



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-6122-TDI/583

**UM MÉTODO DE AJUSTE DE SUPERFÍCIE PARA GRADES
TRIANGULARES CONSIDERANDO LINHAS
CARACTERÍSTICAS**

Laércio Massaru Namikawa

Dissertação de Mestrado em Computação Aplicada, orientada pelo Dr. Luiz Alberto
Vieira Dias, aprovada em dezembro de 1995.

INPE
São José dos Campos
2004

681.3.06 . 519.674

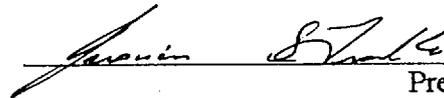
NAMIKAWA, L. M.

Um método de ajuste de superfície para grades triangulares considerando linhas características / L. M. Namikawa. – São José dos Campos: INPE, 1995.
136p. – (INPE-6122-TDI/583).

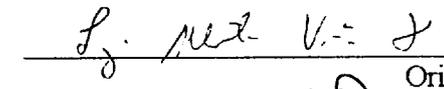
1.Analise de terreno. 2.Modelos numéricos de terreno. 3.Triangulação. 4.Grades computacionais. 5.Topografia. I.Título.

Aprovada pela Banca Examinadora em
cumprimento a requisito exigido para a
obtenção do Título de Mestre em
Computação Aplicada

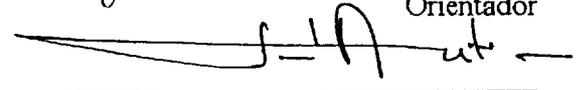
Dr. Jerônimo dos Santos Travelho


Presidente

Dr. Luiz Alberto Vieira Dias


Orientador

Dr. José Antonio Gonçalves Pereira


Membro da Banca

Dr. Celso de Renna e Souza


Membro da Banca
- Convidado -

Candidato: Laércio Massaru Namikawa

São José dos Campos, 06 de dezembro de 1995

RESUMO

A geração de modelos de terreno realísticos deve incorporar as linhas características porque estas linhas representam elementos morfológicos importantes da superfície. Os modelos de grade irregular triangular podem modelar as discontinuidades representadas pelas linhas características e tendem a ser mais precisos do que os modelos de grade retangular regular por eliminarem processos de interpolação intermediários. A superfície mais simples a ser ajustada em um retalho triangular é o plano que contém os três vértices do triângulo. Esta superfície fornece resultados que podem não ser satisfatórios quando utilizada para gerar resultados derivados como a declividade. Um resultado melhor pode ser obtido com o ajuste de uma superfície de 5^o grau. Os métodos de ajuste para superfície existentes ignoram as linhas características. O objetivo desta dissertação é apresentar um método de geração de modelo de grade triangular e de ajuste de uma superfície de 5^o grau que utiliza as informações das linhas de quebra.

A TRIANGULAR SURFACE FITTING METHOD USING BREAKLINES

ABSTRACT

In order to produce realistic Digital Terrain Models (DTM), one needs to preserve the ridges and valley lines (the breaklines). The use of triangular grids allows us to model real surfaces with better accuracy, since there is no need for intermediate interpolations, as in the case with rectangular grids. However the visualization with triangular irregular networks (TIN) tends to conceal the breaklines, thus producing a non realistic representation. This work presents a method that uses breakline information and triangular surface fitting, allowing a realistic DTM generation with the advantages of TIN representation.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	xii
LISTA DE TABELAS	xv
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 2 - MODELOS DE GRADE</u>	5
2.1 - Grades Regulares	6
2.2 - Grades irregulares triangulares	11
<u>CAPÍTULO 3 - GERAÇÃO DE GRADES TRIANGULARES</u>	17
3.1 - Construção por meio de diagramas de Voronoi	17
3.2 - Construção direta da triangulação	21
3.2.1 - Método com divisão do espaço	22
3.2.2 - Algoritmos recursivos	23
3.2.3 - Construção utilizando fronteira convexa	25
3.2.4 - Construção incremental	27

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO 4 - AJUSTE DE SUPERFÍCIE</u>	31
4.1 - Ajuste de plano ao retalho da grade	34
4.2 - Ajuste por funções polinomiais	35
4.3 - Ajuste por superfícies paramétricas	38
<u>CAPÍTULO 5 - INFORMAÇÕES MORFOLÓGICAS</u>	41
<u>CAPÍTULO 6 - MÉTODO PROPOSTO</u>	47
6.1 - Triangulação Quasi-Delaunay	47
6.2 - Ajuste de superfícies com linhas de quebra	49
6.2.1 - Estimativa de derivadas parciais	51
6.2.1.1 - Estimativa de derivadas parciais sem restrição	51
6.2.1.2 - Estimativa de derivadas parciais com restrição	53
6.2.2 - Definição da superfície em retalhos sem linhas de quebra	63
6.2.2.1 - Considerações básicas	64
6.2.2.2 - Sistema de coordenadas associado ao triângulo	65
6.2.2.3 - Implementação da restrição de continuidade	68
6.2.2.4 - Determinação dos coeficientes da polinomial	77
6.2.3 - Definição da superfície em retalhos sobre linhas de quebra	82
6.2.3.1 - Consideração básica modificada	82
	<u>Pág.</u>

6.2.3.2 - Consideração para o lado sobre uma linha de quebra	82
6.2.3.3 - Implementação da consideração para o lado	83
6.2.3.4 - Determinação dos coeficientes da polinomial	84
<u>CAPÍTULO 7 - IMPLEMENTAÇÃO E AVALIAÇÃO DO MÉTODO</u>	87
7.1 - Implementação do método	87
7.1.1 - Triangulação de Delaunay	87
7.1.2 - Triangulação Quasi-Delaunay	88
7.1.3 - Ajuste de superfícies sem linha de quebra	90
7.1.4 - Ajuste de superfícies com linha de quebra	90
7.2 - Avaliação do método	91
7.2.1 - Grade obtida a partir da função matemática	93
7.2.1.1 - Grade regular linear sem quebra	95
7.2.1.2 - Grade regular quántica sem quebra	96
7.2.1.3 - Grade regular linear com quebra	97
7.2.1.4 - Grade regular quántica C^1 com quebra	98
7.2.1.5 - Grade regular quántica com quebra	99
7.2.1.6 - Análise das grades regulares obtidas	100
7.2.2 - Grade correspondente a uma área real	101
7.2.2.1 - Grade regular linear sem quebra	103
7.2.2.2 - Grade regular quántica sem quebra	104
7.2.2.3 - Grade regular linear com quebra	105
	<u>Pág.</u>

7.2.2.4 - Grade regular quíntica C^1 com quebra	106
7.2.2.5 - Grade regular quíntica com quebra	107
7.2.2.6 - Análise das grades regulares obtidas	108
<u>CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES</u>	113
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	117

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Superfície representada no espaço tridimensional XYZ	5
2.2 - Superfície e grade regular correspondente no espaço tridimensional XYZ .	6
2.3 - Mapa de isolinhas	8
2.4 - Seleção de amostras para os métodos de interpolação	10
2.5 - Superfície e grade irregular triangular correspondente	12
2.6 - Polígonos de Voronoi, triângulos de Delaunay e os círculos associados	15
3.1 - Construção do diagrama de Voronoi	18
3.2 - Matriz de distâncias em relação aos pontos de amostra	20
3.3 - Matriz de identificadores de pontos de amostra	21
3.4 - Método de divisão do espaço	23
3.5 - Processo de fusão entre subconjuntos S_1 e S_2	25
3.6 - Construção de triangulação utilizando fronteira convexa	26
3.7 - Geração da curva fractal para ordenação de pontos	28
4.1 - Curvas com continuidade geométrica G^1	31
4.2 - Curvas com continuidade C^0 , C^1 e C^2	32
4.3 - Pontos de controle sobre a superfície paramétrica de grau n	39
5.1 - Região côncava	41
5.2 - Região convexa	42
5.3 - Superfície com região de sela	42
5.4 - Falha em uma superfície	44
5.5 - Linha de vale	44

	<u>Pág.</u>
6.1 - Processo de modificação da triangulação de Delaunay	49
6.2 - Triângulo de vértices v_1 , v_2 e v_3 no sistema cartesiano XY	65
6.3 - Triângulo no sistema associado UV	65
6.4 - Triângulo no sistema cartesiano ST , com eixo S paralelo ao eixo U	68
6.5 - Triângulo no sistema cartesiano ST , com eixo S paralelo ao eixo V	72
6.6 - Triângulo no sistema cartesiano ST , com eixo S paralelo ao lado v_2v_3	73
7.1 - Exemplo de separação de triângulos	90
7.2 - Grade padrão da função matemática em projeção perspectiva	94
7.3 - Detalhe da triangulação: (a) Delaunay; (b) Quasi-Delaunay	94
7.4 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular linear sem quebra para a função matemática	95
7.5 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular quintica sem quebra para a função matemática.....	96
7.6 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular linear com quebra para a função matemática	97
7.7 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular quintica com quebra e continuidade C^1 para a função matemática.....	98
7.8 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular quintica com quebra para a função matemática.....	99
7.9 - Detalhe dos erros percentuais para cada grade regular gerada: (a) Linear sem quebra; (b) Quintico sem quebra; (c) Linear com quebra; (d) Quintico C^1 com quebra; (e) Quintico com quebra.....	100
7.10 - Projeção em perspectiva da grade correspondente a área de Luiziana	102
7.11 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular linear sem quebra para a área real	103
7.12 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular quintica sem quebra para a área real	104

7.13 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular linear com quebra para a área real	105
7.14 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular quántica com quebra e continuidade C^1 para a área real	106
7.15 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular quántica com quebra para a área real	107
7.16 - Detalhe dos erros percentuais para cada grade regular gerada: (a) Linear sem quebra; (b) Quántico sem quebra; (c) Linear com quebra; (d) Quántico C^1 com quebra; (e) Quántico com quebra.....	108
7.17 - Numeração dos triângulos com algum vértice sobre linha de quebra	110
7.18 - Projeção em perspectiva da região destacada para as grades; (a) Padrão; (b) Linear sem quebra; (c) Quántica com quebra	111

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
7.1 - Grades regulares geradas	92
7.2 - Número de células para cada faixa de erro	109

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Um sistema de informação geográfica (SIG) é um sistema baseado em computadores que utiliza bases de dados espaciais para responder a questões de natureza geográfica (Goodchild, 1985). Um dos dados mais importantes operados em um SIG é a topografia, que representa valores de elevação em função da posição. A aquisição, geração da representação interna e obtenção de resultados sobre este dado é efetuado através de um processo conhecido por modelagem numérica de terreno (MNT).

Os modelos digitais de elevação que utilizam grades regulares retangulares são amplamente utilizadas nos sistemas de informação geográfica. A popularidade deste modelo se deve a facilidade de geração e de manipulação dos dados por utilizar uma matriz como estrutura de armazenamento.

As grades regulares retangulares são adequadas para superfícies suaves e de variação contínua. Quando a superfície tem grandes variações ou tem descontinuidades, estas estruturas apresentam deficiências. As descontinuidades na superfície ocorrem ao longo de linhas, em geral conhecidas por linhas de quebra (linhas de falha, linhas de vale e linhas de crista), que permitem caracterizar esta superfície. Devido a esta propriedade, as linhas de descontinuidade são chamadas também de linhas características.

Um modelo de superfície mais adequado do que o que utiliza grades regulares retangulares é necessário para incorporar a descontinuidade da superfície em lados diferentes das linhas características. Os modelos de grades irregulares triangulares oferecem a possibilidade de modelar as superfícies preservando estas linhas de quebra.

Para os modelos de grade triangular obtidos com a inclusão das linhas de quebra, a visualização e a geração de resultados derivados (como a declividade) podem ser insatisfatórios com o ajuste de um plano a cada retalho triangular, sendo necessário ajustar uma superfície suave.

O objetivo deste trabalho é apresentar um método de geração de uma triangulação que incorpora as informações das linhas de quebra e ajusta uma superfície suave dependente das descontinuidades representadas por estas linhas.

Para apresentar este método, definem-se os modelos de superfícies utilizados, os processos de ajuste de superfície e as linhas de quebra.

Os modelos de superfície são conhecidos em geral como modelos digitais de elevação (MDE) ou modelos numéricos de elevação (MNE) e permitem a manipulação de valores de um fenômeno distribuído continuamente sobre o espaço bi-dimensional na forma digital. O fenômeno tratado pode ser variado, mas para este trabalho considera-se apenas o terreno devido a algumas características próprias exploradas.

O processo de modelagem digital de elevação consiste basicamente das fases de aquisição de dados, de geração do modelo e de aplicação. Na fase de aquisição de dados, informações representando a distribuição do fenômeno são coletadas por meio de amostras. Cada amostra é composta de uma posição e pelo valor do fenômeno sobre esta posição. Por exemplo, para o sistema de coordenadas cartesiano XYZ , a posição pode ser representado pelo par de coordenadas xy e o valor de z .

O agrupamento dos dados em estruturas internas que maximizam a geração de resultados compõem a fase de geração do modelo. As estruturas normalmente utilizadas são a grade regular retangular e a grade irregular triangular. Cada estrutura tem suas vantagens e desvantagens e são selecionadas segundo a aplicação desejada.

Na fase de aplicação obtém-se resultados utilizando o modelo gerado. Estes resultados podem ser qualitativos, como a visualização da superfície por meio de uma projeção, ou quantitativos, como cálculo de volumes. Para a obtenção destes resultados, algum método de ajuste de superfície pode ser necessário para determinar valores de elevação em posições diferentes daqueles para os quais os modelos têm valores definidos explicitamente.

As linhas de quebra são parte das informações morfológicas de uma superfície. Estas informações permitem descrever esta superfície baseada nas características de forma de maneira precisa e eficiente e incluem ainda as regiões características e pontos característicos. Ao longo de uma linha de quebra pode-se considerar que a superfície não é contínua entre os retalhos em lados opostos desta linha. Assim o processo de ajuste de superfície deve considerar esta informação para que a representação seja o mais fiel possível.

Para apresentar o método e sua implementação, analisa-se os modelos de grade regular retangular e de grade irregular triangular, suas vantagens e desvantagens no Capítulo 2.

A grade irregular triangular é analisada com maior profundidade no Capítulo 3, onde são apresentados alguns métodos de geração desta grade. Estes métodos incluem os de geração direta da triangulação e os de geração com o uso dos polígonos de Voronoi.

No Capítulo 4 são apresentados alguns métodos de ajuste de superfície a grades triangulares e as restrições para as superfícies a serem ajustadas. Uma ênfase maior é dada ao método de Akima (Akima 1978), que é utilizada como base do processo utilizado.

O Capítulo 5 apresenta o conjunto de informações morfológicas da superfície. As informações morfológicas permitem descrever a superfície de maneira eficiente. Uma parte do conjunto de informações morfológicas são as linhas de quebra,

analisadas neste capítulo, que fornecem informações importantes para o ajuste de superfície.

A descrição do método proposto, com o processo de geração da grade triangular, de modificação desta triangulação e de ajuste de superfície considerando as linhas de quebra são apresentados no Capítulo 6.

Comparações entre os modelos de grade irregular triangular obtidos com o uso de linhas de quebra e os modelos que não consideram estas linhas são apresentados no Capítulo 7.

No Capítulo 8 são apresentadas as conclusões, com observações sobre os resultados obtidos e recomendações para o uso do método proposto.

O método de ajuste de superfície proposto utiliza o sistema de informações geográficas e processamento de imagens SPRING (INPE, 1995) como plataforma de suporte e de implementação. Esta plataforma é implementada em linguagem orientada a objetos (C++) e permite a manipulação de dados geográficos, dispensando a construção de classes não relacionadas diretamente com o modelo de grade triangular.

CAPÍTULO 2

MODELOS DE GRADE

O processo de modelagem utiliza estruturas de grades para representar a informação de elevação sobre a superfície do fenômeno. A Figura 2.1 apresenta um exemplo de superfície no espaço tridimensional XYZ .

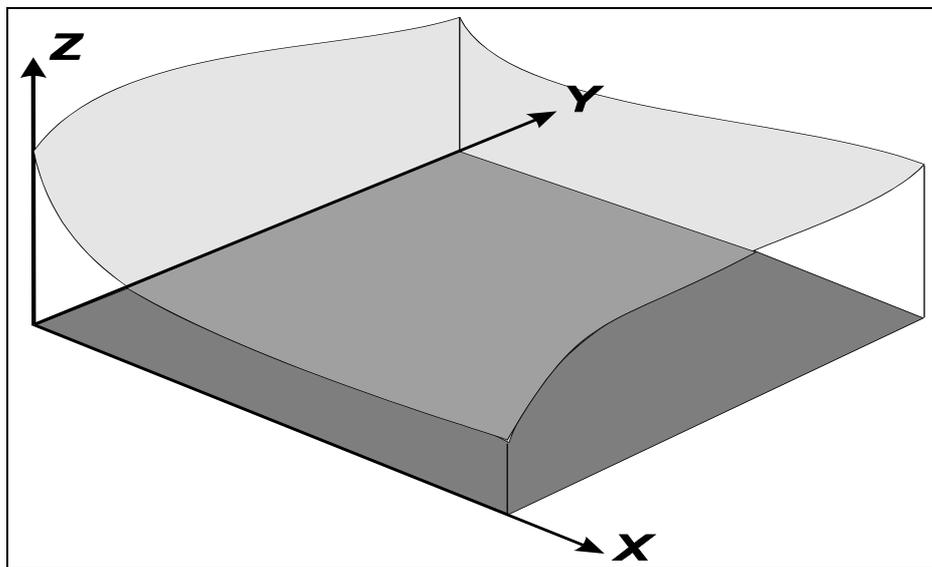


Fig. 2.1 - Superfície representada no espaço tridimensional XYZ .

As grades são formadas por uma malha de polígonos que cobrem toda a área de interesse da superfície. Cada polígono modela a superfície contida em seu interior. A diferença básica entre as grades regulares e as grades irregulares triangulares deve-se a forma dos polígonos. Em uma grade regular os polígonos tem a mesma forma e tamanho, geralmente um retângulo, definindo a forma de grade regular mais utilizada, a grade regular retangular. Os polígonos na grade irregular triangular têm a mesma forma, triangular, mas seus tamanhos são diferentes.

2.1 - GRADES REGULARES

A superfície pode ser aproximada em um modelo numérico de elevação por um poliedro de faces regulares (Pettinati, 1983). Os vértices do polígono que constitui uma das faces do poliedro podem ser os pontos de amostra da superfície se estes pontos são coincidentes com os pontos que definem a grade, mas isto raramente acontece. Em geral, algum método de interpolação é necessário para estimar o valor de elevação nos vértices do poliedro. A Figura 2.2 apresenta um exemplo de superfície e a grade regular correspondente.

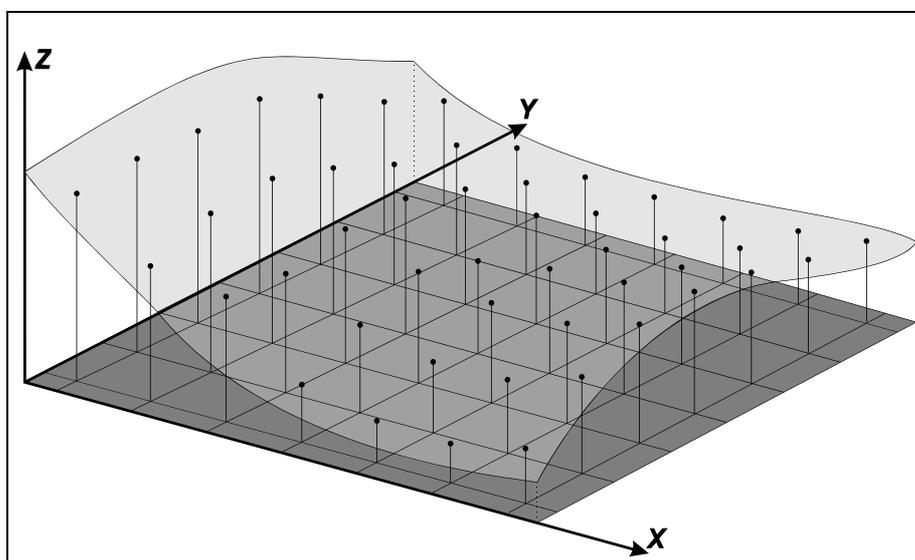


Fig. 2.2 - Superfície e grade regular correspondente no espaço tridimensional XYZ .

Se o espaço tridimensional XYZ é utilizado como sistema de coordenadas de referência para a superfície, cada vértice representa uma coordenada no plano XY e um valor de elevação Z . A definição de valores de coordenadas XY é implícita, uma vez que o espaçamento entre os pontos da grade é conhecido. Deste modo, a estrutura de armazenamento da grade regular pode ser formada por uma matriz de valores de elevação e de um descritor que define as coordenadas XY de um ponto da grade, geralmente em um dos extremos da superfície, e os espaçamentos entre os pontos nas direções X e Y .

O armazenamento em uma estrutura matricial simplifica a manipulação das grades regulares. Neste tipo de estrutura, pode-se obter facilmente o valor de elevação em uma dada posição utilizando o índice na matriz. Este índice pode ser calculado em função das coordenadas de um dos extremos da grade e dos espaçamentos. No entanto, este mesmo tipo de estrutura gera informações redundantes em regiões onde a superfície tem pouca variação e, ao mesmo tempo, falta de informações em áreas de grande variação. Este problema pode ser minimizado com a escolha cuidadosa dos valores de espaçamento entre pontos da grade. A escolha deve considerar o tipo de superfície modelada e a confiabilidade que se espera do modelo. Porém, em superfícies muito heterogêneas, com regiões de grande variação e regiões planas ou quase planas, ou com descontinuidades na superfície, como as linhas de drenagem, as linhas de crista e as falhas geológicas, nem mesmo a escolha criteriosa permite modelar a superfície com o grau de confiabilidade desejado.

Quando os vértices dos poliedros da grade regular não são coincidentes com as coordenadas de cada ponto amostrado para a superfície ou quando a grade regular deve ser obtida de outra fonte de informação, uma grade regular deve ser gerada. As fontes de informação mais utilizadas quando a elevação é a altimetria do terreno são os mapas de isolinhas e pontos amostrados com espaçamento irregular obtidos em pesquisas de campo.

As isolinhas estão disponíveis em mapas gerados a partir de uma base composta de fotografias em estéreo obtidas por aerofotogrametria e por pontos de amostra determinados por trabalhos de campo. Uma isolinha é a representação do corte entre um plano com elevação Z constante e a superfície. A limitação do uso de isolinhas como representação de uma superfície deve-se ao fato da isolinha ser fiel à superfície apenas ao longo da própria isolinha. A região entre duas isolinhas é apenas deduzida e, se a superfície não tiver um comportamento que pode ser estimado através das isolinhas que contornam a região, a superfície será apenas aproximada através processos de interpolação. A Figura 2.3 apresenta um exemplo de mapa de isolinhas, com alguns pontos amostrados.

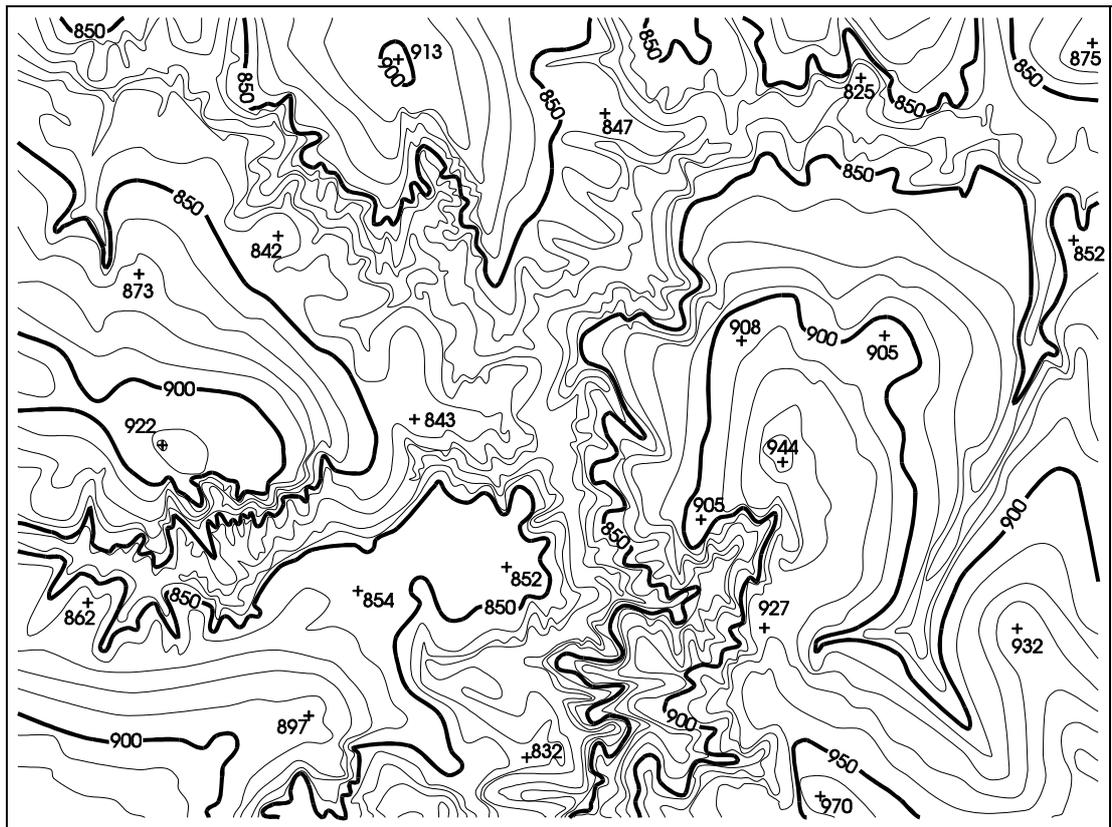


Fig. 2.3 - Mapa de isolinhas.

Os pontos espaçados irregularmente obtidos em pesquisas de campo podem ser distribuídos de forma semi-regular ou totalmente irregular. A distribuição semi-regular ocorre quando as amostras são obtidas ao longo de linhas previamente definidas como as linhas de vôo em aerofotogrametria, as redes de drenagens, estradas e outras vias de acesso que facilitam o trabalho de campo. A distribuição totalmente irregular é obtida quando se utiliza levantamentos já existentes ou quando a localização dos pontos é aleatória, como povoados.

A partir das informações contidas nas isolinhas e nos pontos amostrados com espaçamento irregular, deve-se gerar uma grade regular que represente de maneira mais fiel possível a superfície. Os espaçamentos nas direções X e Y devem ser determinados para representar a superfície nas regiões com grande variação e, ao mesmo tempo, para reduzir as redundâncias em regiões quase planas. Definidos os espaçamentos e as coordenadas de cada ponto da grade, pode-se aplicar um método de

interpolação para a calcular o valor estimado da elevação em cada ponto da grade regular.

Os métodos de interpolação mais utilizados são:

- Vizinho mais próximo, no qual o valor a ser estimado é o mesmo do ponto amostrado mais próximo;
- Vizinhos mais próximos, onde o valor do ponto depende dos valores de n pontos amostrados vizinhos mais próximos;
- Vizinhos mais próximos, considerados por quadrante, onde o número de pontos amostrados utilizados deve ser igual para cada um dos quadrantes;
- Vizinhos mais próximos, considerados o quadrante e a cota, onde além da restrição de quadrante do método anterior existe a restrição de número limitado de amostras por valor de elevação.

A Figura 2.4 mostra exemplos de seleção de amostras para os métodos de interpolação apresentados.

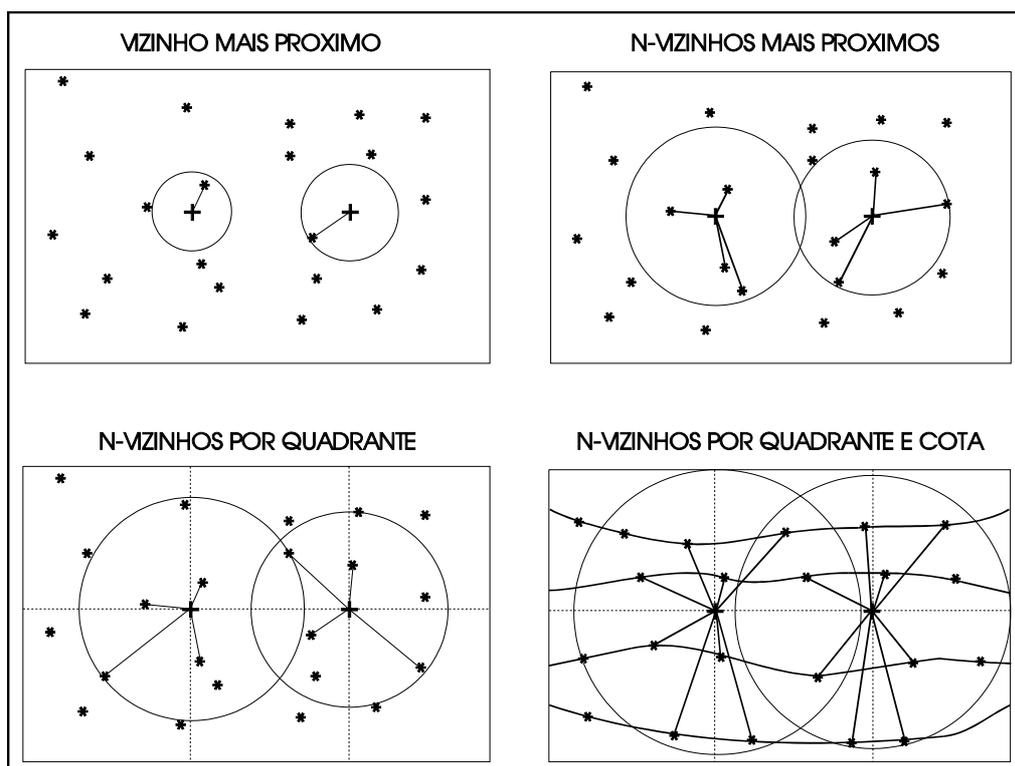


Fig. 2.4 - Seleção de amostras para os métodos de interpolação.

