



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14809-TDI/1252**

**ESTABILIDADE DO MOVIMENTO ROTACIONAL DE  
SATÉLITES ARTIFICIAIS**

Regina Elaine Santos Cabette

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia  
Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Rodolpho Vilhena de  
Moraes e Maria Cecília França de Paula Zanardi, aprovada em 18 de agosto de 2006.

INPE  
São José dos Campos  
2007

Publicado por:

**esta página é responsabilidade do SID**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

Gabinete do Diretor – (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 – CEP 12.245-970

São José dos Campos – SP – Brasil

Tel.: (012) 3945-6911

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

**Solicita-se intercâmbio  
We ask for exchange**

**Publicação Externa – É permitida sua reprodução para interessados.**



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14809-TDI/1252**

**ESTABILIDADE DO MOVIMENTO ROTACIONAL DE  
SATÉLITES ARTIFICIAIS**

Regina Elaine Santos Cabette

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia  
Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Rodolpho Vilhena de  
Moraes e Maria Cecília França de Paula Zanardi, aprovada em 18 de agosto de 2006.

INPE  
São José dos Campos  
2007

629.7.062.2

Cabette, R. E. S.

Estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais / Regina Elaine Santos Cabette. - São José dos Campos: INPE, 2006.

232 p. ; (INPE-14809-TDI/1252)

1. Satélites artificiais. 2. Estabilidade.
3. Forma normal. 4. Atitude. 5. Movimento rotacional.
6. Torque de gradiente de gravidade. I. Título.

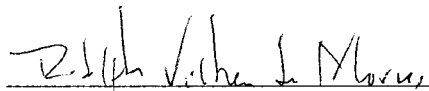
Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Doutor(a) em

**Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle**


Dr. Antonio Fernando Bertachini de  
Almeida Prado

  
Presidente / INPE / SJCampos - SP

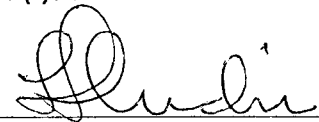
Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

  
Orientador(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

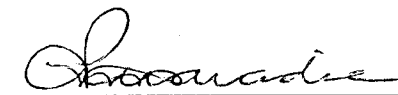
Dra. Maria Cecília França de Paula  
Zanardi

  
Orientador(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Dra. Teresinha de Jesus Stuchi

  
Convidado(a) / UFRJ / Rio de Janeiro - RJ

Dra. Ana Paula Marins Chiaradia

  
Convidado(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Aluno (a): Regina Elaine Santos Cabette

São José dos Campos, 18 de agosto de 2006



À memória de meus avós José e Regina,  
exemplos de luta e amor!  
A meus pais, meu irmão e meu namorado Fabio,  
presenças constantes em minha vida!





## AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Maria Cecília Zanardi, principalmente, pela grande amizade e confiança dedicada a mim, orientação e apoio sempre presentes.

Ao meu orientador Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes pela orientação, amizade e simpatia com nos recebe e atende.

Ao Prof. Dr. Mauricio Zanardi pela atenção oferecida no desenvolvimento de programas computacionais.

À Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Tereza Stuchi pela grande colaboração no desenvolvimento de minha tese, esclarecendo dúvidas e ensinando a aplicação de todo um método. Pela paciência e carinho e pelo modo gentil e divertido que me recebeu.

A meu querido irmão, meu exemplo de vida, por se dedicar inteiramente a mim, me proporcionando vencer mais essa etapa. Por ser, principalmente, um presente maravilhoso que Deus me deu.

A meus amados pais Celeste e Getulio, primeiramente por me darem a vida, e com ela todo amor e carinho que me fazem almejar cada dia mais ser uma pessoa melhor. Que eu possa sempre ser digna deste amor e de orgulho.

À minha querida tia Nadir e ao Heitor, pelo carinho, apoio e toda dedicação nos momentos difíceis desta jornada.

E a Deus sempre! Por todas essas dádivas em minha vida e por iluminar meus passos nessa caminhada!



## RESUMO

Usando uma formulação canônica, neste trabalho é analisada a estabilidade do movimento de rotacional de um satélite artificial que considera perturbações devido ao torque de gradiente de gravidade. Aqui as variáveis de Andoyer são usadas para descrever o movimento de rotacional. Uma das aproximações que permitem a análise da estabilidade de sistemas hamiltonianos necessita da redução da hamiltoniana na forma normal. Primeiramente são encontrados pontos de equilíbrio e usando coordenadas generalizadas a hamiltoniana é expandida na vizinhança destes pontos. No próximo passo, uma transformação linear canônica é utilizada para diagonalizar a matriz associada à parte linear do sistema. Assim, a parte quadrática da hamiltoniana é normalizada. Baseado em um algoritmo Lie-Hori um processo semi-analítico para normalização é aplicado e a hamiltoniana é normalizada até quarta ordem. Uma vez a hamiltoniana normalizada até quarta ordem, uma análise de estabilidade do ponto de equilíbrio, utilizando o teorema de Kovalev e Savichenko é executada. Esta aproximação semi-analítica é aplicada considerando alguns conjuntos de dados de satélites hipotéticos. Para os satélites considerados são observados pequenos números de casos de movimentos estáveis. Este trabalho contribui para missões espaciais, onde a manutenção da estabilidade da atitude de satélites é requerida.



# **THE STABILITY OF THE ROTATIONAL MOTION OF THE ARTIFICIAL SATELLITES**

## **ABSTRACT**

Using a canonical formulation, in this work is analyzed the stability of the rotational motion of an artificial satellite considering perturbations due to the gravity gradient torque. Here Andoyer's variables are used to describe the rotational motion. One of the approaches that allow the analysis of the stability of Hamiltonian systems needs the reduction of the Hamiltonian to a normal form. Firstly equilibrium points are found and using generalized coordinates the Hamiltonian is expanded in the neighborhood of these points. In a next step a canonical linear transformation is used to diagonalize the matrix associated to the linear part of the system. Thus, the quadratic part of the Hamiltonian is normalized. Based in a Lie-Hori algorithm a semi-analytic process for normalization is applied and the Hamiltonian was normalized up to the fourth order. Once the Hamiltonian is normalized up to order four, an analysis of stability of the equilibrium point is performed using the theorem of Kovalev and Savichenko. This semi-analytical approach was applied considering some data sets of hypothetical satellites. For the considered satellites it was observed small cases of stable motion. This work contributes to space missions where the maintenance of stability of the attitude of satellite are required.



## SUMÁRIO

Pág.

### LISTA DE FIGURAS

### LISTA DE TABELAS

### LISTA DE SÍMBOLOS

<b>CAPÍTULO 1 – APRESENTAÇÃO</b> .....	29
1.1 Introdução.....	29
1.2 Motivação.....	31
1.3 Objetivo.....	31
1.4 Conteúdo Apresentado.....	32
<b>CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	35
<b>CAPÍTULO 3 – CONCEITOS BÁSICOS</b> .....	49
3.1 Sistemas de Coordenadas, Variáveis de Andoyer e Variáveis de Delaunay.....	50
3.2 Torque de Gradiente de Gravidade.....	54
3.3 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos.....	55
3.3.1 Sistemas Dinâmicos.....	55
3.4 Sistema Hamiltoniano.....	56
3.5 Tipos de Pontos de Equilíbrio.....	56
3.5.1 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio.....	58
3.6 Órbitas Periódicas.....	62
3.6.1 Critério de Bendixson.....	63
3.6.2 Teorema de Poincaré-Bendixson.....	63
3.7 Estabilidade de Liapunov.....	64

<b>CAPÍTULO 4 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO</b> .....	67
4.1 Equações do Movimento em Variáveis de Andoyer.....	67
4.2 Estabilidade do Movimento Rotacional de um Satélite Artificial Livre de Torques Externos.....	73
4.3 Análise da Estabilidade do Movimento Rotacional pelo Critério de Routh-Hurwitz.....	81
4.3.1 Aplicação do Critério de Routh-Hurwitz ao Movimento Rotacional	82
4.3.2 Análise da Estabilidade para um Conjunto de Pontos de Equilíbrio	85
<b>CAPÍTULO 5 - FORMA NORMAL PARA HAMILTONIANA DO MOVIMENTO ROTACIONAL</b> .....	89
5.1 Transformações que Diagonalizam a Parte Quadrática da Função Hamiltoniana.....	89
5.1.1 Diagonalização da Matriz $JP$ .....	91
5.2 Extensão aos Termos de Ordens Superiores da Hamiltoniana.....	94
5.3 Método de Lie.....	96
5.4 Forma Normal da Hamiltoniana de 4ª ordem.....	99
5.5 Algoritmo Computacional para Forma Normal da Hamiltoniana do Movimento Rotacional.....	100
<b>CAPÍTULO 6 -ANÁLISE DA ESTABILIDADE ATRAVÉS DO TEOREMA DE ESTABILIDADE DE KOVALEV &amp; SAVCHENKO</b> .....	107
6.1 Teorema de Estabilidade de Kovalev e Savchenko.....	107
6.2 Discussões sobre o Teorema.....	108
6.2.1 Condições Necessárias de Estabilidade.....	110
6.2.2 Redução a Forma Normal.....	113
6.3 Aplicações do Teorema de Estabilidade.....	113
6.3.1 Aplicações para Satélites de Médio Porte M.....	116
6.3.2 Aplicações para Satélite de Pequeno Porte A.....	121
6.3.3 Aplicações para Satélite de Pequeno Porte B.....	126



<b>CAPITULO 7 – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>131</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>135</b>
<b>APÊNDICE A - TERMOS DA HESSIANA DO PROBLEMA.....</b>	<b>143</b>
<b>APÊNDICE B - HAMILTONIANA DO PROBLEMA ESCRITA NA VIZINHANÇA DA ORIGEM.....</b>	<b>219</b>



