frac{15}{8} \left( \sum_{k=1}^m \epsilon^k \bar{u}_k \right)^2 + \dots \right) \\ &= e^{it} \left( -\frac{1}{2} u_m - \frac{3}{2} \bar{u}_m + \dots \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

e as demais expansões ficam:

$$\begin{aligned} Z - \mu z &= a_s e^{in_s t} \left( \left( 1 + \sum_{k=1}^m \epsilon^k v_k \right) - \mu \epsilon e^{int} \left( 1 + \sum_{k=1}^m \epsilon^k u_k \right) \right) \\ &= a_s e^{in_s t} \left( 1 + \sum_{k=1}^m \epsilon^k (v_k - \mu e^{int} u_{k-1}) + O(\epsilon^{m+1}) \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\frac{Z - \mu z}{r_{23}^3} = \frac{e^{it}}{a_s^2} e^{-int} \left( 1 + \sum_{k=1}^m \epsilon^k (v_k - \mu e^{int} u_{k-1} + O(\epsilon^{m+1})) \right)^{-1/2} \left( 1 + \sum_{k=1}^m \epsilon^k (\bar{v}_k - \mu e^{int} \bar{u}_{k-1} + O(\epsilon^{m+1})) \right)^{-3/2} \quad (5.15)$$

destacando o termo de ordem  $\epsilon^m$ , tem-se:

$$\frac{Z - \mu z}{r_{23}^3} \Big|_m = \frac{e^{it}}{a_s^2} e^{-int} \left( -\frac{1}{2} v_k - \frac{3}{2} \bar{v}_k + \dots \right)$$

O mesmo procedimento é feito para as demais expansões, resultando em:

$$\frac{Z - (1 - \mu)z}{r_{13}^3} \Big|_m = \frac{e^{it}}{a_s^2} e^{-int} \left( -\frac{1}{2} v_k - \frac{3}{2} \bar{v}_k + \dots \right)$$

Pode-se notar que os termos contendo  $Z$  tem um fator multiplicativo  $m_s$  porém está acompanhado do termo  $1/a_s^2$ , portanto a contribuição total desta constante multiplicativa é de ordem unitária. Conseqüentemente, deve-se resolver o seguinte sistema linear de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_m + 2i\dot{u}_m - \frac{3}{2}u_m - \frac{3}{2}\bar{u}_m &= P_m(e^{nt}) \\ \ddot{v}_m + 2in_s\dot{v}_m - \frac{3}{2}n_s^2v_m - \frac{3}{2}ns^2\bar{v}_m &= Q_m(e^{nt}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde  $P_m$  e  $Q_m$  são polinômios dependentes das funções  $u_k$  e  $v_k$  com  $k = 0, \dots, m - 1$ . Esses polinômios possuem coeficientes reais e expoentes inteiros.

### 5.3 O Problema quase Bicircular

O problema quase bicircular (PQBC) é um problema restrito de quatro corpos, onde três corpos de massas não desprezíveis movem-se em trajetórias quase circulares ao redor do centro de massa do sistema e o quarto corpo cuja massa é infinitesimal em comparação com as demais move-se no campo gravitacional gerado pelos corpos primários.

Seja um sistema de referência inercial fixado no centro de massa  $B$ , como mostra a Figura 5.2, e sejam  $\vec{r}$  e  $\vec{R}$  os raios vetores introduzidos anteriormente. Supõe-se que o movimento seja planar em  $xy$ , portanto, neste sistema de coordenadas, os raios vetores são dados por:

$$\begin{aligned}
\vec{\rho}_e &= -\frac{m_s}{M}\vec{R} + \frac{m_m}{m_m + m_e}\vec{r} = -\frac{m_s}{1 + m_s}\vec{R} + \mu\vec{r} \\
\vec{\rho}_m &= -\frac{m_s}{M}\vec{R} - \frac{m_e}{m_m + m_e}\vec{r} = -\frac{m_s}{1 + m_s}\vec{R} - (1 - \mu)\vec{r} \\
\vec{\rho}_s &= \frac{m_s + m_e}{M}\vec{R} = -\frac{1}{1 + m_s}\vec{R}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
M &= m_e + m_m + m_s \\
\vec{r}(t) &= (r_1(t), r_2(t), 0)^T \\
\vec{R}(t) &= (R_1(t), R_2(t), 0)^T
\end{aligned}$$

A mudança de coordenadas que será feita consiste de uma translação seguida de uma rotação e de uma transformação homotética. A translação move a origem do centro de massa  $B$  para o baricentro do sistema Terra-Lua,  $B_{12}$ . A rotação coloca a Terra e a Lua sobre o eixo  $x$  e, finalmente, a transformação homotética faz com que a distância entre a Terra e a Lua se torne constante. Desta forma, a estrutura do sistema de coordenadas se aproxima da estrutura do modelo restrito de três corpos. As novas coordenadas estão relacionadas com as velhas através da seguinte fórmula:

$$\vec{q} = \frac{1}{r}C^T\left(\vec{\rho} + \frac{m_s}{1 + m_s}\vec{R}\right) \tag{5.18}$$

onde

$$C = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{r} & -\frac{r_2}{r} & 0 \\ \frac{r_2}{r} & \frac{r_1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

Nota-se que  $CC^T = I$ , pois  $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ . Utilizando este sistema de referência, as

coordenadas da Terra, da Lua e do Sol, tornam-se:

$$\begin{aligned}\vec{q}_e &= (\mu, 0, 0)^T \\ \vec{q}_m &= (\mu - 1, 0, 0)^T \\ \vec{q}_s &= \frac{1}{r} C^T \vec{R}\end{aligned}$$

Observa-se que a posição da Terra e da Lua estão situadas no mesmo local do problema restrito de três corpos. A relação inversa da transformação é dada por:

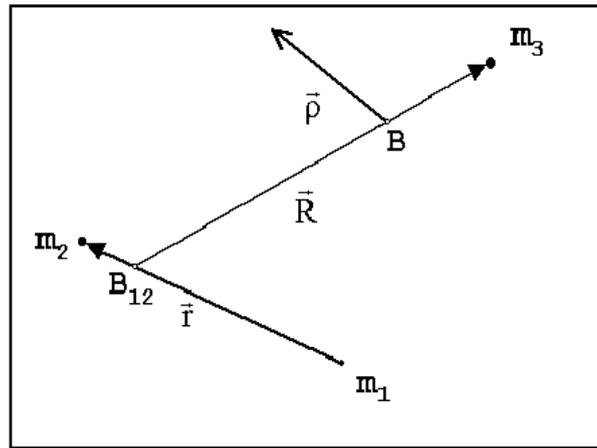


Figura 5.2 - Modelo quase bicircular no sistema de referência inercial, as massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  representam a Lua, a Terra e o Sol, respectivamente.

$$\vec{\rho} = -\frac{m_s}{1 + m_s} \vec{R} + B\vec{q} \quad (5.20)$$

onde

$$B = rC \begin{pmatrix} r_1 & -r_2 & 0 \\ r_2 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

Neste caso, se obtém as seguintes relações:

$$BB^T = r^2 I$$

$$B^{-1} = \frac{1}{r^2} B^T$$

O módulo da diferença entre as distâncias da partícula em relação aos primários é:

$$\begin{aligned} \|\vec{\rho}_e - \rho\| &= r\|\vec{q}_e - \vec{q}\| \\ \|\vec{\rho}_m - \rho\| &= r\|\vec{q}_m - \vec{q}\| \\ \|\vec{\rho}_s - \rho\| &= r\|\vec{q}_s - \vec{q}\| \end{aligned} \quad (5.21)$$

portanto, pode-se escrever o potencial gravitacional da partícula na forma:

$$U = -\frac{1 - \mu}{r\|\vec{q}_e - \vec{q}\|} - \frac{\mu}{r\|\vec{q}_m - \vec{q}\|} - \frac{m_s}{r\|\vec{q}_s - \vec{q}\|} \quad (5.22)$$

Derivando  $\vec{\rho}$  (Equação 5.20) e substituindo em

$$T = \frac{1}{2} \langle \dot{\vec{\rho}} \cdot \dot{\vec{\rho}} \rangle$$

chega-se à:

$$T = \frac{1}{2} r^2 \dot{\vec{q}}^2 + \vec{q}^T \dot{B}^T B \dot{\vec{q}} + \frac{1}{2} \vec{q}^T \dot{B}^T \dot{B} \vec{q} - \frac{m_s}{1 + m_s} \dot{R}^T \dot{B} \vec{q} - \frac{m_s}{1 + m_s} \dot{R}^T B \dot{\vec{q}} + \frac{m_s^2}{2(1 + m_s)} \dot{R}^2 \quad (5.23)$$

Definido o momento como:

$$\vec{p} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} = r^2 \dot{\vec{q}} + B^T \dot{B} \vec{q} - \frac{m_s}{1 + m_s} B^T \dot{R},$$

extraí-se a expressão para  $\dot{\vec{q}}$

$$\dot{\vec{q}} = \frac{1}{r^2} \left( \vec{p} - B^T \dot{B} \vec{q} + \frac{m_s}{1 + m_s} B^T \dot{R} \right)$$

e substituindo-a na expressão da energia cinética (Equação 5.23), chega-se à:

$$T = \frac{1}{2r^2} \vec{p}^2$$

Desta forma, pode-se definir a hamiltoniana,

$$\begin{aligned} H &= \vec{p} \dot{\vec{q}} - T + U \\ &= \frac{1}{2r^2} \vec{p}^2 - \frac{1}{r^2} \vec{p}^T B^T \dot{B} \vec{q} + \frac{m_s}{1 + m_s} \frac{1}{r^2} \dot{R}^T B \vec{p} + U \end{aligned} \quad (5.24)$$