Para cada um destes métodos, funções de ponderação de distância são utilizadas para determinar aproximadamente a influência dos valores dos pontos vizinhos considerados. As funções comumente utilizadas são (Felgueiras, 1987):

- Média dos n vizinhos = $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n z_i$

- Média ponderada pela distância dos n vizinhos ao ponto = $\frac{\sum_{i=0}^n w(x_i, y_i) z_i}{\sum_{i=0}^n w(x_i, y_i)}$

A função de ponderação $w(x_i, y_i)$ mais utilizada é o inverso da distância euclidiana:

$$w(x_i, y_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \right)^u,$$

onde u é um expoente da função de ponderação e (x, y) é a coordenada do ponto considerado.

Outra função utilizada considera a variação exponencial em relação a distância euclidiana:

$$w(x_i, y_i) = e^{-ad_i^u},$$

onde d_i é a distância euclidiana, u é o expoente dado acima e a é o inverso da média aritmética das distâncias entre os pontos próximos e o ponto interpolado, dado por:

$$a = \frac{n}{\sum_{i=0}^n d_i}$$

Pode-se ainda obter uma grade regular com espaçamento menor a partir de uma grade já existente. Neste caso uma superfície é ajustada ao retalho retangular limitado pelos quatro pontos da grade.

2.2 - GRADES IRREGULARES TRIANGULARES

Na modelagem da superfície por meio de grade irregular triangular, cada polígono que forma uma face do poliedro é um triângulo. Os vértices do triângulo são, em geral, os pontos amostrados da superfície. A grade irregular triangular deve ser armazenada em uma estrutura que permite a fácil recuperação dos triângulos e das relações de vizinhança entre eles. Uma estrutura eficiente para o armazenamento da grade irregular triangular deve evitar redundâncias de elementos básicos, como pontos e

linhas. Os elementos básicos devem ser armazenados somente uma vez e ligados aos triângulos que os contém por meio de ponteiros. A Figura 2.5 apresenta um exemplo de superfície com a estrutura triangular associada.

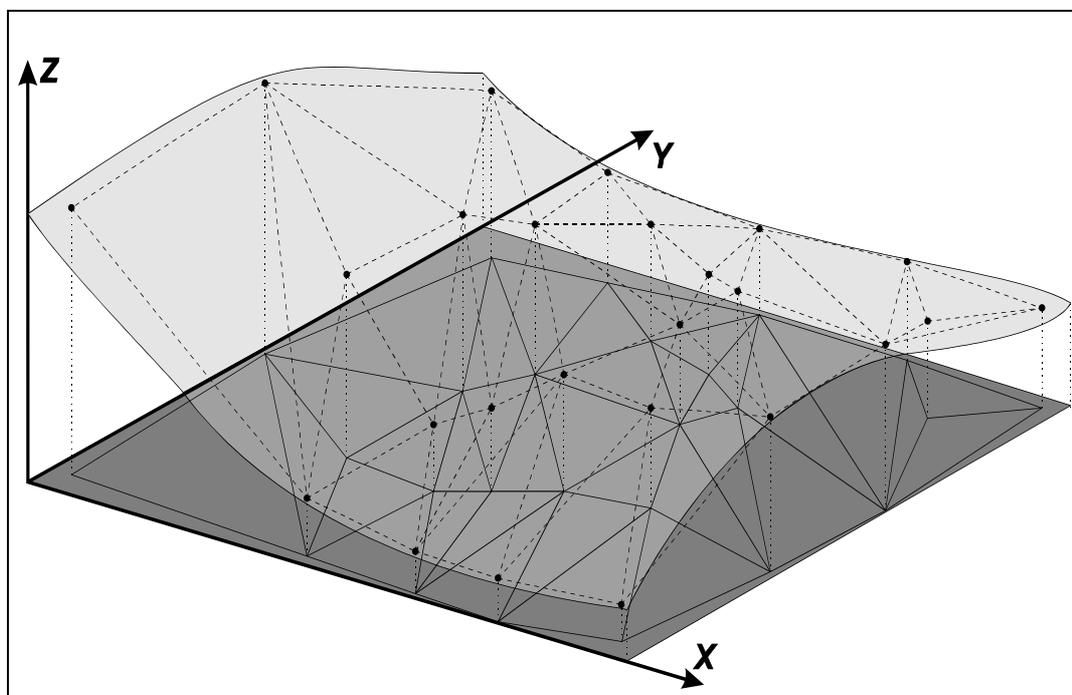


Fig. 2.5 - Superfície e grade irregular triangular correspondente.

As grades irregulares triangulares utilizam os próprios pontos de amostra para modelar a superfície, não sendo necessário o procedimento de estimativa utilizado na geração da grade regular. Ao utilizar os próprios pontos de amostra elimina-se um fator de diminuição da confiabilidade do modelo, uma vez que por melhor que seja o procedimento, alguma característica própria do procedimento é incorporada ao modelo.

O número de redundâncias é bastante reduzido uma grade irregular triangular em relação a grade regular, uma vez que a malha triangular pode ser fina em regiões de grande variação e mais espaçada em regiões quase planas, ajustando-se as necessidades de representação de cada região particular. A qualidade do modelo não é influenciada por um fator determinado pelo usuário, como é o caso da seleção dos espaçamentos da grade regular.

As feições lineares da superfície, como as linhas características podem ser modeladas facilmente na grade irregular triangular através das arestas dos triângulos. Assim, uma feição linear pode ser representada como uma seqüência de arestas de triângulos contíguos.

Os procedimentos de geração do modelo de grade a partir das amostras e de manipulação da estrutura de armazenamento são muito mais complexos na grade irregular triangular, assim como os procedimentos para obtenção de dados derivados a partir das grades. Esta complexidade ocasiona problemas de espaço de armazenamento e de tempo de processamento.

A grade irregular triangular é utilizada no método proposto nesta dissertação devido as vantagens que possui sobre a grade regular retangular e por permitir a incorporação das linhas características.

Em uma grade irregular triangular os pontos de amostra estão conectados formando uma triangulação. Esta triangulação pode ser definida como o grafo planar construído sobre N pontos (os vértices dos triângulos) de um espaço tridimensional XYZ , projetados no espaço bidimensional XY e unidos por segmentos de reta (as arestas dos triângulos) que não se interceptam (Preparata e Shamos, 1985).

O número de triangulações viáveis que podem ser geradas a partir de um conjunto de pontos é muito grande, mas idealmente deseja-se que seja uma única. Deve-se então definir uma restrição para que o número de triangulações viáveis se reduza a um. Para a representação de uma superfície por meio de uma triangulação, pode-se considerar que aquela na qual as distâncias entre os pontos amostrados são as menores possíveis é a melhor. A consideração é baseada no fato de uma superfície interna a um dos retalhos triangulares ser dependente apenas dos pontos mais próximos a ele. A triangulação conhecida como triangulação de Delaunay pode ser considerada uma aproximação da triangulação que satisfaz esta restrição. Lloyd (1977) provou que ser falsa a conjectura de que a triangulação de Delaunay satisfaz o problema da triangulação de menor peso (triangulação na qual a soma das arestas dos triângulos é a

menor possível), mas a triangulação de Delaunay é aceita como padrão para representação de superfícies por vários autores (Pettinati, 1983, De Floriani et al., 1985, Falcidieno e Spagnuolo, 1991).

O diagrama de Voronoi (também conhecido como polígonos de Thiessen e como tesselação de Dirichlet) é o dual da triangulação de Delaunay (Preparata e Shamos, 1985). O diagrama de Voronoi particiona o plano em polígonos, sendo que cada polígono tem um ponto interno e, ao longo de suas arestas, a distância entre a aresta e o ponto interno e a distância entre a aresta e o ponto externo mais próximo são iguais. Cada polígono de Voronoi representa a região do plano mais próxima ao seu ponto interno do que aos pontos internos de outros polígonos vizinhos.

Algumas propriedades importantes do diagrama de Voronoi são:

- Todo vértice do diagrama de Voronoi é a intersecção de três arestas do diagrama (assume-se que não existem quatro pontos do conjunto de pontos S original co-circulares).
- O círculo C de um polígono V do diagrama de Voronoi, com centro no ponto P e definido pelos três vértices de V , não contém outros pontos de S .
- Todo vizinho mais próximo de um ponto P no conjunto de pontos S define uma aresta no polígono de Voronoi V .
- O polígono $V(i)$ é ilimitado se, e somente se, P_i é um ponto sobre o envoltório convexo do conjunto de pontos S .

Estas propriedades são provadas em Preparata e Shamos (1985).

As propriedades importantes da triangulação de Delaunay são:

- A triangulação de Delaunay é a triangulação mais equilátera possível. Se a diagonal de um quadrilátero convexo formado por 2 triângulos adjacentes é a aresta comum a estes triângulos de uma triangulação de Delaunay e é

substituída pela outra diagonal do quadrilátero, o mínimo entre os seis ângulos internos dos triângulos não deve aumentar (Falcidieno e Spagnuolo, 1991).

- Para todo triângulo T , da triangulação sobre o conjunto S de pontos, composto pelas arestas A_1 , A_2 e A_3 existe um círculo C com borda sobre as extremidades destas arestas e este círculo não contém outros pontos do conjunto S . Esta propriedade é conhecida como propriedade do circuncírculo. A Figura 2.6 mostra polígonos de Voronoi, os triângulos de Delaunay e os círculos associados.

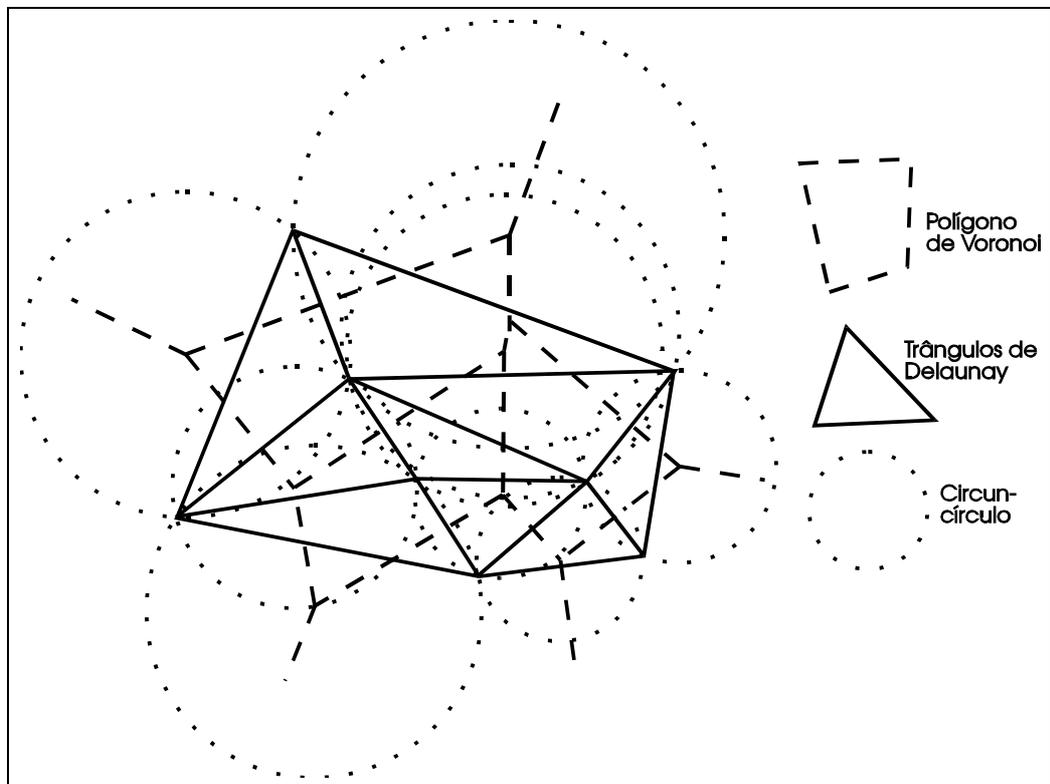


Fig. 2.6 - Polígonos de Voronoi, triângulos de Delaunay e os círculos associados.

Apesar da complexidade dos procedimentos e dos requisitos de espaço de armazenamento, as grades irregulares triangulares são utilizadas quando se deseja modelar a superfície de maneira mais precisa. As grades regulares podem ser utilizadas quando o requisito de qualidade é baixo, como em aplicações de geração de visualização da superfície (podem ser chamadas de aplicações qualitativas). Quando a

superfície modelada é utilizada para obter dados quantitativos, o modelo de grade irregular triangular deve ser utilizado.

CAPÍTULO 3

GERAÇÃO DE GRADES TRIANGULARES

A triangulação de Delaunay pode ser construída através de vários métodos. Alguns deles geram o diagrama de Voronoi inicialmente e, através da dualidade dos problemas, interligam os pontos internos dos polígonos vizinhos com segmentos de reta formando os triângulos. Outros métodos geram a triangulação diretamente, utilizando a propriedade do circuncírculo em processos incrementais, recursivos ou de divisão do espaço.

Os métodos de construção da triangulação de Delaunay podem ser divididos inicialmente em dois grupos. No primeiro grupo, a construção é baseada no diagrama de Voronoi diretamente. Assim, inicialmente o diagrama é construído e sobre este diagrama a triangulação é obtida interligando os centros dos polígonos. Deste grupo são apresentados os métodos de Preparata e Shamos (1985) e de Tang (1992). Os métodos do segundo grupo constroem diretamente a triangulação e podem ser subdivididos em baseados na divisão do espaço, na recursão, na fronteira convexa e em construção incremental.

3.1 - CONSTRUÇÃO POR MEIO DE DIAGRAMAS DE VORONOI

O método de construção do diagrama de Voronoi apresentado por Preparata e Shamos (1985) consiste de um algoritmo recursivo que obtém o diagrama em tempo $O(N \log N)$. O algoritmo é dado por:

- Passo 1. Particione o conjunto de pontos S em dois subconjuntos S_1 e S_2 , de tamanhos aproximadamente iguais, considerando uma coordenada média em X .
- Passo 2. Construa os diagramas de Voronoi $Vor(S_1)$ e $Vor(S_2)$ recursivamente.
- Passo 3. Construa a cadeia poligonal δ que separa S_1 de S_2 .

- Passo 4. Descarte todas as arestas de $Vor(S_2)$ que estão a esquerda de δ e todas as arestas de $Vor(S_1)$ que estão a direita de δ , obtendo o diagrama de Voronoi $Vor(S)$.

A Figura 3.1 ilustra a construção do diagrama de Voronoi através do uso da cadeia poligonal δ .

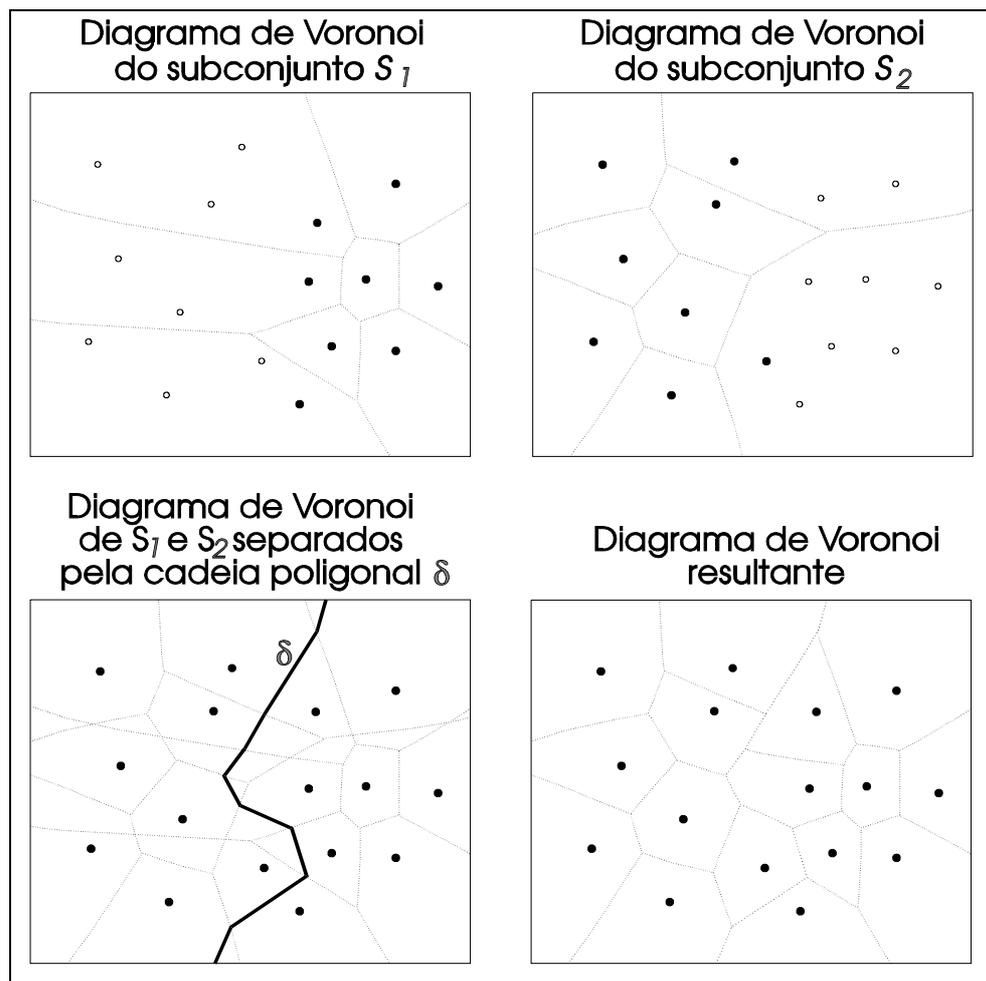


Fig. 3.1 - Construção do diagrama de Voronoi.

A cadeia poligonal $\delta(S_1, S_2)$ é um conjunto de arestas de um subgrafo de $Vor(S)$ com as seguintes propriedades:

- A cadeia poligonal $\delta(S_1, S_2)$ consiste de ciclos de arestas disjuntas e de cadeias. Se uma cadeia tem apenas uma aresta, então é uma reta; caso contrário as arestas em seus extremos são raios semi-infinitos.
- Se S_1 e S_2 são separados linearmente então $\delta(S_1, S_2)$ consiste de uma cadeia monotônica simples.

As provas destas propriedades e uma implementação de um procedimento de construção da cadeia poligonal são apresentadas em Preparata e Shamos (1985).

Outro método de geração do diagrama de Voronoi é apresentado por Tang (1992) e é um algoritmo sobre os dados em formato varredura. O método utiliza duas matrizes, M_D com valores de distância, e M_I , com valores identificadores de cada ponto do conjunto original.

Inicialmente M_D é preenchida com zero para as posições dos pontos do conjunto original e infinito para todas as outras posições e M_I é preenchida nas posições correspondentes aos pontos do conjunto original com identificadores dos pontos respectivos e com um valor de fundo nas outras posições.

A cada passo do processo, a distância D de cada posição P em relação a um ponto original P_o é calculada e, se D for menor que a distância armazenada originalmente em M_D , este valor de distância D é assumido para a posição P em M_D e o identificador, correspondente ao ponto utilizado P_o para o cálculo da distância, é escrito na mesma posição P da matriz M_I . A Figura 3.2 apresenta um exemplo com a matriz de distâncias final obtido a partir de cinco pontos de amostra. A localização dos pontos de amostra é identificada pela distância igual a zero. Os elementos na fronteira dos polígonos de Voronoi estão destacados em negrito.

25	22	19	16	15	14	13	12	13	14	15	16	19	21	20	19	18	19	20	21
24	21	18	15	12	11	10	9	10	11	12	15	18	18	17	16	15	16	17	18
23	20	17	14	11	8	7	6	7	8	11	14	16	15	14	13	12	13	14	15
22	19	16	13	10	7	4	3	4	7	10	13	15	12	11	10	9	10	11	12
21	18	15	12	9	6	3	0	3	6	9	12	14	11	8	7	6	7	8	11
22	19	16	13	10	7	4	3	4	7	10	13	13	10	7	4	3	4	7	10
23	20	17	14	11	8	7	6	7	8	11	14	12	9	6	3	0	3	6	9
23	20	18	15	12	11	10	9	10	11	12	15	13	10	7	4	3	4	7	10
22	19	16	15	14	13	12	12	13	14	15	16	14	11	8	7	6	7	8	11
21	18	15	12	11	10	9	10	11	12	15	16	15	12	11	10	9	10	11	12
20	17	14	11	8	7	6	7	8	11	14	15	12	11	10	9	10	11	12	15
19	15	13	10	7	4	3	4	7	10	13	14	11	8	7	6	7	8	11	14
18	15	12	9	6	3	0	3	6	9	12	13	10	7	4	3	4	7	10	13
19	16	13	10	7	4	3	4	7	10	13	12	9	6	3	0	3	6	9	12
17	16	14	11	8	7	6	7	8	11	14	13	10	7	4	3	4	7	10	13
14	13	12	12	11	10	9	10	11	12	15	14	11	8	7	6	7	8	11	14
11	10	9	10	11	12	12	13	14	15	16	15	12	11	10	9	10	11	12	15
8	7	6	7	8	11	14	16	17	18	19	16	15	14	13	12	13	14	15	16
7	4	3	4	7	10	13	16	19	22	20	19	18	17	16	15	16	17	18	19
6	3	0	3	6	9	12	15	18	21	23	22	21	20	19	18	19	20	21	22

Fig. 3.2 - Matriz de distâncias em relação aos pontos de amostra

Ao final do processo, na matriz M_I tem-se polígonos de Voronoi, identificados por serem uniformes e as arestas dos polígonos de Voronoi podem ser obtidas por algum método simples de detecção de borda. A Figura 3.3 apresenta um exemplo da matriz de identificadores obtidos para os dados do exemplo da Figura 3.2, com os elementos na fronteira dos polígonos de Voronoi destacados em negrito.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	2	2													
3	3	1	2	2	2	2	2	2											
3	3	3	1	2	2	2	2	2	2										
3	2	2	2	2	2	2													
3	4	4	4	4	4	4													
3	4	4	4	4	4	4													
3	4	4	4	4	4	4													
3	4	4	4	4	4	4													
5	5	3	4	4	4	4	4	4											
5	5	5	3	4	4	4	4	4	4										
5	5	5	5	5	5	3	4	4	4	4	4	4							
5	3	4	4	4	4	4	4												
5	4	4	4	4	4	4													
5	4	4	4	4	4	4													

Fig. 3.3 - Matriz de identificadores de pontos de amostra.

3.2 - CONSTRUÇÃO DIRETA DA TRIANGULAÇÃO

Neste item são apresentados os métodos de construção da triangulação de Delaunay propostos por Maus (1984); Lee e Schachter (1980); Pettinati (1983); Guibas e Stolfi (1985); Akima (1978); Agishtein e Migdal (1991) e Rosim et al. (1993).

O método de Maus é baseado na divisão do espaço que contém os pontos de amostra em retângulos, o de Lee e Schachter é baseado em recursão até que os pontos considerados sejam apenas dois, o método de Pettinati gera uma fronteira convexa inicialmente e, a seguir, ao longo desta fronteira, os triângulos são criados. Os de Guibas e Stolfi, Akima, Agishtein e Migdal e Rosim utilizam construção incremental, diferenciando entre si quanto ao triângulo inicial, ao método de seleção da seqüência de pontos a inserir ou à verificação do critério de Delaunay.

3.2.1 - Método com Divisão do Espaço

Um método com divisão do espaço que contém os pontos é proposto por Maus (1984) e consiste de duas fases. Na primeira o retângulo imaginário que contém todos os pontos é dividido em retângulos menores e determinados os pontos que estão em cada um destes novos retângulos. Na segunda fase os pontos dos retângulos menores são utilizados para construir uma triangulação e a partir da fusão das triangulações individuais obtém-se a triangulação de Delaunay.

As triangulações menores são obtidas através do seguinte processo:

- Inicialmente cria-se um triângulo auxiliar que contém todos os pontos do retângulo. O triângulo criado é formado por dois pontos (A e B) do retângulo e um ponto auxiliar. A partir da aresta entre A e B , que define o semi-plano que contém os pontos do retângulo, criam-se as arestas AC e BC caso ainda não existam, para o ponto C que forma o maior ângulo ACB .
- Executa-se o mesmo procedimento anterior tomando as arestas AC e BC no lugar de AB , até que todas as arestas tenham sido criadas.

A Figura 3.4 ilustra a construção da triangulação por este método.

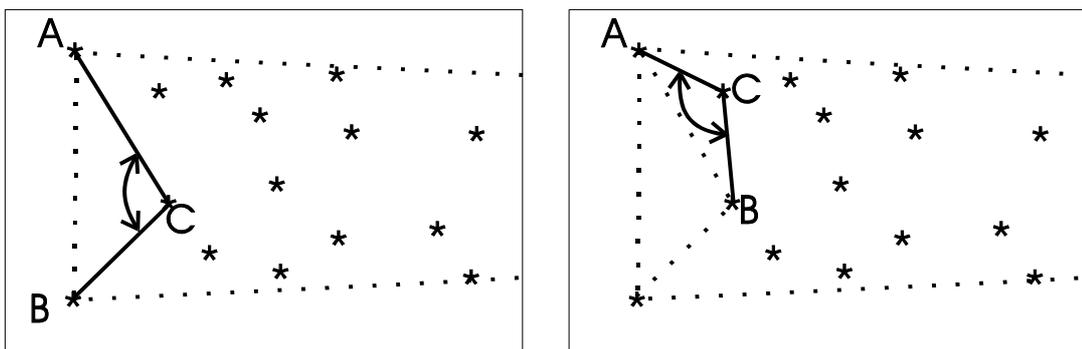


Fig. 3.4 - Método de divisão do espaço.

Uma descrição simples deste algoritmo é encontrada em Neves (1988), onde é afirmado que o algoritmo é linear de ordem N para distribuições aproximadamente uniformes de pontos no espaço.

3.2.2 - Algoritmos Recursivos

Os algoritmos recursivos para geração da triangulação de Delaunay dividem o conjunto de pontos em dois, recursivamente constróem a triangulação para cada um destes conjuntos novos e fundem as duas triangulações obtidas ao final do processo. O algoritmo deste tipo apresentado por Lee e Schachter (1980) tem a seguinte seqüência:

- Se o conjunto de pontos S contém mais de dois pontos, então:
 - Divide-se o conjunto de pontos S em duas metades S_1 e S_2 , considerando alternadamente o limiar médio na direção X e na direção Y ;
 - Determina-se recursivamente as triangulações de S_1 e S_2 .
 - Fundem-se as triangulações de S_1 e S_2 .
- Se o conjunto S contém dois pontos, então cria-se uma aresta unindo-os.

O procedimento de fusão dos dois subconjuntos é feito pelo seguinte processo:

- Determina-se a aresta tangente superior formada pelo ponto superior de S_1 e pelo ponto superior de S_2 .
- Determina-se a aresta tangente inferior formada pelo ponto inferior de S_1 e pelo ponto inferior de S_2 .
- Enquanto a tangente inferior for diferente da tangente superior:

- Cria-se a aresta formada por um ponto P de S_1 ou S_2 e uma das extremidades da aresta inferior. O ponto P deve estar sobre uma circunferência C formada pelas extremidades da aresta inferior e por este ponto. A circunferência C não pode conter em seu interior nenhum outro ponto de S_1 ou S_2 . Esta aresta passa a ser a nova aresta inferior.
- Removem-se todas as arestas que formem triângulos que não obedecem ao critério de Delaunay.

O critério de inferior e superior deve ser avaliado alternativamente, na mesma ordem em que o conjunto anterior da recursão foi dividido segundo o ponto médio em X ou em Y . A Figura 3.5 ilustra o processo de fusão deste método.

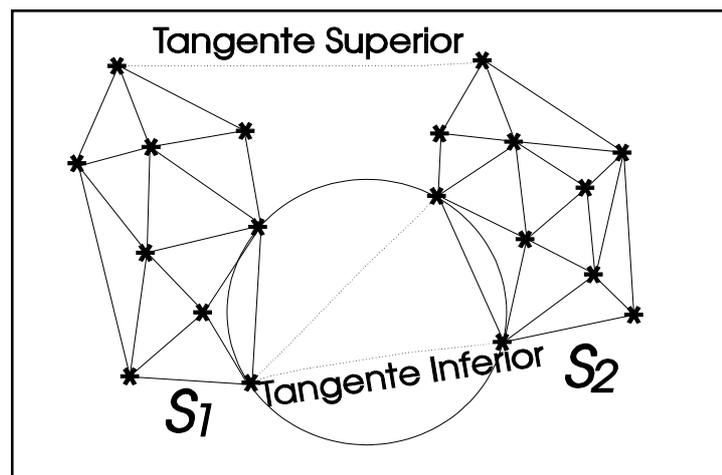


Fig. 3.5 - Processo de fusão entre os subconjuntos S_1 e S_2 .

3.2.3 - Construção Utilizando Fronteira Convexa

Um método de geração da triangulação de Delaunay utilizando a fronteira convexa é apresentada por Pettinati (1983). A fronteira convexa é determinada inicialmente e, a seguir, ao longo desta fronteira, um processo de criação dos triângulos e atualização da fronteira é realizado até que não exista mais esta fronteira. A seqüência utilizada como descrita em Pettinati (1983) é apresentada a seguir:

- Para o conjunto de pontos P determina-se a fronteira convexa F como um a cadeia ordenada de pontos com sentido de percorrimto anti-horário.
- Toma-se um ponto p_j de P , o ponto antecessor em F p_i e o ponto sucessor de p_j em F p_k . Se o ângulo formado por $p_i p_j p_k$ for maior que 180 graus, ignora-se esta seqüência e passa a seguinte. Caso contrário, verifica-se se a circunferência formada pelos pontos contém algum outro ponto de P em seu interior (Propriedade do circuncírculo). Caso não contenha, cria-se uma aresta entre p_i e p_k e p_j é eliminado de F . Se a circunferência contém algum ponto, selecionam-se os pontos que podem ser unidos entre si e os pontos p_i e p_k com o uso da propriedade do circuncírculo. Se os pontos assim determinados são a, b, \dots, y, w constróem-se os triângulos $p_i p_j a$, $a p_j b$, ..., $y p_j w$ e $w p_j p_k$ e as seqüências $p_i p_j$ e $p_j p_k$ são substituídas por $p_i a$, ab , ..., yw e $w p_k$.
- Repete-se o passo anterior até que não haja mais pontos a envolver (a fronteira F estará vazia) e a triangulação formada será de Delaunay.