## LISTA DE FIGURAS

3.1 - Sistema principal ( $O_{X_{PI}Y_{PI}Z_{PI}}$ ), Sistema do satélite ( $O_{X_sY_sZ_s}$ ) e os Ângulos de Euler ( $\varphi, \theta, \psi$ ), sistema intermediário ( $O_{x'y'z'}$ ).....	51
3.2 - Sistema principal ( $O_{X_{PI}Y_{PI}Z_{PI}}$ ), Sistema do satélite ( $O_{X_sY_sZ_s}$ ), Sistema do momento angular ( $O_{x_m y_m z_m}$ ) e Variáveis de Andoyer.....	52
3.3 - Sistema Equatorial Terrestre ( $O_{X_eY_eZ_e}$ ), Sistema Orbital ( $O_{X_oY_oZ_o}$ ) .....	53
3.4 – Diagrama de fase para $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ .....	59
3.5 – Diagrama de fase para $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ .....	59
3.6 – Diagrama de fase para $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , reais.....	60
3.7 – Diagrama de fase para $\lambda_{1,2} = \hat{\alpha} \pm \hat{\beta}i$ , $\hat{\alpha} < 0$ , $\hat{\beta} > 0$ .....	60
3.8 – Diagrama de fase para $\lambda_{1,2} = \hat{\alpha} \pm \hat{\beta}i$ , $\hat{\alpha} > 0$ , $\hat{\beta} > 0$ .....	61
3.9 – Diagrama de fase para $\lambda_{1,2} = \pm \hat{\beta}i$ .....	61
3.10 – Diagrama de fase para $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ .....	62
3.11 – Diagrama de fase para $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ .....	62
3.12 – Parâmetros da estabilidade de Liapunov.....	65
4.1 – Espaço de Fase ( $\mathcal{I}, L_1$ ) para valores normalizados da Lua, para <b>A&lt;B&lt;C</b> , com $F_A = 0,50031119$ (ponto central com $\mathcal{I} = \pi/2$ e $L_1 = 0$ ), $F_B = 0,50025113$ (separatriz, curva <del>-----</del> ) e $F_C = 0,5$ ( $L_1 = \pm L_2$ , curva <del>-----</del> ).....	77
4.2 - Espaço de Fase ( $\mathcal{I}, L_1$ ) para satélite de pequeno porte, para <b>B&lt;A&lt;C</b> , com a separatriz definida pela curva <del>-----</del> .....	78
4.3 - Espaço de Fase ( $\mathcal{I}, L_1$ ) para satélite de médio porte, para <b>A&gt;B&gt;C</b> , com a separatriz definida pela curva <del>-----</del> ( $F = F_B$ <del>-----</del> ).....	80
6.1 - Regiões de equilíbrio para diversos valores de a e b.....	112
6.2 – Esquema do procedimento para a aplicação do teorema de estabilidade .....	114



## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
5.1 – Monômios de um polinômio homogêneo de 3º grau.....	103
5.2 – Monômios de um polinômio homogêneo de 4º grau.....	104
6.1 – Descrição quantitativa das aplicações aos satélites de médio porte M e pequeno porte A e B.....	116
6.2 – Conjunto de dados para o satélite M1.....	120
6.3 – Conjunto de dados para o satélite M2.....	120
6.4 – Conjunto dados para o satélite M3.....	121
6.5 – Conjunto de dados para o satélite A1.....	125
6.6 – Conjunto de dados para o satélite A2.....	125
6.7 – Conjunto de dados para o satélite A3.....	125
6.8 – Conjunto de dados para o satélite B1.....	129
6.9 – Conjunto de dados para o satélite B2.....	130
6.10 – Conjunto de dados para o satélite B3.....	130



## LISTA DE SIMBOLOS

A,B,C	Momentos principais de inércia
a	Semi-eixo maior da órbita do satélite
$\bar{A}$	Matriz constante
$a_{ij}$	Termos da Hessiana 1
a	Relação entre os termos $a_1, a_2$ associados aos momentos principais de inércia
$a_1, a_2, a_3$	Termos associados com os momentos principais de inércia do corpo
b	Relação entre os termos $a_1, a_3$ associados aos momentos principais de inércia
C	Matriz dos auto-vetores
$\bar{c}_1, \bar{c}_2$	Constantes arbitrárias
C1, C2, C3, C4, C5	Regiões relacionadas as condições necessárias de estabilidade de Kovalev & Savchenko
D	Matriz simplética da transformação linear
$D^0$	Determinante da 3ª condição do teorema de estabilidade de Kovalev & Savchenko
e	Excentricidade da órbita do satélite
e	Quando $\Gamma > 0$ , tem valor 1 e quando $\Gamma < 0$ tem valor -1

$F$	Hamiltoniana do problema estudado
$F_0$	Parcela não perturbada da hamiltoniana do problema
$F_1$	Parcela perturbada da hamiltoniana do problema
$F_w$	Vetor das derivadas parciais da hamiltoniana $F$
$f(\bar{x})$	Função do sistema dinâmico autônomo
$f(\bar{x}, t)$	Função do sistema dinâmico não autônomo
$f_{ij}$	Termos da Hessiana do problema
$G$	Hessiana 1
$g$	Variável de Delaunay, argumento do perigeu
$G$	Variável de Delaunay, módulo do momento angular de translação
$G$	Função geratriz
$\bar{H}$	Função hamiltoniana
$\bar{h}_1, \bar{h}_2$	Auto-vetores associados aos autovalores de $\bar{A}$
$h_{3,i}$	Coefficientes da hamiltoniana $H_3$ em variáveis reais com $i=1, \dots, 20$
$h_{4,i}$	Coefficientes da hamiltoniana $H_4$ em variáveis reais com $i=1, \dots, 35$
$hc_{3,i}$	Coefficientes da hamiltoniana $HC_3$ em variáveis complexas com $i=1, \dots, 20$



$hc_{4,i}$	Coeficientes da hamiltoniana $HC_4$ em variáveis complexas com $i= 1,\dots,35$
$h$	Variável de Delaunay, longitude do nodo ascendente do plano da órbita do satélite
$H$	Variável de Delaunay, componente do momento angular de translação no eixo inercial $Z_s$
$H$	Função analítica de coordenadas $(\xi)$ e momentos $(\eta)$ generalizados
$H^\circ$	Forma normal da hamiltoniana $H$
$H$	Hamiltoniana associada ao movimento rotacional de um corpo rígido, dada por Kovalev & Savchenko
$H_2$	Hamiltoniana de 2ª ordem escrita nas variáveis $q_i, p_i$
$H_3$	Hamiltoniana de 3ª ordem escrita nas variáveis $q_i, p_i$
$H_4$	Hamiltoniana de 4ª ordem escrita nas variáveis $q_i, p_i$
$HC_2$	Hamiltoniana de 2ª ordem escrita em variáveis complexas
$HC_3$	Hamiltoniana de 3ª ordem escrita em variáveis complexas
$HC_4$	Hamiltoniana de 4ª ordem escrita em variáveis complexas
$H^{nova}$	Hamiltoniana na forma normal
$H_2^{nova}$	Hamiltoniana de 2ª ordem na forma normal
$H_4^{nova}$	Hamiltoniana de 4ª ordem na forma normal
$I$	Inclinação orbital

$I_2$	Inclinação do plano do momento angular com o plano inercial
$I_2$	Matriz identidade de ordem 2
$I_4$	Matriz identidade de ordem 4
$J$	Matriz simplética 1
$J_2$	Inclinação do plano principal com o plano do momento angular
$J$	Matriz simplética 4 x 4
$k_1, k_2$	Números inteiros
$I_{10}, I_{20}$	Condições iniciais do problema
$I_1$	Variável de Andoyer, ângulo entre o eixo principal $O_{X_{PI}}$ e a interseção do plano principal $X_{PI}Y_{PI}$ com o plano do momento angular
$I_2$	Variável de Andoyer, ângulo entre a interseção do plano principal $X_{PI}Y_{PI}$ com o plano do momento angular e a interseção do plano do momento angular e o plano inercial $X_sY_s$
$I_3$	Variável de Andoyer, ângulo entre o eixo inercial $OX_s$ e a interseção do plano do momento angular e o plano inercial $X_sY_s$
$L_2$	Vetor momento angular de rotação
$L_1$	Variável de Andoyer, componente de $L_2$ no eixo principal de inércia $OZ_{PI}$

$L_2$	Variável de Andoyer, módulo do momento angular de rotação $L_2$
$L_3$	Variável de Andoyer, componente de $L_2$ no eixo do satélite $OZ_s$
/	Variável de Delaunay, anomalia média
$L$	Variável de Delaunay, dada por $M\sqrt{\mu a}$
$Ox_{PI}y_{PI}z_{PI}$	Sistema Principal de Inércia
$Ox_sY_sZ_s$	Sistema do Satélite
$Ox_my_mz_m$	Sistema do Momento Angular
$Ox_oy_oz_o$	Sistema Orbital
$Ox_eY_eZ_e$	Sistema Equatorial Terrestre
$Ox'y'z'$	Sistema Intermediário
$M$	Massa do satélite
$M$	Anomalia média (l)
$N$	Matriz auxiliar
$p$	Hessiana do problema
$P(\lambda)$	Polinômio característico
$\bar{q}_i, \bar{p}_i$	Coordenadas generalizadas e momentos generalizados do sistema Hamiltoniano relacionado com $\bar{H}$

$q_i, p_i$	Variáveis novas relacionadas à transformação linear
$p_\psi, p_\varphi, p_\delta$	Momentos generalizados da hamiltoniana H
$Q_1, Q_2$	Coeficientes da equação característica do caso estudado no artigo de Kovalev & Savchenko relacionados as condições de estabilidade
R	Matriz auxiliar
$r_1, r_2$	Termos das matrizes auxiliares N e R
$\mathbb{R}^n$	Espaço n-dimensional
t	Tempo
T(s)	Período de rotação do satélite em segundos
v	Vetor de estado 1
$\bar{x}$	Vetor de configuração
$x_k, y_k$	Variáveis complexas
$Z_2$	Matriz nula de ordem 2
w	Argumento do perigeu (g)
w	Vetor de estado 2
W (rpm)	Velocidade de rotação do satélite em rpm
$\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_4$	Coeficientes da equação característica associada a matriz JG
$\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4$	Coeficientes da equação característica associada a matriz JP