As equações de movimento são obtidas:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{1}{r^2} \vec{p} - \frac{1}{r^2} B^T \dot{B} \vec{q} + \frac{m_s}{1+m_s} \frac{1}{r^2} B^T \dot{\vec{R}} \quad (5.25)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = \frac{1}{r^2} \dot{B}^T B \vec{p} - \frac{\partial U}{\partial \vec{q}} \quad (5.26)$$

Este sistema de equações diferenciais de primeira ordem pode ser transformado em um outro sistema de segunda ordem, como:

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \dot{\vec{q}} + B^T \dot{B} \vec{q} \right) = \frac{1}{r^2} \dot{B}^T B (r^2 \dot{\vec{q}} + B^T \dot{B} \vec{q}) + \frac{m_s}{1+m_s} B^T \ddot{\vec{R}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{q}}$$

A idéia é transformar levemente a hamiltoniana com o objetivo de eliminar a dependência em  $\dot{\vec{R}}$ . O "novo" momento é definido da seguinte forma:

$$\vec{p} = r^2 \dot{\vec{q}} + B^T \dot{B} \vec{q}$$

e as equações diferenciais de primeira ordem são:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{1}{r^2} (\vec{p} - B^T \dot{B} \vec{q}) \quad (5.27)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{1}{r^2} \dot{B}^T B \vec{p} + \frac{m_s}{1+m_s} B^T \ddot{\vec{R}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{q}} \quad (5.28)$$

Com isso, a hamiltoniana correspondente é determinada:

$$H = \frac{1}{2r^2} \vec{p}^2 - \frac{1}{r^2} \vec{p} B^T \dot{B} \vec{q} - \frac{m_s}{1+m_s} \ddot{\vec{R}} B \vec{q} + U \quad (5.29)$$

### 5.3.1 A Hamiltoniana e as Equações de Movimento

Nesta etapa o objetivo é rearranjar os termos obtidos anteriormente para escrever a hamiltoniana do problema quase bicircular. A Equação 5.29 expressa a forma geral da hamiltoniana; a solução quase bicircular do movimento da Terra, da Lua e do Sol é dada na Seção 2.2.1, o que resta é unir esses resultados, isto é, inserir a solução quase bicircular na hamiltoniana (5.29) e desta forma obter as equações de movimento para a partícula do modelo quase bicircular.

Lembrando que a expansão quase bicircular do movimento em coordenadas comple-

as é dada por:

$$z = a_i e^{in_i t} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j e^{ijnt}$$

$$Z = a_e e^{in_e t} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijnt}$$

onde,

$$z = r_1 + ir_2$$

$$Z = R_1 + iR_2$$

$$r^2 = z\bar{z}$$

O primeiro termo da hamiltoniana (5.29),  $B\dot{B}$ , é escrito na forma:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & -\beta_2 & 0 \\ \beta_2 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

onde

$$\beta_1 = r_1 \dot{r}_1 + r_2 \dot{r}_2 = \text{Re}(\dot{z}\bar{z})$$

$$\beta_2 = r_1 \dot{r}_2 - r_2 \dot{r}_1 = \text{Im}(\dot{z}\bar{z})$$

De forma análoga, calcula-se

$$\ddot{\vec{R}}^T B = (\beta_3, \beta_4, 0)$$

sendo

$$\beta_3 = r_1 \ddot{R}_1 + r_2 \ddot{R}_2 = \text{Re}(\ddot{Z}\bar{z})$$

$$\beta_4 = r_1 \ddot{R}_2 - r_2 \ddot{R}_1 = \text{Im}(\ddot{Z}\bar{z})$$

O potencial também depende do vetor posição do Sol, que é dado por:

$$\vec{q}_s = \frac{1}{r^2} B^T \vec{R} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \beta_5 \\ \beta_6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}\beta_5 &= r_1 R_1 + r_2 R_2 = \text{Re}(Z\bar{z}) \\ \beta_6 &= r_1 R_2 - r_2 R_1 = \text{Im}(Z\bar{z})\end{aligned}$$

Uma vez obtidas as relações acima, faz-se o produto das séries de Fourier:

$$\begin{aligned}z\bar{z} &= \left(\sum_j b_j e^{ijnt}\right) \left(\sum_j b_j e^{-ijnt}\right) \\ \dot{z}\bar{z} &= i \left(\sum_j (1+jn) b_j e^{ijnt}\right) \left(\sum_j b_j e^{-ijnt}\right) \\ Z\bar{z} &= a_s e^{-int} \left(\sum_j c_j e^{ijnt}\right) \left(\sum_j b_j e^{-ijnt}\right) \\ \ddot{Z}\bar{z} &= -a_s e^{-int} \left(\sum_j (n_s + jn)^2 c_j e^{ijnt}\right) \left(\sum_j b_j e^{-ijnt}\right)\end{aligned}\tag{5.30}$$

Nota-se que todos os produtos acima dependem somente da frequência  $n$ , que é a diferença entre o momento angular médio da Lua e do Sol, dada por  $n = 1 - n_s$ . Introduz-se as funções periódicas  $\alpha_k(t)$ 's:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{r^2} & \alpha_2 &= -\frac{\text{Re}(\dot{z}\bar{z})}{r^2} & \alpha_3 &= \frac{\text{Im}(\dot{z}\bar{z})}{r^2} \\ \alpha_4 &= -\frac{m_s}{1+m_s} \text{Re}(\ddot{Z}\bar{z}) & \alpha_5 &= -\frac{m_s}{1+m_s} \text{Im}(\ddot{Z}\bar{z}) & \alpha_6 &= \frac{1}{r} \\ \alpha_7 &= \frac{1}{r^2} \text{Re}(Z\bar{z}) & \alpha_8 &= \frac{1}{r^2} \text{Im}(Z\bar{z})\end{aligned}$$

Enfatiza-se o fato de que tais funções ou são pares ou são ímpares. As expansões de Fourier ímpares têm somente termos dependentes da função seno e as expansões pares têm somente termos dependentes da função cosseno, portanto as funções  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$ ,  $\alpha_6$  e  $\alpha_7$  são pares e as demais,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_5$  e  $\alpha_8$ , são ímpares, em outras palavras, as funções  $\alpha_k$ 's são do tipo:

$$\alpha_k(t) = \alpha_{k_0} + \sum_{j \geq 1} \alpha_{k_j} \cos(jnt) \quad k = 1, 3, 4, 6, 7 \tag{5.31}$$

$$\alpha_k(t) = \sum_{j \geq 1} \alpha_{k_j} \sin(jnt) \quad k = 2, 5, 8 \tag{5.32}$$

sendo  $\alpha_{k_j}$  números reais. Os coeficientes de Fourier das funções  $\alpha_k$  são calculados através dos coeficientes de  $z$  e de  $Z$ .

Seja  $\vec{q} = (x, y, z)^T$  o vetor posição e  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$  o vetor momento, substituindo-os na hamiltoniana anterior, chega-se à hamiltoniana desejada em termos das componentes das coordenadas da partícula.

$$\begin{aligned}
H = & \frac{1}{2}\alpha_1(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \alpha_2(p_x x + p_y y + p_z z) + \alpha_3(p_x y - p_y x) + \\
& + \alpha_4 x + \alpha_5 y - \alpha_6 \left( \frac{1-\mu}{q_{pe}} + \frac{\mu}{q_{pm}} + \frac{m_s}{q_{ps}} \right)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

onde

$$\begin{aligned}
q_{pe}^2 &= (x - \mu)^2 + y^2 + z^2 \\
q_{pm}^2 &= (x - \mu + 1)^2 + y^2 + z^2 \\
q_{ps}^2 &= (x - \alpha_7)^2 + (y + \alpha_8)^2 + z^2
\end{aligned}$$

Portanto, as equações de movimento são:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \alpha_1 p_x + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\
\dot{y} &= \alpha_1 p_y + \alpha_2 y - \alpha_3 x \\
\dot{z} &= \alpha_1 p_z + \alpha_2 z \\
\dot{p}_x &= -\alpha_2 p_x + \alpha_3 p_y - \alpha_4 - \alpha_6 \left( \frac{1-\mu}{q_{pe}^3} (x - \mu) + \frac{\mu}{q_{pm}^3} (x - \mu + 1) + \frac{m_s}{q_{ps}^3} (x - \alpha_7) \right) \\
\dot{p}_y &= -\alpha_2 p_y - \alpha_3 p_x - \alpha_5 - \alpha_6 \left( \frac{1-\mu}{q_{pe}^3} y + \frac{\mu}{q_{pm}^3} y + \frac{m_s}{q_{ps}^3} (y - \alpha_8) \right) \\
\dot{p}_z &= -\alpha_2 p_z - \alpha_6 \left( \frac{1-\mu}{q_{pe}^3} z + \frac{\mu}{q_{pm}^3} z + \frac{m_s}{q_{ps}^3} z \right)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

### 5.3.2 Pontos de Equilíbrio

Em muitos problemas de mecânica celeste é possível descrever as equações de movimento como sistemas hamiltonianos autônomos acrescidos de perturbações dependentes periodicamente do tempo, como o problema quase bicircular. Neste, supõe-se que os movimentos da Terra e da Lua girem em órbitas quase bicirculares em torno do centro de massa e que este, por sua vez, gira ao redor do centro de massa do sistema Sol-Terra-Lua em movimento quase circular. É natural pensar que o ponto

fixo do modelo restrito de três corpos, quando submetido ao campo gravitacional do Sol, também sofra uma perturbação periódica. Portanto, os pontos de equilíbrio do problema quase bicircular não são pontos e sim órbitas periódicas ao redor dos pontos lagrangianos.