A Figura 3.6 ilustra a construção dos novos triângulos $p_i p_j a$, $a p_j b$, ..., $y p_j w$ e $w p_j p_k$.

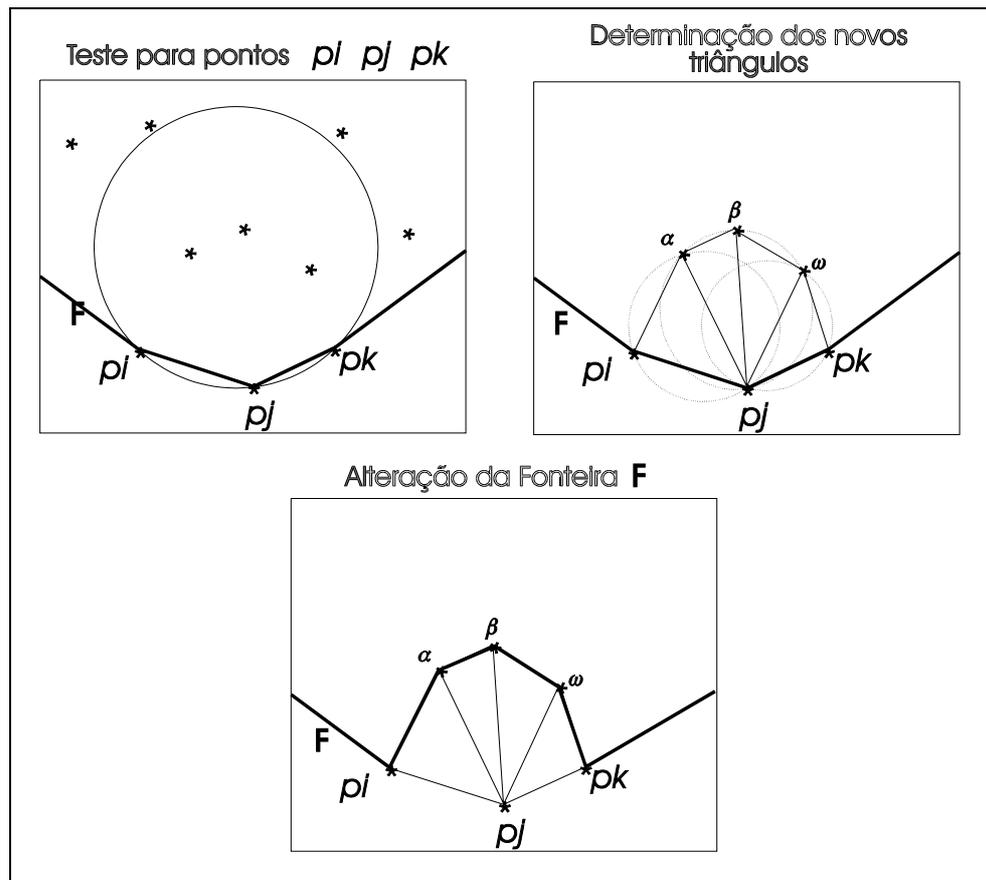


Fig. 3.6 - Construção de triângulos utilizando fronteira convexa.

Em Pettinati (1983) são apresentados os algoritmos para geração da fronteira convexa e mostrado que, apesar do tempo teórico ser de ordem $N \log N$, na prática o tempo é próximo a N .

3.2.4 - Construção Incremental

Algoritmos de construção da triangulação de Delaunay de forma incremental baseiam-se na geração de um ou mais triângulos iniciais, dentro dos quais são inseridos pontos do conjunto original, selecionados por algum critério. O ponto inserido cria dois novos triângulos e verifica-se a satisfação do critério de Delaunay, através da propriedade do circuncírculo. Caso não satisfaçam, a triangulação é alterada até que o critério seja respeitado por todos os triângulos.

O método de Guibas e Stolfi (1985) cria inicialmente um triângulo grande o suficiente para conter todos os pontos do conjunto original. A seguir, os pontos são inseridos um a um, buscando o triângulo que contém o ponto a inserir a partir do último criado; caso não seja o último, faz a busca nos vizinhos sucessivamente até encontrar. O ponto inserido é conectado aos vértices do triângulo que o contém, alterando-o e criando dois novos. Estes três triângulos são verificados quanto ao critério de Delaunay. Caso não respeitem o critério são modificados e os vizinhos afetados pela mudança são também testados. Este passo prossegue até que não seja necessário alterar mais nenhum triângulo.

O método de Akima (1978) inicia conectando o par de pontos mais próximos do conjunto original e, a seguir, são inseridos os outros pontos em ordem crescente de distância, em relação ao centro da aresta formada pelos dois pontos iniciais. Este ordenamento garante que o ponto a ser inserido sempre está fora do polígono já construído, uma vez que o novo ponto estará fora da circunferência centrada no meio da aresta inicial e que passa pelo último ponto inserido. Os triângulos são criados conectando o novo ponto aos anteriores visíveis a este ponto. Os triângulos assim criados são testados quanto ao critério de Delaunay e, caso não o respeitem, são modificados.

No método de Agishtein e Migdal (1991) os pontos do conjunto original são reordenados inicialmente de modo que persigam uma curva fractal com a seguinte formação:

- A curva passa pela diagonal do retângulo envolvente dos dados. Se o retângulo é dividido em três menores ao longo do lado maior, a curva é redefinida em cada um destes.
- A divisão continua até que haja apenas um ponto em cada um dos retângulos.

Um exemplo de geração da curva fractal é apresentado na Figura 3.7.

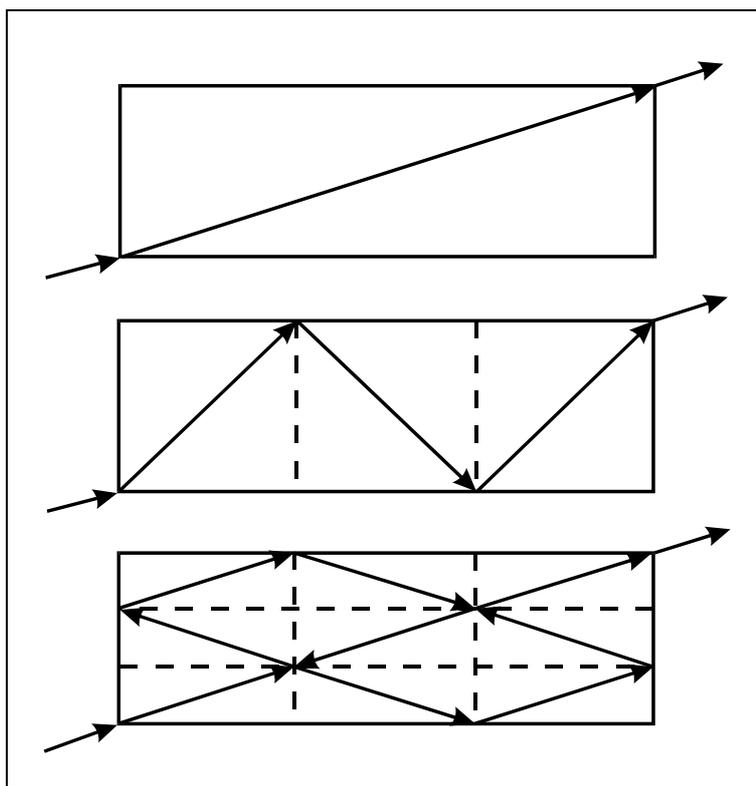


Fig. 3.7 - Geração da curva fractal para ordenação de pontos.

Este método de ordenamento garante que os pontos em uma seqüência estão próximos e, quando um ponto novo é inserido na triangulação, o triângulo ao qual pertence pode ser encontrado facilmente caminhando ao longo da reta que une o ponto anterior ao atual.

O método apresentado por Rosim et al. (1993) prevê a geração de uma triangulação qualquer inicial na primeira fase e, na segunda, ela é modificada até que todos os triângulos obedeçam ao critério de Delaunay.

Para a geração da triangulação inicial, encontra-se o retângulo envolvente dos pontos e cria-se dois triângulos a partir da divisão deste retângulo pela sua diagonal. A seguir, os pontos são inseridos e geram três novos triângulos (o triângulo que contém o novo ponto é preservado de modo a formar uma árvore que facilita a busca do triângulo que conterá o próximo ponto) a cada vez, repetindo o processo até que não existam mais pontos a serem inseridos.

Os triângulos folhas da árvore gerada no passo anterior são analisados quanto ao critério de Delaunay e modificados se necessário. Ao final deste processo obtém-se a triangulação de Delaunay.

O método de Rosim é modificado por Namikawa (1994) para que, a cada inserção de ponto, os triângulos criados sejam testados quanto ao critério de Delaunay. Caso o triângulo testado não respeite a propriedade do circuncírculo, este é modificado. Esta variação evita a existência de triângulos muito estreitos na triangulação intermediária, além de reduzir a recursão na fase de montagem final dos triângulos. Este método é o utilizado para a construção da triangulação de Delaunay nesta dissertação.

CAPÍTULO 4

AJUSTE DE SUPERFÍCIE

As informações a serem extraídas sobre a superfície modelada podem estar localizadas em pontos diferentes dos vértices da grade triangular gerada. Para estes casos torna-se necessário ajustar uma superfície a cada retalho da grade, permitindo estimar o valor de cota Z em uma posição XY qualquer.

A superfície a ser ajustada deve obedecer algumas restrições. Uma destas restrições é a continuidade. A continuidade de uma superfície é medida de duas formas (Foley et al., 1991): com a continuidade geométrica G^n e com a continuidade paramétrica C^n .

A continuidade geométrica G^n é determinada pela igualdade, entre as direções das derivadas de ordem n das superfícies em retalhos vizinhos, ao longo da curva comum a estes retalhos. A Figura 4.1 mostra a continuidade entre as curvas Q_1 e Q_2 e entre Q_1 e Q_3 .

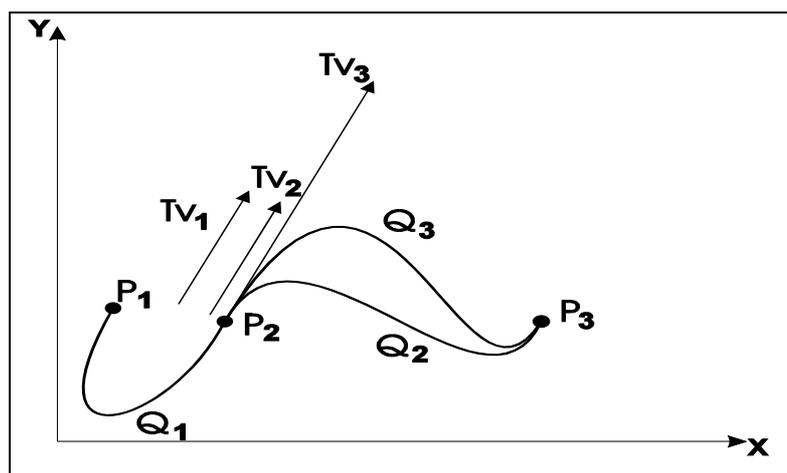


Fig.4.1 - Curvas com continuidade geométrica G^1 .
FONTE: Foley et al. (1991), p. 481.

As curvas se encontram no ponto P_2 , onde os vetores tangentes das três curvas tem a mesma direção. A magnitude dos vetores T_{v1} (tangente a Q_1) e T_{v2} (tangente a Q_2) são iguais e a magnitude do vetor T_{v3} , (tangente a Q_3), é maior do que a do vetor T_{v1} .

A continuidade paramétrica C^n é determinada pela igualdade da direção e da magnitude da derivada de ordem n das superfícies sobre a variável paramétrica, em retalhos vizinhos, ao longo da curva comum aos retalhos. A Figura 4.2 mostra o segmento de curva S unido aos segmentos C_0 , C_1 e C_2 .

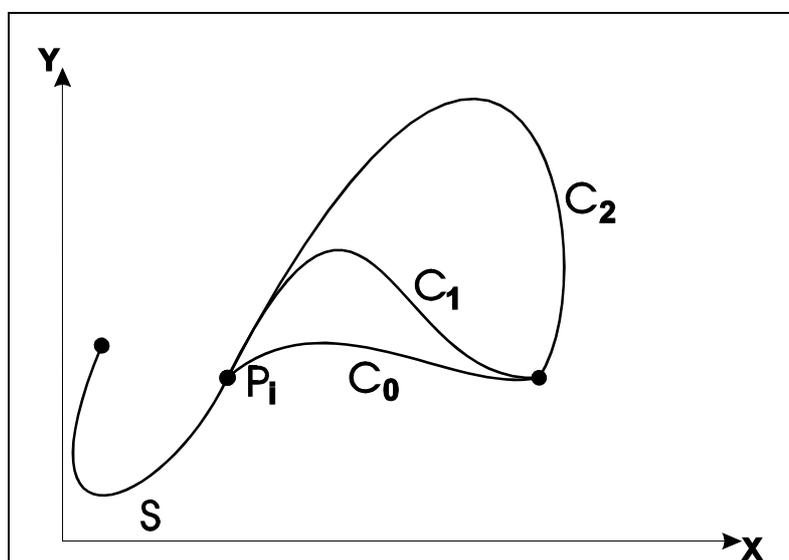


Fig.4.2 - Curvas de continuidade C^0 , C^1 e C^2 .
 FONTE: Foley et al. (1991), p. 481.

Na Figura 4.2, no ponto de intersecção p_i , os segmentos S e C_0 tem continuidade C^0 , entre S e C_1 , a continuidade é C^1 e entre S e C_2 , a continuidade é C^2 .

O requisito G^n é menos restritivo que a continuidade C^n e o requisito normalmente aceito para a representação de superfícies é a C^1 em modelagens de terreno.

A continuidade da superfície ajustada a um retalho em relação aos retalhos com os quais compartilha uma curva deve ser garantida, uma vez que esta é

uma característica comum de uma superfície. Esta exigência assegura também que não existirão descontinuidades nas informações secundárias obtidas a partir da modelagem digital de elevação.

Outro requisito para a superfície a ser ajustada é que honre os pontos amostrados, ou seja, todos os pontos amostrados devem estar sobre a superfície, de modo que se a coordenada do ponto de interesse coincide com a coordenada de um dos dados de entrada, os valores de z de entrada e de saída devem ser iguais.

Deve-se notar que este requisito é muito importante, uma vez que a única verdade que se tem sobre a superfície são as informações de entrada e todas as outras são apenas estimativas obtidas a partir destes dados. Não se deve, no entanto, esquecer que estes dados de entrada são uma representação da realidade e foram amostrados, ou seja, existe um erro devido ao processo de amostragem. Um sistema de modelagem pode considerar este fato ao efetuar o ajuste de superfície.

Os procedimentos de ajuste de superfície podem ser locais ou globais. Os métodos locais utilizam apenas um conjunto de pontos mais próximos ao retalho para o qual se deseja ajustar a superfície. Os métodos globais ajustam uma única superfície para todo o poliedro, utilizando todos os pontos amostrados.

Os métodos globais são mais adequados quando o número de amostras é muito pequeno. Quando o número de amostras é grande, como no caso de modelagem de terreno, onde o número de amostras é da ordem de dezenas a centenas de milhares, os métodos globais são inviáveis. O número de incógnitas em um método global é da mesma ordem do número de amostras, tornando pouco eficiente este método. Além disto, regiões distantes de terreno podem ser consideradas como tendo pouca similaridade, ou seja, a superfície em um canto não deve ser influenciado pelo terreno em um outro canto.

Os métodos de ajuste locais são mais adequados para a modelagem de terreno por utilizarem poucos pontos e, portanto, necessitarem da definição de poucas incógnitas e não considerarem a similaridade entre regiões distantes. Um

requisito para os métodos de ajuste locais é o de rapidez no cálculo das incógnitas, uma vez que o número de superfícies diferentes a serem obtidas é muito grande.

A superfície a ser ajustada pode ser representada por uma função matemática na forma de uma equação polinomial implícita ou uma equação paramétrica (Sederberg, 1990). A equação polinomial implícita para o sistema de coordenadas cartesiano XYZ é da forma genérica:

$$\sum_{i+j+k \leq n} c_{ijk} x^i y^j z^k = 0$$

onde n define o grau da superfície.

Uma superfície paramétrica representada no sistema de coordenadas cartesiano XYZ pode ser definida pelas equações:

$$x = \frac{x(s,t)}{w(s,t)}, y = \frac{y(s,t)}{w(s,t)}, z = \frac{z(s,t)}{w(s,t)}$$

onde s e t são as variáveis paramétricas.

A seguir são apresentados o ajuste a um plano (polinomial implícita simples de grau 1), ajuste a uma polinomial implícita de grau maior e o ajuste a uma superfície paramétrica.

4.1- AJUSTE DE PLANO AO RETALHO DA GRADE

Um plano é definido pela seguinte equação:

$$z(x, y) = ax + by + c$$

Esta equação tem três incógnitas (a , b e c), de modo que três pontos no espaço são suficientes para defini-la.

Em um retalho de uma grade triangular, os três pontos do triângulo definem diretamente o plano a ser ajustado. Assim, se os três pontos são definidos por (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3) , os coeficientes a , b e c podem ser definidos a partir de:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

obtendo o plano ajustado a este retalho.

O ajuste de plano ao retalho triangular é utilizado nesta dissertação para gerar dados de comparação com o ajuste de outras superfícies.

4.2 - AJUSTE POR FUNÇÕES POLINOMIAIS

A função polinomial a ser ajustada ao triângulo com vértices no sistema cartesiano XYZ definidos por (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3) é da forma:

$$z(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} q_{ij} x^i y^j$$

onde m é o grau do polinômio e q_{ij} são os coeficientes a serem determinados,

O grau do polinômio é função do tipo de retalho utilizado e da continuidade que se deseja para a superfície.

Akima (1978) apresenta um método de ajuste que utiliza uma função polinomial de grau 5. A relação entre o grau da polinomial e a continuidade para as superfícies a serem ajustadas a retalhos triangulares é definida por Zenisek (1970) por:

$$\text{grau} = (4n + 1)$$

onde n é o grau de continuidade paramétrica da superfície.

Utilizando esta relação, a superfície de continuidade C^1 é da forma:

$$z(x, y) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^{5-i} q_{ij} x^i y^j$$

Para a resolução desta polinomial deve-se determinar 21 coeficientes para cada triângulo. O valor da função $z(x, y)$, da primeira derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$, da primeira derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial y}$, da segunda derivada parcial $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, da segunda derivada parcial $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ e da segunda derivada parcial $\frac{\partial^2 z}{\partial xy}$ em cada vértice do triângulo fornecem 18 equações independentes. As três equações restantes são obtidas a partir da suposição de que a derivada parcial da superfície diferenciada na direção perpendicular a cada lado do triângulo é uma função de grau 3 no máximo, medida na variável na direção do lado considerado.

A suposição que define as três últimas equações garante também a continuidade da superfície e a prova é apresentada a seguir, como descrito por Akima (1978):

- 1) O sistema de coordenadas XY pode ser transformado em outro sistema cartesiano ST , onde o eixo S é paralelo a cada um dos lados do triângulo. No sistema de coordenadas ST , a suposição garante que $\frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z(t, s)}{\partial t} \right) = 0$.
- 2) A transformação de sistema de coordenadas entre XY e ST é linear. Assim, os valores de $z(s, t), \frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial st}$ são determinados como uma

combinação linear de $z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial xy}$ em cada um dos vértices.

- 3) Os valores de $z(s, t), \frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ em dois vértices determinam uma polinomial de 5º grau em \mathcal{S} para o lado entre estes dois vértices.
- 4) As polinomiais de 5º grau em \mathbf{XY} , que representam valores de \mathbf{Z} em dois triângulos que compartilham um lado comum são reduzidos a polinômios de 5º grau em \mathcal{S} sobre este lado. Os polinômios em \mathbf{XY} coincidem sobre o lado comum, provando a continuidade dos valores de \mathbf{Z} interpolados ao longo dos lados do triângulo.
- 5) Os valores de $\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial st} = \frac{\partial^2 z}{\partial ts}$ em dois vértices determinam um polinômio de 3º grau em \mathcal{S} para $\frac{\partial z}{\partial t}$ sobre o lado.
- 6) Os polinômios que representam $\frac{\partial z}{\partial t}$ em dois triângulos que compartilham um lado comum coincidem sobre este lado, provando a continuidade de $\frac{\partial z}{\partial t}$.

As estimativas dos valores das primeiras e das segundas derivadas parciais em um ponto são definidas considerando um número fixo de pontos vizinhos mais próximos a este ponto. Assim, para estimar as derivadas parciais de primeira ordem no ponto \mathbf{p}_0 utilizam-se os produtos vetoriais entre os vetores $\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_i$ e $\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_j$, para o ponto \mathbf{p}_i diferente de \mathbf{p}_j e pertencentes ao conjunto de pontos mais próximos de \mathbf{p}_0 . Este vetor resultante do produto vetorial é perpendicular aos vetores $\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_i$ e $\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_j$. As derivadas parciais de primeira ordem são definidas como as do plano normal ao vetor soma destes produtos vetoriais.

As derivadas parciais de segunda ordem podem ser obtidas por um processo similar, no qual se utilizam as derivadas parciais de primeira ordem calculadas. A derivada parcial de segunda ordem em relação a X e a Y é tomado como sendo a média entre a derivada parcial de segunda ordem em relação a X e a derivada parcial de segunda ordem em relação a Y .

O método apresentado por Akima (1978) é utilizado nesta dissertação como base para os métodos de ajuste de superfícies suaves.

4.3 - AJUSTE POR SUPERFÍCIES PARAMÉTRICAS

As superfícies paramétricas para retalhos triangulares utilizam o sistema de coordenadas baricêntrico como sendo as variáveis paramétricas da superfície (Sakude, 1992; Sederberg, 1990). Para o sistema de coordenadas baricêntricas uvw , a relação $u+v+w=1$ deve ser verdadeira para a região interna ao triângulo. Assim, um ponto contido no triângulo definido pelos vértices p_1 , p_2 e p_3 pode ser representado por $p=up_1+vp_2+wp_3$. O valor z de um ponto no interior deste triângulo é obtido por:

$$f(u, v, w) = \sum_{i, j, k \geq 0} q_{ijk} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$$

onde n define o grau da superfície, $i+j+k=n$ e q_{ijk} são os coeficientes dos pontos de controle.

O peso do coeficiente de ponto de controle é máximo no ponto de controle e valores negativos ou positivos forçam a superfície a ser mais próxima ou mais distante do ponto de controle (Sederberg, 1990). Uma superfície de grau n com vértices v_{n00} , v_{0n0} e v_{00n} , dados em coordenadas baricêntricas, tem os pontos de controle como apresentado na Figura 5.1.

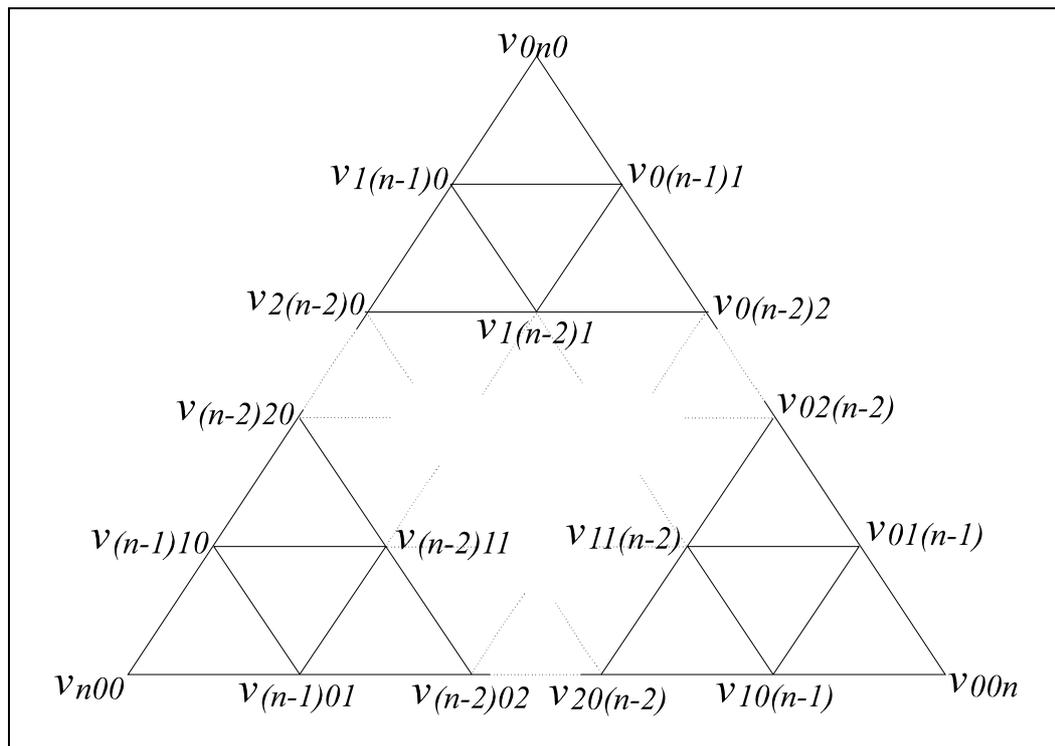


Fig. 4.3 - Pontos de controle sobre a superfície paramétrica de grau n .

O uso de superfícies paramétricas é dificultado para uso em modelagem de terreno pela determinação correta dos coeficientes dos pontos de controle e pela dificuldade de determinar o mapeamento de coordenadas entre o XYZ e o baricêntrico (Sakude, 1992). O processo de determinação dos coeficientes deve incluir informações sobre a continuidade da superfície com os retalhos vizinhos. Um método utilizado é por meio de interação com os retalhos vizinhos. Pode-se notar que é um processo caro computacionalmente e assim, o uso de superfícies paramétricas é mais apropriado para uso em sistemas de CAD (“Computer-Aided-Design”), onde o número de retalhos triangulares é menor.

CAPÍTULO 5

INFORMAÇÕES MORFOLÓGICAS

O objetivo da modelagem digital de elevação é representar uma superfície por meio de estruturas manipuláveis por computador. Esta superfície pode ser dividida em regiões de formas semelhantes, que corretamente adquiridas podem substituir os modelos de grade regular retangular ou os de grade irregular triangular.

O conjunto de formas fornecem as informações morfológicas da superfície e podem ser divididas em regiões côncavas, convexas, planas e de sela. Segundo Falcidieno e Spagnuolo (1991), a modelagem por meio desta descrição simbólica permite gerar um modelo eficiente, que utiliza um espaço de armazenagem menor do que por outros modelos.

Uma região côncava é uma região fechada onde as derivadas parciais de segunda ordem da superfície são sempre positivas. A Figura 5.1 mostra um retalho de uma região côncava.

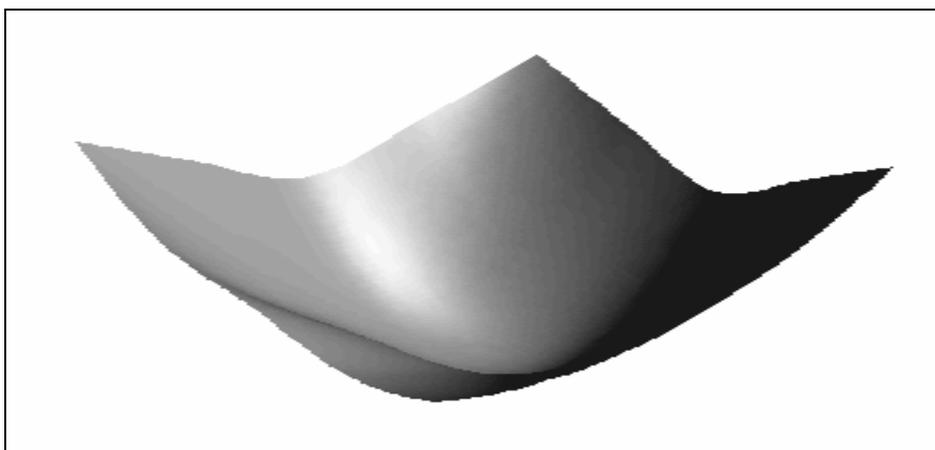


Fig. 5.1 - Região côncava.

A região convexa é aquela na qual as derivadas parciais de segunda ordem são sempre negativas. A Figura 5.2 mostra o exemplo de uma região convexa.

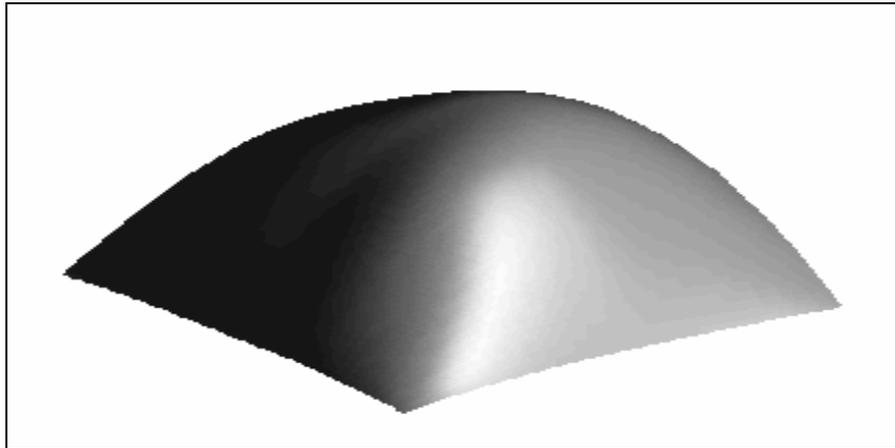


Fig. 5.2 - Região convexa.