$\pm i\alpha_1^o, \pm i\alpha_2^o$	Autovalores do sistema linear reduzido, associado à hamiltoniana H
$\hat{\alpha}$	Número real da parte real do número complexo
$\hat{\beta}$	Número real da parte imaginária do número complexo
$\beta_{\nu\mu}^o$	Coefficientes de 4ª ordem da hamiltoniana H <sup>o</sup>
$\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \delta_{2,2}$	Coefficientes da hamiltoniana de 4ª ordem na forma normal
$\varphi, \theta, \psi$	Ângulos de Euler
$\lambda$	Raiz da equação característica associada a matriz JG
$\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$	Auto-valores da matriz $\bar{A}$
$\lambda_1, \lambda_2$	Auto-valores
$\lambda_i$	Auto-valores relacionados a matriz JP
$\mu$	Constante gravitacional da Terra
$\nu_1, \nu_2$	Coefficientes da hamiltoniana de 2ª ordem na forma normal
$\Omega$	Longitude do nodo ascendente do plano da órbita do satélite
$\theta$	$\cos I$
$\theta_2$	$\cos I_2$
$\sum_{\varepsilon} \sum_{\varepsilon, \delta}$	Significa que $\delta$ e $\varepsilon$ assumem valores +1 e -1
$\Gamma > 0$ ( $\Gamma < 0$ )	Parcela relacionada ao deslocamento da origem do sistema fixo no corpo ao longo do eixo de inércia x à esquerda (à direita)



# 1 APRESENTAÇÃO

## 1.1 Introdução

A análise da estabilidade do movimento rotacional de satélites é aqui realizada, utilizando-se um conjunto de variáveis adequadas que facilitem a utilização de métodos de análise de estabilidade de sistemas hamiltonianos. Pontos de equilíbrio e/ou regiões de estabilidade são estabelecidas quando parcelas associadas a torques externos atuantes no satélite são incluídas nas equações do movimento rotacional. Neste trabalho o torque externo considerado é o torque de gradiente de gravidade.

O movimento de um satélite artificial em torno da Terra é caracterizado pelo seu movimento translacional e rotacional. A análise do comportamento destes movimentos é muito importante, pois o bom desempenho da missão do satélite depende de uma orientação e de um posicionamento precisos do satélite.

O movimento translacional do satélite está associado com a trajetória do seu centro de massa, cujas leis básicas associadas ao movimento do problema de dois corpos são governadas pelas leis de Kepler. O movimento translacional de um satélite artificial é especificado pela sua posição e velocidade a cada instante, através dos elementos orbitais clássicos e neste trabalho é assumido como sendo conhecido.

O movimento rotacional está associado ao fato do satélite possuir forma e tamanho finitos e que durante a sua trajetória pode executar movimento em torno de seu centro de massa. Este movimento é especificado pela orientação espacial e velocidade de rotação do satélite.

O presente trabalho dá enfoque ao movimento rotacional de satélites artificiais. Tal movimento é descrito pelas equações dinâmicas e cinemáticas (Wertz, 1978). As equações dinâmicas são também conhecidas como equações de

Euler e apresentam relações entre as componentes dos torques externos e a variação das componentes da velocidade de rotação. As equações cinemáticas apresentam as relações entre as componentes da velocidade e os ângulos de Euler, que determinam a orientação do satélite no espaço. Para se determinar o comportamento da atitude com o tempo sob a influência de torques ambientais é necessário integrar estas equações. Apesar da utilização das componentes da velocidade de rotação e dos ângulos de Euler serem usuais no estudo do movimento rotacional de satélites artificiais, para estudos analíticos se torna muito importante a utilização de variáveis canônicas para descrever o movimento rotacional, sendo que neste trabalho são utilizadas as variáveis de Andoyer (Kinoshita, 1972; Lum & Bloch, 1999). Tais variáveis são de fácil compreensão física e apresentam vantagens na aplicação de métodos de perturbação para resolução das equações do movimento (Deprit, 1967; Kinoshita, 1972; Zanardi, 1986; Zanardi e Vilhena de Moraes, 1999; Zanardi et al., 2005) e se mostram adequadas para a aplicações de métodos de estudo de estabilidade, como por exemplo, o apresentado por Kovalev e Savchenko (Kovalev & Savchenko, 1975). As variáveis de Andoyer são introduzidas no Capítulo 3 e estão relacionadas com o módulo do momento angular de rotação do satélite, com suas projeções no eixo inercial  $Z_s$  e no eixo principal de inércia  $z_{PI}$  do satélite, e com ângulos que relacionam os diversos planos de referência envolvidos. A partir das variáveis de Andoyer as componentes da velocidade de rotação e os ângulos de Euler podem ser determinados (Zanardi, 2005).

A atitude de um veículo espacial descreve a sua orientação no espaço. A atitude pode ser expressa pela relação entre dois sistemas de coordenadas, um deles fixo no satélite e outro associado a um sistema de referência, o qual está usualmente relacionado com a Terra (sistema equatorial) ou à alguma outra referência celeste. Para um grande número de missões, a carga útil do veículo precisa ser direcionada de algum modo e a análise dos resultados depende fundamentalmente da atitude.



A análise da dinâmica da atitude envolve abordagens de controle, determinação e propagação. Para se estudar o controle surge a necessidade de se analisar a sua estabilidade, uma vez que o controle está relacionado com processo de se comandar uma atitude requerida ou de manter uma orientação existente.

Diferentes ferramentas de pesquisa associadas à teoria de estabilidade de sistemas dinâmicos proporcionam novos caminhos de ataque para esta análise, podendo produzir resultados importantes e relevantes para a dinâmica de atitude de satélites artificiais. O termo estabilidade vem sendo discutido por vários matemáticos sob vários aspectos e questões para problemas envolvendo estabilidade tornam-se cada vez mais complicadas e difíceis de serem respondidas.

Em suma, o presente trabalho trata de um problema associado ao movimento rotacional de um satélite artificial que deverá apontar uma resposta para a estabilidade do movimento dentro de condições impostas.

## **1.2 Motivação**

A análise da estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais na presença de torques externos é de grande importância na manutenção da orientação espacial, para que estes possam desempenhar com sucesso as missões as quais estão destinados.

## **1.3 Objetivo**

Analisar a estabilidade do movimento rotacional perturbado pelo torque de gradiente de gravidade, fazendo uso de variáveis canônicas adequadas.

Apresentar um procedimento para forma normal de um sistema Hamiltoniano na vizinhança de um ponto de equilíbrio.

Aplicar a teoria de estabilidade proposta para o problema do movimento rotacional de satélites artificiais perturbado pelo gradiente de gravidade e estabelecer os pontos de equilíbrio e regiões de estabilidade.

#### **1.4 Conteúdo Apresentado**

Deste modo, inicialmente no Capítulo 2 é apresentada uma pesquisa bibliográfica detalhada sobre textos referentes à dinâmica do movimento rotacional de satélites artificiais e à teoria de estabilidade de sistemas dinâmicos, especialmente aqueles relacionados ao movimento rotacional perturbado.

No Capítulo 3 são introduzidos conceitos básicos relacionados com a dinâmica rotacional do satélite e a teoria de estabilidade, salientando os diversos sistemas de referência envolvidos, as variáveis de Andoyer, a classificação de pontos de equilíbrio e o critério de estabilidade de Liapunov.

Dando continuidade, no Capítulo 4 são introduzidas as equações do movimento utilizando a forma canônica das equações do movimento rotacional para torque conservativos (Vilhena de Moraes, 1989), incluindo a hamiltoniana associada ao torque de gradiente de gravidade. As equações do movimento rotacional livre de torques externos são analisadas, obtendo-se os pontos e regiões de equilíbrio do movimento. Verifica-se então, a vantagem da utilização das variáveis de Andoyer (Kinoshita, 1970; Lum & Bloch, 1999) na descrição do movimento rotacional, ou ainda a utilização de outro conjunto de variáveis canônicas mais adequado para evitar singularidades. Um estudo qualitativo do plano de fase do problema de Euler é realizado, de modo similar ao realizado por Deprit (1967) considerando tanto o satélite simétrico (o qual possui dois momentos principais de inércia iguais) quanto o satélite não-simétrico (com todos os momentos principais de inércia diferentes). Uma análise teórica da estabilidade, com levantamento das condições necessárias e suficientes para a estabilidade do movimento, com a obtenção de pontos e regiões de equilíbrio é feita. Finalizando este capítulo, uma análise preliminar da estabilidade do

movimento rotacional na presença do torque de gradiente de gravidade é discutida em termos do critério de Routh-Hurwitz (Ogata, 1993).

No capítulo seguinte uma análise da estabilidade do movimento rotacional perturbado é feita de modo a verificar as alterações ocorridas nas vizinhanças dos pontos e das regiões de equilíbrio anteriormente obtidas. O levantamento das condições necessárias e suficientes para a estabilidade do movimento e o desenvolvimento de um programa computacional para visualizar essas regiões de equilíbrio são realizados.

Com estes objetivos, no Capítulo 5 é determinada à forma normal da hamiltoniana associada ao movimento rotacional do satélite até 4ª ordem, sendo discutidas as diversas etapas envolvidas no processo. Devido à complexidade das equações do movimento rotacional envolvidas, o processo é semi-analítico e realizado com o auxílio do software MAPLE.

No Capítulo 6, o Teorema da Estabilidade de Kovalev e Savchenko é introduzido e aplicações deste teorema para a análise de estabilidade de pontos de equilíbrio associados ao movimento de alguns satélites artificiais é realizada. Os pontos de equilíbrio são determinados com auxílio de subrotinas desenvolvidas no software MATHEMATICA.

O Capítulo 7 apresenta as principais conclusões relacionadas com o problema em estudo e aponta algumas sugestões para trabalhos futuros.



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Aqui é apresentada uma revisão de literatura relacionada com o estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos associada ao movimento rotacional de corpos rígidos e de satélites artificiais, em uma seqüência cronológica. Ênfase será dada aos trabalhos envolvendo o movimento rotacional utilizando as variáveis de Andoyer e sistemas hamiltonianos e que apresentam a teoria de estabilidade que é aplicada neste trabalho.