Pode-se pensar que a hamiltoniana do PQBC é dada sob a forma:

$$H = H_{PRTC} + \epsilon(H_{PQBC} - H_{PRTC}) \quad (5.35)$$

sendo  $\epsilon$  um parâmetro que varia de 0 a 1. Quando  $\epsilon = 0$  tem-se  $H = H_{PRTC}$  e quando  $\epsilon = 1$  tem-se que  $H = H_{PQBC}$ . Para se determinar numericamente as órbitas periódicas do PQBC aplica-se, também, a continuação numérica através do parâmetro  $\epsilon$ , a qual estende uma solução periódica conhecida do PRTC até o PQBC, desde que o período da órbita periódica seja compatível com o período solar. Esta continuação numérica está apresentada em (52), onde são fornecidas as condições iniciais das órbitas periódicas utilizadas neste capítulo.

As Figuras 5.3 e 5.4 mostram as órbitas periódicas relativas aos pontos lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$  no modelo quase bicircular. Essas órbitas possuem o mesmo período da perturbação solar.

Tabela 5.1 - Condições Iniciais das Órbitas ao redor de  $L_1$  e  $L_2$  no Sistema Sol-Terra-Lua.

	$x_0$	$\dot{y}$
$L_1$	-8.369141677649319e-01	-6.247467360366576e-06
$L_2$	-1.155683607833265	6.017986175277379e-06

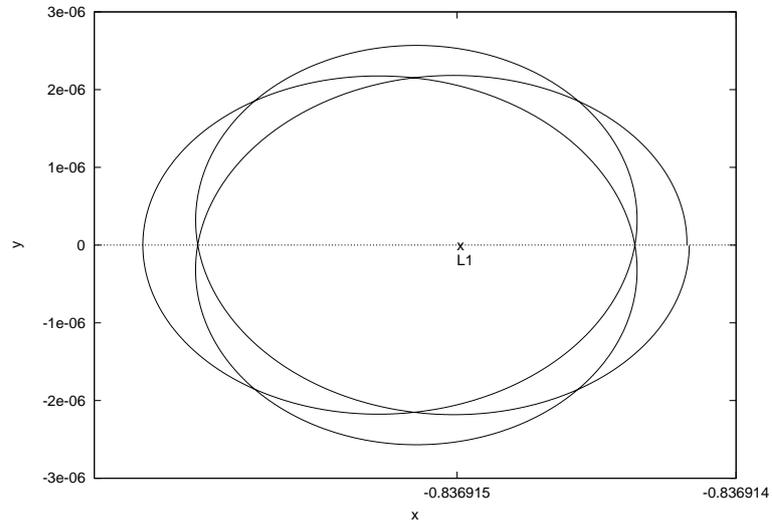


Figura 5.3 - Órbita periódica relativa ao ponto  $L_1$  no problema quase bicircular.

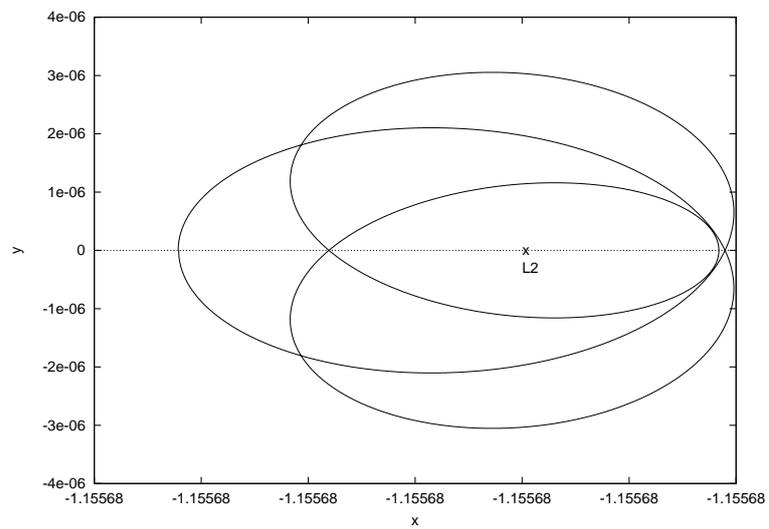


Figura 5.4 - Órbita periódica relativa ao ponto  $L_2$  no problema quase bicircular.

## 5.4 Comparação entre as Órbitas Halo

A Figura 5.5 apresenta uma órbita halo referente ao ponto lagrangiano  $L_1$  no PRTC e sua equivalente no problema quase bicircular. O ponto de partida para se continuar uma condição inicial do PRTC para o PQBC é o período da órbita periódica, ou seja, as soluções periódicas de um sistema não autônomo aparecem isoladas, portanto nem toda solução periódica do sistema autônomo, que neste caso é o PRTC, gera uma solução no sistema não autônomo que é o PQBC. O critério de escolha das órbitas periódicas baseia-se no período. Escolhe-se uma órbita periódica no PRTC que tenha o mesmo período ou período múltiplo do período da perturbação.

Tabela 5.2 - Condições Iniciais da Órbita Halo no PRTC e no PQBC.

modelo	$x_0$	$z$	$\dot{y}$
PRTC	-9.87162249854154e-01	-5.21310697447108e-02	6.45800936855262e-01
PQBC	-9.879629720523710e-01	-5.108383968268400e-02	6.622660818240399e-01

## 5.5 Problema do Valor de Contorno

Quando um sistema de equações diferenciais ordinárias é suposto a satisfazer condições iniciais e finais, o problema é conhecido como problema de valor de contorno em dois pontos ou TPBVP - *two point boundary value problem*. No caso particular deste trabalho, a integração do sistema  $\dot{X} = f(X)$  inicia-se num determinado ponto cujas condições são  $X_i = (x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$  e termina em  $X_f = (x_f, y_f, z_f, \dot{x}_f, \dot{y}_f, \dot{z}_f)$ , onde as componentes relativas às posições são fixas e as componentes relativas às velocidades devem ser encontradas de tal modo a satisfazer as condições de contorno impostas ao problema.

Ao propor o problema desta forma, existem infinitas soluções, mas ao se estipular um tempo fixo para a trajetória desejada, restringe-se o conjunto solução do problema. No PRTC, este conjunto solução é formado por duas trajetórias: uma trajetória direta, onde o vetor velocidade tem a mesma direção da órbita inicial, e uma trajetória indireta, quando o vetor velocidade tem direção oposta ao da órbita inicial. A simetria dessas trajetórias obedece a própria simetria do PRTC (ver Figura 5.6).

Portanto, podem existir até duas soluções para o mesmo conjunto de condições de contorno e para um mesmo intervalo de tempo fixo para a realização da manobra.