Em uma região plana, as derivadas parciais de primeira ordem da superfície são nulas e a região de sela é aquela onde as derivadas parciais de segunda ordem são positivas para uma direção e negativas para outra. Na Figura 5.3, a região de sela pode ser identificada entre as duas regiões convexas e a região côncava.

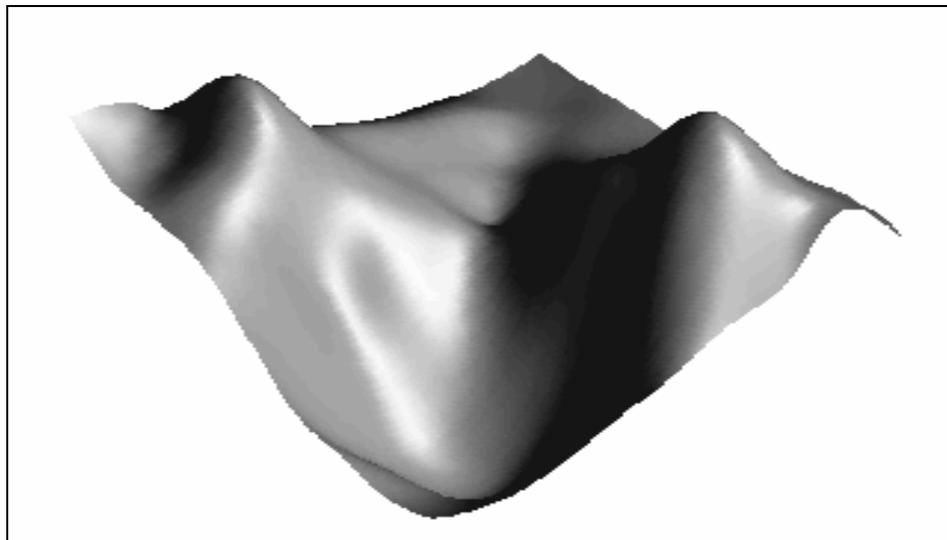


Fig. 5.3 - Superfície com região de sela.

Em cada uma destas regiões podem ser identificados pontos onde as derivadas parciais de primeira ordem em qualquer direção são nulas. Estes pontos são os pontos de máximo e de mínimo locais. Os pontos de máximo ocorrem nas regiões

côncavas e os de mínimo nas convexas. Os pontos de sela estão localizados onde ocorre o encontro de três ou mais regiões, sendo que pelo menos uma das regiões é côncava e uma outra é convexa.

Nestas regiões ainda podem ser identificadas linhas ao longo das quais as derivadas parciais da superfície cruzam o zero. Estas linhas conectam os pontos de máximo, de mínimo e de sela. Quando a região analisada é côncava, estas linhas são as linhas de vale. Quando a região é convexa, a linha é de crista. Quando uma linha de vale se encontra com uma linha de crista, o ponto de encontro é um ponto de sela.

Os elementos aqui definidos são chamados de característicos, porque podem ser utilizados para caracterizar a superfície. Assim existem as regiões características côncavas, convexas e de sela, os pontos característicos de mínimo, de máximo e de sela e as linhas características de crista e de vale.

Uma superfície em geral é contínua em toda a área de interesse. No entanto, podem ocorrer descontinuidades de diferentes ordens. As linhas características podem, para estes casos, estar delimitando a superfície em diferentes regiões contínuas internamente, mas descontínuas em relação a regiões vizinhas. Quando isto ocorre, as linhas características são chamadas de linhas de quebra. Dois tipos de descontinuidades podem ocorrer, a devido a falhas na superfície e a descontinuidade na primeira derivada. Ao longo de uma linha de falha existem dois valores diferentes de z , ou seja, não existe a continuidade C^0 , como definida no Capítulo 4. A Figura 5.4 mostra uma falha em retalho de superfície.

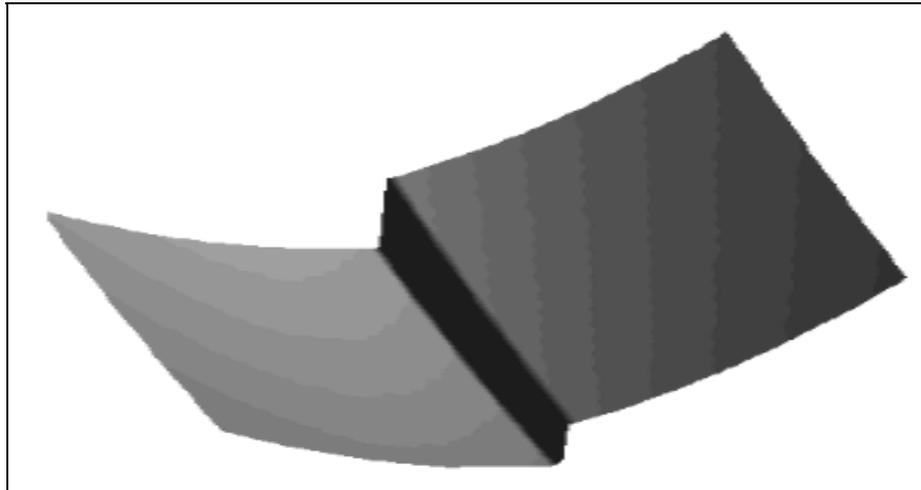


Fig. 5.4 - Falha em uma superfície.

O método apresentado nesta dissertação não trata as descontinuidades na superfície devido a falhas.

Na descontinuidade da primeira derivada, a continuidade é apenas C^0 ao longo da linha de quebra. A Figura 5.5 apresenta um retalho de uma superfície, com uma linha de vale delimitando duas regiões, com continuidade C^0 ao longo desta linha.

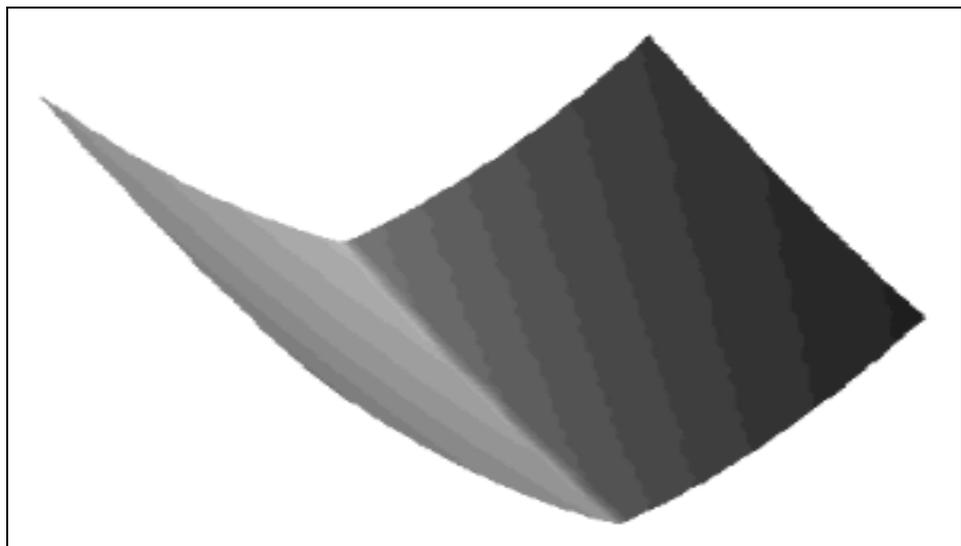


Fig. 5.5 - Linha de vale.

Pode-se notar na Figura 5.5 que as derivadas parciais na direção perpendicular a linha de vale são diferentes para as superfícies em lados diferentes desta linha.

Para os casos onde as linhas de quebra podem ser obtidas, os métodos de ajuste de superfície devem considerar estas linhas, se deseja-se modelar de maneira fiel o terreno.

CAPÍTULO 6

MÉTODO PROPOSTO

O ajuste de superfície considerando as linhas características não pode utilizar diretamente a triangulação de Delaunay, uma vez que o critério de geração não incorpora as restrições das linhas de quebra. Uma vez incorporadas as linhas de quebra, uma segunda fase deve executar o ajuste de superfície, analisando os retalhos triangulares e tratando separadamente os retalhos com arestas sobre uma das linhas de quebra e os sem arestas sobre linhas de quebra.

A seguir são apresentados o método de geração da triangulação de Delaunay modificada, que será chamada de triangulação Quasi-Delaunay e o método de ajuste.

6.1 - TRIANGULAÇÃO QUASI-DELAUNAY

As linhas de quebra representam limites das áreas de continuidade C^1 e são formadas por um conjunto de pontos ligados um a um por segmentos. Assim, cada segmento de uma linha de quebra deve ser uma aresta da triangulação. A triangulação de Delaunay deve ser modificada para inserir os segmentos das linhas de quebra e a triangulação obtida será chamada de Triangulação Quasi-Delaunay.

A maioria dos triângulos da triangulação Quasi-Delaunay respeitam a propriedade do circuncírculo uma vez que apenas os triângulos intersectados pelas linhas de quebra são modificados no processo.

O seguinte procedimento modifica a triangulação de Delaunay considerando as linhas de quebra:

- 1) Para cada linha de quebra tome um segmento a cada vez e encontre o triângulo t_i com um dos vértices igual ao primeiro ponto do segmento de reta considerado e o triângulo t_j com o segundo ponto do segmento de reta.
- 2) Determine o ponto de intersecção p_i entre o segmento de reta e a aresta do triângulo t_i . Se os vértices do triângulo t_i são v_1 , v_2 e v_3 , a aresta interceptada é o segmento entre v_1 e v_2 .
- 3) Crie um triângulo t_j com vértices p_i , v_2 e v_3 .
- 4) Modifique os vértices do triângulo t_j para v_1 , p_i e v_3 .
- 5) Encontre o outro triângulo t_k com aresta que contém o ponto de intersecção p_i . Se os vértices deste triângulo são v_1 , v_2 e v_3 , o ponto de intersecção está na aresta que une v_1 a v_2 .
- 6) Se o triângulo t_k encontrado é igual ao triângulo final t_f , vá ao passo **12**. Senão, determine o novo ponto de intersecção p_s . Se os vértices de t_k são v_1 , v_2 e v_3 e a aresta interceptada que contém o ponto p_i é o segmento entre v_1 e v_2 , a aresta que contém o ponto p_s é o segmento entre v_2 e v_3 .
- 7) Crie um triângulo t_m com vértices p_i , v_2 e p_s .
- 8) Crie outro triângulo t_n com vértices p_i , p_s e v_3 .
- 9) Modifique os vértices do triângulo t_k para v_1 , p_i e v_3 .
- 10) Considere o ponto p_i igual ao ponto p_s e retorne ao passo **6**.
- 11) Quando o triângulo t_k é igual a t_f crie um novo triângulo t_p com vértices p_i , v_2 e v_3 .
- 12) Modifique os vértices do triângulo t_f para v_1 , p_i e v_3 .
- 13) Se a linha de quebra ainda tem segmentos, tome o próximo e retorne ao passo **2**.

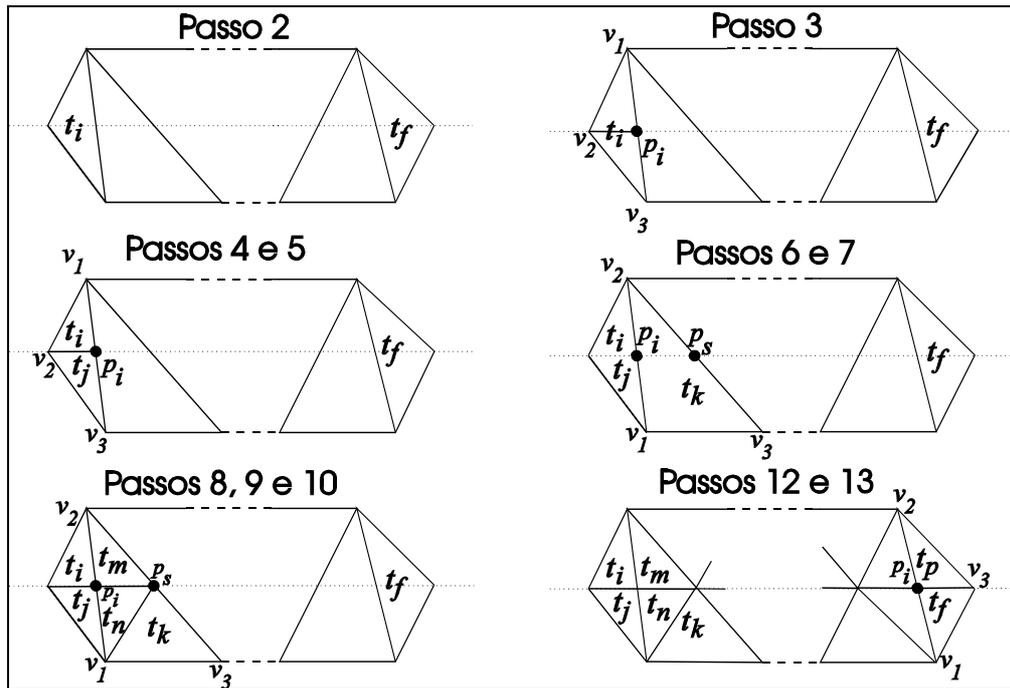


Fig. 6.1. Processo de modificação da triangulação de Delaunay

Os triângulos t_n e t_k podem ter os vértices modificados para p_i , p_s , v_3 e v_l , p_i , v_3 , respectivamente, se, para esta configuração, a distância entre p_i e v_3 é menor do que a distância entre p_s e v_r .

Este processo considera que os pontos das linhas de quebra estão inicialmente inseridos na triangulação de Delaunay.

6.2 - AJUSTE DE SUPERFÍCIES COM LINHAS DE QUEBRA

O método de ajuste de superfície é baseado no método apresentado por Akima (1978). No processo original, uma superfície quártica é ajustada a cada retalho triangular. Esta superfície ajustada tem a propriedade de ser de continuidade C^1 ao longo dos lados do retalho triangular. No entanto, para os retalhos com uma de suas arestas sobre uma linha de quebra, a continuidade não necessita ser C^1 e a continuidade C^0 é suficiente. Assim, o ajuste de superfície nos retalhos sem arestas sobre linhas de quebra deve ser efetuado com critérios diferentes do ajuste para os retalhos com arestas sobre linhas de quebra.

O método original é dividido basicamente em duas fases. Na primeira são estimados os valores de derivadas parciais de primeira e de segunda ordem e, a seguir na segunda fase, estas derivadas são utilizadas para definir os coeficientes da superfície quártica.

A estimativa dos valores de derivadas parciais de primeira e de segunda ordem em cada um dos vértices do triângulo é efetuada da seguinte forma no método original:

- As derivadas parciais de primeira ordem em um dos vértice do triângulo são estimadas através do valor z dos n pontos mais próximos. A proximidade é determinada utilizando os triângulos que compartilham este ponto.
- As derivadas parciais de segunda ordem são estimadas por um processo idêntico ao de cálculo de derivadas parciais de primeira ordem, utilizando os valores de derivadas parciais de primeira ordem ao invés do valor de z dos pontos considerados.

Uma vez que, para o método proposto, existe a informação de linha de quebra que separa a superfície em lados diferentes em relação a estas linhas, pode-se alterar a estimativa das derivadas para eliminar a influência dos dados de um lado da linha de quebra sobre as derivadas do outro lado.

O método de ajuste de superfície proposto modifica a estimativa dos valores de derivadas parciais para os retalhos triangulares com uma de suas arestas sobre uma linha de quebra e utiliza estas derivadas para definir os coeficientes da superfície quártica. Os procedimentos de estimativa de derivadas parciais e de definição dos coeficientes da superfície nos retalhos triangulares são apresentados a seguir.

6.2.1 - Estimativa de Derivadas Parciais

A modificação introduzida elimina a influência dos pontos que estão de um lado da linha de quebra sobre os valores de derivadas de primeira e de segunda ordem dos pontos do outro lado da linha de quebra.

A derivada parcial de primeira ordem no ponto sobre o vértice v_I é estimada por Akima (1978) como sendo a derivada do plano perpendicular à soma dos produtos vetoriais entre o vetor $v_I v_i$ e $v_I v_j$ (origem no vértice v_I), com o vértice v_i diferente de v_j e pertencentes ao conjunto de n pontos mais próximos. O número de pontos mais próximos n recomendado no processo original está entre 3 e 5.

Para o método proposto, nos triângulos que não tem aresta sobre linhas de quebra, um processo semelhante é utilizado. Para os outros triângulos, a estimativa é efetuada por um processo com restrição em relação as linhas de quebra.

Os dois processos de estimativa são apresentados a seguir.

6.2.1.1 - Estimativa de Derivadas Parciais sem Restrição

Para os triângulos sem restrição em relação as linhas de quebra, um processo semelhante ao utilizado por Akima é empregado. Através da triangulação existente, pode-se recuperar os triângulos que compartilham um ponto. Assim, a estimativa de derivadas parciais é efetuada considerando a média entre os vetores normais a todos os triângulos que compartilham o ponto do vértice v_0 . A derivada parcial de primeira ordem será definida para o vértice v_0 , vértice dos triângulos 1 a $n-1$, com vértices (v_0, v_1, v_2) , (v_0, v_2, v_3) ,, (v_0, v_{n-1}, v_n) e (v_0, v_n, v_1) , respectivamente, através do vetor soma:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= (v_0 v_1 \times v_0 v_2) + (v_0 v_2 \times v_0 v_3) + \dots + (v_0 v_{n-1} \times v_0 v_n) + (v_0 v_n \times v_0 v_1) \\ \vec{S} &= a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ são os versores nas direções dos eixos X, Y e Z , respectivamente.

O plano perpendicular ao vetor soma e que passa pelo ponto $\mathbf{v}_0=(x_0, y_0, z_0)$ é definido por:

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0 \\ d &= -ax_0 - by_0 - cz_0 \\ z(x, y) &= -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - d \end{aligned}$$

Assim, as derivadas parciais de primeira ordem deste plano são definidas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{a}{c} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{b}{c} \end{aligned} \tag{6.2}$$

As derivadas parciais de segunda ordem podem ser calculadas com um processo similar, substituindo o valor de z pelos valores de primeira derivada parcial em relação a X e em relação a Y .

Deve-se ressaltar que os vetores normais são considerados com valores positivos na direção do eixo Z .

A seqüência de definição das derivadas parciais de primeira ordem passo-a-passo é dada por:

- 1) Calcular os vetores normais de todos os triângulos, considerando sempre os vetores na direção positiva em relação ao eixo Z .
- 2) Calcular para todo ponto sobre o vértice de um triângulo, os valores de a, b e c , que representam a soma dos vetores normais dos triângulos que compartilham este ponto, através da Equação 6.1.

- 3) Calcular os valores de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e de $\frac{\partial z}{\partial y}$ para todo ponto sobre o vértice de um triângulo, utilizando a Equação 6.2 e os valores de a , b e c .
- 4) Calcular os vetores normais de todos os triângulos, como no passo 1, mas utilizando $\frac{\partial z}{\partial x}$ no lugar de z .
- 5) Calcular para todo ponto sobre o vértice de um triângulo, os valores de a , b e c , como no passo 2, mas utilizando os vetores normais calculados no passo 4.
- 6) Repetir o passo 3, utilizando os valores de a , b e c calculados no passo 5, obtendo os vetores normais $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ e de $\frac{\partial^2 z}{\partial xy}$.
- 7) Calcular os vetores normais de todos os triângulos, como no passo 1, mas utilizando $\frac{\partial z}{\partial y}$ no lugar de z .
- 8) Calcular para todo ponto sobre o vértice de um triângulo, os valores de a , b e c , como no passo 2, mas utilizando os vetores normais calculados no passo 7.
- 9) Repetir o passo 3, utilizando os valores de a , b e c calculados no passo 8, obtendo os vetores normais $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ e de $\frac{\partial^2 z}{\partial yx}$.
- 10) Calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial xy}$ como a média simples entre $\frac{\partial^2 z}{\partial xy}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial yx}$.

6.2.1.2 - Estimativa de Derivadas Parciais com Restrição

Para eliminar a influência entre pontos que estão em lados diferentes de uma linha de quebra, a estimativa de derivadas parciais de um ponto não

deve utilizar os valores de z , de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e de $\frac{\partial z}{\partial y}$ de pontos que estejam do outro lado da linha. Assim, um ponto, vértice de dois triângulos em lados opostos em relação a uma linha de quebra, deve ter valores de derivadas parciais diferentes segundo o triângulo considerado.

A estimativa de derivadas parciais é efetuada através de um processo similar ao anterior, com a diferença de não utilizar os valores de z , de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e de $\frac{\partial z}{\partial y}$ dos pontos do outro lado da linha de quebra.

No item 6.2.3.2 se verificará que as derivadas estimadas segundo o processo anterior devem ser modificadas para manter a continuidade C^0 entre as superfícies de retalhos triangulares que estão de lados opostos de uma linha de quebra.

A continuidade C^0 entre as superfícies dos retalhos em lados opostos é garantida se, sobre a linha de quebra, as derivadas parciais de primeira e de segunda ordem na direção da linha de quebra são iguais para as duas superfícies. Para tornar esta condição verdadeira, as derivadas parciais de primeira e de segunda ordem para os pontos sobre linhas de quebra devem ser ajustadas.

Considerando que o lado sobre a linha de quebra de um triângulo está sobre o eixo S de um sistema de coordenadas cartesiano ST , com origem sobre um dos vértices deste lado, a transformação entre os sistema de coordenadas XY para ST é dado por:

$$\begin{cases} s(x,y) = Ax + By + s_0 \\ t(x,y) = Cx + Dy + t_0 \end{cases}$$

onde (s_0, t_0) é a coordenada do vértice sobre a origem do sistema ST .

Se o ângulo entre o eixo S e o eixo X é θ , tem-se:

$$\begin{cases} (x, y) = (\cos \theta, \sin \theta) \rightarrow (s, t) = (s_0 + 1, t_0) \\ (x, y) = (\sin(\theta + \pi/2), \cos \theta) = (-\sin \theta, \cos \theta) \rightarrow (s, t) = (s_0, t_0 + 1) \end{cases}$$

e, substituindo:

$$\begin{cases} s' = s - s_0 \\ t' = t - t_0 \end{cases}$$

obtém-se:

$$\begin{cases} s'(x, y) = Ax + By \\ t'(x, y) = Cx + Dy \\ (x, y) = (\cos \theta, \sin \theta) \rightarrow (s', t') = (1, 0) \\ (x, y) = (\sin(\theta + \pi/2), \cos \theta) = (-\sin \theta, \cos \theta) \rightarrow (s', t') = (0, 1) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema resultante, determinam-se os coeficientes A , B , C e D , por meio de:

$$\begin{cases} A \cos \theta + B \sin \theta = 1 \\ C \cos \theta + D \sin \theta = 0 \rightarrow C = -\frac{D \sin \theta}{\cos \theta} \\ -A \sin \theta + B \cos \theta = 0 \rightarrow A = \frac{B \cos \theta}{\sin \theta} \\ -C \sin \theta + D \cos \theta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B \cos \theta}{\sin \theta} \cos \theta + B \sin \theta = 1 \\ \frac{D \sin \theta}{\cos \theta} \sin \theta + D \cos \theta = 1 \\ B \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \sin \theta \right) = 1 \\ D \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta \right) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \sin \theta \\ D(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \sin \theta \\ D = \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} \\ C = -\frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos \theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \cos \theta \\ C = -\sin \theta \end{cases}$$

Retornando a s e t , obtém-se:

$$\begin{cases} s'(x, y) = \cos \theta x - \sin \theta y \\ t'(x, y) = \sin \theta x + \cos \theta y \end{cases}$$

$$\begin{cases} s(x, y) = \cos \theta x - \sin \theta y + s_0 \\ t(x, y) = \sin \theta x + \cos \theta y + t_0 \end{cases}$$

A transformação inversa, de ST para XY é definida similarmente por:

$$\begin{cases} x = \cos \theta (s - s_0) + \sin \theta (t - t_0) \\ y = -\sin \theta (s - s_0) + \cos \theta (t - t_0) \end{cases}$$

As derivadas parciais de primeira ordem nas direções dos eixos S e T podem ser calculadas a partir das derivadas nas direções dos eixos X e Y por:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial st} &= \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial s} &= \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= -\sin \theta \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= \sin \theta \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \cos \theta\end{aligned}$$

Substituindo estas derivadas obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} - \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \sin \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial st} &= \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 z}{\partial xy} - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned} \tag{6.3}$$

As derivadas parciais na direção do eixo T podem ser diferentes para os triângulos em lados opostos de uma linha de quebra. No entanto, as derivadas parciais na direção de S devem ser iguais. Para que esta condição seja verdadeira, a

derivadas parciais na direção do eixo S devem ser calculadas sem o uso da restrição em relação aos pontos e as linhas de quebra. Assim, um ponto sobre a linha de quebra terá o mesmo valor de derivada parcial na direção do eixo S , independentemente de estar ligado a um ou a outro triângulo.

As derivadas parciais na direção dos eixos S e T devem ser combinadas para gerar as derivadas parciais nas direções X e Y , que serão diferentes segundo o lado que estão da linha de quebra. As derivadas parciais podem ser obtidas por:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + 2\left(\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial st} + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + 2\left(\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial st} + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial xy} = \left(\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial st} + \left(\frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

onde:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = -\sin \theta$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \cos \theta$$

Substituindo estas derivadas parciais, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= \cos\theta \frac{\partial z}{\partial s} + \sin\theta \frac{\partial z}{\partial t} \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= -\sin\theta \frac{\partial z}{\partial s} + \cos\theta \frac{\partial z}{\partial t} \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \cos^2\theta \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + 2\sin\theta \cos\theta \frac{\partial^2 z}{\partial st} + \sin^2\theta \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \sin^2\theta \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - 2\sin\theta \cos\theta \frac{\partial^2 z}{\partial st} + \cos^2\theta \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial xy} &= -\sin\theta \cos\theta \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \frac{\partial^2 z}{\partial st} + \sin\theta \cos\theta \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

O procedimento de cálculo de todas as derivadas parciais deve ser então o seguinte:

- 1) Calcular as derivadas parciais $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_n, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_n, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_n, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_n, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)_n$ para todos os pontos no sistema de coordenadas \mathbf{XY} , sem considerar as restrições das linhas de quebra, pelo procedimento descrito no item 6.2.1.1.
- 2) Calcular, para todos os pontos sobre linhas de quebra, utilizando os vetores normais calculados no passo 1 do item 6.2.1.1 e as Equações 6.1 e 6.2, as derivadas parciais $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_d$ e $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_d$, onde os pontos \mathbf{v}_l a \mathbf{v}_n são vértices de triângulos que compartilham o ponto \mathbf{v}_θ sobre a linha de quebra considerado e que estão do lado direito desta linha.
- 3) Calcular, para todos os pontos sobre linhas de quebra, utilizando os vetores normais calculados no passo 1 do item 6.2.1.1 e as Equações 6.1 e 6.2, as derivadas parciais $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_e$ e $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_e$, onde os pontos \mathbf{v}_l a \mathbf{v}_n são vértices de

triângulos que compartilham o ponto v_θ sobre a linha de quebra considerado e que estão do lado esquerdo desta linha.

- 4) Calcular, para todos os triângulos com alguma de suas arestas sobre linhas de quebra, os vetores normais utilizando a Equação 6.1 e, ao invés do valor de z , o valor da derivada parcial $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_d$, se o triângulo está a direita da linha de quebra, ou a derivada parcial $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_e$, se o triângulo está a esquerda desta linha.
- 5) Calcular, para os pontos dos triângulos com alguma aresta sobre uma das linhas de quebra e que estejam a direita desta linha, as derivadas parciais $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_d$ e $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)_d$, utilizando as Equações 6.1 e 6.2 e os vetores normais calculados considerando $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_d$ no passo 4.
- 6) Calcular, para os pontos dos triângulos com alguma aresta sobre uma das linhas de quebra e que estejam a esquerda desta linha, as derivadas parciais $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_e$ e $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)_e$, utilizando as Equações 6.1 e 6.2 e os vetores normais calculados considerando $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_e$ no passo 4.
- 7) Calcular, para todos os triângulos com alguma de suas arestas sobre linhas de quebra, os vetores normais utilizando a Equação 6.1 e, ao invés do valor de z , o valor da derivada parcial $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_d$, se o triângulo está a direita da linha de

quebra, ou a derivada parcial $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_e$, se o triângulo está a esquerda desta linha.

- 8) Calcular, para os pontos dos triângulos com alguma aresta sobre uma das linhas de quebra e que estejam a direita desta linha, as derivadas parciais $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_d$ e $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial yx}\right)_d$, utilizando as Equações 6.1 e 6.2 e os vetores normais calculados considerando $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_d$ no passo 7.
- 9) Calcular, para os pontos dos triângulos com alguma aresta sobre uma das linhas de quebra e que estejam a esquerda desta linha, as derivadas parciais $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_e$ e $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial yx}\right)_e$, utilizando as Equações 6.1 e 6.2 e os vetores normais calculados considerando $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_e$ no passo 7.
- 10) Calcular, para os pontos dos triângulos com alguma aresta sobre uma das linhas de quebra e que estejam a direita desta linha, a derivada parcial $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)_d$ como a média simples entre $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)_d$ e $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial yx}\right)_d$.
- 11) Calcular, para os pontos dos triângulos com alguma aresta sobre uma das linhas de quebra e que estejam a esquerda desta linha, a derivada parcial $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)_e$ como a média simples entre $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)_e$ e $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial yx}\right)_e$.
- 12) Calcular, para os pontos sobre linhas de quebra, as derivadas parciais de primeira e de segunda ordem em relação a **S** e **T**

$\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_n, \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_n, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)_n, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_n, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial st}\right)_n$ que não consideram as restrições impostas por estas linhas, utilizando as derivadas parciais $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_n, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_n, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_n, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_n, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)_n$ calculadas no passo 1 e o conjunto de Equações 6.3.