Considerando a analogia entre o sistema de equações diferenciais que descrevem o movimento translacional e as equações que descrevem o movimento rotacional, alguns trabalhos envolvendo a estabilidade do movimento orbital de satélites também serão mencionados.

Polzhretskii (1958) apresentou uma análise sobre a estabilidade de um sistema autônomo de equações diferenciais, relacionadas com funções de sinal definido e de um sistema conservativo, descrito por uma função hamiltoniana representada por uma série de potência na vizinhança de uma solução de equilíbrio, cuja integral primeira é positiva definida.

Um dos trabalhos fundamentais para a análise da estabilidade de sistemas hamiltonianos foi apresentado por Moser (1958). O problema inicial trata do comportamento de uma solução para um sistema de equações lineares a coeficientes periódicos, descrito pelos auto-valores associados que, quando forem distintos e estiverem em uma circunferência unitária, determinam a estabilidade desta solução. Contudo quando esta condição não é satisfeita para o sistema hamiltoniano linear, a análise da estabilidade reduz-se ao estudo dos coeficientes de um polinômio quadrático associado a um sistema canônico linear, que depende da hamiltoniana do problema. Para o caso não linear, com a hamiltoniana e os coeficientes dependentes periodicamente do tempo, a série de potência associada ao sistema inicia com uma forma quadrática que determina um sistema hamiltoniano linear. Quando o sistema

linear é estável, uma transformação canônica linear pode ser definida, de modo que a forma quadrática seja reduzida à forma normal. Esta transformação linear também reduz o sistema original a um novo sistema hamiltoniano e a discussão dos auto-valores na forma exponencial, definidos pelos auto-valores do sistema linear, permite estabelecer condições de estabilidade para o sistema não linear.

Alguns trabalhos vinculados a satélites de formas especiais foram realizados desde o início da década de 60.

Estudos sobre a rotação plana de um satélite tipo halter foi realizada por Schinler (1960), que considerou desvios na órbita do satélite, considerada circular ou ligeiramente elíptica. As soluções de equilíbrio foram determinadas utilizando variáveis canônicas e o comportamento deste sistema, na vizinhança do estado estável foi investigada.

Não podemos deixar de mencionar que a análise da estabilidade dos pontos  $L_4$  e  $L_5$  no problema restrito dos três corpos foi motivação para o desenvolvimento do chamado teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) para a estabilidade de movimentos quase-periódicos em sistemas hamiltonianos de equações diferenciais. (Arnold, 1961,1989; Siegel & Moser, 1971).

Kane & Shippy (1963) utilizaram a teoria de Floquet para analisar a estabilidade do movimento de um satélite assimétrico girante em uma órbita circular, cujo eixo principal de inércia (que coincide com o eixo de rotação) permanece normal ao plano orbital. A abordagem é empregada para a construção de um mapa com as regiões de estabilidade.

Thomson (1963) examinou a estabilidade de um giroscópio montado em um veículo espacial em órbita circular em torno de campo de forças centrais, considerando várias orientações para o eixo e velocidade de rotação. Quando a direção do eixo de rotação é radial ou tangencial à órbita, a estabilidade depende da razão entre a velocidade de rotação e a velocidade angular de

translação e da razão entre os momentos de inércia do giroscópio. Quando a orientação do eixo de rotação é fixa no espaço inercial, como o caso de plataformas inerciais, as equações do movimento são do tipo Mathieu. A estabilidade neste caso é independente da velocidade angular do giroscópio, mas depende da razão entre os momentos de inércia do giroscópio, da velocidade angular de translação e da orientação desejada para o eixo de giro.

Beletskii (1966) teve como objetivo principal de seu livro, mostrar as propriedades principais do movimento de um satélite em torno de seu centro de massa bem como descrever as ferramentas de pesquisa para este estudo. Ele apresenta as equações gerais do movimento, utilizando ângulos de Euler, determinando o equilíbrio natural do movimento e analisando sua estabilidade na vizinhança deste equilíbrio.

Uma análise quantitativa do movimento rotacional livre de torques externos de um corpo rígido é apresentada por Deprit (1967), com as equações do movimento descritas pelas variáveis de Andoyer. Neste caso a função hamiltoniana é reduzida a um sistema conservativo com apenas um grau de liberdade. As equações do movimento são analisadas e o espaço de fase é construído, apontando as regiões de estabilidade. Uma análise similar a de Deprit (1967) é apresentada no Capítulo 4, seção 4.2 desta tese, com aplicações para satélites com distribuição de massa não simétrica (diferentes valores para os momentos principais de inércia).

A partir da década de 70, vários trabalhos relacionados com a análise de corpos rígidos de diferentes formas foram desenvolvidos.

O movimento de dois corpos rígidos atraídos mutuamente foi estudado por Kinoshita (1970,1972). Em 1970, Kinoshita considerou um dos corpos esférico e o outro corpo esferoidal (forma esférica, mas com distribuição de massa tal que dois momentos principais de inércia são iguais), determinando três movimentos estacionários (correspondendo aos pontos de libração) e estabelecendo as condições de estabilidade. Em 1972, Kinoshita investigou o

problema considerando um corpo triaxial e o outro esférico. Os movimentos estacionários foram obtidos, sendo que as coordenadas generalizadas são constantes, com exceção das coordenadas cíclicas, e suas estabilidades seculares e ordinárias discutidas. O movimento é dito estável secularmente se a configuração é tal que a energia potencial mecânica assume um valor mínimo. O movimento é dito ordinariamente estável se as pequenas oscilações na vizinhança do movimento estacionário são puramente periódicas. Prova-se que a solução estacionária na qual o eixo de maior momento principal de inércia é perpendicular ao plano orbital e o eixo de menor momento principal de inércia aponta o corpo esférico é secularmente estável. O movimento estacionário, no qual o eixo do momento principal de inércia médio é perpendicular ao plano orbital é instável. Os demais movimentos estacionários são secularmente instáveis e ordinariamente estáveis.

Uma análise sobre a estabilidade de rotações uniformes de um corpo rígido em torno de um eixo principal de inércia foi descrita por Kovalev & Savchenko (1975). O movimento rotacional de um corpo rígido em torno de um ponto fixo é estudado, utilizando a hamiltoniana descrita pelos ângulos de Euler. Uma solução de equilíbrio é determinada, sendo representada pelo movimento de rotação em torno do eixo principal de inércia. Variáveis canônicas são introduzidas e a hamiltoniana é desenvolvida nas vizinhanças da rotação uniforme. Formas quadráticas e de quarta ordem nas variáveis que descrevem o problema são obtidas. Um sistema de equações diferenciais linear relacionado à forma quadrática é obtido e a sua equação característica discutida. Uma transformação canônica, cujos coeficientes dependem dos auto-valores do sistema linear, é definida e a hamiltoniana é reduzida à forma normal, incluindo termos até quarta ordem. A análise da rotação uniforme fica reduzida ao estudo da relação entre os coeficientes desta forma normal da hamiltoniana. A discussão permite determinar regiões de estabilidade no plano de fase. A análise da estabilidade realizada nesta tese segue os moldes do trabalho de Kovalev & Savchenko (1975), mas utilizando as variáveis de



Andoyer para descrever o movimento rotacional e incluindo o torque de gradiente de gravidade nas equações do movimento.

O movimento de dois corpos rígidos atraídos mutuamente foi também analisado por Bhatnagar & Gupta (1980). Na análise inicial (Bhatnagar & Gupta, 1980) foram considerados corpos rígidos dinamicamente simétricos em relação ao plano equatorial do corpo (ou seja, corpos de forma esférica, mas com distribuição de massa tal que dois momentos principais de inércia são iguais), sendo que nove soluções particulares correspondentes aos pontos de libração foram encontradas e sua estabilidade discutida pelo método de Liapunov, considerando dois tipos de categorias. A primeira categoria inclui corpos de diferentes formas e a segunda considera a massa e dimensão de um dos corpos muito menor que do outro (correspondendo ao caso de satélites artificiais). Em ambos os casos as condições de estabilidade são estabelecidas. Esta análise inicial pode ser considerada uma generalização do trabalho desenvolvido por Kinoshita (1970).

Em continuidade à análise anterior, Bhatnagar & Gupta (1986) estudaram o movimento dos dois corpos rígidos triaxiais. Um total de 36 movimentos estacionários foi obtido, correspondendo aos valores constantes das coordenadas generalizadas não cíclicas e dependem dos ângulos de Euler associados com a orientação dos dois corpos. Estas soluções correspondem ao movimento circular de um corpo ao redor do outro. Em cada um desses movimentos estacionários, um dos eixos de momento principal de inércia alinha-se na linha de união dos dois centros de massa, o outro eixo é perpendicular a esta linha e encontra-se no plano orbital, e o terceiro eixo é perpendicular ao plano orbital. A estabilidade destes movimentos foi discutida no sentido de Liapunov e considerando diferentes formas para os corpos e também o caso de satélites artificiais.

Uma abordagem similar a de Kovalev & Savchenko (1975) foi realizada por Chudnenko (1981), associada ao movimento rotacional de um corpo rígido com

o eixo de rotação coincidente com um dos eixos principais de inércia e supondo dois momentos principais de inércia iguais. Neste estudo, a hamiltoniana que rege o movimento é desenvolvida em torno de uma rotação uniforme, considerando termos até sexta ordem, cujos coeficientes estão relacionados com os momentos principais de inércia do corpo e com a magnitude da velocidade angular de rotação uniforme. A Hamiltoniana é reduzida à forma normal e, uma discussão sobre os coeficientes dos polinômios (quadrático, de quarta e sexta ordens) permite traçar curvas e regiões de estabilidade no plano de fase. Basicamente a diferença entre estas duas abordagens é a expansão nos termos até sexta ou quarta ordem. Este trabalho muito contribuiu para o estudo da estabilidade realizada nesta tese.