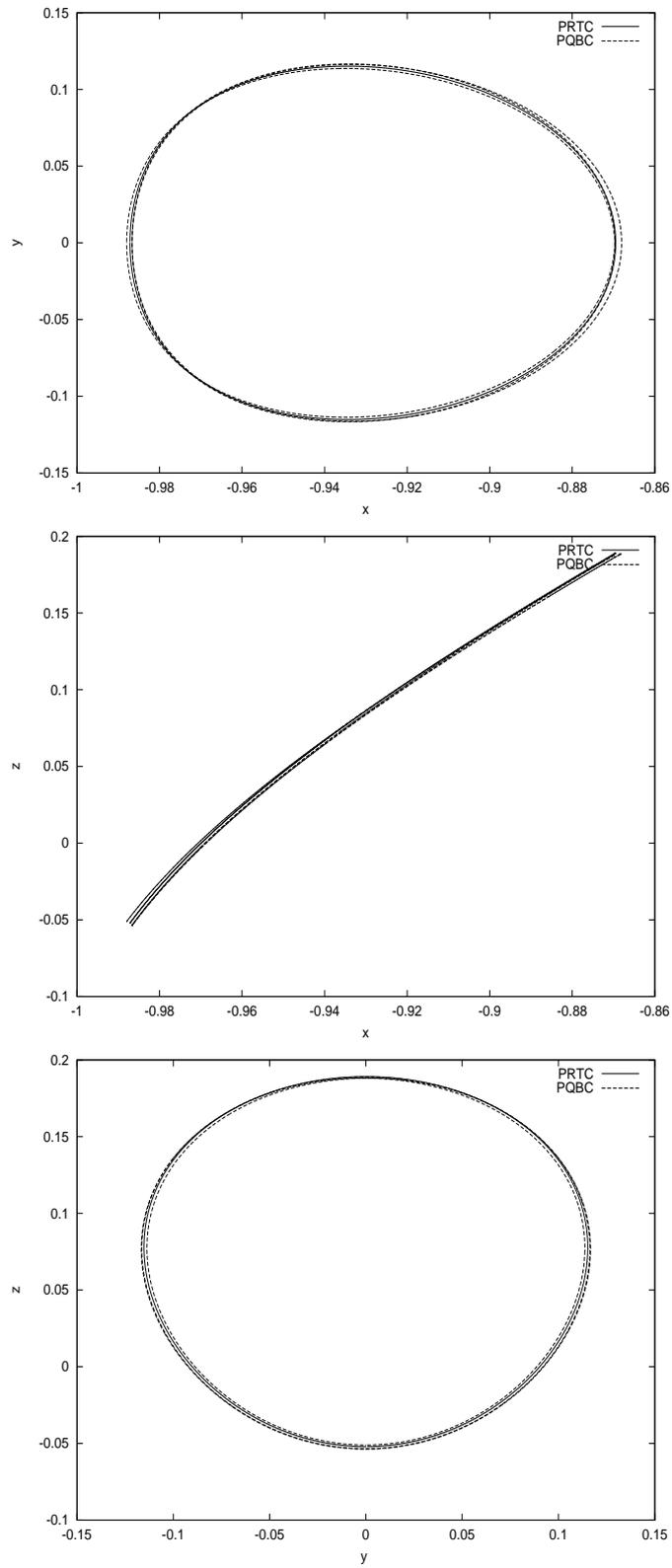


Figura 5.5 - Comparação entre as órbitas halo de  $L_1$  no PRTC e no PQBC.

Uma solução sempre apresenta um consumo de combustível menor do que a outra, isto é, requer um impulso de velocidade mais baixo para atingir as condições finais dentro do tempo estipulado. No caso aplicado, o algoritmo desenvolvido nem sempre convergiu para a solução mais econômica, mas os testes realizados mostraram que o ponto mínimo do consumo de uma família (trajetórias diretas) é muito próximo ao mínimo da outra família (trajetórias indiretas) de soluções.

Há vários métodos numéricos para a solução deste problema. Neste trabalho, o método utilizado foi o método de tiro simples, que encontra-se bem detalhado na referência (53) onde seu algoritmo também encontra-se disponível.

O objetivo é aplicar esta metodologia para se determinar órbitas de transferência que levam o veículo de um ponto de estacionamento até um ponto da órbita halo nos dois modelos previamente descritos. Com isto, tem-se dois impulsos a serem calculados: o primeiro impulso faz com que o veículo escape da órbita inicial e o segundo impulso é aplicado para colocar o veículo na órbita desejada.

A Figura 5.6 mostra algumas transferências realizadas fixando um ponto da órbita halo - da família de  $L_1$  no sistema Terra-Lua - pertencente ao plano  $xy$  com  $z = 0$ . O tempo de transferência foi fixo e variou-se as condições de contorno iniciais, que neste caso, varreu alguns pontos da órbita de estacionamento ao redor da Terra. Esta mesma figura mostra as duas famílias de órbitas de transferência simétricas, a família direta e a indireta.

## 5.6 Cálculo dos Impulsos

O consumo de combustível requerido pelo veículo para escapar ou entrar em uma órbita está diretamente relacionado ao cálculo dos impulsos de velocidade fornecidos ao mesmo.

O primeiro impulso,  $\Delta V_i$ , é calculado como sendo a diferença entre os vetores da velocidade do veículo na órbita de estacionamento e da velocidade do mesmo na órbita de transferência obtida pela solução do problema de valor de contorno.

$$\Delta V_i = |\vec{V}_{est} - \vec{V}_{transf}| \quad (5.36)$$

Para colocar o veículo na órbita halo o segundo impulso,  $\Delta V_f$ , é calculado de forma

análoga ao primeiro:

$$\Delta V_f = |\vec{V}_{transf} - \vec{V}_{halo}| \quad (5.37)$$

O impulso total é a soma dos impulsos

$$\Delta V = \Delta V_i + \Delta V_f \quad (5.38)$$

independentemente do modelo dinâmico considerado.

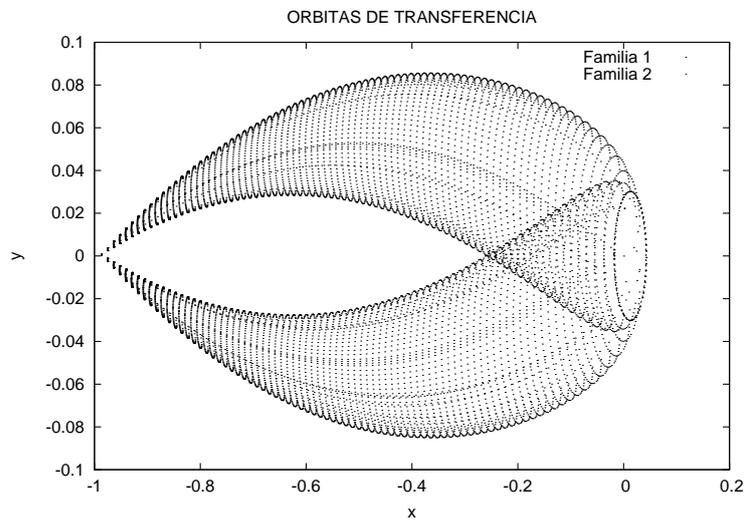


Figura 5.6 - Método do valor de contorno aplicado aos pontos da órbita de estacionamento com a mesma condição final na órbita halo. A partir da figura fica evidente a simetria entre as famílias. A Família 1 corresponde à órbita indireta e a Família 2 corresponde à órbita direta. O modelo dinâmico para a realização dessas transferências foi o PRTC.

## 5.7 Órbita Halo e de Estacionamento

No PRTC, a escolha das órbitas de estacionamento e das órbitas halo, cumpre-se com a aplicação do método de continuação numérica através da curva característica, mostrado no Capítulo 3. Este método foi implementado com sucesso nas etapas anteriores para a determinação da família das órbitas de Liapunov, e portanto, sua aplicação foi facilmente viabilizada para a escolha das órbitas halo desejadas. A órbita de estacionamento selecionada pertence à família BD (ver (54)) que é uma família de órbitas periódicas diretas ao redor do primário de maior massa. A órbita

retrógrada equivalente a esta também foi utilizada nas simulações numéricas do método de transferência, porém seus resultados não estão aqui apresentados porque propiciaram resultados equivalentes aos obtidos com a família direta.

Foram escolhidas duas órbitas de estacionamento: a primeira dista aproximadamente 6.696 km do centro da Terra enquanto que a segunda está aproximadamente a 11.612 km. Estas distâncias são coerentes com a faixa de distância dos satélites geoestacionários.

Como o veículo espacial passa pouco tempo numa órbita de estacionamento, a órbita de estacionamento escolhida no problema quase bicircular não é exatamente uma órbita proveniente de uma continuação numérica de órbitas do PRTC, e sim uma órbita geometricamente equivalente, gerada a partir das mesmas condições iniciais, ou seja, não é uma órbita periódica.

A órbita halo escolhida tem um terço do período solar no problema restrito de três corpos, já no caso quase bicircular apresenta o mesmo período, como esperado. A partir da Figura 5.7 pode-se notar esta diferença de períodos, no caso quase bicircular (órbita tracejada) a órbita só se fecha após três revoluções. As condições iniciais das órbitas encontram-se na Tabela 2.1.

Para facilitar a identificação dos pontos nas órbitas de estacionamento e halo, é introduzido um sistema de coordenadas polares  $(l, \alpha)$ , onde apenas o ângulo  $\alpha$  é considerado, ou seja, a coordenada  $l$  é ignorada. Seja o plano  $xy$  da órbita de estacionamento, desloca-se a origem  $(0, 0)$  para o centro da órbita em  $(\mu, 0)$ , o ângulo  $\alpha_1$  é contado a partir do eixo  $x$  positivo no sentido anti-horário portanto, pode-se localizar cada ponto da órbita pelo ângulo  $\alpha_2$ . Este sistema de coordenadas não foi rigorosamente utilizado, serve apenas para uma localização rápida do ponto.

Na projeção  $yz$  da órbita halo o mesmo sistema de coordenadas polares adaptado foi implementado. Neste plano é necessário mover a origem  $(0, 0)$  para o centro da curva fechada. O ângulo  $\alpha_2$  neste caso é contado a partir do eixo  $y$  positivo no sentido anti horário. Estas projeções podem ser vistas na Figura 5.9.