- 13) Calcular, para os pontos sobre linhas de quebra, as derivadas parciais de primeira e de segunda ordem em relação a S e T

$\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_d, \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_d, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)_d, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_d, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial st}\right)_d$ correspondentes ao lado direito da linha de quebra, utilizando as derivadas parciais $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_d, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_d, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_d, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_d, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)_d$ calculadas nos passos 2, 5, 8 e 10 e o conjunto de Equações 6.3.

- 14) Calcular, para os pontos sobre linhas de quebra, as derivadas parciais de primeira e de segunda ordem em relação a S e T

$\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_e, \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_e, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)_e, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_e, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial st}\right)_e$ correspondentes ao lado esquerdo da linha de quebra, utilizando as derivadas parciais $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_e, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_e, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_e, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_e, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)_e$ calculadas nos passos 3, 6, 9 e 11 e o conjunto de Equações 6.3.

- 15) Calcular, para os pontos sobre linhas de quebra, as derivadas parciais de primeira e de segunda ordem em relação a X e Y

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_d, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_d, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_d, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_d, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)_d$ correspondentes ao lado direito da linha de quebra, utilizando as derivadas parciais

$\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_n, \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_d, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)_n, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_d, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial st}\right)_d$ calculadas nos passos 12 e 13 e o conjunto de Equações 6.4.

- 16) Calcular, para os pontos sobre linhas de quebra, as derivadas parciais de primeira e de segunda ordem em relação a X e Y
- $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_e, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_e, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_e, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_e, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)_e$ correspondentes ao lado esquerdo da linha de quebra, utilizando as derivadas parciais
- $\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_n, \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_e, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)_n, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_e, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial st}\right)_e$ calculadas nos passos 12 e 14 e o conjunto de Equações 6.4.

As derivadas parciais definidas acima serão utilizadas no item seguinte para a definição dos coeficientes da superfície quártica.

6.2.2 - Definição da Superfície a Ser Ajustada em Retalhos sem Linhas de Quebra

Os ajustes de superfícies para retalhos triangulares com arestas sobre as linhas de quebra e para os retalhos sem arestas sobre linhas de quebra são efetuados por processos diferentes. O procedimento para os retalhos triangulares sem arestas sobre linhas de quebra é o mesmo que o apresentado por Akima (1978). Para os retalhos com arestas sobre as linhas de quebra, o procedimento é semelhante, com diferença somente na definição das derivadas parciais utilizadas para determinar os coeficientes da equação polinomial. A descrição detalhada do processo definido por Akima é apresentado a seguir.

6.2.2.1 - Considerações Básicas

Utilizando o sistema de coordenadas cartesiano bi-dimensional com eixos X e Y , pode-se descrever as seguintes considerações básicas:

- O valor da função no ponto de coordenadas (x,y) em um triângulo é interpolado por uma função polinomial de 5^o grau a duas variáveis em x e y dada por:

$$z(x,y) = \sum_{j=0}^5 \sum_{k=0}^{5-j} q_{jk} x^j y^k \quad (6.5)$$

A resolução desta polinomial necessita da determinação de 21 coeficientes.

- O valor da função e de suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem

$$z(x,y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial xy}$$

em cada um dos vértices do triângulo fornecem 18 equações independentes.

- A derivada parcial da função diferenciada na direção perpendicular a cada lado do triângulo é, no máximo, de grau 3 para a variável medida na direção deste lado do triângulo. Ou seja, quando o sistema de coordenadas é transformado em outro sistema cartesiano, que pode ser chamado de ST , onde o eixo S é paralelo a cada um dos lados do triângulo, a polinomial a duas variáveis em s e t representando valores de z deve satisfazer:

$$\frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z(t,s)}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.6)$$

Uma vez que um triângulo tem 3 lados esta consideração fornece as outras 3 equações necessárias.

6.2.2.2 - Sistema de Coordenadas Associado ao Triângulo

O triângulo de vértices V_1 , V_2 e V_3 em sentido horário, com as respectivas coordenadas no sistema cartesiano XY dadas por (x_1,y_1) , (x_2,y_2) e (x_3,y_3) é apresentado na Figura 6.2.

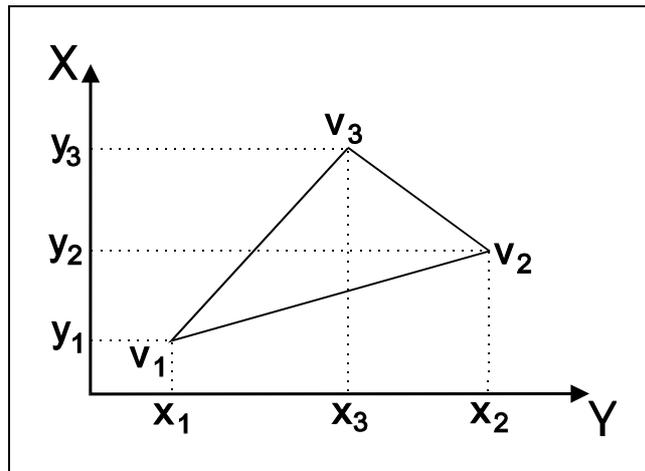


Fig. 6.2 - Triângulo de vértices v_1 , v_2 e v_3 no sistema cartesiano XY .

O triângulo pode ser representado por um novo sistema de coordenadas associado UV , onde os vértices são representados por $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ como mostra a Figura 6.3.

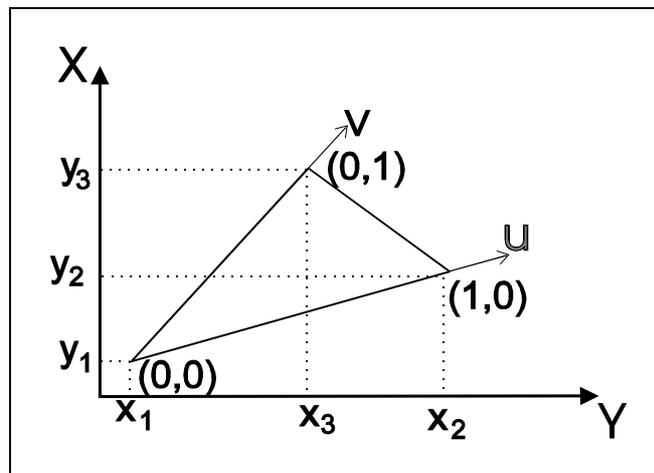


Fig. 6.3 - Triângulo no sistema associado UV .

A transformação de coordenadas entre XY e UV é representada por:

$$\begin{aligned} x &= au + bv + x_0 \\ y &= cu + dv + y_0 \end{aligned} \tag{6.7}$$

onde:

$$\begin{aligned}
a &= x_2 - x_1 \\
b &= x_3 - x_1 \\
c &= y_2 - y_1 \\
d &= y_3 - y_1 \\
x_0 &= x_1 \\
y_0 &= y_1
\end{aligned} \tag{6.8}$$

A transformação inversa é dada por:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{d(x - x_0) - b(y - y_0)}{ad - bc} \\
v &= \frac{-c(x - x_0) + a(y - y_0)}{ad - bc}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

As derivadas parciais no sistema XY são transformadas para o sistema UV através das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= a \frac{\partial z}{\partial x} + c \frac{\partial z}{\partial y} \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= b \frac{\partial z}{\partial x} + d \frac{\partial z}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2ac \frac{\partial^2 z}{\partial xy} + c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial uv} &= ab \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (ad + bc) \frac{\partial^2 z}{\partial xy} + cd \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= b^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bd \frac{\partial^2 z}{\partial xy} + d^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Uma vez que a transformação é linear, a função polinomial interpolante da Equação 6.5 pode ser reescrita como:

$$z(u, v) = \sum_{j=0}^5 \sum_{k=0}^{5-j} p_{jk} u^j v^k \tag{6.11}$$

Uma vez que os coeficientes p_{ij} podem ser determinados diretamente, como será demonstrado, e são utilizados para interpolar os valores de z , não é necessário relacionar os coeficientes p_{ij} aos coeficientes q_{ij} da Equação 6.5.

As derivadas parciais de $Z(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ no sistema UV são dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \sum_{j=1}^5 \sum_{k=0}^{5-j} j p_{jk} u^{j-1} v^k \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \sum_{j=0}^4 \sum_{k=1}^{5-j} k p_{jk} u^j v^{k-1} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \sum_{j=2}^5 \sum_{k=0}^{5-j} j(j-1) p_{jk} u^{j-2} v^k \\
\frac{\partial^2 z}{\partial uv} &= \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^{5-j} j k p_{jk} u^{j-1} v^{k-1} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= \sum_{j=0}^3 \sum_{k=2}^{5-j} k(k-1) p_{jk} u^j v^{k-2}
\end{aligned} \tag{6.12}$$

L_u e L_v são respectivamente os comprimentos dos vetores unitários no sistema UV (os tamanhos dos lados $V_1 V_2$ e $V_1 V_3$) e θ é o ângulo entre os eixos U e V . L_u , L_v e θ são dados por:

$$\begin{aligned}
L_u &= \sqrt{a^2 + c^2} \\
L_v &= \sqrt{b^2 + d^2} \\
\theta &= \tan^{-1} \frac{d}{b} - \tan^{-1} \frac{c}{a}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

onde a , b , c , e d são as constantes definidas na Equações 6.8.

6.2.2.3 - Implementação da Restrição de Continuidade

Pode-se representar a informação da Equação 6.6 no sistema UV e deduzir equações úteis para a determinação dos coeficientes do polinômio, em cada um dos lados do triângulo.

Inicialmente, considera-se o caso onde o eixo S é paralelo ao lado v_1v_2 (lado coincidente ao eixo U) como mostra a Figura 6.4.

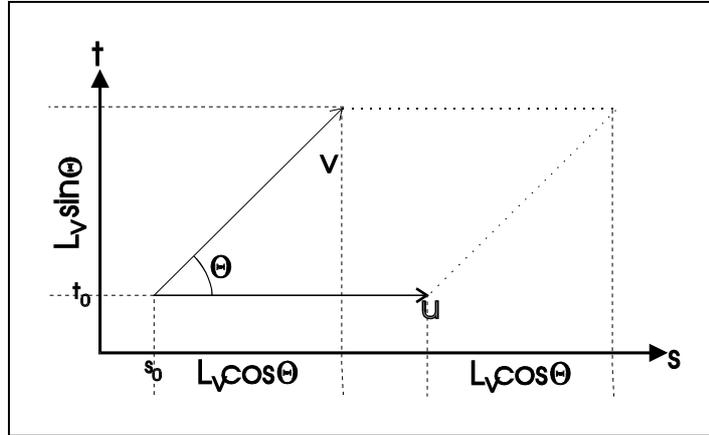


Fig. 6.4 - Triângulo no sistema de coordenadas ST , com eixo S paralelo ao eixo U .

A transformação de sistema de coordenadas entre UV e ST é definida para este caso a partir da resolução do sistema de equações dado a seguir nos pontos $(1,0)$ e $(1,1)$ em coordenadas UV :

$$u(s,t) = Es + Ft$$

$$v(s,t) = Gs + Ht$$

$$(s',t') = (s - s_0, t - t_0)$$

$$(u,v) = (1,0) \rightarrow (s',t') = (L_u, 0)$$

$$(u,v) = (1,1) \rightarrow (s',t') = (L_u + L_v \cos \theta, L_v \sin \theta)$$

Substituindo os valores de (s',t') em $(1,0)$ e $(1,1)$ em coordenadas UV :

$$\begin{cases} 1 = E(L_u) \rightarrow E = \frac{1}{L_u} \\ 0 = G(L_u) \rightarrow G = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = E(L_u + L_v \cos \theta) + F(L_v \sin \theta) \\ 1 = G(L_u + L_v \cos \theta) + H(L_v \sin \theta) \end{cases}$$

Obtém-se E e G no ponto $(1,0)$. Substituindo E e G na equação do ponto $(1,1)$:

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{L_u}(L_u + L_v \cos \theta) + F(L_v \sin \theta) \\ 1 = H(L_v \sin \theta) \rightarrow H = \frac{1}{L_v \sin \theta} \end{cases}$$

$$1 = 1 + \frac{L_v}{L_u} \cos \theta + F(L_v \sin \theta) \rightarrow F = -\frac{\cos \theta}{L_u \sin \theta}$$

Obtém-se F e H . Substituindo os valores de E , F , G e H nas equações de $u(s', t')$ e de $v(s', t')$:

$$u(s', t') = \frac{1}{L_u} s' - \frac{\cos \theta}{L_u \sin \theta} t' = \frac{\sin \theta s' - \cos \theta t'}{L_u \sin \theta}$$

$$v(s', t') = \frac{1}{L_v \sin \theta} t'$$

Substituindo s' e t' , obtém-se:

$$u = \frac{\sin \theta (s - s_0) - \cos \theta (t - t_0)}{L_u \sin \theta} \quad (6.14)$$

$$v = \frac{t - t_0}{L_v \sin \theta}$$

onde L_u , L_v e θ são as constantes definidas nas Equações 6.13. As derivadas parciais em relação a s e t são dadas respectivamente por:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{L_u} \frac{\partial z}{\partial u} \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\cos \theta}{L_u \sin \theta} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{L_v \sin \theta} \frac{\partial z}{\partial v}$$

Substituindo estas derivadas na Equação 6.6 obtém-se:

$$\frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(-\frac{\cos \theta}{L_u \sin \theta} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{L_v \sin \theta} \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(-\frac{\cos \theta}{L_u} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{L_v} \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0$$

Como $\theta > 0 \rightarrow \frac{1}{\sin \theta} \neq 0$, obtém-se:

$$-\frac{\cos \theta}{L_u} \frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{1}{L_v} \frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0 \quad (6.16)$$

Onde as derivadas parciais em relação a u e v são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \sum_{j=1}^5 \sum_{k=0}^{5-j} j p_{jk} u^{j-1} v^k \\ &= p_{10} + p_{11}v + p_{12}v^2 + p_{13}v^3 + p_{14}v^4 + \\ &\quad + 2p_{20}u + 2p_{21}uv + 2p_{22}uv^2 + 2p_{23}uv^3 + \\ &\quad + 3p_{30}u^2 + 3p_{31}u^2v + 3p_{32}u^2v^2 + \\ &\quad + 4p_{40}u^3 + 4p_{41}u^3v + \\ &\quad + 5p_{50}u^4 \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \sum_{j=0}^4 \sum_{k=1}^{5-j} k p_{jk} u^j v^{k-1} \\ &= p_{01} + 2p_{02}v + 3p_{03}v^2 + 4p_{04}v^3 + 5p_{05}v^4 \\ &\quad + p_{11}u + 2p_{12}uv + 3p_{13}uv^2 + 4p_{14}uv^3 + \\ &\quad + p_{21}u^2 + 2p_{22}u^2v + 3p_{23}u^2v^2 + \\ &\quad + p_{31}u^3 + 2p_{32}u^3v + \\ &\quad + p_{41}u^4 \end{aligned}$$

Substituindo os valores de $u(s,t)$ e $v(s,t)$ das Equações 6.14 nestas derivadas, obtém-se as derivadas parciais em relação a s e t dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) &= \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^4 \frac{\partial^5 z}{\partial u^5} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^3 \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right) \frac{\partial^5 z}{\partial u^4 v} + 6 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^5 z}{\partial u^3 v^2} + \\ &\quad + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^3 \frac{\partial^5 z}{\partial u^2 v^3} + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^4 \frac{\partial^5 z}{\partial u v^4} \\ \frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) &= \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^4 \frac{\partial^5 z}{\partial u^4 v} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^3 \frac{\partial^5 z}{\partial u^3 v^2} + 6 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^5 z}{\partial u^2 v^3} + \\ &\quad + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^3 \frac{\partial^5 z}{\partial u v^4} + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^4 \frac{\partial^5 z}{\partial v^5}\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas parciais, obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) &= \frac{120 p_{50}}{L_u^4} \\ \frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) &= \frac{24 p_{41}}{L_u^4}\end{aligned}$$

A partir destas derivadas parciais e da Equação 6.16 obtém-se:

$$\begin{aligned}-\frac{\cos \theta}{L_u} \frac{120 p_{50}}{L_u^4} + \frac{1}{L_v} \frac{24 p_{41}}{L_u^4} &= 0 \\ \frac{24}{L_u^4} \left(-\frac{\cos \theta}{L_u} 5 p_{50} + \frac{1}{L_v} p_{41} = 0 \right) &\neq 0\end{aligned}$$

Como $\frac{24}{L_u^4} \neq 0$, obtém-se finalmente a equação:

$$L_u p_{41} - 5 L_v \cos \theta p_{50} = 0 \quad (6.17)$$

A seguir, considera-se o caso onde o eixo S é paralelo ao lado $V_1 V_3$ (lado coincidente ao eixo V), como mostra a Figura 6.5.

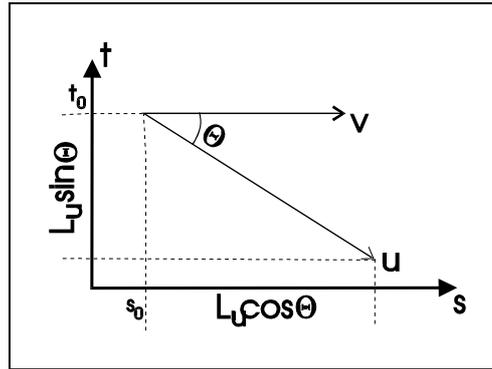


Fig. 6.5 - Triângulo no sistema de coordenadas ST , com eixo S paralelo ao eixo V .

A transformação de coordenadas entre ST e UV pode ser definida por um procedimento similar ao caso da Figura 6.4, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{t - t_0}{L_u \operatorname{sen} \theta} \\
 v &= -\frac{\operatorname{sen} \theta (s - s_0) + \cos \theta (t - t_0)}{L_v \operatorname{sen} \theta}
 \end{aligned}
 \tag{6.18}$$

E derivadas parciais expressas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{1}{L_v} \frac{\partial z}{\partial v} \\
 \frac{\partial z}{\partial t} &= -\frac{1}{L_u \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{L_v \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial z}{\partial v}
 \end{aligned}
 \tag{6.19}$$

As derivadas parciais em relação a u e v podem ser obtidas também por procedimentos similares ao caso do eixo S paralelo ao eixo U , utilizando as Equações 6.6, 6.11 e 6.19, obtendo:

$$L_v p_{14} - 5 L_u \cos \theta p_{05} = 0
 \tag{6.20}$$

Agora, considera-se o caso para o qual o eixo S é paralelo ao lado $v_2 v_3$ apresentado na Figura 6.6.

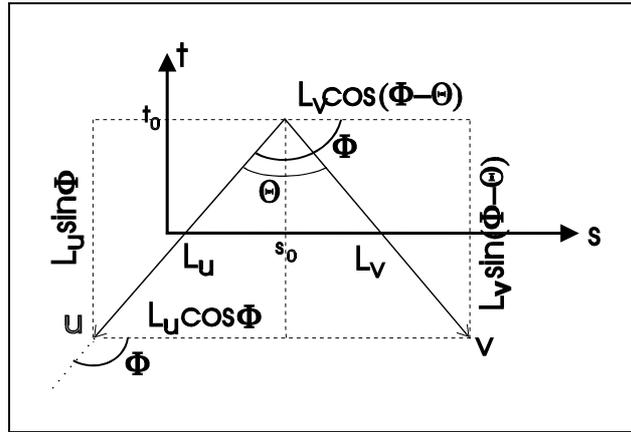


Fig. 6.6 - Triângulo no sistema de coordenadas ST , com eixo S paralelo ao lado uv .

A transformação de sistema de coordenadas entre UV e ST pode ser obtida a partir dos pontos $(0,1)$ e $(1,0)$ em coordenadas UV através de:

$$\begin{aligned}
 u(s,t) &= Es + Ft \\
 v(s,t) &= Gs + Ht \\
 (s',t') &= (s - s_0, t - t_0) \\
 \begin{cases} (u,v) = (0,1) \rightarrow (s',t') = (-L_v \cos(\theta - \phi), L_v \sin(\theta - \phi)) \\ (u,v) = (1,0) \rightarrow (s',t') = (L_u \cos \phi, -L_u \sin \phi) \end{cases} \\
 \begin{cases} 0 = -EL_v \cos(\theta - \phi) + FL_v \sin(\theta - \phi) \rightarrow E = -F \frac{\sin(\theta - \phi)}{\cos(\theta - \phi)} \\ 1 = -GL_v \cos(\theta - \phi) + HL_v \sin(\theta - \phi) \end{cases} \\
 \begin{cases} 1 = EL_u \cos \phi - FL_u \sin \phi \\ 0 = GL_u \cos \phi - HL_u \sin \phi \rightarrow G = H \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Obtendo a relação entre E e F e entre G e H . Substituindo as relações nas equações restantes obtém-se:

$$\begin{cases} 1 = -H \frac{\text{sen } \phi}{\cos \phi} L_v \cos(\theta - \phi) + HL_v \text{sen}(\theta - \phi) \\ 1 = -F \frac{\text{sen}(\theta - \phi)}{\cos(\theta - \phi)} L_u \cos \phi - FL_u \text{sen } \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(-\text{sen } \phi \cos(\theta - \phi) + \cos \phi \text{sen}(\theta - \phi)) = \frac{\cos \phi}{L_v} \\ F(\cos \phi \text{sen}(\theta - \phi) + \text{sen } \phi \cos(\theta - \phi)) = -\frac{\cos(\theta - \phi)}{L_u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(\text{sen } \phi \cos(\phi - \theta) + \cos \phi \text{sen}(\theta - \phi)) = \frac{\cos \phi}{L_v} \\ F(\cos \phi \text{sen}(\theta - \phi) + \text{sen } \phi \cos(\theta - \phi)) = -\frac{\cos(\theta - \phi)}{L_u} \end{cases}$$

Substituindo o seno e o cosseno da diferença de ângulos, obtém-se:

$$\begin{cases} H(\text{sen } \phi (\cos \phi \cos \theta + \text{sen } \phi \text{sen } \theta) + \cos \phi (\cos \phi \text{sen } \theta - \text{sen } \phi \cos \theta)) = \frac{\cos \phi}{L_v} \\ F(\cos \phi (\text{sen } \theta \cos \phi - \cos \theta \text{sen } \phi) + \text{sen } \phi (\cos \theta \cos \phi + \text{sen } \theta \text{sen } \phi)) = -\frac{\cos(\theta - \phi)}{L_u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(\text{sen } \theta \text{sen}^2 \phi + \cos \theta \text{sen } \phi \cos \phi - \cos \theta \text{sen } \phi \cos \phi + \text{sen } \theta \cos^2 \phi) = \frac{\cos \phi}{L_v} \\ F(\text{sen } \theta \text{sen}^2 \phi + \cos \theta \text{sen } \phi \cos \phi - \cos \theta \text{sen } \phi \cos \phi + \text{sen } \theta \cos^2 \phi) = -\frac{\cos(\theta - \phi)}{L_u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(\text{sen } \theta (\cos^2 \phi + \text{sen}^2 \phi)) = \frac{\cos \phi}{L_v} \rightarrow H = \frac{\cos \phi}{L_v \text{sen } \theta} \\ F(\text{sen } \theta (\cos^2 \phi + \text{sen}^2 \phi)) = -\frac{\cos(\theta - \phi)}{L_u} \rightarrow F = -\frac{\cos(\theta - \phi)}{L_u \text{sen } \theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G = \frac{\cos \phi \text{sen } \phi}{L_v \text{sen } \theta \cos \phi} \rightarrow G = \frac{\text{sen } \phi}{L_v \text{sen } \theta} \\ E = \frac{\cos(\theta - \phi) \text{sen}(\theta - \phi)}{L_u \text{sen } \theta \cos(\theta - \phi)} \rightarrow E = \frac{\text{sen}(\theta - \phi)}{L_u \text{sen } \theta} \end{cases}$$

Os valores de E , F , G e H definem assim as equações de $u(s', t')$ e de $v(s', t')$ dadas por:

$$\begin{aligned} u(s', t') &= Es' + Ft' \\ v(s', t') &= Gs' + Ht' \end{aligned}$$

E substituindo os valores de s' e de t' , obtém-se finalmente:

$$\begin{aligned} u &= E(s - s_0) + F(t - t_0) \\ v &= G(s - s_0) + H(t - t_0) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Onde:

$$\cos \phi = \arctan \frac{d-c}{b-a} - \arctan \frac{c}{a} \quad (6.22)$$

A constante ϕ é o ângulo entre os eixos S e U . As constantes a , b , c e d são dadas pelas Equações 6.4 e Lu , Lv e θ são determinadas nas Equações 6.13. As derivadas parciais em relação a s e t são expressas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= E \frac{\partial z}{\partial u} + G \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= F \frac{\partial z}{\partial u} + H \frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Das Equações 6.6 e 6.23 obtém-se:

$$F \frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) + H \frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0 \quad (6.24)$$

Onde as derivadas parciais em relação a u e v são definidas pelas Equações 6.10 e dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \sum_{j=1}^5 \sum_{k=0}^{5-j} j p_{jk} u^{j-1} v^k \\
&= p_{10} + p_{11}v + p_{12}v^2 + p_{13}v^3 + p_{14}v^4 + \\
&\quad + 2p_{20}u + 2p_{21}uv + 2p_{22}uv^2 + 2p_{23}uv^3 + \\
&\quad + 3p_{30}u^2 + 3p_{31}u^2v + 3p_{32}u^2v^2 + \\
&\quad + 4p_{40}u^3 + 4p_{41}u^3v + \\
&\quad + 5p_{50}u^4 \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \sum_{j=0}^4 \sum_{k=1}^{5-j} k p_{jk} u^j v^{k-1} \\
&= p_{01} + 2p_{02}v + 3p_{03}v^2 + 4p_{04}v^3 + 5p_{05}v^5 \\
&\quad + p_{11}u + 2p_{12}uv + 3p_{13}uv^2 + 4p_{14}uv^3 + \\
&\quad + p_{21}u^2 + 2p_{22}u^2v + 3p_{23}u^2v^2 + \\
&\quad + p_{31}u^3 + 2p_{32}u^3v + \\
&\quad + p_{41}u^4
\end{aligned}$$

Substituindo os valores de $\mathbf{u}(s,t)$ e de $\mathbf{v}(s,t)$ das Equações 6.21, obtém-se as derivadas parciais em relação a s são dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) &= \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^4 \frac{\partial^5 z}{\partial u^5} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^3 \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right) \frac{\partial^5 z}{\partial u^4 v} + 6 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^5 z}{\partial u^3 v^2} + \\
&\quad + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^3 \frac{\partial^5 z}{\partial u^2 v^3} + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^4 \frac{\partial^5 z}{\partial u v^4} \\
\frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) &= \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^4 \frac{\partial^5 z}{\partial u^4 v} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^3 \frac{\partial^5 z}{\partial u^3 v^2} + 6 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^5 z}{\partial u^2 v^3} + \\
&\quad + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^3 \frac{\partial^5 z}{\partial u v^4} + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^4 \frac{\partial^5 z}{\partial v^5}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) = 120E^4 p_{50} + 96E^3 G p_{41} + 72E^2 G^2 p_{32} + 48EG^3 p_{23} + 24G^4 p_{14}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) = 24E^4 p_{41} + 48EG^3 p_{32} + 72E^2 G^2 p_{23} + 96EG^3 p_{14} + 120G^4 p_{05}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) = 24(5E^4 p_{50} + 4E^3 G p_{41} + 3E^2 G^2 p_{32} + 2EG^3 p_{23} + G^4 p_{14})$$

$$\frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) = 24(E^4 p_{41} + 2EG^3 p_{32} + 3E^2 G^2 p_{23} + 4EG^3 p_{14} + 5G^4 p_{05})$$

Substituindo estas derivadas parciais na Equação 6.24 obtém-se:

$$\begin{aligned} & 24F(5E^4 p_{50} + 4E^3 G p_{41} + 3E^2 G^2 p_{32} + 2EG^3 p_{23} + G^4 p_{14}) + \\ & + 24H(E^4 p_{41} + 2EG^3 p_{32} + 3E^2 G^2 p_{23} + 4EG^3 p_{14} + 5G^4 p_{05}) = 0 \\ & 5E^4 F p_{50} + 4E^3 F G p_{41} + H E^4 p_{41} + 3E^2 F G^2 p_{32} + 2EG^3 H p_{32} + \\ & 2E F G^3 p_{23} + 3E^2 G^2 H p_{23} + F G^4 p_{14} + 4EG^3 H p_{14} + 5G^4 H p_{05} = 0 \end{aligned}$$

Que se reduz finalmente a:

$$\begin{aligned} & 5E^4 F p_{50} + E^3(4FG + EH)p_{41} + E^2 G(3FG + 2EH)p_{32} + \\ & + EG^2(2FG + 3EH)p_{23} + G^3(FG + 4EH)p_{14} + 5G^4 H p_{05} = 0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

As Equações 6.17, 6.20 e 6.25 são resultantes da implementação da Equação 6.6 no sistema de coordenadas UV e são utilizadas para determinar os coeficientes da polinomial definida na Equação 6.11.

6.2.2.4 - Determinação dos Coeficientes da Polinomial

Os coeficientes p_{ij} da polinomial da Equação 6.11 podem ser definidos utilizando os valores de z e de derivadas parciais estimados e as equações do item 6.2.2.2 e 6.2.2.3. O procedimento é apresentado a seguir.