Uma revisão de aspectos fundamentais e históricos sobre diferentes abordagens de estabilidade é apresentada por Szebehely (1984), enfatizando aplicações a sistemas dinâmicos e mecânica celeste. Uma listagem de terminologias usuais é apresentada juntamente com uma vasta lista de referências básicas, úteis para pesquisadores iniciantes na área.

Várias análises sobre estabilidade de sistemas hamiltonianos surgiram a partir de 1985.

Pascal (1985a) estudou o movimento de um satélite do tipo girostato (*dual satellite*, o qual é considerado rígido exceto pelo fato de conter um ou mais rotores simétricos) colocado em um campo gravitacional de  $n$ -corpos. É assumido que o satélite não influencia os demais corpos (problema restrito de  $n+1$  corpos), os quais estão localizados nos pontos de libração do problema clássico de  $n$ -corpos. Um conjunto de equilíbrios relativos do satélite é investigado e mostra-se que este problema é similar ao de encontrar o extremo de uma função quadrática, como no caso do girostato atraído por um único corpo. Todos os pontos de equilíbrio são obtidos pela solução de duas equações algébricas e condições suficientes de estabilidade destes pontos de equilíbrio são apresentadas.

Em continuidade ao seu trabalho anterior, Pascal (1985b) considerou o caso elementar de  $n=1$  e mostrou que os coeficientes das duas equações algébricas dependem de quatro parâmetros, sendo que dois deles dependem apenas da direção do momento angular interno dos rotores, um depende apenas dos momentos principais de inércia do satélite e o último é uma função das componentes do momento angular dos rotores. Para alguns valores particulares dos parâmetros, foi possível obter um número mínimo de raízes reais para as equações algébricas. Em casos gerais, um programa computacional é utilizado para obter estas raízes reais e para as raízes encontradas, poucas correspondem a orientações de equilíbrio estáveis.

Benettin et al. (1985) provaram o teorema de Nekhoroshev, o qual está associado com a estimativa exponencial para o tempo de duração da estabilidade em sistemas hamiltonianos quase integráveis. A diferença deste desenvolvimento em relação ao já conhecido, referente a hamiltoniana conveniente perturbada com propriedades genéricas, é que se considera uma hamiltoniana. Este teorema foi utilizado por Steichen & Giorgilli (1998) para estudar a estabilidade de órbitas de satélites ao redor da Terra, utilizando um modelo simplificado que inclui o achatamento do planeta, com o potencial até a ordem do  $J_2$ . Os desenvolvimentos não incluem os demais termos do potencial perturbador da Terra, as perturbações devido a Lua e Sol e os efeitos não conservativos. O objetivo foi verificar a relevância física da estabilidade de longa duração prevista pela teoria de Nekhoroshev. Órbitas particulares foram estudadas, considerando inclinações diferentes da inclinação crítica. Foi mostrado que em tais condições, as órbitas possuem uma estabilidade muito forte para excentricidades moderadas. As regiões investigadas contêm várias órbitas reais de satélites artificiais e a estabilidade é assegurada por um longo período de tempo, em muitos casos maior que a idade do sistema solar. Este trabalho confirmou que a estabilidade de longa duração prevista pela teoria de Nekhoroshev pode ser relevante para sistemas físicos.

Heggie (1985) analisou um sistema hamiltoniano autônomo com três ou mais graus de liberdade. Neste caso a família de órbitas periódicas pode se tornar instável, quando dois pares de multiplicadores característicos em um círculo unitário não são iguais a  $\pm 1$ , sendo que eles se deslocam para fora do círculo unitário. O trabalho utilizou formas normais para as vizinhanças das instabilidades e com esta aproximação demonstra a bifurcação de órbitas periódicas de um toro bidimensional invariante. A teoria é ilustrada pelo cálculo numérico de órbitas do problema planar de três corpos.

Cordeiro (1994) também apresentou um estudo da estabilidade linear de pontos de equilíbrio e de órbitas periódicas. Esta análise é realizada através dos auto-valores e da forma normal da matriz de Jordan, quando se trata de ponto de equilíbrio, e da matriz de monodromia no caso de órbita periódica. Informações importantes são obtidas quando o estudo dos auto-valores associa-se à teoria de Krein. A principal característica desta teoria é permitir saber se soluções estáveis a priori permanecerão como tal se alguns parâmetros internos são alterados ou se pequenas perturbações conservativas são aplicadas.

Diversos outros trabalhos relacionados com a estabilidade de corpos rígidos continuaram a ser desenvolvidos.

O trabalho de Teofilatto & Graziani (1996) trata do movimento libracional tridimensional de um veículo espacial em torno de seus eixos principais de inércia. Mostra-se a existência de movimentos periódicos e quase-periódicos assim como trajetórias caóticas no espaço de fase. O movimento quase-periódico é investigado pela redução do sistema para sua forma normal, no caso de órbitas circulares e excêntricas. Em ambos os casos a transformação de normalização reduz o sistema para três osciladores harmônicos, que representam os movimentos de rolamento, arfagem e guinada. Para simplificar a transformação, o sistema como um todo é reduzido a três osciladores independentes. A transformação normal é sujeita a ressonância, e os sistemas

próximos a estas ressonâncias são estudados pela hamiltoniana próxima à ressonância, nos quais os pontos estacionários emergem para soluções periódicas. Estes pontos estacionários são utilizados como dados iniciais para a aplicação do algoritmo de Newton Raphson para obtenção da superfície de Poincaré do sistema e para obter trajetórias de atitude periódicas de veículos espaciais de alta excentricidade. Os movimentos irregulares são também analisados e, após evidências numéricas, é discutido a transição do movimento regular para o caótico. É observado movimento irregular em torno de soluções periódicas instáveis, as quais estão associadas a bifurcações de trajetórias periódicas estáveis devido ao crescimento da excentricidade. Considerações relacionadas com a interação entre as oscilações da atitude e do movimento orbital também são apresentadas.

El-Gohary (1997) apresentou um estudo sobre a estabilidade da posição de equilíbrio e do movimento rotacional de um corpo rígido, contendo fluido incompressível em uma cavidade interior e que possui três rotores, sendo denominado de girostato. Os momentos de controle aplicados aos rotores, necessários para manter a estabilização da posição de equilíbrio e do movimento rotacional do corpo rígido são determinados. Os parâmetros de Rodrigues são utilizados para descrever o movimento. Em continuidade a este trabalho, Gohary (2000) propôs um esquema de controle para garantir a estabilização ótima do movimento rotacional de um girostato simétrico em órbita circular. O girostato é controlado pela ação dos torques gerados pelos rotores girando internamente. Neste estudo a estabilidade assintótica do movimento é analisada usando o teorema de Barbachen e Krasovskii e a lei de controle é deduzida das condições que asseguram a estabilidade assintótica ótima desejada para o movimento. Para um caso particular é demonstrado que a posição de equilíbrio do girostato, que ocorre quando o eixo principal de inércia coincide com o eixo orbital, é assintoticamente estável. Verificou-se que o método adotado é mais geral que o anterior (Gohary, 1997).

O estudo da estabilidade do movimento de três ou mais corpos rígidos também vem sendo desenvolvidos.

Elipe & Ferrer (1985) analisaram o problema restrito de três corpos rígidos sob a ação de forças centrais e obtiveram soluções de equilíbrio em que os corpos estão em posições colineares e triangulares. Uma aplicação para o caso de elipsóides assimétricos foi também realizada.

Maciejewski (1996) considerou o problema de dois ou mais corpos, mostrando que as equações do movimento podem ser colocadas na forma hamiltoniana com respeito a uma certa estrutura não canônica, sendo que o sistema possui uma certa simetria natural. Com a utilização desta simetria, o número de graus de liberdade do sistema foi reduzido, e as consequências desta redução são discutidas. Prova-se a existência de 36 equilíbrios relativos não Lagrangeanos para o caso do problema de dois corpos. Demonstra-se que esta abordagem permite simplificar a forma geral do potencial mútuo de dois corpos rígidos.

Michalakis & Mavraganis (1996) analisaram o problema restrito de  $2 + 2$  corpos, onde as massas infinitesimais são substituídas por corpos rígidos triaxiais e as equações do movimento são deduzidas à forma Lagrangeana. As soluções de equilíbrio para o movimento rotacional e translacional dos corpos são determinadas.

Fanny & Dadaoui (1998) provam a existência de algumas configurações de equilíbrio no problema de três corpos, onde dois corpos são pontuais e o terceiro é rígido (com forma homogênea esférica ou forma esférica com distribuição de massa não homogênea (diferentes momentos principais de inércia)). Em particular, condições de equilíbrio relativo do tipo Euler (quando as três massas são colineares), do tipo Lagrange quando as três massas são coplanares) e várias famílias de configurações de equilíbrio foram obtidas com o triângulo formado pelas três massas sendo isósceles ou não.

Mais recentemente, Kuzmina (1999) apresentou um método de análise de sistemas dinâmicos bastante elaborados, que permite obter a solução de problemas idealizados em mecânica. A abordagem geral, baseada na teoria de estabilidade de Liapunov, permite considerar vários sistemas mecânicos de um ponto de vista único e elaborar a tecnologia do modelamento com a organização de um esquema de decomposição para o sistema original, considerando as propriedades dinâmicas envolvidas. Com o método seguindo as idéias de Chetayev, combinadas com o método de Liapunov e métodos de teoria de perturbação, o trabalho trata casos específicos, que se caracterizam por exemplos concretos de natureza física. A abordagem utilizando, como suposições os postulados de estabilidade e postulados de singularidades, estende o conceito de estabilidade paramétrica para perturbações singulares. A seqüência do modelo idealizado simplificado é introduzida e as condições para suas equivalências qualitativas são determinadas.

Sosnitskii (2000) apresentou um critério para a análise da instabilidade do equilíbrio de sistemas giroscopicamente acoplados, quando as forças giroscópicas podem ser predominantes. Foi mostrado que a predominância das forças giroscópicas sobre as forças potenciais não assegura a estabilidade do equilíbrio. A estrutura das forças potenciais é o fator de decisão para a estabilidade. Uma aplicação é realizada para o movimento do satélite artificial considerado como um corpo rígido dinamicamente simétrico.