## 5.8 Transferências no PRTC

De acordo com a existência de infinitas combinações entre as condições de contorno e o tempo de transferência, alguns critérios de seleção foram aplicados. Inicialmente as

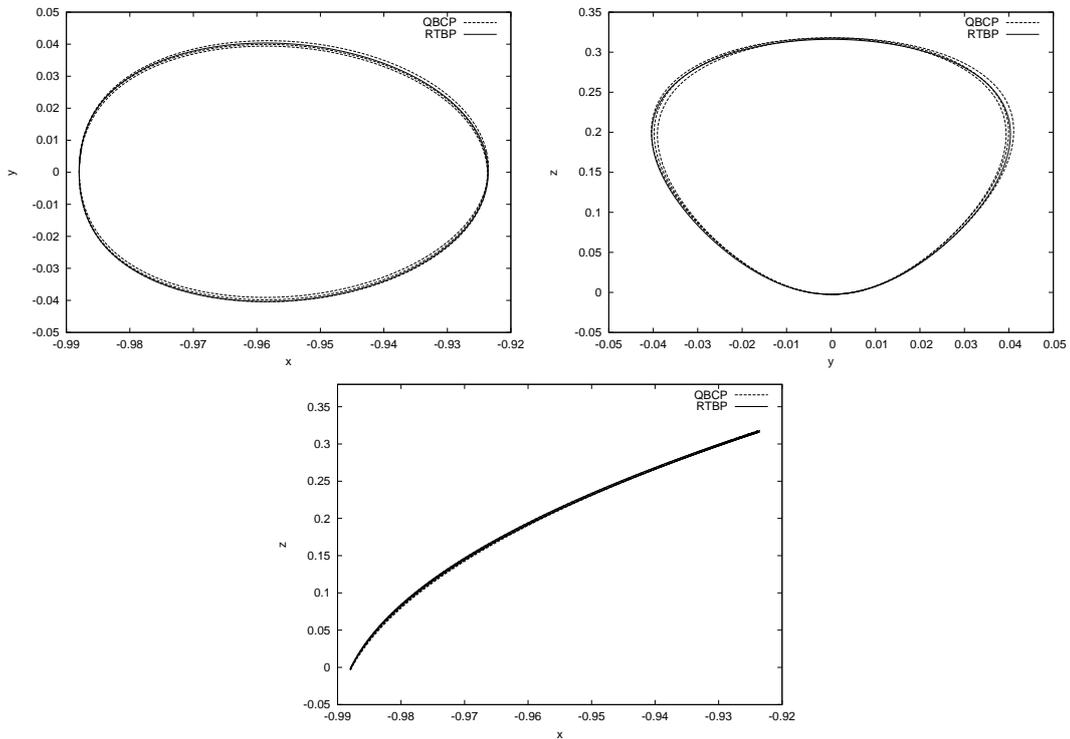


Figura 5.7 - Projeções  $xy$ ,  $yz$  e  $xz$  da órbita halo no PRTC e no PQBC.

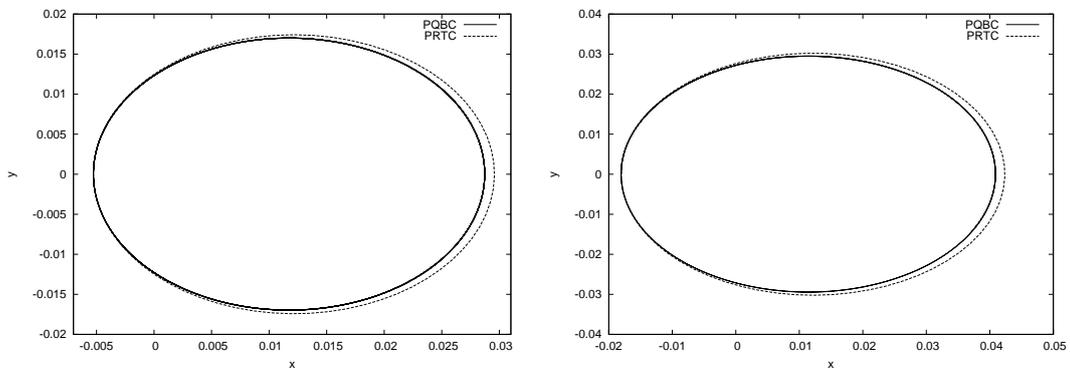


Figura 5.8 - Projeções  $xy$  das órbitas de estacionamento 1 e 2 (ver Tabela 2.1) no PRTC e no quase bicircular. A Terra está localizada em  $x = \mu$  de acordo com o sistema de referência adotado.

Tabela 5.3 - Condições Iniciais Utilizadas nas Simulações

ORBIT	$x_0$	$z_0$	$\dot{y}_0$
Halo - RTBP	-9.87982557457513E-01	-2.48226957833054E-03	3.13139586195729E+00
Halo - QBCP	-9.879722904635280E-01	-2.462095060502300E-03	3.184909363998671E+00
Parking 1	-0.005270250000000E+0	0.0000E+0	7.547700390000000E+0
Parking 2	-0.018068060000000E+0	0.0000E+0	5.747748530000000E+0

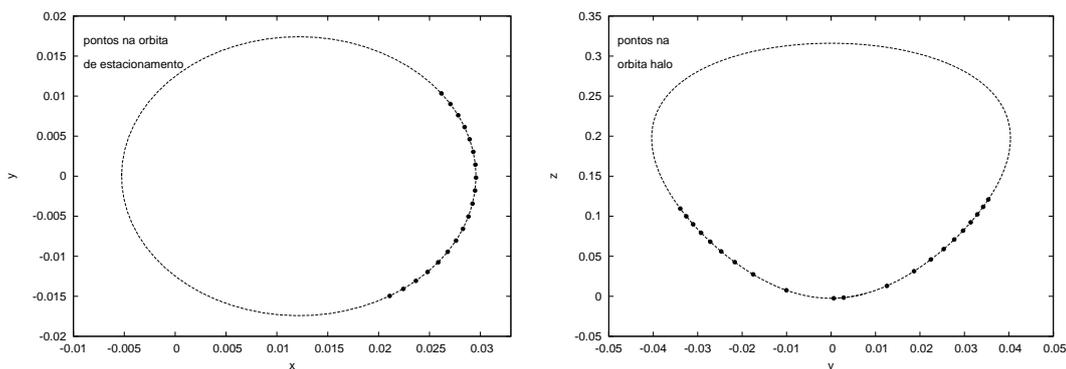


Figura 5.9 - Condições de contorno que propiciaram transferências com impulso total menor que as outras possíveis combinações entre pontos dessas duas órbitas.

órbitas foram discretizadas em intervalos de aproximadamente seis graus, fornecendo aproximadamente 60 pontos em cada órbita. Para cada combinação, um ponto na órbita de estacionamento e um ponto na órbita halo, foi aplicado o método numérico de tiro simples com tempo fixo. Isto foi realizado para três intervalos de tempo distintos,  $t = 0.2, 0.3$  e  $0.4$  unidades canônicas de tempo. As simulações mostraram que para o intervalo  $\alpha_1 = [300^0, 40^0]$  e  $\alpha_2 = [230^0, 330^0]$  o impulso total foi o que apresentou valores menores que o impulso calculado para as demais combinações, por isto, apenas estas faixas angulares foram consideradas no resultado apresentado. Os pontos considerados podem ser visualizados na Figura 5.9.

De posse das condições de contorno previamente selecionadas, as transferências orbitais foram realizadas variando o intervalo de tempo de 0.2 até 2.0 unidades canônicas de tempo em passos de 0.05, isto pode ser verificado a partir do gráfico da Figura 5.10. Cada linha vertical representa a varredura nas condições de contorno considerando o mesmo tempo de transferência. Como esperado, a contribuição máxima para o  $\Delta V$  total foi o impulso inicial (Equação 5.36). O impulso final, que coloca o veículo na órbita halo, em média, foi quatro vezes menor que o consumo inicial. O resultado desta simulação pode ser resumido da seguinte forma: o impulso total mínimo é 4.7283 unidades canônicas de velocidade e ocorre em  $\alpha_1 = 36^0.3874$  e  $\alpha_2 = 261^0.8722$  para  $t = 0.85$ .

## 5.9 Comparação do $\Delta V$ entre os Modelos

A escolha da condição de contorno final é restrita pelo fato do problema quase bicircular não ser autônomo, ou seja, as condições iniciais de solução periódica dependem do tempo inicial. Cada ponto da solução no espaço de fase associa-se um vetor de

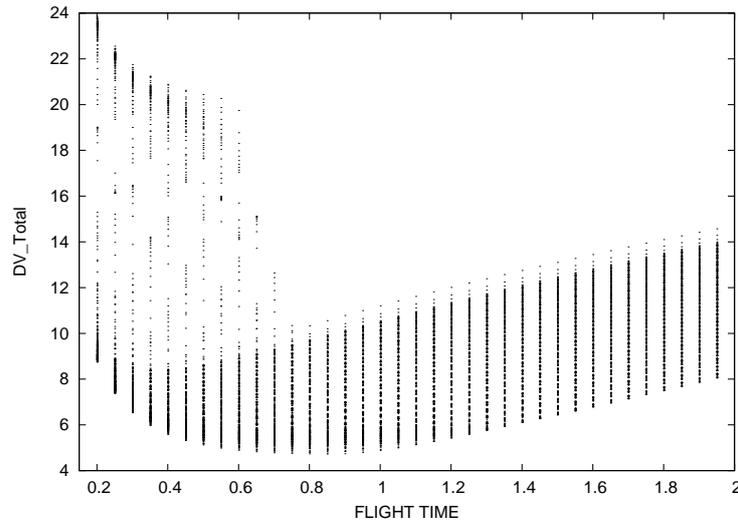


Figura 5.10 -  $\Delta V$  total considerando as condições de contorno da Figura 5.9 com o tempo de transferência igual a 0.6 unidades canônicas de tempo.

estado acrescido do instante em que o vetor é dado. Portanto, se o objetivo é atingir um determinado ponto na órbita halo, o tempo de integração, desde o momento inicial (onde os três primários estão alinhados em  $y = 0$ ) até o momento em que trajetória passa por este ponto, deve ser igual ao tempo de transferência. Ao impor este vínculo, pode-se afirmar que trata-se de uma manobra de *rendezvous*, embora não haja outro veículo no ponto final para realizar a manobra em si. A integração começa em  $t = 0$  com os três primários alinhados sob o eixo  $x$ .