Os coeficientes de ordem menor podem ser determinados tomando o ponto $(\mathbf{u}, \mathbf{v})=(0,0)$ e inserindo os valores de $z(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial uv}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ em V_1 (vértice onde $(\mathbf{u}, \mathbf{v})=(0,0)$) nas Equações 6.11 e 6.12, obtendo:

$$\begin{aligned}
 p_{00} &= z(0,0) \\
 p_{10} &= \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{0,0} \\
 p_{01} &= \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_{0,0} \\
 p_{20} &= \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right|_{0,0} \\
 p_{11} &= \left. \frac{\partial^2 z}{\partial uv} \right|_{0,0} \\
 p_{02} &= \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right|_{0,0}
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

A seguir, utilizando $(\mathbf{u}, \mathbf{v})=(1,0)$ e inserindo os valores de $z(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ em V_2 (vértice onde $(\mathbf{u}, \mathbf{v})=(1,0)$) na Equação 6.11 e na primeira e na terceira equação das Equações 6.12, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 p_{30} + p_{40} + p_{50} &= z(1,0) - p_{00} - p_{10} - p_{20} \\
 3p_{30} + 4p_{40} + 5p_{50} &= \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{1,0} - p_{10} - 2p_{20} \\
 6p_{30} + 12p_{40} + 20p_{50} &= \left. \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right|_{1,0} - 2p_{20}
 \end{aligned}$$

Resolvendo estas equações em relação a p_{30}, p_{40} e p_{50} , obtém-se:

$$\begin{aligned}
p_{30} &= \frac{20z(1,0) - 8 \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{1,0} + \left. \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right|_{1,0} - 20p_{00} - 12p_{10} - 6p_{20}}{2} \\
p_{40} &= -15z(1,0) + 7 \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{1,0} - \left. \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right|_{1,0} + 15p_{00} + 8p_{10} + 3p_{20} \\
p_{50} &= \frac{12z(1,0) - 6 \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{1,0} + \left. \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right|_{1,0} - 12p_{00} - 6p_{10} - 2p_{20}}{2}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Uma vez que p_{00} , p_{10} e p_{20} podem ser calculados na Equação 6.26, pode-se determinar p_{30} , p_{40} e p_{50} a partir das Equações 6.27.

De maneira similar, utilizando os valores de $z(u,v)$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ em V_3 (vértice onde $(u,v)=(0,1)$), a Equação 6.11 e a segunda e a última Equações de 6.12, obtém-se:

$$\begin{aligned}
p_{03} &= \frac{20z(0,1) - 8 \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_{0,1} + \left. \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right|_{0,1} - 20p_{00} - 12p_{01} - 6p_{02}}{2} \\
p_{04} &= -15z(0,1) + 7 \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_{0,1} - \left. \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right|_{0,1} + 15p_{00} + 8p_{01} + 3p_{02} \\
p_{05} &= \frac{12z(0,1) - 6 \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_{0,1} + \left. \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right|_{0,1} - 12p_{00} - 6p_{01} - 2p_{02}}{2}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Com p_{50} e p_{05} determinados, pode-se obter p_{41} e p_{14} a partir das Equações 6.17 e 6.20, respectivamente. Os resultados são:

$$\begin{aligned}
p_{41} &= \frac{5L_v \cos\Theta}{L_u} p_{50} \\
p_{14} &= \frac{5L_u \cos\Theta}{L_v} p_{05}
\end{aligned} \tag{6.29}$$

A seguir, utilizando os valores de $\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial uv}$ em V_2 (vértice onde

$(\mathbf{u}, \mathbf{v})=(1,0)$) com a segunda e a quarta equação das Equações 6.12, obtém-se:

$$\begin{aligned} p_{21} + p_{31} &= \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_{1,0} - p_{01} - p_{11} - p_{41} \\ 2p_{21} + 3p_{31} &= \left. \frac{\partial^2 z}{\partial uv} \right|_{1,0} - p_{11} - 4p_{41} \end{aligned}$$

Resolvendo estas equações, obtém-se:

$$\begin{aligned} p_{21} &= 3 \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_{1,0} - \left. \frac{\partial^2 z}{\partial uv} \right|_{1,0} - 3p_{01} - 2p_{11} + p_{41} \\ p_{31} &= -2 \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_{1,0} + \left. \frac{\partial^2 z}{\partial uv} \right|_{1,0} + 2p_{01} + p_{11} - 2p_{41} \end{aligned} \quad (6.30)$$

De maneira similar, utilizando os valores de $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial^2 z}{\partial uv}$ em V_3

(vértice onde $(\mathbf{u}, \mathbf{v})=(0,1)$) com a primeira e a quarta equação das Equações 6.12, obtém-se:

$$\begin{aligned} p_{12} &= 3 \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{0,1} - \left. \frac{\partial^2 z}{\partial uv} \right|_{0,1} - 3p_{10} - 2p_{11} + p_{14} \\ p_{13} &= -2 \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{0,1} + \left. \frac{\partial^2 z}{\partial uv} \right|_{0,1} + 2p_{10} + p_{11} - 2p_{14} \end{aligned} \quad (6.31)$$

A Equação 6.25 pode ser rescrita como:

$$g_1 p_{32} + g_2 p_{23} = h_1 \quad (6.32)$$

onde:

$$\begin{aligned}
g_1 &= E^2 G(3FG + 2EH) \\
g_2 &= EG^2(2FG + 3EH) \\
h_1 &= -5E^4 F p_{50} - E^3(4FG + EH)p_{41} - G^3(FG + 4EH)p_{14} - 5G^4 H p_{05}
\end{aligned} \tag{6.33}$$

com E , F , G e H definidas pela Equação 6.22. A partir do valor de $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ em V_2 e a última equação do conjunto de Equações 6.12, obtém-se:

$$p_{22} + p_{32} = h_2$$

onde:

$$h_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \Big|_{1,0} - p_{02} - p_{12} \tag{6.35}$$

De maneira similar, a partir do valor de $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ em V_3 e a terceira equação do conjunto de Equações 6.12, obtém-se:

$$p_{22} + p_{23} = h_3$$

onde:

$$h_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \Big|_{0,1} - p_{20} - p_{21} \tag{6.37}$$

Resolvendo as Equações 6.32, 6.34 e 6.36 em relação a p_{22} , p_{32} e p_{23} obtém-se:

$$\begin{aligned}
p_{22} &= \frac{g_1 h_2 + g_2 h_3 - h_1}{g_1 + g_2} \\
p_{32} &= h_2 - p_{22} \\
p_{23} &= h_3 - p_{22}
\end{aligned} \tag{6.38}$$

com g_1, g_2, h_1, h_2 e h_3 dados pelas Equações 6.33, 6.35 e 6.37.

6.2.3 - Definição da Superfície a Ser Ajustada em Retalhos Sobre Linhas de Quebra

O ajuste de superfícies para os retalhos triangulares com arestas sobre as linhas de quebra é efetuado por um procedimento baseado no utilizado para os retalhos triangulares sem arestas sobre linhas de quebra apresentado com detalhes no item anterior. A diferença entre os dois procedimentos está na definição dos coeficientes da equação polinomial. A descrição da modificação é apresentada a seguir.

6.2.3.1 - Consideração Básica Modificada

Todas as considerações básicas apresentadas no item 6.2.2.1 continuam sendo válidas e utilizadas, com exceção da Equação 6.2 para o lado do triângulo com aresta sobre a linha de quebra.

Uma vez que a linha de quebra deve garantir que não há continuidade C^l entre retalhos em lados diferentes, a consideração de continuidade entre retalhos deve ser modificada para este lado.

6.2.3.2 - Consideração Para o Lado Sobre uma Linha de Quebra

O lado do triângulo sobre uma linha de quebra não tem, obrigatoriamente, a continuidade C^l na direção perpendicular a este lado. No entanto, na direção do lado, a continuidade deve continuar sendo C^l . A função na variável s , para este lado, pode ser definida por uma polinomial de 5^o grau, dada por:

$$z(s) = \sum_{i=0}^5 r_i s^i = r_5 s^5 + r_4 s^4 + r_3 s^3 + r_2 s^2 + r_1 s + r_0$$

Os 6 coeficientes r_i desta polinomial podem ser definidos a partir das seguintes equações:

- Valores da função $z(s)$ nos dois vértices sobre a linha de quebra.
- Valores da primeira derivada $\frac{\partial z}{\partial s}$ nos dois vértices sobre a linha de quebra.
- Valores da segunda derivada $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ nos dois vértices sobre a linha de quebra.

Se estas equações forem as mesmas para os dois retalhos triangulares em lados diferentes de uma linha de quebra, a continuidade C^0 será garantida entre as superfícies destes retalhos ao longo da linha de quebra.

6.2.3.3 - Implementação da Consideração Para o Lado

Os valores de $z(s)$ nos dois vértices da aresta sobre uma linha de quebra são, por definição, os mesmos para os dois triângulos em lados diferentes desta linha. No entanto, as derivadas parciais na direção da linha de quebra não serão as mesmas para estes triângulos, se as derivadas parciais forem estimadas considerando a linha de quebra.

Desta maneira, a estimativa de derivadas parciais na direção da linha de quebra para os pontos sobre estas linhas deve ser efetuada sem considerar as linhas de quebra.

Na direção perpendicular a uma linha de quebra, as derivadas parciais devem ser diferentes segundo o lado em relação a esta linha considerado. Ou seja, as derivadas parciais na direção perpendicular devem ser calculadas considerando as linhas de quebra.

O procedimento de estimativa de derivadas parciais é o descrito no item 6.2.1.2 e estas derivadas serão utilizadas para definir os coeficientes da superfície sobre o retalho triangular.

A consideração para o lado, apesar de garantir a continuidade C^0 ao longo das linhas de quebra, não fornece uma equação para a definição dos coeficientes da superfície. Isto ocorre porque a equação para o lado considerada é a própria equação da superfície para o lado.

A equação a ser utilizada para a definição dos coeficientes pode ser a Equação 6.6, ou seja a mesma considerada para os lados dos triângulo com continuidade C^1 . O uso desta equação não implica na continuidade C^1 ao longo da linha de quebra, uma vez que esta continuidade é garantida somente para o caso onde as derivadas parciais na direção perpendicular a esta linha são iguais para os dois lados e, para este lado sobre a linha de quebra, as derivadas parciais na direção perpendicular podem ser diferentes.

6.2.3.4 - Determinação dos Coeficientes da Polinomial

Os coeficientes da polinomial da Equação 6.11 são determinados da mesma forma que para os retalhos sem arestas sobre linhas de quebra, ou seja:

- Coeficientes p_{00} , p_{10} , p_{01} , p_{20} , p_{11} e p_{02} a partir das Equações 6.26.
- Coeficientes p_{30} , p_{40} e p_{50} a partir das Equações 6.27.
- Coeficientes p_{03} , p_{04} e p_{05} a partir das Equações 6.28.
- Coeficientes p_{41} e p_{14} a partir das Equações 6.29.
- Coeficientes p_{21} e p_{31} a partir das Equações 6.30.
- Coeficientes p_{12} e p_{13} a partir das Equações 6.31.
- Coeficientes p_{22} , p_{32} e p_{23} a partir das Equações 6.38.

Deve-se ressaltar que os coeficientes são definidos utilizando as derivadas parciais $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_d$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_d$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_d$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_d$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)_d$, se o triângulo está

à direita da linha de quebra, ou utilizando as derivadas parciais $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_e, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_e, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_e, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_e, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)_e$, se o triângulo está à esquerda da linha de

quebra. Estas derivadas são transformadas para o sistema de coordenadas UV segundo o conjunto de Equações 6.10.

CAPÍTULO 7

IMPLEMENTAÇÃO E AVALIAÇÃO DO MÉTODO

O método de ajuste de superfície apresentado no Capítulo 6 está implementado em linguagem de programação orientada a objetos C++, integrado ao sistema de informações geográficas SPRING (INPE, 1995). A implementação integrada a um sistema de informações geográficas permite o uso de dados reais para análise do método, além de permitir a aplicação do procedimento pelos usuários desta ferramenta.

A avaliação do método implementado é feita a partir de dois conjuntos de dados de teste, um gerado a partir de uma função matemática e outro obtido a partir de dados reais da região de Luiziana, Paraná.

A seguir são apresentados alguns detalhes da implementação do método, os conjuntos de dados de avaliação e os resultados obtidos para cada um destes conjuntos.

7.1 - IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO

Os procedimentos implementados podem ser agrupados em geração da triangulação de Delaunay, geração da triangulação Quasi-Delaunay (com a incorporação das linhas características), ajuste de superfície quártica sem considerar as restrições de continuidade das linhas de características e ajuste de superfície quártica considerando estas restrições. Cada um destes grupos é apresentado a seguir.

7.1.1 - Triangulação de Delaunay

A triangulação de Delaunay é gerada através do método apresentado por Namikawa (1994). Este método pode ser classificado como um método de inserção de pontos. Devido a necessidade de eficiência na busca de dados sobre a triangulação, os elementos básicos são armazenados em três estruturas do tipo vetor. Os

pontos, com informações de posição (coordenadas XY) e valor (valor Z), formam um vetor. As arestas, com a informação de ligação entre os pontos formam o segundo vetor e os triângulos, com informação de arestas que formam cada triângulo, formam o terceiro vetor.

O processo de triangulação é efetuado pelos seguintes passos:

- Aquisição de amostras, onde amostras de elevação são inseridas no vetor de pontos e o retângulo envolvente dos dados é determinado.
- Criação de dois triângulos iniciais, no qual o retângulo envolvente das amostras é dividido, formando estes triângulos.
- Inserção de amostras, onde a cada amostra determina-se o triângulo que contém o ponto e este triângulo é modificado, gerando novos triângulos. O triângulo modificado e os novos gerados devem obedecer o critério de Delaunay em relação ao triângulos vizinhos.
- Geração da triangulação de Delaunay, no qual todos os triângulos são testados e modificados, se necessário, para obedecer o critério de Delaunay.

Ao final destes passos, a triangulação de Delaunay sobre os dados de amostra estará pronta.

7.1.2 - Triangulação Quasi-Delaunay

No procedimento de geração da triangulação Quasi-Delaunay, as linhas características, que representam os limites de áreas contínuas, são incorporadas a triangulação de Delaunay obtida no processo do item 7.2.1. A descrição detalhada do procedimento está no item 6.1 do Capítulo 6. O procedimento descrito no Capítulo 6 não define como o valor Z em cada um dos pontos da linha de quebra é determinado. A implementação considera que os valores Z dos pontos sobre linhas de quebra são obtidos pelo ajuste da superfície quártica sobre os triângulos interceptados por estas

linhas. A superfície quáptica aqui utilizada não considera as informações das linhas de quebra.

Outro detalhe de implementação a ser destacado é o processo de separação de triângulos ao longo de uma linha de quebra segundo o lado, direito ou esquerdo. De modo a auxiliar este processo, cada aresta armazena a informação de direção e de triângulos à direita e à esquerda. O seguinte procedimento modifica as arestas para permitir a separação dos triângulos.

- Para toda aresta sobre uma linha de quebra, se esta aresta não aponta para o final desta linha, troque a direção e a informação de triângulos à direita e à esquerda.
- Para toda aresta com um ponto sobre a linha de quebra,
 - Se a aresta está à direita da linha de quebra e aponta para a direção oposta a esta linha, troque a direção e a informação de triângulos à direita e à esquerda.
 - Se a aresta está à esquerda da linha de quebra e aponta para a direção desta linha, troque a direção e a informação de triângulos à direita e à esquerda.

Deste modo, pode-se determinar os triângulos à direita e à esquerda de uma linha de quebra analisando as arestas que compartilham pontos desta linha. Os triângulos à direita são os triângulos à direita das arestas que apontam para o ponto sobre a linha de quebra. De maneira similar, os triângulos à esquerda das arestas que apontam na direção oposta ao ponto sobre a linha de quebra são os triângulos à esquerda desta linha. A Figura 7.1 mostra um exemplo de separação de triângulos.

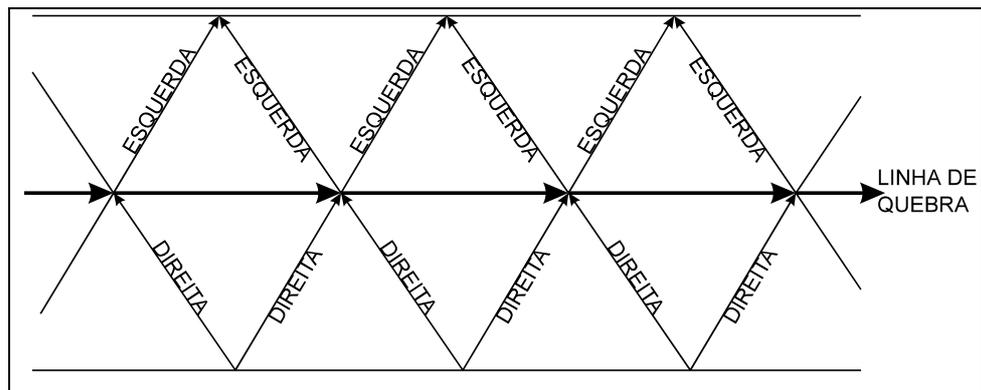


Figura 7. 1 - Exemplo de separação de triângulos.

7.1.3 - Ajuste de Superfícies sem Linhas de Quebra

O ajuste de superfícies para os retalhos triangulares sem arestas sobre as linhas de quebra é efetuado pelo procedimento apresentado no item 6.2.2 do Capítulo 6. As derivadas parciais utilizadas são estimadas pelo procedimento descrito no item 6.2.1.1 do mesmo capítulo 6. O principal ponto a ser destacado sobre a implementação do ajuste é que todas as derivadas parciais de ordem inferior são calculadas inicialmente e, somente a seguir, as de segunda ordem. Outro ponto a ser destacado é que o vetor soma dos vetores normais é ponderado em relação à área do triângulo considerado.

7.1.4 - Ajuste de Superfícies com Linhas de Quebra

O ajuste de superfícies para os retalhos triangulares com arestas sobre as linhas de quebra é efetuado por um procedimento apresentado no item 6.2.3 do Capítulo 6. As derivadas parciais utilizadas são estimadas pelo procedimento descrito no item 6.2.1.2 do mesmo Capítulo 6. Os pontos destacados no item anterior são utilizados na implementação da estimativa de derivadas parciais.

7.2 - AVALIAÇÃO DO MÉTODO

A avaliação do método utiliza dois conjuntos de dados. O primeiro conjunto é obtido a partir de uma função matemática e o segundo é correspondente a uma área real. A área real foi escolhida devido a disponibilidade de uma grade regular de valores. Estes conjuntos de dados permitem obter uma grade regular retangular diretamente sem operações intermediárias. A grade regular diretamente obtida é considerada padrão e, em relação a esta grade, cada uma das grades regulares geradas por diferentes métodos é comparada.

Um subconjunto de 1000 amostras é selecionado aleatoriamente para cada um dos conjuntos de dados. O subconjunto de dados é utilizado para gerar duas grades irregulares triangulares. A primeira grade triangular gerada é obtida com a triangulação de Delaunay, não considerando as linhas de quebra. A outra grade é obtida pela triangulação Quasi-Delaunay, incorporando as linhas de quebra e as restrições a triangulação impostas por estas linhas.

Para a grade triangular com triangulação de Delaunay, duas grades regulares retangulares são geradas com o uso de ajuste de superfície a cada retalho triangular. A primeira grade regular utiliza o ajuste de um plano, como apresentado no Capítulo 4, item 4.1, e a segunda utiliza a superfície quártica, apresentada no Capítulo 6, item 6.2.2.

Sobre a grade triangular com triangulação Quasi-Delaunay, que considera as restrições das linhas de quebra, três grades regulares são geradas, com o uso de ajuste de superfície a cada retalho triangular. As duas primeiras grades regulares são as mesmas da grade triangular anterior. A terceira grade regular utiliza o ajuste de superfície quártica que considera as restrições de continuidade ao longo das linhas de quebra, como apresentado no Capítulo 6, item 6.2.3. A Tabela 7.1 identifica cada uma das grades regulares geradas para as duas triangulações.

TABELA 7.1 - GRADES REGULARES GERADAS

Grade Regular	Grade Triangular	Superfície Ajustada	Continuidade nas Linhas de Quebra
Linear sem Quebra	Delaunay	Plana	C^0
Quíntica sem Quebra	Delaunay	Polinomial Quíntica	C^1
Linear com Quebra	Quasi-Delaunay	Plana	C^0
Quíntica C^1 com Quebra	Quasi-Delaunay	Polinomial Quíntica	C^1
Quíntica com Quebra	Quasi-Delaunay	Polinomial Quíntica	C^0

Nas seções seguintes, as grades regulares obtidas com ajuste de superfície e triangulação de Delaunay e triangulação Quasi-Delaunay serão chamadas, para simplificação, pelos nomes das grades apresentadas na Tabela 7.1.

Para cada uma das grades regulares obtidas, uma comparação com a grade regular padrão é efetuada. O procedimento de comparação consta da geração de uma nova grade regular com a diferença absoluta em porcentagem entre a grade regular gerada e a padrão e a atribuição de cores a cada fatia de erro. A atribuição de cores permite visualizar melhor as áreas de ocorrência de erros e relacioná-las as linhas de quebra. As seguintes fatias foram utilizadas:

- 1^a fatia - 0% a 0,6%
- 2^a fatia - 0,6% a 1,5%
- 3^a fatia - 1,5% a 2,7%
- 4^a fatia - 2,7% a 4,2%
- 5^a fatia - acima de 4,2%

Estas fatias foram determinadas considerando a média entre os erros médios como sendo 0,6%. Por haver interesse maior nas áreas de maior erro, as faixas acima da média foram destacadas.

Cada conjunto de dados é apresentado a seguir, com comparações entre as grades regulares obtidas com o uso das grades triangulares geradas sobre o conjunto amostrado de 1000 pontos e a grade regular padrão, utilizando a diferença percentual entre estas grades.

7.2.1 - Grade Obtida a Partir de Função Matemática

A função matemática utilizada para testar o método tem uma quebra de continuidade na direção do eixo Y . A superfície é gerada a partir de:

$$z(x,y) = \begin{cases} (1-x)^2 + \frac{y}{2}, & 0 \leq x < 0.5 \\ x^2 + \frac{y}{2}, & 0.5 \leq x < 1 \end{cases}$$

A partir desta equação, uma grade regular de 251 linhas por 251 colunas é gerada, com a primeira linha correspondendo ao valor $y=1$, a última linha a $y=0$, a primeira coluna a $x=0$ e a última coluna a $x=1$. Esta grade regular é considerada a grade com valores verdadeiros (grade regular padrão) a ser comparada com as outras grades geradas utilizando grades irregulares triangulares. A Figura 7.2 apresenta a grade padrão em projeção perspectiva.



Figura 7.2 - Grade padrão da função matemática em projeção perspectiva.

A grade irregular triangular obtida com a triangulação de Delaunay sem considerar a linha de quebra é formada por 1987 triângulos e a grade triangular com triangulação Quasi-Delaunay é formada por 2121 triângulos.

A Figura 7.3 apresenta um detalhe de uma área sobre as duas triangulações geradas. Na Figura 7.3a a triangulação Delaunay é apresentada, com as arestas dos triângulos apresentadas em cinza e a linha de quebra em preto, enquanto na Figura 7.3b a triangulação Quasi-Delaunay é apresentada. Esta figura permite verificar as diferenças entre as duas triangulações.

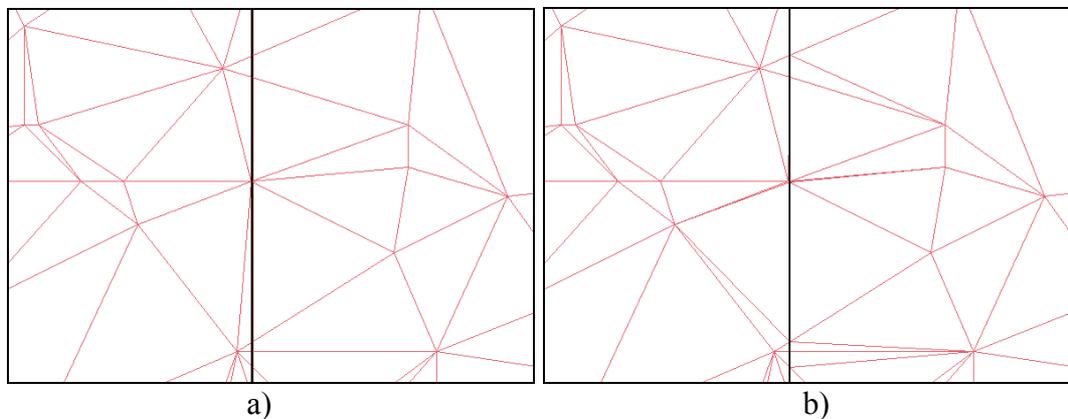


Fig. 7.3 - Detalhe da triangulação: a) Delaunay; b) Quasi-Delaunay.

Cinco diferentes grades regulares foram obtidas a partir destas duas triangulações. Da grade triangular gerada com triangulação de Delaunay, duas grades regulares foram obtidas e, a partir da grade triangular utilizando a triangulação Quasi-Delaunay, três grades regulares foram geradas. Cada uma destas grades é apresentada a seguir.

7.2.1.1 - Grade Regular Linear sem Quebra

A primeira grade regular é obtida considerando um plano ajustado a cada retalho da triangulação de Delaunay. A Figura 7.4 apresenta a comparação desta grade com a grade regular padrão por meio da diferença absoluta em porcentagem entre elas fatiada.

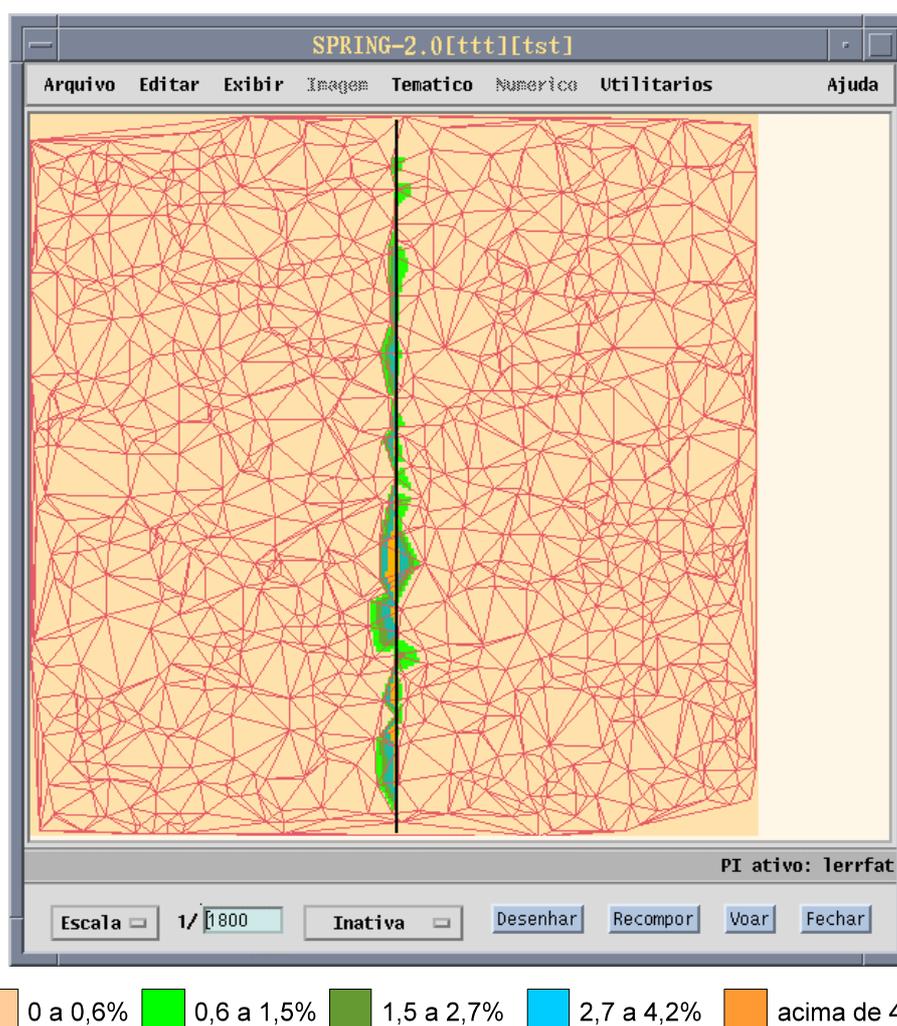


Fig. 7.4 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular linear sem quebra para a função matemática.

7.2.1.2 - Grade Regular Quíntica sem Quebra

A segunda grade regular, obtida considerando uma superfície quíntica ajustada a cada retalho da triangulação de Delaunay, foi comparada com a grade regular padrão e uma nova grade regular com a diferença absoluta em porcentagem entre as duas grades foi obtida. Esta grade é apresentada na Figura 7.5.