O estudo da estabilidade utilizando o processo de forma normal, o teorema de Arnold e suas extensões vêm sendo desenvolvidos em alguns trabalhos. São citados aqui, mesmo que não relacionados com o movimento rotacional, para a demonstração de sua aplicabilidade.

Elipe *et al* (2001) apresentam um sistema com dois graus de liberdade em que é utilizado o teorema de Arnold para estudar a estabilidade não linear na vizinhança da origem quando a parte quadrática da hamiltoniana não está na forma definida. Neste caso, uma normalização prévia de ordens superiores é

necessária, a qual reduz a hamiltoniana em polinômios homogêneos nas coordenadas de ação. No caso de ressonâncias não é possível trazer a hamiltoniana à forma normal requerida pelo teorema de Arnold. Assim a estabilidade é determinada pela análise do fluxo de fase normalizado. A normalização até uma ordem arbitrária é obtida através da transformação de Lie-Deprit usando uma generalização das variáveis de Lissajous.

Riaguas *et al* (2001) desenvolvem um estudo da estabilidade não linear do equilíbrio correspondente ao movimento de uma partícula orbitando ao redor de um segmento reto finito. O potencial é uma função logarítmica e pode ser considerado como uma aproximação gerada por corpos celestes longos. Por meio do teorema de Arnold para formas quadráticas não definidas foi determinada a estabilidade orbital de equilíbrio, para todos os valores de um parâmetro do problema, incluindo casos ressonantes.

No artigo de Lanchares e Pascual (2003), a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema hamiltoniano de dimensão 2, na presença de ressonâncias, é determinada por meio de um critério geométrico, quando a parte quadrática correspondente não tem sinal definido. Isto comprova que este método é o complemento geométrico do teorema de Cabral e Meyer, o qual constitui uma extensão do teorema de Arnold.

Elipe e López-Moratalla (2004) apresentam a estabilidade de Liapunov para pontos estacionários ao redor de um corpo central. Para determinar esta estabilidade construíram a forma normal em torno do ponto de equilíbrio para aplicar o teorema de estabilidade de Arnold. Uma análise na presença de ressonâncias também é feita, para a qual o teorema de Arnold não é aplicável, sendo necessário utilizar uma nova técnica relacionada à forma normal para se determinar a estabilidade orbital. O processo considera os coeficientes harmônicos como parâmetros. Encontraram a estabilidade de Liapunov e seu diagrama no plano paramétrico para os pontos estacionários. Ressonâncias 2:1 e 3:1 foram estudadas, através de altas ordens de normalização.



No trabalho de Gutiérrez-Romero *et al* (2004) é dado um método para calcular explicitamente expressões assintóticas na vizinhança de variedades invariantes correspondentes aos pontos de equilíbrio colineares para a hamiltoniana definida pelo movimento de uma partícula que órbita ao redor de um segmento reto finito. Isso é feito utilizando o método da forma normal, fazendo duas transformações de Lie diferentes para a hamiltoniana original:

- 1) ou calcula a função de Hamilton correspondente à variedade central de um dos pontos de equilíbrio colineares;
- 2) ou determina a hamiltoniana relacionada com as direções estável-instável.

Por meio de (1) parametriza-se o centro, as variedades estáveis e instáveis do sistema original que usa as mudanças diretas de coordenadas das duas transformações. Usando (1) calcula-se um toro de dimensão 2 e órbitas quasiperiódicas.

O estudo destes artigos foi útil para o desenvolvimento do projeto aqui realizado. Observa-se que em muitos deles a análise da estabilidade requer a determinação da forma normal da hamiltoniana, o que será é um dos principais enfoques desta tese.

Alguns detalhes do processo de determinação da forma normal da hamiltoniana são apresentados nos artigos a seguir.

Machuy (2001) desenvolveu um manipulador algébrico para a determinação da forma normal parcial para a hamiltoniana de Hill. Este manipulador consta de um grupo de rotinas para calcular operações aritméticas com polinômios, derivada de Lie e derivadas parciais de polinômios. O problema de Hill é uma aproximação do problema de três corpos apropriado para o estudo de um satélite perto do corpo secundário, por exemplo, a Lua.

Costa Filho (2002) estudou uma forma normal para sistemas dinâmicos visando obter um novo sistema que proporcione a análise das posições de

equilíbrio e soluções periódicas, do sistema dado. O processo, de modo geral, não converge, entretanto por truncamento, são obtidos sistemas auxiliares muito próximos do sistema dado, tornando o método válido.

Stuchi (2002) apresenta a versão espacial do problema de Hill 3-D que oferece uma riqueza da estrutura do espaço de fase que ajuda a compreender os sistemas hamiltonianos 3-D. O foco do artigo são os dois pontos de equilíbrio L1 e L2 (centro-sela-centro) e a estrutura de sua vizinhança. Construiu-se uma forma normal parcial (PNF) que provê um conhecimento da dinâmica da variedade central associada ao caráter elíptico de pontos de equilíbrio. A seqüência necessária para a normalização da hamiltoniana é detalhada neste artigo. A instabilidade devido à parte hiperbólica é eliminada por meio de mudança de variáveis através do método de série de Lie e condições iniciais apropriadas. Este sistema hamiltoniano reduzido e a seção de Poincaré apropriada para seu fluxo mostra os objetos principais em uma certa vizinhança de L1 e L2 como órbitas periódicas e torus KAM invariantes. A série obtida diverge, exceto para variedade central unidimensional do problema planar de Hill.

Estes três últimos trabalhos foram bastante utilizados para a determinação da forma normal da hamiltoniana apresentada no Capítulo 5 desta tese.



### 3 CONCEITOS BÁSICOS

Alguns problemas relacionados com a pesquisa espacial requerem uma análise detalhada do movimento rotacional. Dentre eles pode-se destacar: a) a análise de sinais obtidos através do satélite; b) a radiação solar que pode ser investigada desde que os instrumentos a bordo do satélite estejam iluminados, em condições de iluminação que dependem do movimento do satélite em torno de seu centro de massa; c) a avaliação do campo geomagnético na posição em que o satélite se encontra depende também da sua atitude; d) o controle passivo da posição e da atitude de satélites, com a utilização de torques ambientais.

O movimento de um satélite é especificado pela sua posição, velocidade, orientação e velocidade de rotação. As duas últimas quantidades descrevem o movimento rotacional do veículo em torno do centro de massa, sendo que a sua orientação no espaço é denominada atitude.

A atitude expressa a relação entre dois sistemas de coordenadas, um sistema fixo no satélite (o qual acompanha o movimento rotacional deste) e o outro sistema com a mesma origem do primeiro, mas com eixos paralelos a um sistema de referência fixo (em geral o sistema equatorial terrestre). Se o satélite possui uma rotação em torno de um certo eixo, então, sua orientação ou atitude varia a cada instante. Assim a velocidade de rotação e a atitude estão relacionadas. Existem muitas maneiras de se representar a atitude, mas neste trabalho são utilizadas as variáveis de Andoyer. Assim, inicialmente, neste Capítulo são introduzidos os diversos sistemas de referências utilizados neste trabalho, o conjunto de variáveis canônicas de Andoyer (utilizadas para descrever o movimento rotacional do satélite) e as variáveis de Delaunay (utilizadas para descrever o movimento translacional do satélite).

No estudo da estabilidade da atitude de satélites artificiais surge a necessidade de se conhecer alguns conceitos sobre teoria de estabilidade. A partir de resultados recentes da teoria clássica de perturbações, novas incursões têm

sido feitas sobre o problema da estabilidade (Giorgilli, 1989). Diversas abordagens sobre estabilidade de sistemas não lineares vem sendo realizadas, considerando que sob certas condições a estabilidade de um sistema não linear pode ser decidida usando resultados obtidos do sistema linearizado (Szebehely, 1984). Tais técnicas são baseadas no teorema de Liapunov, superfície de seção de Poincaré, teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM), teorema de Nekhoroshev (que envolve tempo infinito) e outras. Deste modo, neste Capítulo também são introduzidos conceitos de pontos de equilíbrio, discussões preliminares da estabilidade destes pontos e o conceito de estabilidade de Liapunov.

### **3.1 Sistemas de Coordenadas, Variáveis de Andoyer e Variáveis de Delaunay**

Os sistemas de coordenadas, apropriados ao estudo do movimento rotacional aqui realizado, são: sistema de eixos principais de inércia do satélite (fixo no satélite e com direções coincidentes com as direções dos momentos principais de inércia do satélite e, aqui, denominado de sistema principal), sistema inercial (aqui denominado sistema do satélite, com direções paralelas ao sistema equatorial terrestre) e o sistema do momento angular (com seu eixo  $Oz_m$  coincidente com a direção do vetor momento angular de rotação  $L_2$ ). O sistema do satélite e o sistema principal (Shuster, 1994) se relacionam através dos ângulos de Euler  $(\varphi, \theta, \psi)$ , representados juntamente com um sistema intermediário  $Ox'y'z'$  na Figura 3.1.

As coordenadas generalizadas que descrevem o movimento rotacional devem ser escolhidas adequadamente. Em alguns casos se utilizam os ângulos de Euler  $(\varphi, \theta, \psi)$  e seus momentos generalizados para descrever a atitude de um satélite artificial.

No entanto, neste trabalho é de nosso interesse utilizar as variáveis de Andoyer ( $I_1, I_2, I_3, L_1, L_2, L_3$ ) para descrever o movimento rotacional do satélite. A utilização das variáveis de Andoyer, por serem canônicas, facilita a aplicação de métodos de teoria de perturbação, quando se deseja fazer uma abordagem analítica ao movimento rotacional, além do fato destas variáveis possuírem um significado físico. O significado das variáveis surge naturalmente quando relacionamos o sistema do momento angular, com sistema do satélite e com o sistema principal (Kinoshita,1972; Lum & Bloch,1999).