Devido a este vínculo temporal nas transferências, não é possível variar as condições finais (na órbita halo) mantendo fixo o tempo de transferência, por esta razão foram escolhidos alguns pontos na órbita halo vinculados ao tempo de transferência desejado. O que se pôde variar foi a condição inicial, uma vez que a órbita de estacionamento não foi rigorosamente determinada, sob o argumento de que um satélite não passa muito tempo estacionado na órbita ao redor da Terra e por isto, a órbita não necessita ser periódica.

Lembrando que o objetivo final é comparar o impulso total dado nos dois modelos dinâmicos estudados, as condições de contorno devem ser equivalentes, ou seja, deve-se considerar pontos similares nas órbitas halos, isto é possível, porque inicialmente já foram consideradas órbitas equivalentes. O tempo de transferência também tem que ser o mesmo. A órbita de estacionamento utilizada foi a órbita 2 da Tabela 2.1 para ambos modelos.

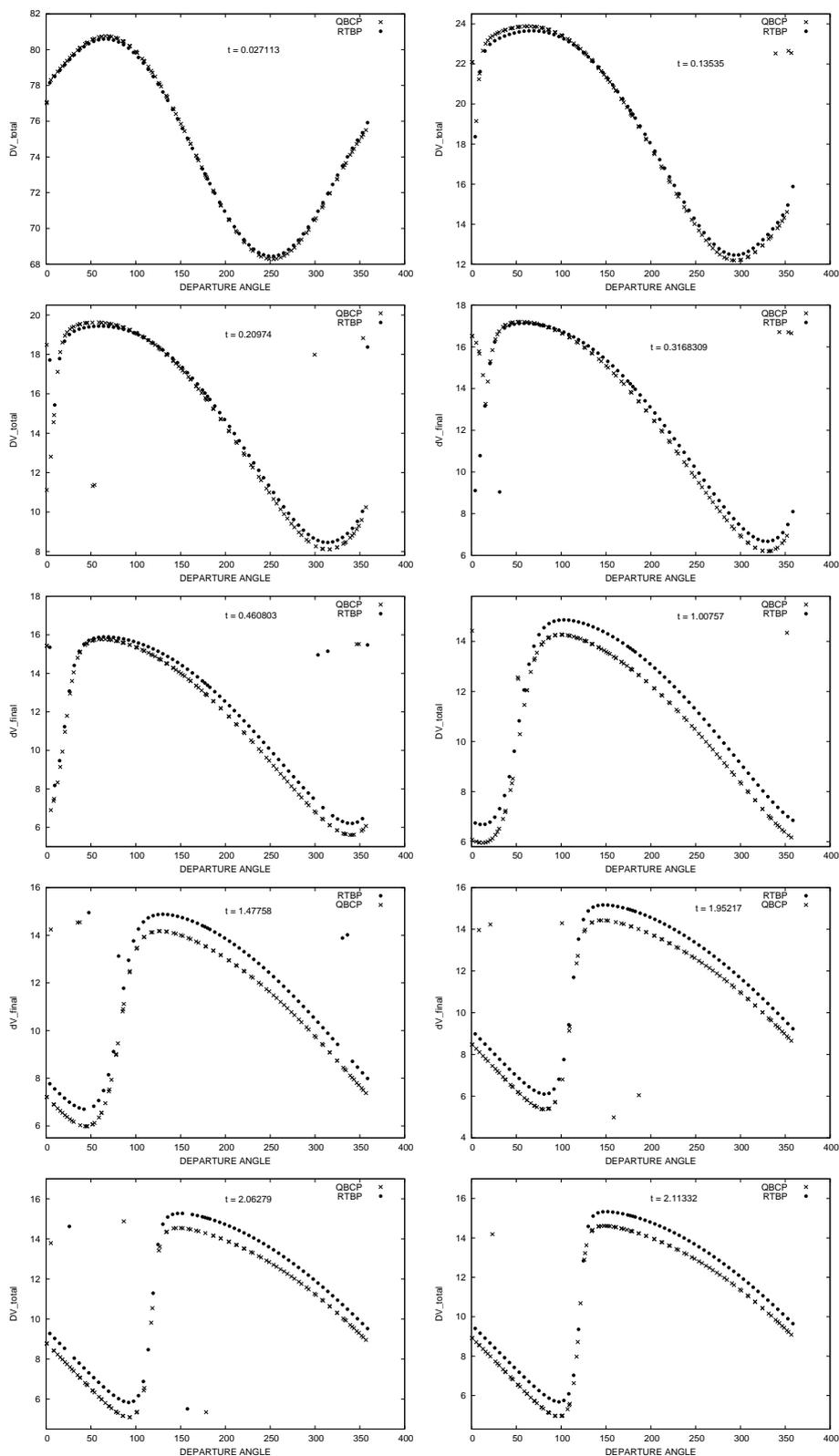


Figura 5.11 - Comparação entre o impluso total  $\Delta V$  nos dois modelos dinâmicos estudados, as integrações foram realizadas considerando condições de contorno equivalentes e intervalos de tempo distintos, iniciando com  $\Delta t = 0.027113$  a  $\Delta t = 2.11332$ .

A Figura 5.11 mostra o resultado das simulações considerando 10 intervalos de tempo distintos. De maneira geral, pode-se afirmar que a presença do Sol contribuiu de forma positiva no consumo total, pois propiciou transferências 9% mais econômicas que as obtidas no modelo restrito de três corpos. Nesses gráficos, pode-se notar que a curva do impulso total dentro do modelo quase bicircular prevalece abaixo da curva dada no problema restrito de três corpos em todos os intervalos de tempo considerados, exceto para o intervalo de tempo muito pequeno (ver primeiro gráfico da Figura 5.11).

## 6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Conforme apresentado no primeiro capítulo, os principais objetivos deste trabalho foram o estudo da dinâmica ao redor dos pontos lagrangianos e de transferências orbitais à vizinhança desses pontos.

Nos Capítulos 2 e 3 foram apresentadas duas técnicas que permitiram o estudo na vizinhança dos pontos lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$ : a técnica semi-analítica de redução à variedade central e a técnica numérica de determinação das variedades invariantes instável/estável. A redução à variedade central permitiu determinar o espaço de fase ao redor dos pontos lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$ , onde vivem as órbitas periódicas e quase periódicas. A determinação da variedade central foi precedida da forma normal, que desacoplou as direções instável da estável através da série de Lie. Para a obtenção da forma normal foi implementado um manipulador algébrico especialista que permitiu efetuar os cálculos envolvidos na expansão da hamiltoniana até a ordem 10, com velocidade e precisão. A determinação das variedades instável e estável das órbitas periódicas ao redor dos pontos lagrangianos foi um passo prévio aos objetivos do capítulo seguinte, onde elas são utilizadas para as transferências orbitais. Além disto a técnica de continuação de soluções através de um parâmetro de arco teve de ser introduzida para a aquisição das condições iniciais de todas as órbitas da família de Liapunov, proporcionando mais liberdade de escolha da órbita, pois permitiu percorrer toda a família das órbitas de Liapunov. A análise da estabilidade linear da família das órbitas planas de Liapunov de  $L_1$  e  $L_2$  também foi apresentada, garantindo a continuidade do caráter instável das órbitas.

No Capítulo 4 aplicam-se as técnicas previamente desenvolvidas para a obtenção das condições iniciais das órbitas periódicas na variedade central. O objetivo principal deste capítulo foi a determinação de órbitas de transferência para a órbita lunar seguindo os caminhos dinâmicos naturais, isto é, seguindo as trajetórias guiadas pelas variedades instáveis e estáveis das órbitas periódicas dos pontos lagrangianos. Uma vez que estas variedades não se aproximam do primário de maior massa, uma trajetória direta entre a Terra e a Lua é inviável. Para contornar este problema, foi aplicado uma superposição de dois PRTC com um primário em comum: Terra-Sol e Terra-Lua. Portanto, a partícula partiu da vizinhança da Terra, no modelo Terra-Sol, seguindo uma trajetória de não trânsito até a seção de Poincaré localizada no plano passando pela Terra. Deste ponto em diante, desligou-se o Sol e conectou-se esta trajetória com uma trajetória de trânsito no modelo Terra-Lua. O refino da trajetória

de trânsito foi realizado no modelo bicircular, onde considera o campo gravitacional dos três primários Terra-Sol-Lua simultaneamente. As simulações considerando as órbitas de  $L_1$  e  $L_2$  no sistema Terra-Sol foram feitas. No sistema Terra-Lua pôde-se considerar somente as órbitas da família de  $L_2$ , pois, de acordo com a constante de Jacobi, esta família permite uma conexão entre as regiões de Hill interna e externa, sendo necessária na captura lunar, pois a partícula segue uma órbita de trânsito contida na região externa Hill, enquanto que a Lua encontra-se na região interna de Hill. Simulações considerando a fase lunar também foram apresentadas. Como esperado neste tipo de manobra, o impulso de velocidade foi baixo em relação aos impulsos necessários por manobra convencional.