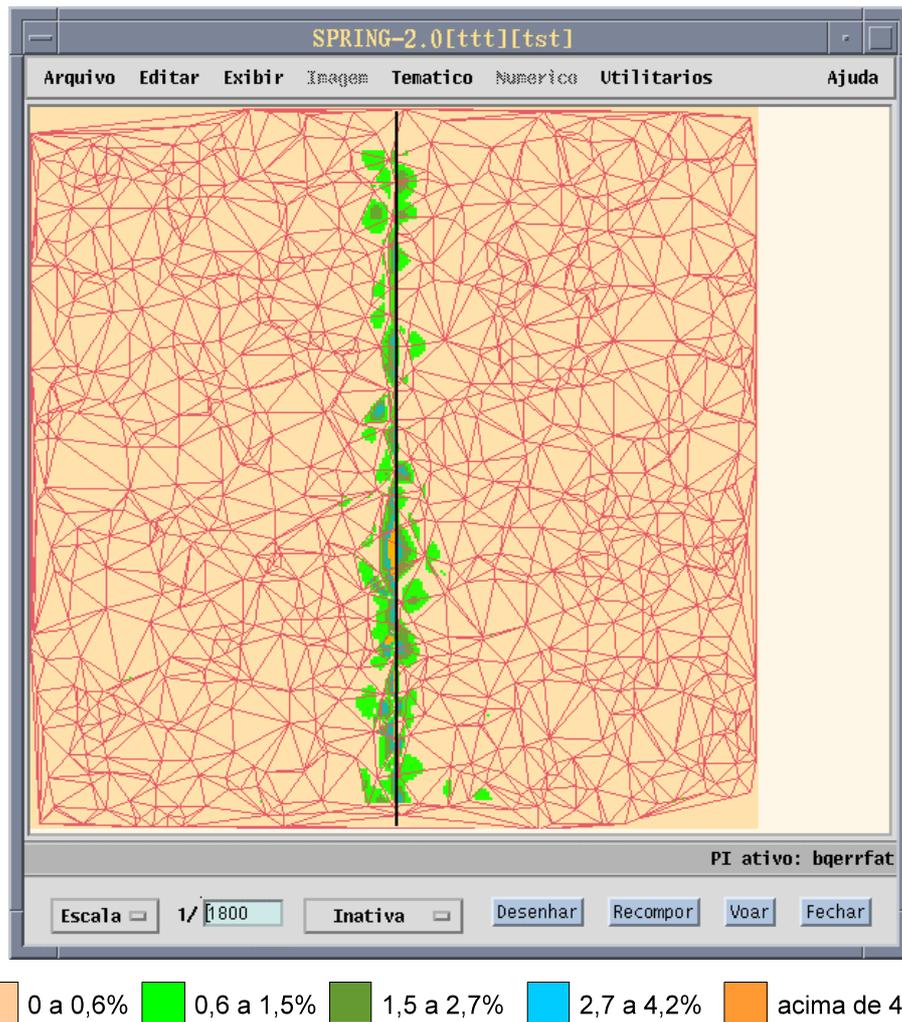


Fig. 7.5 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular quántica sem quebra para a função matemática.

7.2.1.3 - Grade Regular Linear com Quebra

A partir da grade triangular gerada considerando as restrições, uma grade regular considerando um plano ajustado a cada retalho triangular foi gerada e comparada com a grade padrão. A grade regular com a diferença absoluta em porcentagem entre as duas grades é apresentada na Figura 7.6.

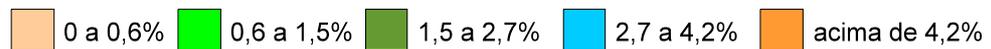
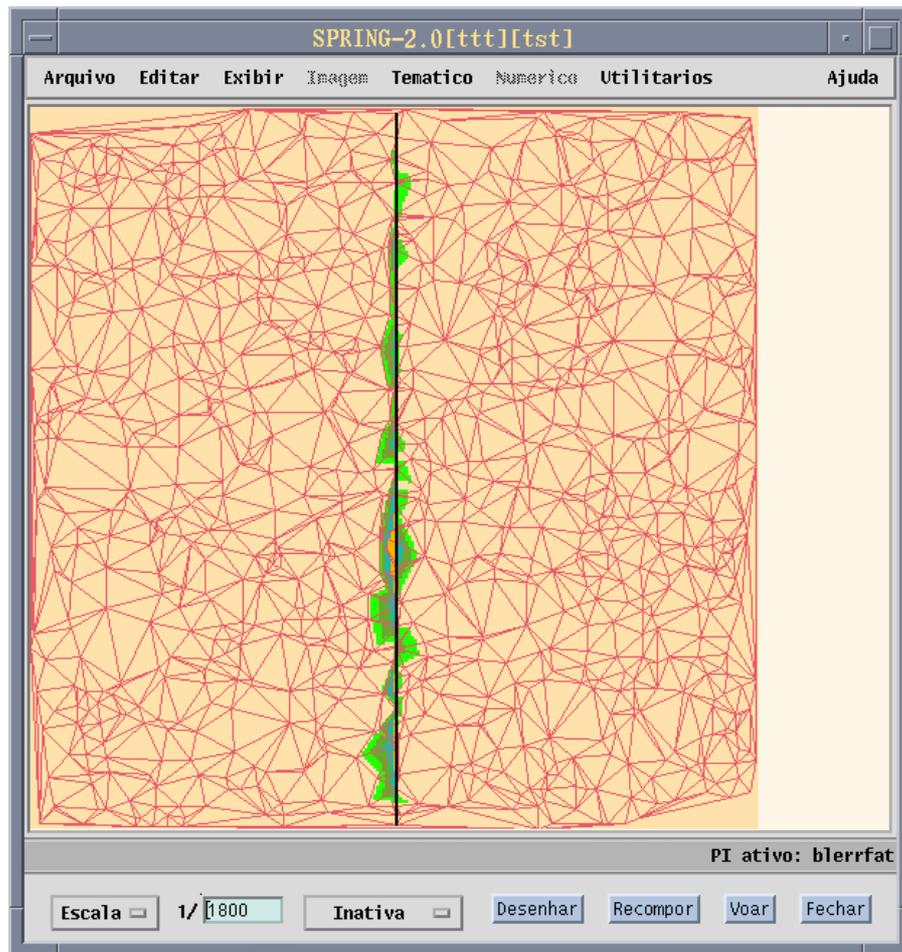


Fig. 7.6 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular linear com quebra para a função matemática.

7.2.1.4 - Grade Regular Quíntica C^1 com Quebra

Outra grade regular utilizando a triangulação Quasi-Delaunay foi obtida considerando uma superfície quíntica ajustada a cada retalho. O ajuste não considera a quebra de continuidade ao longo das restrições. A comparação entre a grade gerada e a padrão é apresentada na Figura 7.7.

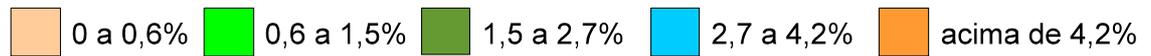
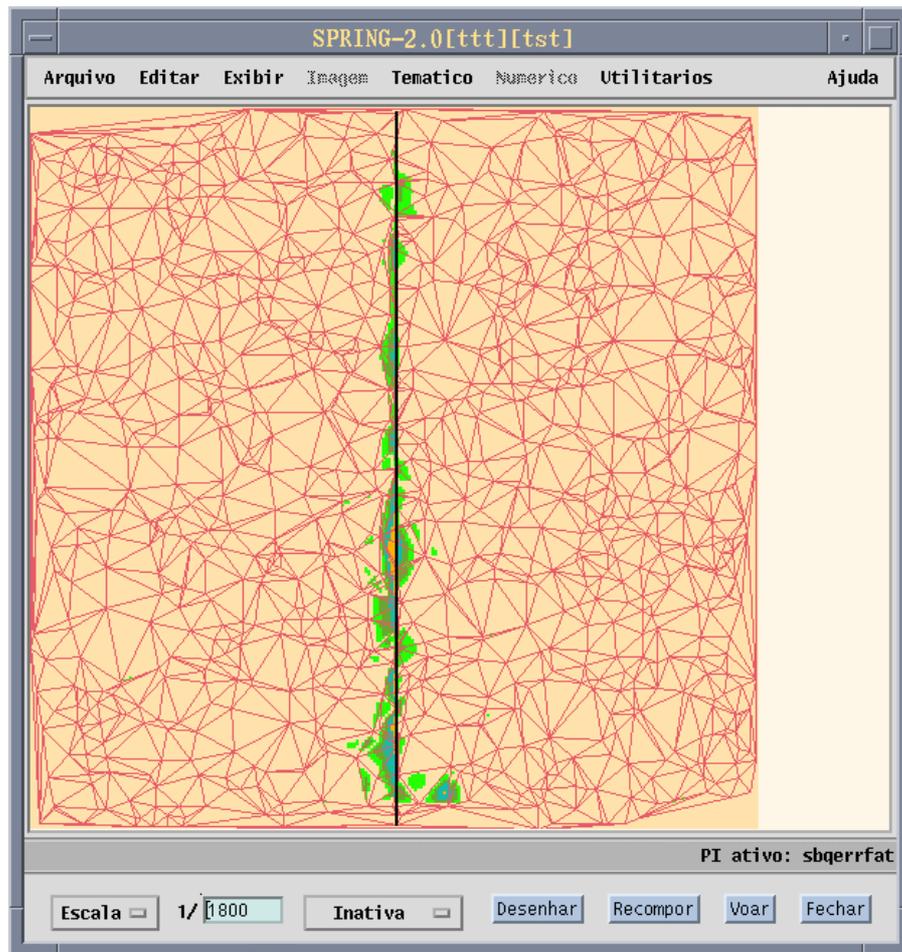


Fig. 7.7 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular quántica com quebra e continuidade C^1 para a função matemática.

7.2.1.5 - Grade Regular Quántica com Quebra

A última grade regular foi obtida com uma superfície quántica ajustada a cada retalho triangular. O ajuste considera a quebra de continuidade ao longo das restrições e esta grade foi comparada com a grade padrão. A grade com a diferença absoluta em porcentagem entre as duas grades é apresentada na Figura 7.8.

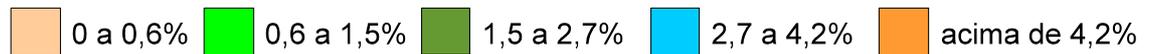
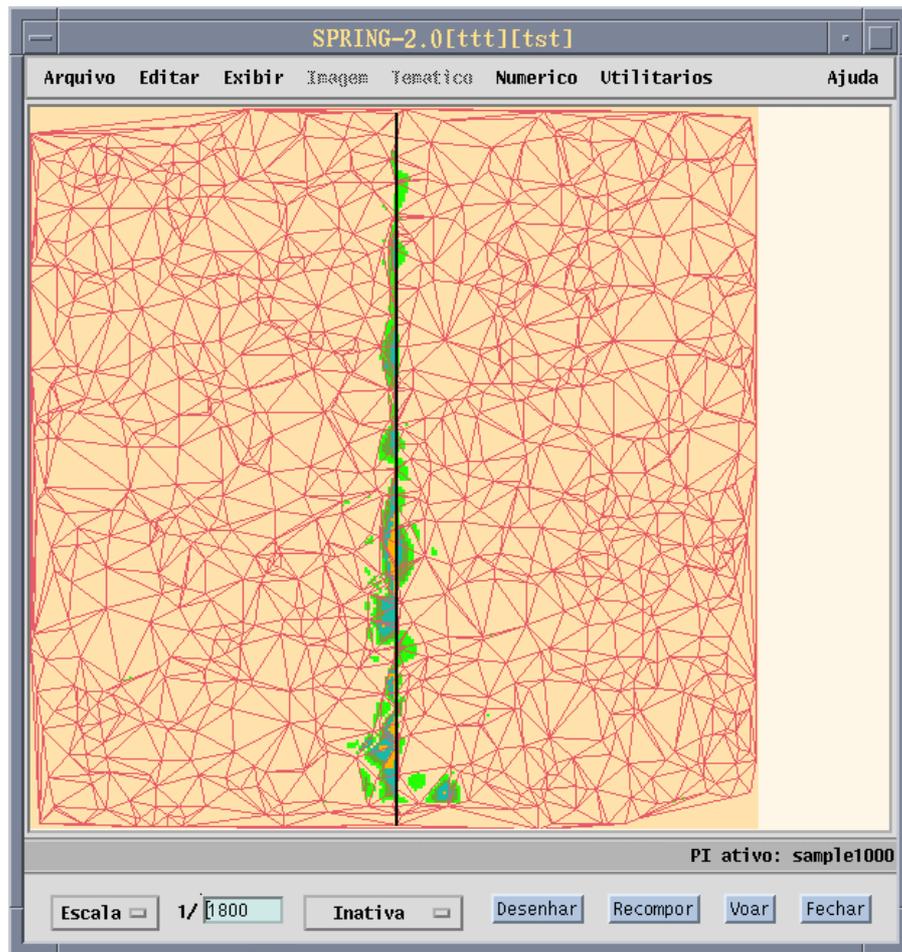


Fig. 7.8 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular quintica com quebra para a função matemática.

7.2.1.6 - Análise das Grades Regulares Obtidas

As áreas próximas as linhas de quebra devem ser as regiões onde ocorrem os maiores erros entre as grades regulares geradas pelos diferentes procedimentos e a grade padrão. Nas Figuras 7.4, 7.5, 7.6, 7.7 e 7.8 este fato pode ser comprovado, com as faixas de erros percentuais acima de 0,6% ocorrendo em sua maioria nos triângulos com vértices sobre a linha de quebra (apresentada em preto) ou nos triângulos vizinhos aos anteriores.

A Figura 7.9 apresenta um detalhe de cada uma das grades de diferenças fatiadas.

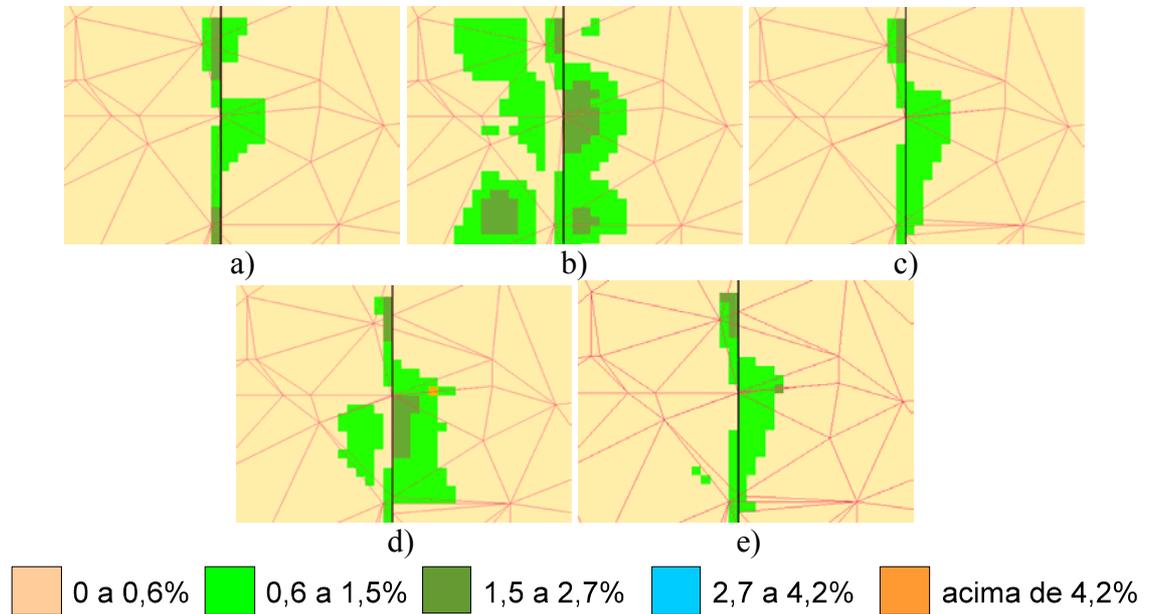


Fig. 7.9 - Detalhe dos erros percentuais para cada grade regular gerada: a) Linear sem quebra; b) Quintico sem quebra; c) Linear com quebra; d) Quintico C^1 com quebra; e) Quintico com quebra.

A análise visual das grades de diferenças percentuais na Figura 7.9 permite verificar que as menores diferenças ocorrem na grade linear sem quebra e na grade linear com quebra. Este resultado ocorre uma vez que a função matemática utilizada é de grau 2, que permite ser aproximada por uma função linear.

Na comparação entre as grades regulares geradas com o uso das superfícies quinticas, pode-se perceber a importância das linhas características. A grade regular obtida com a triangulação Delaunay sem o uso destas linhas de restrição apresenta o pior resultado.

Dentre as grades regulares obtidas com a triangulação Quasi-Delaunay, a quintica C^1 tem resultados um pouco melhores que os da grade gerada utilizando a superfície quintica com restrição de continuidade. No detalhe da Figura 7.9 uma região onde a grade regular quintica com quebra se comporta melhor está destacada.

Os seguintes fatores determinam um melhor comportamento do ajuste de superfície quártica com continuidade C^1 ao longo das linhas características:

- O processo de amostragem aleatório sobre o conjunto de dados original não permite a caracterização precisa da quebra de continuidade.
- A quebra de continuidade da função de grau 2 não é suficientemente marcante para necessitar da superfície quártica que modela esta quebra.

7.2.2 - Grade Correspondente a Uma Área Real

Uma grade regular com resolução entre linhas e colunas da grade de 7,5 metros e 251 linhas por 251 colunas correspondente a uma área real é utilizada como sendo o outro conjunto de dados para o teste do procedimento proposto. Esta grade foi obtida a partir de fotografias aéreas, processadas por meio de um aparelho restituidor WILD A7 com um registrador de coordenadas triaxial acoplado e é utilizada por Leite (1995). A área coberta pelas fotos aéreas na escala de 1:25000 são relativas a parte do mapa MI-2803/3 de Luiziana, no estado do Paraná. As coordenadas envolventes da área em coordenadas geográficas são $52^{\circ} 19' 30,5''$ oeste, $24^{\circ} 26' 4,1''$ sul e $52^{\circ} 18' 23,1''$ oeste, $24^{\circ} 25' 2,4''$ sul.

A Figura 7.10 apresenta uma projeção em perspectiva da grade correspondente a área de Luiziana.

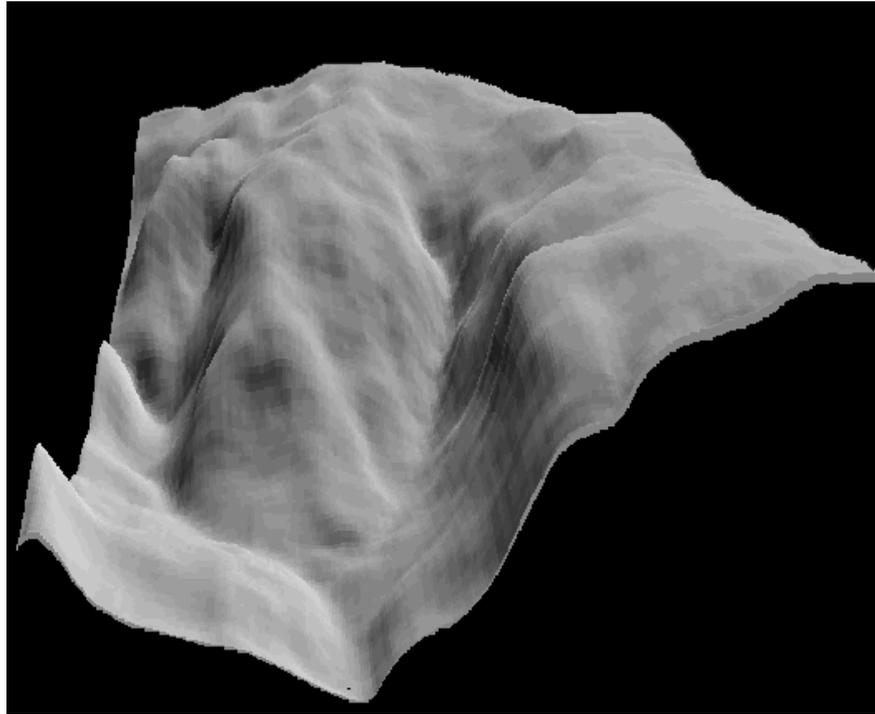


Figura 7.10 - Projeção em perspectiva da grade correspondente a área de Luiziana

Para a comparação com o dado real representado pela grade descrita acima, grades regulares são geradas a partir de um conjunto de 1000 amostras do dado real. O conjunto de amostras é triangularizado inicialmente, obtendo uma grade com triangulação de Delaunay.

Para o teste do procedimento que considera linhas características, estas linhas são introduzidas através da digitalização da drenagem disponível no mapa. Com estas linhas e o conjunto de amostras da grade real a triangulação Quasi-Delaunay é gerada.

A partir destas duas grades triangulares as mesmas grades regulares do conjunto de dados anterior são geradas. Estas grades são apresentadas e analisadas a seguir.

7.2.2.1 - Grade Regular Linear sem Quebra

Na Figura 7.11, a grade regular obtida considerando um plano ajustado a cada retalho triangular da triangulação de Delaunay é comparada com a grade regular padrão por meio da diferença absoluta em porcentagem entre as grades. A linha de quebra está realçada em preto.

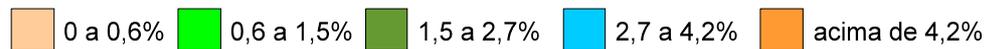
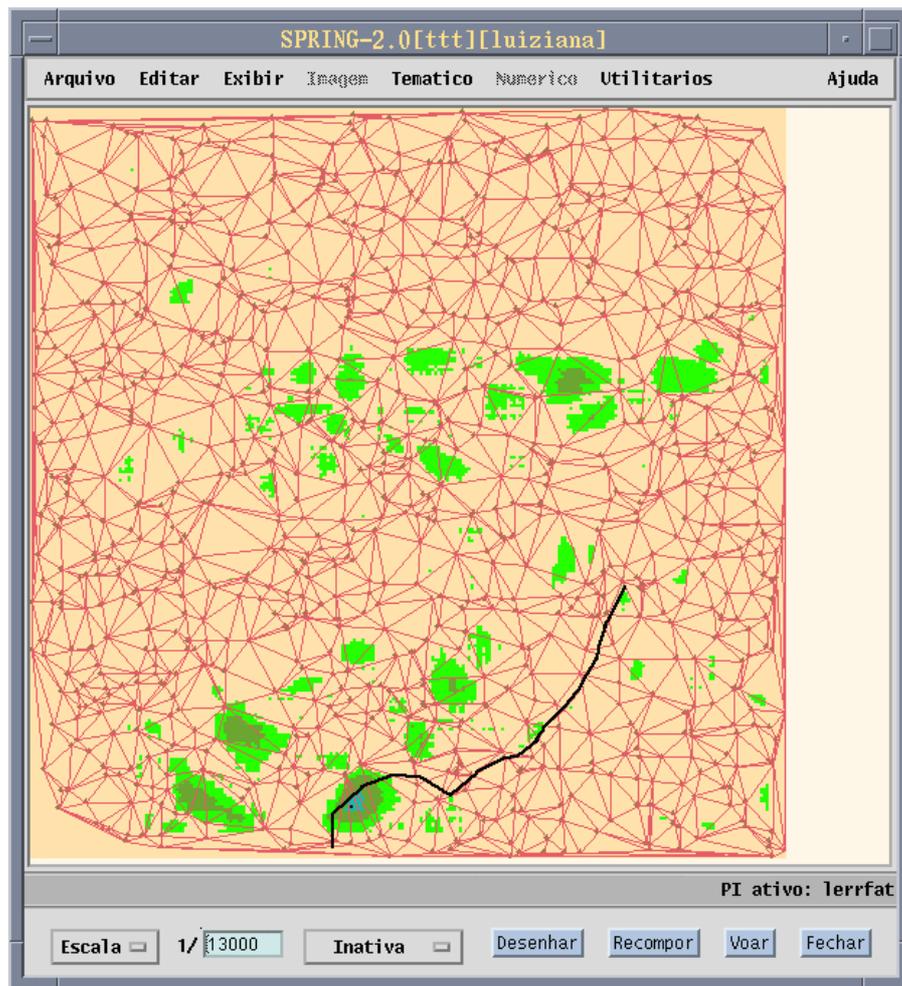


Fig. 7.11 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular linear sem quebra para a área real.

7.2.2.2 - Grade Regular Quíntica sem Quebra

A segunda grade regular, obtida considerando uma superfície quíntica ajustada a cada retalho da triangulação de Delaunay, foi comparada com a grade regular padrão e uma nova grade regular com a diferença absoluta em porcentagem entre as duas grades foi obtida. Esta grade é apresentada na Figura 7.12, com a linha de quebra em preto.

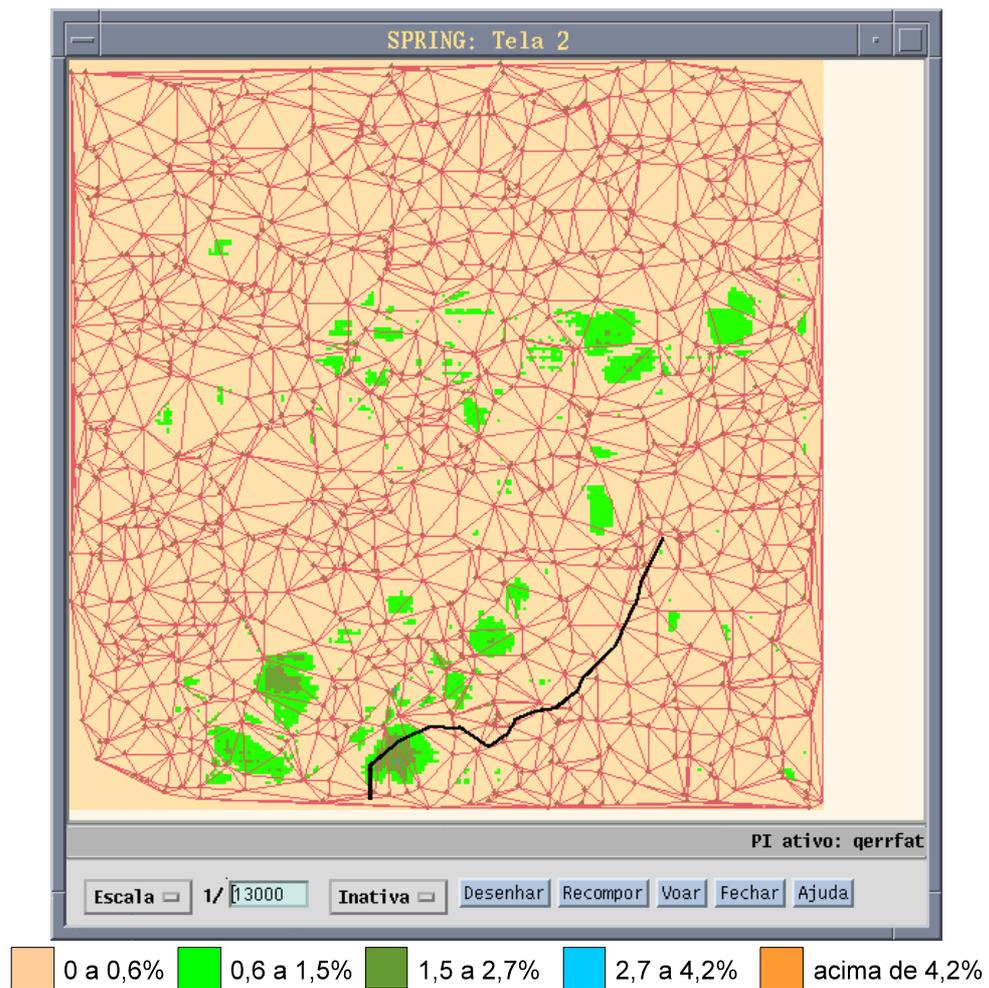


Fig. 7.12 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular quíntica sem quebra para a área real.

7.2.2.3 - Grade Regular Linear com Quebra

A partir da grade triangular gerada considerando as restrições, uma grade regular considerando um plano ajustado a cada retalho triangular foi gerada e comparada com a grade padrão. A grade regular com a diferença absoluta em porcentagem entre as duas grades é apresentada na Figura 7.13, onde as restrições estão em preto.

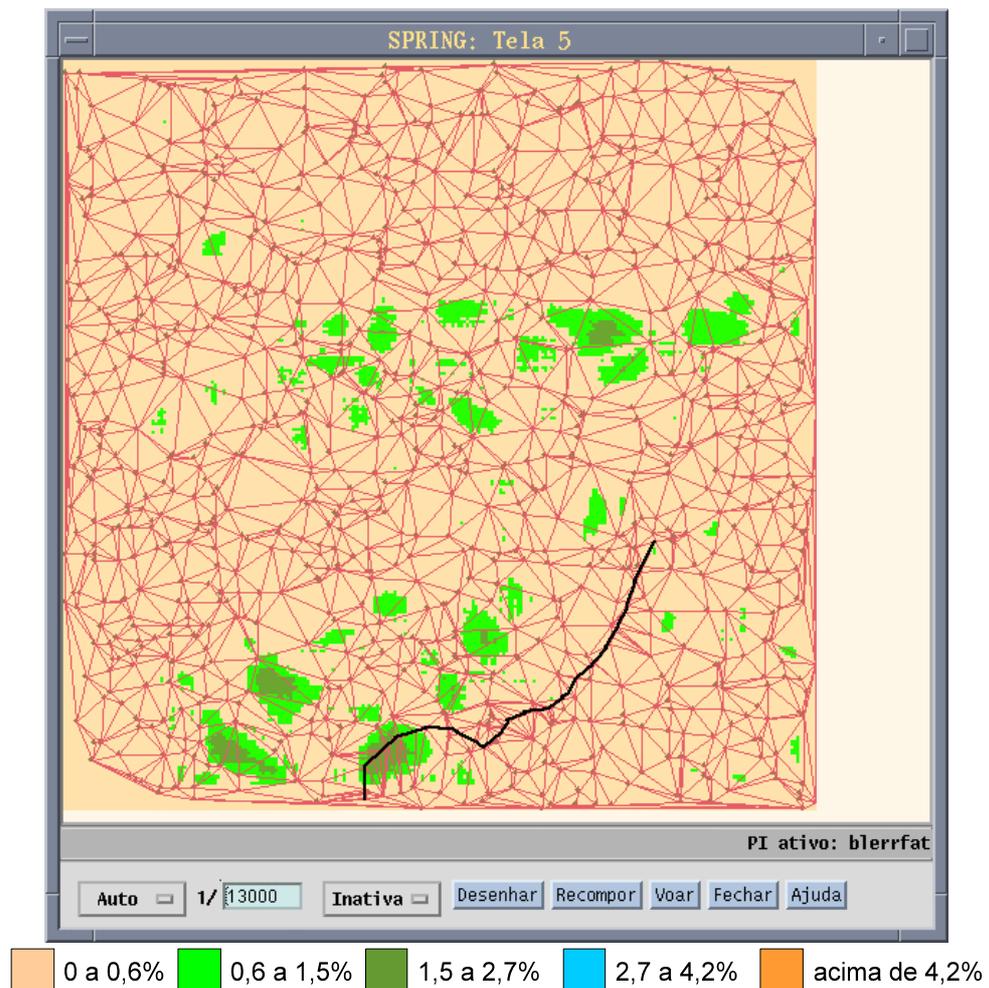


Fig. 7.13 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular linear com quebra para a área real.