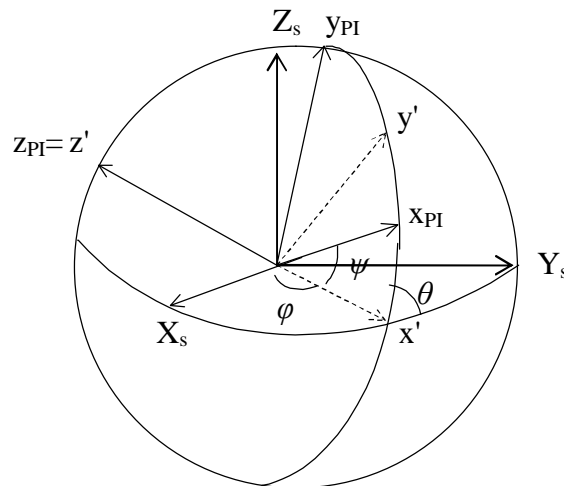


FIGURA 3.1 - Sistema principal ( $O_{X_{PI}Y_{PI}Z_{PI}}$ ), Sistema do satélite ( $O_{X_s Y_s Z_s}$ ) e os Ângulos de Euler ( $\varphi, \theta, \psi$ ), sistema intermediário ( $O_{x' y' z'}$ )

As variáveis angulares  $I_i$  são ângulos entre eixos coordenados e intersecções dos planos de referência, e estão representados na Figura 3.2, sendo:

- $I_1$  o ângulo entre o eixo principal  $O_{X_{PI}}$  e a interseção do plano principal  $X_{PI}Y_{PI}$  com o plano do momento angular;
- $I_2$  é o ângulo entre a interseção do plano principal  $X_{PI}Y_{PI}$  com o plano do momento angular e a interseção do plano do momento angular com plano inercial  $X_s Y_s$ ;

- $I_3$  o ângulo entre o eixo inercial  $OX_s$  e a interseção do plano do momento angular com o plano inercial  $X_s Y_s$ .

As variáveis métricas  $L_i$  são definidas como:

- $L_2$  é o módulo do vetor do movimento angular de rotação  $\mathbf{L}_2$ ;
- $L_1$  é a componente de  $\mathbf{L}_2$  no eixo principal  $OZ_{PI}$  dada por:

$$L_1 = L_2 \cos J_2, \quad (3.1)$$

com  $I_2$  sendo o ângulo que  $\mathbf{L}_2$  forma com o eixo inercial  $OZ_s$ ;

- $L_3$  é a componente de  $\mathbf{L}_2$  no eixo do satélite  $OZ_s$  dada por:

$$L_3 = L_2 \cos I_2, \quad (3.2)$$

com  $J_2$  sendo o ângulo que  $\mathbf{L}_2$  forma com o eixo principal  $OZ_{PI}$

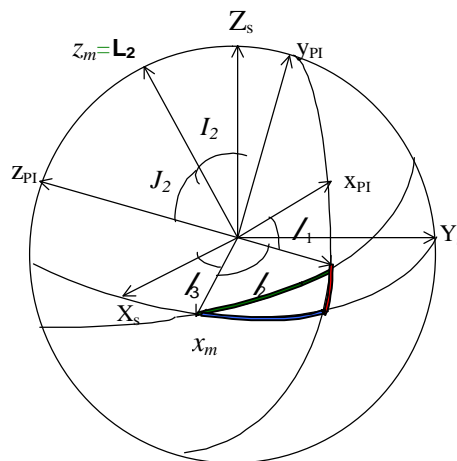


FIGURA 3.2 - Sistema principal ( $O_{X_{PI}Y_{PI}Z_{PI}}$ ), Sistema do satélite ( $O_{X_sY_sZ_s}$ ), Sistema do momento angular ( $O_{x_my_mz_m}$ ) e Variáveis de Andoyer

Para descrição do movimento translacional do satélite, admitido conhecido, são utilizadas aqui as variáveis de Delaunay. Tal grupo de variáveis é definido em

termos dos elementos orbitais, ou seja, longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ), inclinação orbital ( $I$ ), argumento do perigeu ( $w$ ), anomalia média ( $M$ ), semi-eixo maior ( $a$ ) e excentricidade ( $e$ ).

Os sistemas de coordenadas que se relacionam através dos ângulos  $I$ ,  $\Omega$  e  $w + v$  são, respectivamente, o sistema equatorial terrestre (origem no centro de massa da Terra e com o plano  $X_e Y_e$  coincide com o plano do equador) e o sistema orbital (origem no centro de massa da Terra, o plano  $x_o y_o$  está no plano da órbita do satélite, sendo o eixo  $x_o$  apontado ao longo do raio vetor que une o centro de massa do satélite ao centro de massa da Terra). Estes sistemas estão representados na Figura 3.3 juntamente com alguns elementos orbitais. As variáveis de Delaunay são definidas por (Brouwer & Clemence, 1961):

$$\begin{aligned}
 L &= M\sqrt{\mu a} & I &= M \\
 G &= L\sqrt{1-e^2} & g &= w \\
 H &= G\cos I & h &= \Omega
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

sendo:  $M$  a massa do satélite e  $\mu$  a constante gravitacional da Terra.

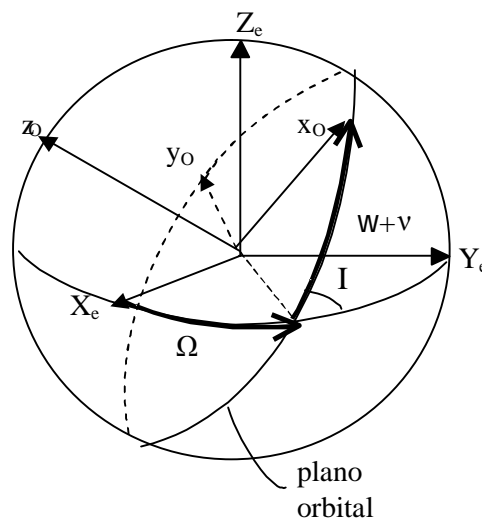


FIGURA 3.3 - Sistema Equatorial Terrestre ( $OX_e Y_e Z_e$ ), Sistema Orbital ( $Ox_o y_o z_o$ )



### 3.2 Torque de Gradiente de Gravidade

O sistema de equações que descreve o movimento rotacional dos satélites artificiais depende das componentes de torques externos. Portanto, é imprescindível, na análise de uma missão espacial, a avaliação das magnitudes destes torques ambientais (externos) em função da posição em que o veículo se encontra em sua órbita.

O torque externo estudado aqui e que afeta a atitude é o *Torque de Gradiente de Gravidade* (TGG).

O Torque de Gradiente de Gravidade ocorre devido ao gradiente de força gravitacional existente entre diferentes partes do satélite, dependendo da distribuição de sua massa e da forma (através dos momentos principais de inércia). Este torque é inversamente proporcional ao cubo do raio vetor que liga o centro de massa do satélite ao centro de massa da Terra, com sua magnitude decrescendo com o aumento da altitude. Este torque é importante quando o corpo não possui simetria esférica na distribuição de sua massa ou quando o eixo de rotação do satélite não se alinha na direção do vetor posição do centro de massa do satélite com relação à Terra (Zanardi, 2005).

A força gravitacional atrai cada elemento infinitesimal de massa " $dm$ " de um corpo com uma determinada intensidade e direção, uma vez que cada elemento possui o vetor posição " $\vec{r}_T$ " em relação ao centro de massa (CM) da Terra. Logo, conclui-se que essa diferença de atração em cada elemento de massa gera o torque.

O TGG costuma ser utilizado na estabilização de satélites que necessitam de uma boa precisão no seu apontamento. Isso é possível devido à existência de dois pontos de equilíbrio estáveis, os quais estão defasados de  $180^\circ$  (Kaplan, 1976).

Verifica-se também que o torque decresce com o cubo da altitude, o que torna inviável a estabilização de satélites de órbitas altas (geo-estacionários, por exemplo) por gradiente de gravidade, devido à pequena ordem de grandeza deste torque.

### 3.3 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

#### 3.3.1 Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico é aquele que evolui ou muda com o tempo. As equações diferenciais que regem o movimento de sistemas dinâmicos são geralmente complexas e não possuem solução exata, principalmente quando se trata de equações não lineares. A utilização de métodos de teoria linear no estudo de sistemas não lineares necessita de um processo de linearização do sistema. No processo de linearização pode-se analisar o comportamento do sistema na vizinhança de movimentos conhecidos, sendo que a solução do sistema pode ser constante ou variar como o tempo. Ponto fixo ou solução de equilíbrio são denominações dadas para soluções constantes, enquanto solução dinâmica é a denominação dada para soluções que variam com o tempo, por exemplo, órbitas periódicas.

Um sistema dinâmico contínuo, descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, é autônomo se o tempo não aparece explicitamente nas equações, isto é:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.4)$$

sendo que  $f$  não depende explicitamente do tempo  $t$ , e, por isso, o sistema é dito invariante no tempo, independente do tempo ou estacionário.

Um sistema dinâmico é não-autônomo quando depende explicitamente do tempo, isto é:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x}, t), \quad \begin{cases} \bar{x} \in \mathbb{R}^n \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.5)$$

sendo que  $f$  depende explicitamente de  $t$ , por isso, o sistema é freqüentemente chamado de campo vetorial. O vetor  $\bar{x}$  é chamado vetor de configuração porque descreve a posição do sistema e o espaço  $\mathbb{R}^n$  em que o sistema evolui é chamado de espaço de configuração.

Uma projeção da solução sobre o espaço de configuração  $n$ -dimensional é chamada de trajetória ou órbita e representam a evolução das soluções com o tempo. O conjunto de todas as trajetórias ou órbitas representado em  $(\bar{x}, t) \in \mathbb{R}^{2n}$  é chamado diagrama de fase.

### 3.4 Sistema Hamiltoniano

Sejam dois conjuntos de variáveis  $\bar{q}_i \in \mathbb{R}^n$  e  $\bar{p}_i \in \mathbb{R}^n$ . Um sistema hamiltoniano é definido por um sistema de equações diferenciais do tipo:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{q}_i}{dt} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i}, \\ \frac{d\bar{p}_i}{dt} &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_i}, \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.6)$$

sendo  $\bar{q}_i, \bar{p}_i$ , respectivamente, as coordenadas generalizadas e os momentos generalizados do sistema, e  $\bar{H}(\bar{p}_i, \bar{q}_i)$  uma função escalar denominada de hamiltoniana, que pode depender ou não explicitamente do tempo.