O Capítulo 5 apresenta as transferências orbitais para uma órbita halo da família de  $L_1$  no sistema Terra-Lua. O método empregado neste capítulo é o método do valor de contorno, ou seja, dados dois pontos, um inicial e outro final, e o tempo de transferência, o método se encarrega de encontrar uma solução dentro do modelo dinâmico levando em consideração esses vínculos. Este método foi implementado em dois modelos, no PRTC e no quase bicircular, onde pôde-se comparar o impulso total em ambos, evidenciando-se que o modelo quase bicircular proporcionou manobras mais econômicas que o PRTC.

Há algumas sugestões para a continuação deste trabalho, principalmente ao que se refere às transferências guiadas pelas variedades hiperbólicas e ao acoplamento dos modelos. As técnicas apresentadas para a determinação das órbitas de trânsito e de não trânsito referentes às variedades instável e estável das órbitas de Liapunov podem ser estendidas ao caso tridimensional, isto é, pode-se considerar as órbitas halo e as órbitas de Lissajous. As trajetórias de transferência adquiridas pelo acoplamento de dois PRTC, sejam estas guiadas pelas variedades hiperbólicas associadas às órbitas periódicas ou quase periódicas, podem ser refinadas em um modelo mais completo, o qual consideraria todos os corpos do Sistema Solar. Também seria interessante classificar o tipo de captura que a partícula pode sofrer.

Um outro modelo interessante que serve como primeira aproximação é o problema fotogravitacional restrito de três corpos. Este problema, em sua forma mais completa, considera a pressão de radiação emitida pelos primários - o que altera quantitativamente os resultados. Geralmente, este modelo é aplicado aos sistemas binários constituídos de estrelas jovens, as quais carregam disco de acreção. A idéia é tratar cada partícula deste disco individualmente, ou seja, desprezando-se as iterações

mútuas. Com isto, determinam-se as linhas de fluxo que as partículas podem seguir e uma eventual troca de matéria entre as estrelas. Além disto, em substituição ao PRTC, pode-se aplicar este modelo fotogravitacional ao estudo das transferências guiadas pelas variedades hiperbólicas. Mas, quando o problema envolve algum duo de primários do Sistema Solar, é necessário simplificá-lo, pois, obviamente, somente o Sol pode ser tratado como estrela.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 HOWELL, K. C. Families of orbits in the vicinity of the libration point. **The Journal of the Astronautical Sciences**, v. 49, n. 1, p. 107–125, 2001. [24](#)
- 2 SIEGEL, C. L.; MOSER, J. K. **Lectures on celestial mechanics**. Berlim: Springer, 1971. [24](#), [73](#)
- 3 GOUDAS, C. L. Three-dimensional periodic orbits and their stability. **Icarus**, v. 2, p. 1–18, 1967. [24](#)
- 4 HENÓN, M. Vertical stability of periodic orbits in the restricted problem. **Astronomy and Astrophysics**, v. 28, p. 415–426, 1973. [24](#)
- 5 ICTHIAROGLOU, S.; MICHALODIMITRAKIS, M. Three-body problem: the existence of the families of the three-dimensional periodic orbits bifurcate from planar periodic orbits. **Astronomy and Astrophysics**, v. 81, p. 30–32, 1980. [24](#)
- 6 MICHALODIMITRAKIS, M. A new type of connection between the families of periodic orbits of the restricted three body problem. **Astronomy and Astrophysics**, v. 64, n. 1, p. 83–86, 1977. [24](#)
- 7 ZAGOURAS, G. G.; KAZANTZIS, P. G. Three-dimensional periodic oscillations generating from plane periodic ones around the collinear lagrangian points. **Astrophysics Space Science**, v. 61, n. 4, p. 389–409, 1979. [25](#)
- 8 ICTHIAROGLOU, S.; KATOPODIS, K.; MICHALODIMITRAKIS, M. Restricted problem: families of vertical critical periodics orbits. **Astronomy and Astrophysics**, n. 90, p. 324–326, 1980. [25](#)
- 9 FARQUHAR, R. W. **The control and use of libration-point satellites**. Washington: Goddard Space Flight Center, NASA, 1970. (Technical Report R-346). [25](#)
- 10 BREAKWELL, J. V.; BROWN, J. The halo family of 3-dimensional periodic orbits in the earth-moon restricted 3-body problem. **Celestial Mechanics**, v. 20, p. 389–404, 1979. [25](#)
- 11 HOWELL, K. C. Three-dimensional, periodic, halo orbits. **Celestial Mechanics**, v. 32, p. 53–71, 1984. [26](#)

- 12 HOWELL, K. C.; BREAKWELL, J. V. Almost rectilinear halo orbits. **Celestial Mechanics**, v. 32, n. 1, p. 29–52, 1984. [26](#)
- 13 FARQUHAR, R. W.; KAMEL, A. A. Quasi-periodic orbits about the translunar libration point. **Celestial Mechanics**, v. 7, n. 4, p. 458, 1973. [26](#)
- 14 RICHARDSON, D. L. Analytical construction of periodic orbits about the collinear points. **Celestial Mechanics**, v. 22, n. 3, p. 241–253, 1980. [26](#), [40](#)
- 15 GOMEZ, G. **Station keeping of libration point orbits**. Barcelona: ESOC Contract 5684/83/D/ JS (SC), 1985. [26](#), [86](#), [88](#), [89](#)
- 16 GÓMEZ, G.; LLIBRE, J.; MARTINEZ, R.; SIMÓ, C. **Study on orbits near the triangular libration points in the perturbed restricted three body problem**. Barcelona: ESOC Contract 6139/84/D/JS(SC), 1987. [26](#)
- 17 GÓMEZ, G.; JORBA, A.; MASDEMONT, J.; SIMÓ, C. **Study refinement of semi-analytical halo orbit theory**. Barcelona: ESOC Contract 8625/89/D/MD/(SC), 1991. [26](#)
- 18 SIMÓ, C. On the analytical and numerical approximation of invariant manifolds. In: BENEST, D.; FROESCHLÉ, C. (Ed.). **Modern methods in celestial mechanics**. Goutelas: Éditions Frontière, 1990. p. 285–330. [26](#), [73](#), [78](#), [82](#), [114](#)
- 19 GÓMEZ, G.; JORBA, A.; MASDEMONT, J.; SIMÓ, C. Study of the transfer from the earth to a halo orbit around the equilibrium point  $l_1$ . **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 56, n. 4, p. 541–562, 1993. [26](#)
- 20 GÓMEZ, G.; MASDEMONT, J. Libration point orbits: the state of the art from the dynamical systems approach. In: PRADO, A. F. B. A. (Ed.). **Advances in space dynamics**. São José dos Campos: FAPESP;CAPES, 2000. cap. 1, p. 1–49. [26](#), [34](#), [40](#)
- 21 SIMÓ, C.; GÓMEZ, G.; LLIBRE, J.; MARTÍNEZ, R.; RODRÍGUEZ, J. On the optimal station keeping control of halo orbits. **Acta Astronautica**, v. 15, n. 6/7, p. 193–19, 1987. [26](#)
- 22 FARQUHAR, R. W. The flight of ISEE-3/ICE: origins, mission history and a legacy. **The Journal of the Astronautical Sciences**, v. 49, n. 1, p. 23–73, 2001. [27](#)

- 23 LO, M. W.; et al. Genesis mission design. **The Journal of the Astronautical Sciences**, v. 49, n. 1, p. 169–184, 2001. [27](#)
- 24 STOER, J.; BURLIRSCH, R. **Introduction to numerical analysis**. New York: Springer-Verlag, 1983. 553 p. [28](#), [113](#)
- 25 BELBRUNO, E. A.; MILLER, J. K. Sun-perturbed earth-to-moon transfer with ballistic capture. **Journal of Guidance and Control Dynamics**, v. 16, p. 770–775, 1993. [29](#)
- 26 KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, E. J.; SHANE, D. R. Shoot the moon. **Spaceflight Mechanics**, AAS 105, p. 107–1181, 2000. [29](#), [95](#), [99](#), [101](#)
- 27 KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, J. E.; ROSS, S. D. Low energy transfer to the moon. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 81, p. 63–73, 2001. [29](#)
- 28 GÓMEZ, G.; KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, J. E.; MASDEMONT, J.; ROSS, S. D. Invariant manifolds, the spatial three-body problem and space mission design. In: ASS/AIAA ASTRODYNAMICS SPECIALISTS CONFERENCE, 2001, Quebec City, Canada. **Proceedings...** San Diego: AAS Paper, 2001. p. 01–301. [29](#)
- 29 \_\_\_\_\_. Connecting orbits and invariant manifolds in the spatial restricted three-body problem. **Nonlinearity**, v. 17, p. 1571–1606, 2004. [29](#), [95](#), [99](#)
- 30 KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, J. E.; ROSS, S. D. Resonance and capture of jupiter comets. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 81, p. 27–38, 2001. [29](#)
- 31 PERKO, L. **Differential equations and dynamical systems**. New York: Springer-Verlag, 1991. 403 p. [33](#)
- 32 JORBA, A.; MASDEMONT, J. Dynamics in the centre manifold of the collinear points of the restricted three body problem. **Physica D**, v. 132, p. 189–213, 1999. Disponível em: <<http://www.maia.ub.es/dsg/index.html>>. [34](#), [40](#)
- 33 SIMÓ, C. Estabilitat de sistemes hamiltonians. **Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona**, v. 48, n. 7, 1989. [34](#), [39](#), [40](#), [47](#)