7.2.2.4 - Grade Regular Quíntica C^1 com Quebra

Outra grade regular utilizando a triangulação Quasi-Delaunay foi obtida considerando uma superfície quíntica ajustada a cada retalho. O ajuste não considera a quebra de continuidade ao longo das restrições. A comparação entre a grade gerada e a padrão é apresentada na Figura 7.14. As linhas de restrição estão em preto na figura.

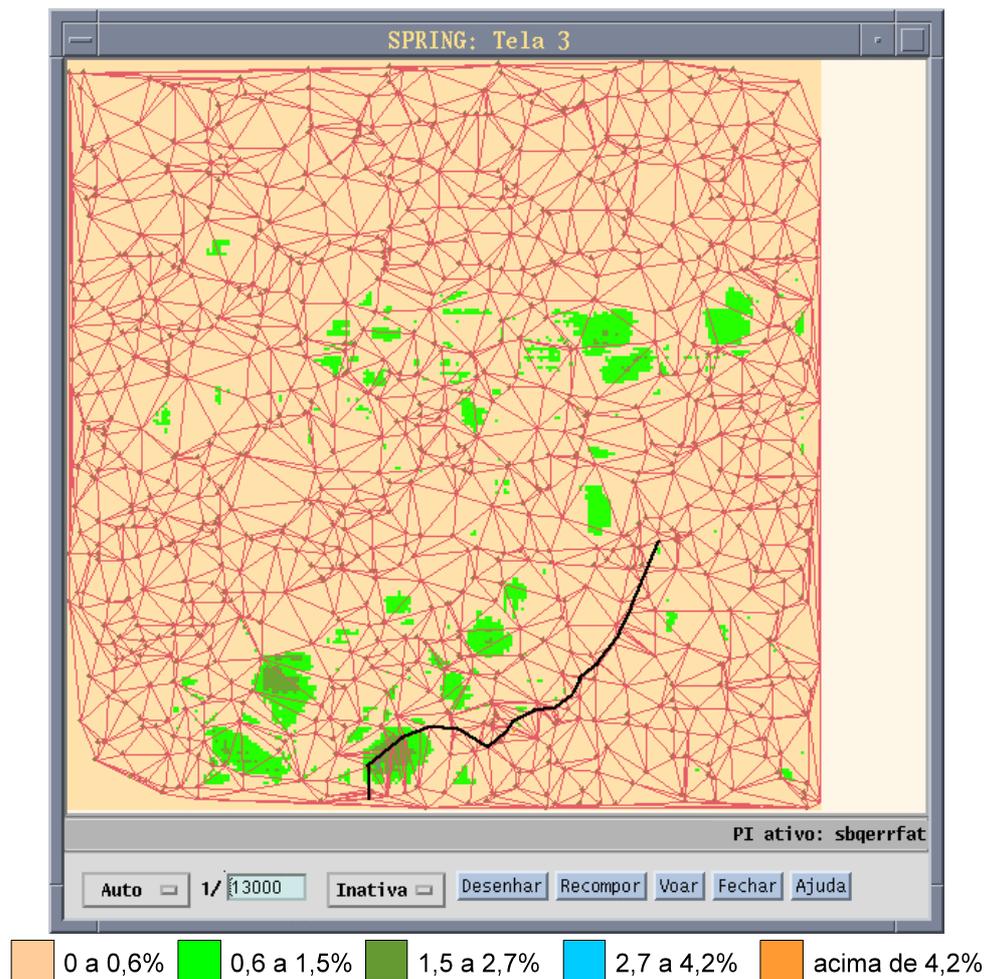


Fig. 7.14 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular quíntica com quebra e continuidade C^1 para a área real.

7.2.2.5 - Grade Regular Quíntica com Quebra

A última grade regular foi obtida com uma superfície quíntica ajustada a cada retalho triangular. O ajuste considera a quebra de continuidade ao longo

das restrições e esta grade foi comparada com a grade padrão. A grade com a diferença absoluta em porcentagem entre as duas grades é apresentada na Figura 7.15, onde a linha de restrição está em preto.

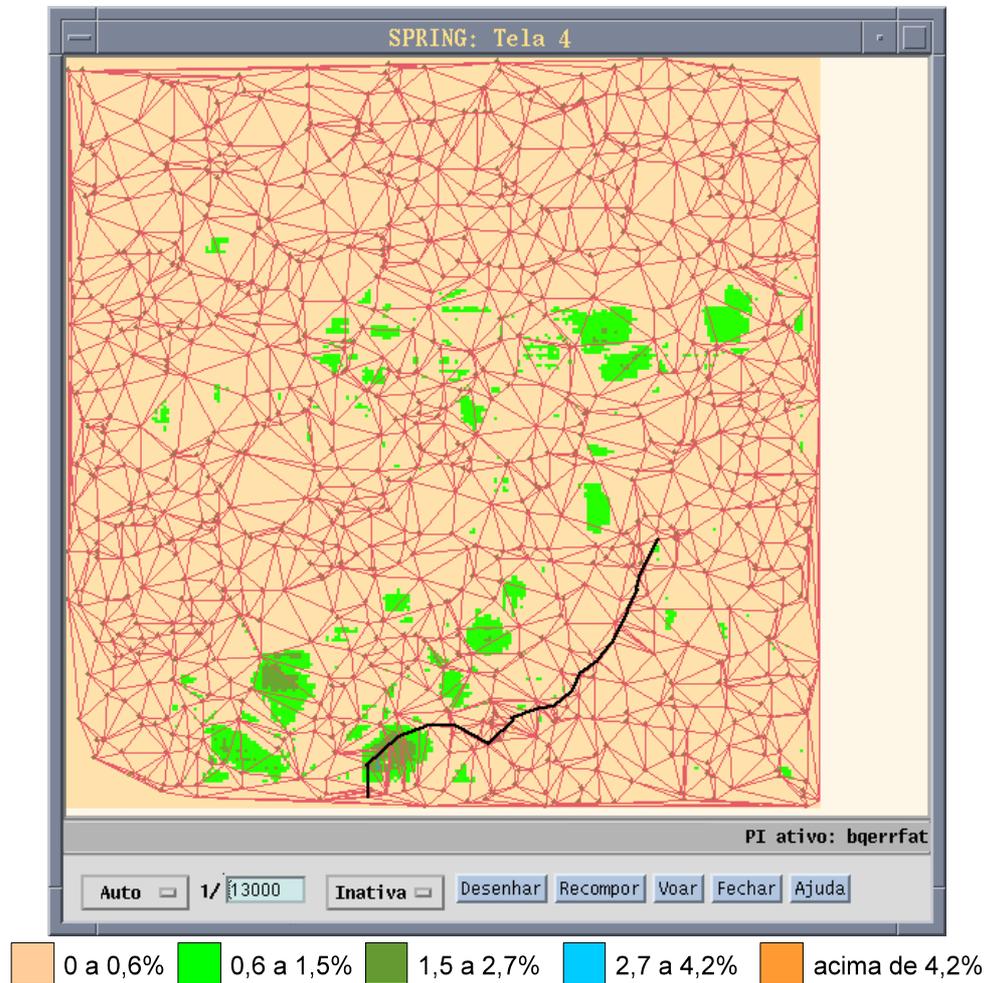


Fig. 7.15 - Diferença absoluta fatiada entre a grade padrão e a grade regular quántica com quebra para a área real.

7.2.2.6 - Análise das Grades Regulares Obtidas

Os erros percentuais acima de 0,6 ocorrem para a área analisada nas porções com poucas amostras onde, por conseqüência, os triângulos são maiores. Ao longo da linha de quebra representada pela drenagem ocorrem algumas regiões com erro acima de 0,6%, com destaque para uma grande área de erro acima deste valor. Esta

área está ampliada e os erros percentuais fatiados de cada uma das grades regulares está apresentada na Figura 7.16.

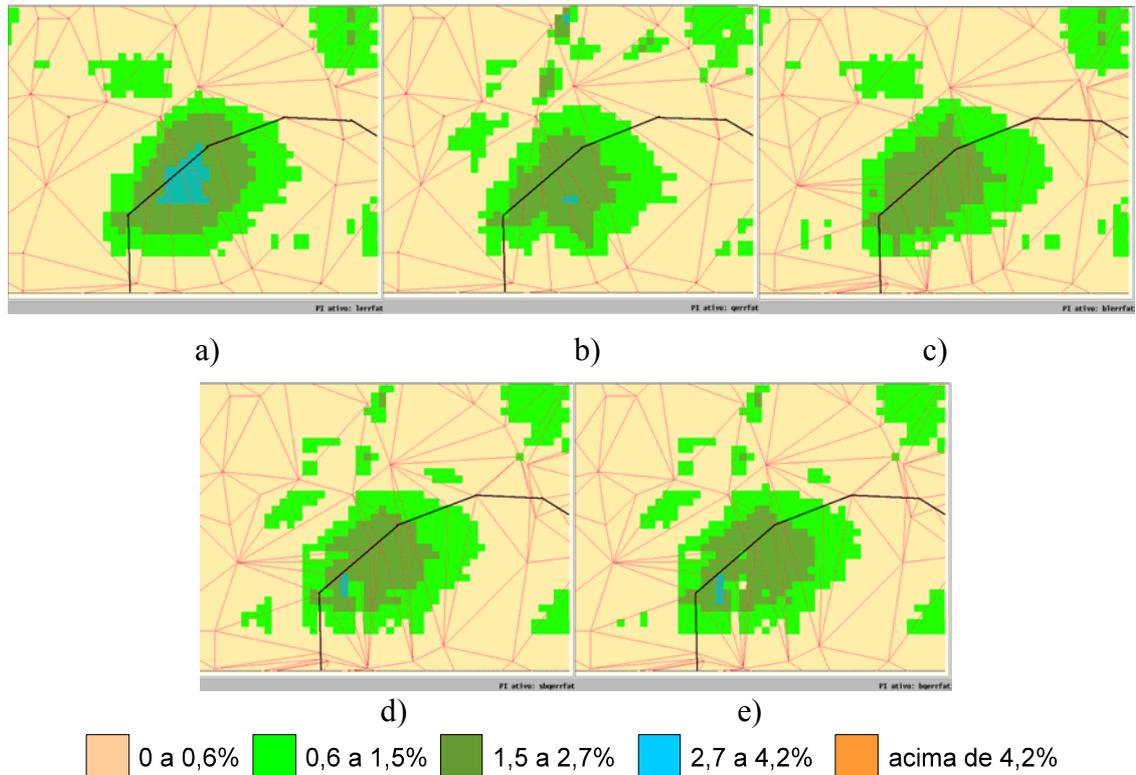


Fig. 7.16 - Detalhe dos erros percentuais para cada grade regular gerada: a) Linear sem quebra; b) Quintico sem quebra; c) Linear com quebra; d) Quintico C^1 com quebra; e) Quintico com quebra.

A análise visual das grades de diferenças percentuais nesta área permite verificar que os maiores erros ocorrem nas grades que utilizam o ajuste de superfície plana. Este primeiro resultado é o oposto do obtido para o primeiro conjunto de dados, reforçando o conceito de que a modelagem de terreno necessita de ajuste de superfícies diferentes de planos.

Entre as grades lineares, a linear com quebra obtém um resultado melhor em comparação a linear sem quebra por utilizar nos vértices das arestas sobre uma linha de quebra o valor de Z obtido por meio do ajuste de superfície quintica.

As grades geradas utilizando ajuste de superfície quintica apresentam resultados muito próximos. A Tabela 7.2 fornece o número de células de

cada faixa de valor de erro, nos triângulos da área apresentada em detalhe que tocam a linha de quebra, sobre a qual se pode efetuar uma análise quantitativa.

TABELA 7.2 - NÚMERO DE CÉLULAS PARA CADA FAIXA DE ERRO.

GRADE REGULAR	FAIXAS DE ERRO			TOTAL ACIMA DE 0,6%
	0,6 a 1,5%	1,5 a 2,7%	2,7 a 4,2%	
Linear sem Quebra	184	168	37	369
Quíntica sem Quebra	201	131	2	334
Linear com Quebra	204	154	0	358
Quíntica C ¹ com Quebra	205	126	3	334
Quíntica com Quebra	201	135	4	340

Na análise das três grades regulares utilizando superfície quántica, verifica-se que existe uma diferença muito pequena no desempenho entre estas grades. A grade regular gerada considerando o ajuste de superfície quántica de continuidade C¹ para todos os retalhos triangulares, da triangulação Quasi-Delaunay apresenta uma pequena vantagem, seguida da quántica sem quebra e da grade quántica com quebra.

Para comparar as duas grades regulares geradas utilizando superfície quántica e triangulação Quasi-Delaunay, foi efetuado um levantamento de triângulos para os quais uma grade é melhor do que outra. Neste levantamento os triângulos da área estudada com pelo menos um vértice sobre a linha de quebra foram numerados de 1 a 25, como mostra a Figura 7.17.

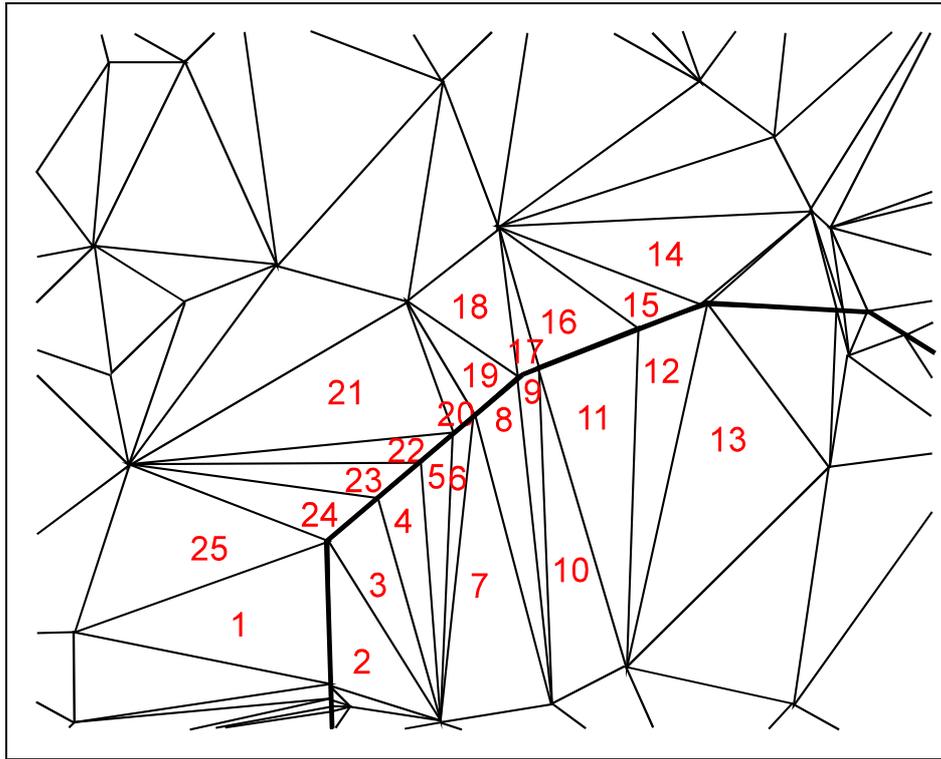


Fig. 7.17 - Numeração dos triângulos com algum vértice sobre linha de quebra.

Neste estudo constatou-se que 4 triângulos obtêm melhores resultados na grade quártica com quebra, 10 são melhores na grade quártica C^1 com quebra e 10 triângulos obtêm o mesmo comportamento.

A análise qualitativa do método proposto pode ser baseada na Figura 7.18, na qual a região destacada é apresentada em projeção perspectiva, para a grade padrão, grade linear sem quebra e grade quártica com quebra.

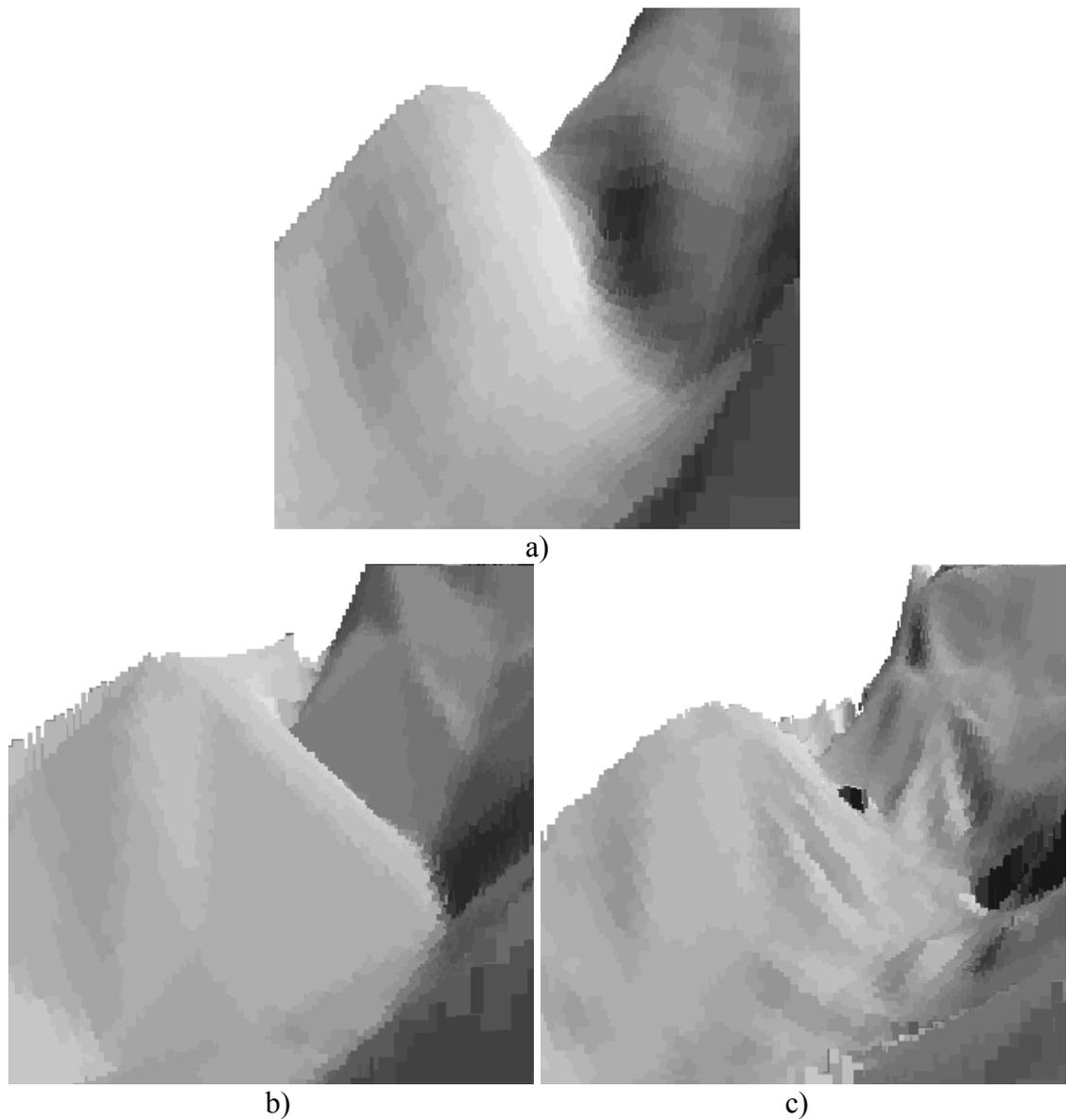


Fig. 7.18 - Projeção em perspectiva da região destacada para as grades: a) Padrão; b) Linear sem quebra; c) Quíntica com quebra.

Pode-se notar na visualização da região em perspectiva que a grade quártica com quebra, obtida a partir do método proposto, reproduz melhor o comportamento da grade padrão do que a grade linear sem quebra.

Os seguintes fatores determinam o comportamento apresentado pelas grades regulares geradas para a área real, na região apresentada em detalhe:

- A região encontra-se na borda da área, dificultando a estimativa de derivadas parciais nos vértices dos triângulos sobre a linha de quebra.
- A superfície quártica contínua em todos os triângulos obtém um resultado melhor por utilizar um número maior de triângulos na estimativa das derivadas parciais.
- A mesma superfície obtém melhor resultado em relação à quártica sem quebra por utilizar a informação adicional da linha de quebra.
- A superfície quártica com quebra de continuidade ao longo das linhas de quebra não obtém um resultado melhor uma vez que a tendência de quebra de continuidade não pôde ser obtida a partir das amostras selecionadas aleatoriamente. Nos triângulos onde a tendência pôde ser detectada, a grade apresenta um resultado melhor do que a grade com continuidade C^1 . Este comportamento ocorre nos triângulos 1, 14 e 25 da Figura 7.17.

Os resultados aqui apresentados não invalidam a metodologia proposta devido aos fatores apresentados. No capítulo seguinte, são propostas algumas modificações nos procedimentos e na utilização do método proposto para que se possa aproveitar as vantagens oferecidas por ele.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES

Esta dissertação apresentou um método que permite utilizar as informações adicionais das linhas características na geração de modelos de terreno realísticos. As linhas características são linhas sobre o terreno ao longo das quais ocorrem descontinuidades entre as superfícies em lados opostos em relação a estas linhas. Este método utiliza as linhas características para modificar a triangulação de Delaunay, criando uma triangulação denominada Quasi-Delaunay. Esta nova triangulação possibilita o ajuste de superfícies mais apropriadas a cada retalho triangular.

A superfície a ser ajustada em cada retalho da triangulação depende da relação entre o retalho e a linha característica para o método apresentado. Para o retalho que não toca uma linha característica, a superfície ajustada é uma polinomial quártica com continuidade C^1 em relação aos retalhos vizinhos. Se o retalho toca uma linha característica, uma polinomial quártica com continuidade C^0 em relação a superfície do retalho no lado oposto da linha de quebra é ajustada.

A construção da triangulação de Delaunay no método implementado utiliza um algoritmo de construção por inserção. O desempenho do método de inserção é dependente do processo de busca do triângulo onde a inserção deve ser efetuada. A implementação executa a busca em todos os triângulos existentes, mas em ordem inversa a que foram criados, ou seja, os últimos triângulos são os primeiros a serem pesquisados. Esta solução é eficiente, mas outros métodos de busca devem ser testados e comparados com a solução implementada.

Sobre a triangulação de Delaunay, as linhas características são inseridas neste método considerando-se apenas os valores XY dos pontos da linha. A definição dos valores Z de cada ponto inserido é efetuada através do ajuste de uma

superfície quântica de continuidade C^1 sobre o triângulo que contém o ponto. Outro processo de definição dos valores Z pode ser utilizado, se os dados de amostra para construir a triangulação são isolinhas. Para este caso, valores Z podem ser estimados sobre a linha característica considerando as intersecções entre esta linha e as isolinhas.

O ajuste de superfície utiliza uma polinomial de 5^o grau descrita por Akima (1978) que se mostrou adequada para a modelagem de terrenos. Sobre o método original foram efetuadas alterações na estimativa das derivadas parciais, uma vez que o método considerava apenas um número fixo de pontos mais próximos. A solução implementada utiliza todos os triângulos que compartilham o ponto e pondera pelo tamanho de cada um destes triângulos.

A solução encontrada para o problema de ajuste de superfícies ao longo das linhas de quebra utiliza uma modificação na estimativa das derivadas parciais. Esta solução permite o uso do mesmo ajuste em todos os outros retalhos, diferenciando os retalhos somente pelos valores de derivadas parciais.

O fato de não se obter o melhor resultado com o emprego do método proposto pode ser creditado aos procedimentos de teste e aos conjuntos de dados utilizados. A amostragem aleatória de pontos sobre a grade padrão não foi suficiente para permitir uma boa estimativa das derivadas parciais. Uma amostragem seletiva, onde o número de amostras de cada região é proporcional à variação no valor de elevação da superfície nesta região, permitiria uma melhor estimativa destas derivadas parciais. No entanto, este procedimento de seleção não foi adotado para não influenciar diretamente o resultado final, uma vez que com uma seleção melhor, em muitos casos, não é necessário utilizar ajuste de superfícies muito complexas. A amostragem seletiva não permitiria comparar resultados dos diferentes procedimentos de ajuste de superfícies.

O melhor resultado foi obtido para o conjunto de dados da função matemática com o uso de ajuste de plano aos retalhos triangulares. Este resultado é

esperado uma vez que a função matemática é de 2º grau, que permite ser aproximada com precisão para este conjunto de dados por um plano em cada retalho.

Para o mesmo conjunto de dados, observa-se que a introdução da linha de quebra permite uma melhora considerável quando se utiliza a superfície quártica ajustada aos retalhos. Entre as superfícies quárticas ajustadas sobre a triangulação que considera as linhas de quebra, não se observa uma vantagem evidente de uma superfície sobre a outra, nota-se apenas um número menor de áreas de erros percentuais acima de 1,5 na grade regular gerada utilizando o ajuste de superfície quártica com continuidade a todos retalhos. Este resultado é justificado pelo fato de a linha de quebra não ser suficientemente marcante para necessitar de um ajuste de superfície que considere a quebra de continuidade ao longo desta linha.

O teste do método proposto sobre o conjunto de dados da região real permitiu as seguintes observações:

- O ajuste de superfície quártica ao retalho triangular é melhor do que o ajuste de plano quando a superfície a ser modelada corresponde ao terreno. As três grades regulares geradas utilizando a superfície quártica apresentam erros percentuais menores do que as obtidas com o ajuste de planos.
- A introdução da linha de quebra permite melhorar a qualidade do modelo, mesmo quando se utiliza o ajuste de plano a cada retalho triangular.
- O ajuste de superfície quártica com quebra de continuidade ao longo da linha característica obtém resultados melhores quando as amostras permitem a estimativa correta das derivadas parciais nos dois lados desta linha.

A partir das observações sobre os testes efetuados para validação do método proposto, recomenda-se que a metodologia seja utilizada quando:

- A linha característica representa efetivamente uma quebra na continuidade na superfície.

- Existem amostras suficientes para permitir a estimativa de derivadas parciais nos dois lados da linha característica.

Esta dissertação contribui na implementação de sistemas de modelagem de terrenos por oferecer a possibilidade de utilizar as informações das linhas características. Por meio do método apresentado o usuário pode introduzir as informações das linhas características e, caso necessite utilizá-las, definir o tipo de superfície que deseja ajustar aos retalhos da malha triangular.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agishtein, M.E.; Migdal, A.A. Smooth surface reconstruction from scattered data points. **Computer & Graphics**, 15(1):29-39, 1991.
- Akima, H. A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting for irregularly distributed data points. **ACM Transactions on Mathematical Software**, 4(2):148-159, 1978.
- De Floriani, L.; Falcidieno, B.; Pievoni, C. Delaunay-based representation of surfaces defined over arbitrarily shaped domain. **Computer Graphics, Vision and Image Processing**, 32:127-140, 1985.
- Falcidieno, B.; Spagnuolo, M. A new method for the characterization of topographic surfaces. **International Journal of Geographical Information Systems**, 5(4):397-412, 1991.
- Felgueiras, C.A. **Desenvolvimento de um sistema de modelagem digital de terreno para microcomputadores**. (Dissertação de Mestrado em Computação Aplicada) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1987. 92 p.
- Foley, J.D.; van Dam, A.; Feiner, S.K.; Hughes, J.F. **Computer graphics: principles and practice**. 2.ed. Reading, MA, USA, Addison-Wesley, 1991. 1175 p.
- Goodchild, M.F. Geographic information systems in undergraduate geography: A contemporary dilemma. **The Operational Geographer**, 4:34-38, 1985.
- Guibas, L.; Stolfi, J. Primitives for the manipulation of general subdivisions and computation of voronoi diagrams. **ACM Transactions on Graphics**, 4(2):74-123, 1985.
- Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. **SPRING - Manual de Operação**., São José dos Campos, 1995. 750p.
- Lee, D.T.; Schachter, B.J. Two algorithms for constructing a delaunay triangulation. **International Journal of Computer and Information Sciences**, 9(3):219-241, 1980.
- Leite, J. C. S. **Uma abordagem para eliminação de pontos em um modelo digital de elevação**. (Dissertação de Mestrado em Sensoriamento Remoto) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1995. No prelo.

- Lloyd, E.L. On triangulation of a set of points in the plane. In: 18th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science. Providence, RI, USA, 1977. **Proceedings**. p. 228-240.
- Maus, A. Delaunay triangulation and convex hull of n points in expected linear time. **BIT**, 24:151-163, 1984.
- Namikawa, L.M. A method for triangular grid surface fitting using breaklines. **International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing**, 30(4):362-368, 1994.
- Neves, J.M.R. **Sistema interativo para mapeamento - Baseado na triangulação dos pontos do plano**. (Dissertação de Mestrado em Engenharia de Sistemas e Computação) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 1988. 143 p.
- Pettinati, F. **Modelamento digital de terreno e representação gráfica de superfície**. (Dissertação de Mestrado em Engenharia) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1983. 177 p.
- Preparata, F.P.; Shamos M.I. **Computational geometry**. New York, Springer-Verlag, 1985. 398 p.
- Rosim, S.; Felgueiras, C.A.; Namikawa, L.M. Uma metodologia para geração de MNT por grades triangulares. In: Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, 7., Curitiba, Brasil, 1993. **Anais**. v.2, p. 420-427.
- Sakude, M.T.S. Modelagem de terrenos por superfícies triangulares de Bèzier. In: Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens, 5ª, Águas de Lindóia, Brasil, 1992. **Anais**. p. 312-222.
- Sederberg, T.W. Techniques for cubic algebraic surfaces. **IEEE Computer Graphics & Applications**, 10(5):12-21, 1990.
- Sibson, R. Locally equiangular triangulations. **The Computer Journal**, 21(3):243-245, 1978.
- Tang, L. Raster algorithms for surface modelling. **International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing**, 29(3):566-573, 1992.
- Zenisek, A. Interpolation polynomials on the triangle. **Numerical Mathematics**, 15:283-296, 1970.