- 34 JORBA, A. A methodology for the numerical computation of normal forms, centre manifolds and first integrals of hamiltonian systems. **Experimental Mathematics**, v. 8, p. 155–195, 1999. Disponível em: <http://www.maia.ub.es/dsg/index.html>. 34, 49
- 35 SZEBEHELY, V. **Theory of orbits**. New York: Academic Press, 1967. 668 p. 35, 38
- 36 GOLDSTEIN, H. **Classical mechanics**. Massachusetts: Addison Wesley, 1950. 672 p. 36
- 37 DEPRIT, A. Canonical transformations depending on a small parameter. **Celestial Mechanics**, v. 1, p. 12–30, 1969. 39, 45
- 38 STUCHI, T. J. KAM tori in the center manifold of the 3D hill problem. In: WINTER, O. C.; PRADO, A. F. B. A. (Ed.). **Advances in space dynamics 2**. São José dos Campos: CAPES, 2002. p. 112–127. 45, 63
- 39 MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002. 527 p. 48
- 40 MACHUY, A. L. **Cálculo efetivo da forma normal parcial para o problema de Hill**. 128 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001. 49
- 41 BOCCALETTI, D.; PUCACCO, G. **Theory of orbits**. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998. 423 p. 74
- 42 BIRKHOFF, G. D. Dynamical system. **American Mathematical Society, Colloquium Publications**, v. 9, p. 423, 1927. 78, 84
- 43 BROUCKE, R. A. Stability of periodic orbits in the elliptic restricted three-bodyproblem. **AIAA Journal**, v. 7, n. 6, p. 1003–1009, 1969. 84, 85
- 44 STIEFEL, E.; SCHEIFEFE, G. **Linear and regular celestial mechanics**. New York: Springer-Verlag, 1971. 301 p. 102
- 45 CRONIN, J.; RICHARDS, P. B.; RUSSELL, L. H. Some periodic solutions of a four-body problem. **Icarus**, n. 3, p. 423–428, 1964. 110

- 46 ANDREU, M. A. **The quasi bicircular problem**. 199 p. Tese (Doutorado em Matemática) — Departament de Matematica Aplicada e Analisis, Universitat de Barcelona, Barcelona, 1998. Disponível em:  
<<http://www.maia.ub.es/dsg/index.html>>. 112, 124
- 47 MASDEMONT, J. **Fundamentals of dynamical and applications of Libration point orbits**. 2004. Curso ministrado no INPE, São José dos Campos. 113
- 48 BATTIN, R. H.; VAUGHAN, R. M. An elegant lambert algorithm. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 6, n. 7, p. 662–670, 1984. 123
- 49 GODDING, R. H. A procedure for the solution of lambert’s orbital boundary-value problem. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 48, p. 145–165, 1990. 123
- 50 PRADO, A. F. B. A.; BROUCKE, R. A. The minimum delta-v lambert’s problem. **SBA Controle e Automação**, v. 7, n. 2, p. 84–90, 1986. 123
- 51 MARCHAL, C. **The three-body problem**. Amsterdam: Elsevier, 1990. 124
- 52 ANDREU, M. A. Preliminary study on the translunar halo orbits of the real earth-moon system. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 86, p. 107–130, 2003. 137
- 53 PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical recipes in fortran**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1983. 2. ed. 141
- 54 BROUCKE, R. A. **Periodics orbits in the restrited three body problem with Earth-Moon masses**. Pasadena: JPL TR 32-1168/1968, 1968. 142



## A MISSÕES ESPACIAIS AOS PONTOS LAGRANGIANOS

Tabela A.1 - Missões Espaciais aos Pontos Lagrangianos

Missões	Lagrangiano	Data	Objetivo da Missão
ISEE-3 (NASA)	$L_1$	1978	vento solar, raios cósmicos
SOHO (ESA/NASA)	$L_1$	1996	observatório solar
ACE (NASA)	$L_1$	1997	vento solar, partículas
MAP (NASA)	$L_2$	2001	radiação cósmica de fundo
Genesis (NASA)	$L_1$ e $L_2$	2001	composição do vento solar
Triana* (NASA)	$L_1$	2002	observação da Terra
Nexus* (NASA)	$L_2$	2004	teste tecnológico para o NGST
FIRST (ESA)	$L_2$	2007	telescópio de infravermelho
Planck (ESA)	$L_2$	2007	radiação cósmica de fundo
NGST (NASA)	$L_2$	2009	telescópio espacial
GAIA (ESA)	$L_2$	2009	estrutura galáctica e astrometria
Constellation-X (NASA)	$L_2$	2011	astronomia de raios X
TPF (NASA)	$L_2$	2012	busca de sistemas planetários
SAFIR (NASA)	$L_2$	2014	observatório de infravermelho

\* não foi lançado

**ACRÔNIMOS:** ISEE = International Sun-Earth Explorer/ SOHO = Solar Heliosphere Observatory/ ACE = Advanced Composition Explorer/ MAP = Microwave Anisotropy Probe/ FIRST = Far Infrared Submillimeter Telescope/ NGST = Next Generation Space Telescope/ GAIA = Global Astrometric Interferometer for Astrophysics/ TPF = Terrestrial Planet Finder/ SAFIR = Single Aperture Far Infra-Red Observatory

**FONTE:** "Os Novos Observatórios Espaciais" por Gerard Gómez e Teresa Stuchi. Ciência Hoje, v. 177, Novembro 2001



## B TEOREMA DA VARIEDADE CENTRAL/ESTÁVEL/INSTÁVEL

### B.1 Definição

Uma variedade  $n$ -dimensional diferenciável,  $M$  (ou uma variedade de classe  $C^k$ ), é um espaço métrico conectado com um conjunto aberto  $\{U_\alpha\}$ , isto é,  $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ , tal que:

(1) para todo  $\alpha$ ,  $U_\alpha$  é homeomórfico para uma bola unitária em  $\mathbb{R}^n$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ , i. e., para todo  $\alpha$  nele, existe um homeomorfismo de  $U_\alpha$  em  $B$ ,  $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow B$ , e

(2) se  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  e  $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow B$ ,  $h_\beta : U_\beta \rightarrow B$  são homeomorfismos, então  $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  e  $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  são subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  e o mapa

$$h = h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é diferenciável (ou de classe  $C^k$ ) e para todo  $x \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ , o determinante Jacobiano  $\det Dh(x) \neq 0$ . A variedade  $M$  é dita ser analítica se os mapas  $h = h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$  são analíticos.

### B.2 Teorema da Variedade Central para Órbitas Periódicas

Seja  $f \in C^r(E)$  com  $r \geq 1$  em que  $E$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  que contém a órbita periódica

$$\Gamma : x = \gamma(t)$$

do sistema

$$\dot{x} = f(x) \tag{B.1}$$

cujo período é  $T$ . Sejam  $\phi_t$  o fluxo de  $\dot{x} = f(x)$  e  $\gamma(t) = \phi_t(x_0)$ . Se  $k$  expoentes característicos possuírem a parte real negativa,  $j$  possuírem a parte real positiva e  $m = n - k - j$  possuírem a parte real nula, então existe um variedade central de  $\Gamma$ ,  $W^c(\Gamma)$ , de classe  $C^r$  que é invariante sob o fluxo  $\phi_t$ . Além disso,  $W^s(\Gamma)$ ,  $W^u(\Gamma)$  e  $W^c(\Gamma)$  se interseptom transversalmente em  $\Gamma$ , e, se a origem for transladada para o ponto de equilíbrio  $x_0$ , então  $\Gamma(t) = \phi_t(0)$ . Portanto  $W^c(\Gamma)$  é tangente ao subespaço central de  $\Gamma$ ,  $E^c(\Gamma)$ , no ponto  $0 \in \Gamma$ .

### B.3 Teorema da Variedade Estável/Instável para Órbitas Periódicas

Seja  $f \in C^1(E)$  onde  $E$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  contendo a órbita periódica

$$\Gamma : x = \gamma(t)$$

do Sistema (B.1) cujo período é  $T$ . Sejam  $\phi_t$  o fluxo de B.1 e  $\gamma(t) = \phi_t(x_0)$ . Se  $k$  expoentes dos expoentes característicos de  $\Gamma(t)$  possuírem parte real onde  $0 \leq k \leq n - 1$  e  $n - k - 1$  expoentes possuírem a parte real positiva, então existe um  $\delta > 0$  tal que a variedade estável de  $\Gamma$ ,

$$S(\Gamma) = \{x \in N_\delta(x_0) | d(\phi_y), \Gamma \rightarrow 0 \text{ com } t \rightarrow \infty\},$$

é uma variedade  $(k + 1)$ -dimensional diferenciável e positivamente invariante sob o fluxo  $\phi_t$ . Analogamente, a variedade invariante instável de  $\Gamma$ ,

$$U(\Gamma) = \{x \in N_\delta(x_0) | d(\phi_y), \Gamma \rightarrow 0 \text{ com } t \rightarrow -\infty\},$$

é uma variedade  $(n - k)$ -dimensional diferenciável e negativamente invariante sob o fluxo  $\phi_t$ . Além disso, as variedades estáveis e instáveis de  $\Gamma$  se interceptam transversalmente em  $\Gamma$ .