### 3.5 Tipos de Pontos de Equilíbrio

Os pontos de equilíbrio dos sistemas dinâmicos (3.4) e (3.5) ou sistema hamiltoniano (3.6) são determinados quando o lado direito destas equações se anulam, ou seja, são as soluções das equações:

- para o sistema dinâmico autônomo (3.4):

$$f(\bar{x}) = 0 ; \quad (3.7)$$

- para o sistema dinâmico não autônomo (3.5):

$$f(\bar{x}, t) = 0 ; \quad (3.8)$$

- para o sistema hamiltoniano (3.6):

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_i} = 0. \quad (3.9)$$

Os tipos de pontos de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais podem ser determinados através da linearização das equações dinâmicas, (3.4) ou (3.5), ou equações hamiltonianas, (3.6), em torno desses pontos de equilíbrio. Considerando o caso bidimensional ( $n=2$ ), para cada solução encontrada, casos diferentes de combinações de auto-valores são obtidos. O sistema linear de dimensão 2:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{A}\bar{x}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.10)$$

com  $\bar{A}$  sendo uma matriz constante :

$$\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]_{2 \times 2}, \quad (3.11)$$

tem como solução geral:

$$\varphi(t) = \bar{c}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{h}^1 + \bar{c}_2 e^{\bar{\lambda}_2 t} \bar{h}^2, \quad (3.12)$$

sendo,  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$  auto-vetores associados aos auto-valores  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  da matriz  $\bar{A}$  e  $\bar{c}_1, \bar{c}_2$  constantes arbitrárias.

Os pontos de equilíbrio podem ser classificados como:

1)  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  são reais e distintos.

a) No caso em que  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  têm o mesmo sinal, o ponto fixo é denominado **nó** ou **ponto nodal**. Se ambos os auto-valores são positivos é definida uma **fonte**. Se ambos os auto-valores são negativos é definido um **poço** ou **sumidouro**.

b) No caso em que  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  têm sinais opostos, o ponto de equilíbrio é denominado **Ponto de Sela**.

2)  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  são complexos conjugados.

a) Considerando  $\bar{\lambda}_{1,2} = \hat{\alpha} \pm \hat{\beta}i$ , se  $\hat{\alpha} \neq 0$  as trajetórias descrevem uma espiral em torno do ponto fixo chamado **foco**, que pode ser estável ou instável se  $\hat{\alpha} > 0$  ou  $\hat{\alpha} < 0$ , respectivamente.

b) Se  $\hat{\alpha} = 0$ , temos que  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  são imaginários puros. Este ponto fixo é chamado **centro**.

3)  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  são reais e iguais.

Neste caso, no plano de fase as órbitas são linhas retas através da origem e os pontos fixos também chamados de **nó próprio** ou **ponto nodal próprio**.

### 3.5.1 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

Quando aplicamos uma pequena perturbação no sistema, de modo a afastá-lo de seu estado e sua solução sempre retorna ao ponto de equilíbrio, temos um **ponto de equilíbrio estável**. Caso contrário tem-se um **ponto de equilíbrio instável**. Uma maneira simples de identificar a estabilidade de um ponto é verificando de modo qualitativo os movimentos do sistema pelo diagrama de

fase. Nos diagramas de fase das figuras a seguir, as flechas indicam o sentido da evolução temporal.

1) No caso do ponto de equilíbrio em que  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  são reais, distintos e mesmo sinal, temos que as trajetórias no plano de fase são parábolas e podem ser definidas como:

a) **Nó ou Nodo Estável** (sumidouro) quando  $\bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_1 < 0$ , pois quando o sistema se afasta do ponto ele retorna, como mostram as flechas no diagrama de fase:

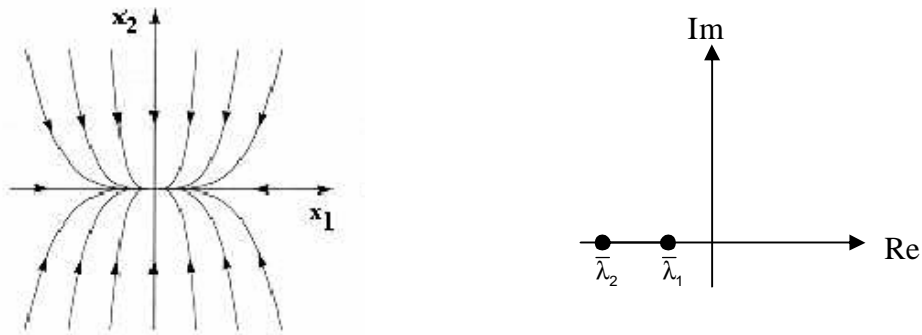


FIGURA 3.4 – Diagrama de fase para  $\bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_1 < 0$

b) **Nó ou Nodo Instável** (fonte) quando  $\bar{\lambda}_2 > \bar{\lambda}_1 > 0$ , pois quando o sistema afasta do ponto ele não retorna, como mostram as flechas no diagrama de fase:

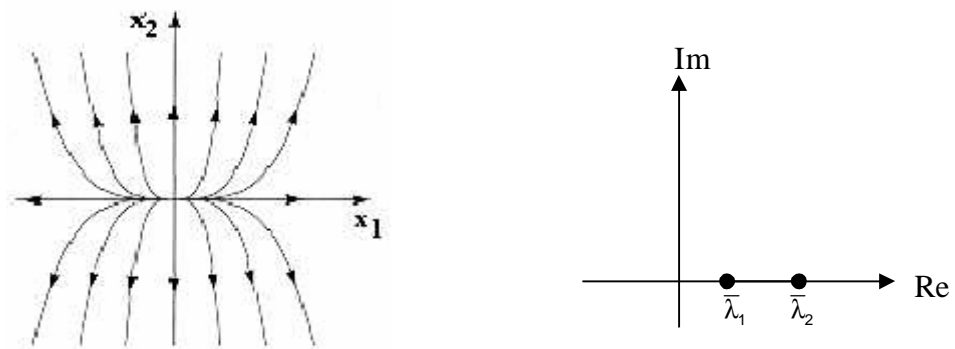


FIGURA 3.5 – Diagrama de fase para  $\bar{\lambda}_2 > \bar{\lambda}_1 > 0$

2) No caso do ponto de equilíbrio em que  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  são reais, distintos e sinais opostos, temos que as trajetórias no plano de fase são hipérbolas:

c) **Ponto de Sela** quando  $\bar{\lambda}_1 < 0 < \bar{\lambda}_2$  é um ponto de equilíbrio sempre instável.

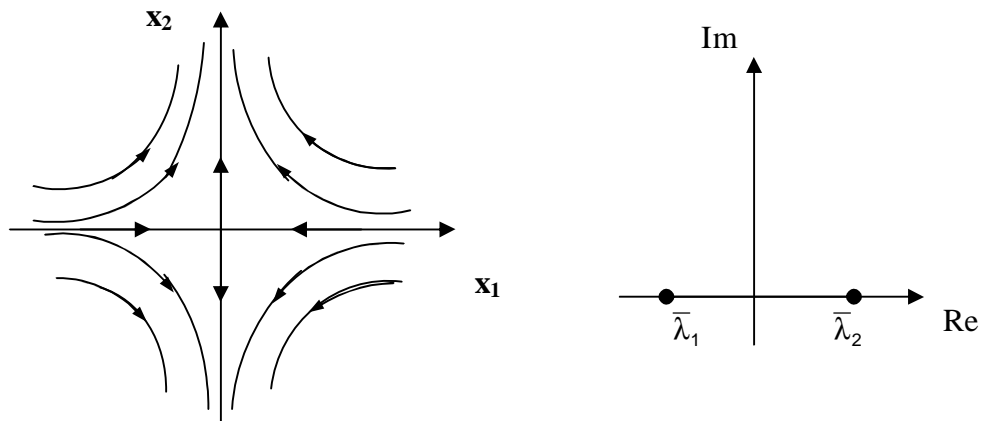


FIGURA 3.6 – Diagrama de fase para  $\bar{\lambda}_1 < 0 < \bar{\lambda}_2$ , reais

3) No caso do ponto de equilíbrio em que  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  são complexos conjugados, temos que as trajetórias no plano de fase são espirais:

a) **Foco estável** quando  $\hat{\alpha} < 0, \hat{\beta} > 0$  a órbita espirala em direção ao centro, ou seja, ao ponto fixo.

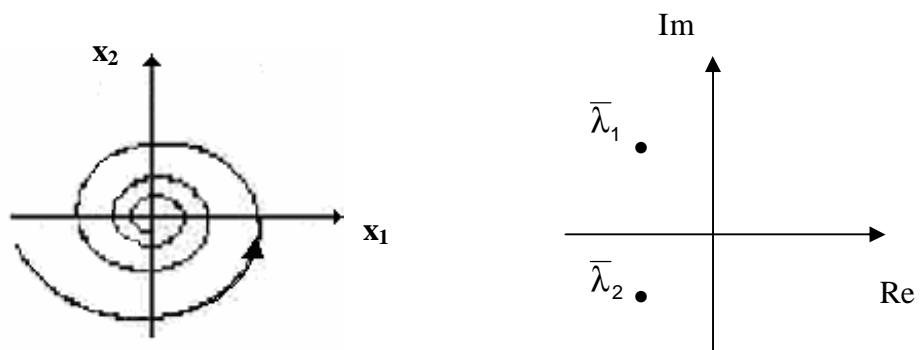


FIGURA 3.7 – Diagrama de fase para  $\bar{\lambda}_{1,2} = \hat{\alpha} \pm \hat{\beta}i$ ,  $\hat{\alpha} < 0, \hat{\beta} > 0$

- b) **Foco instável** quando  $\hat{\alpha} > 0, \hat{\beta} > 0$  a órbita se afasta do centro, ou seja, ao ponto fixo, espiralando para fora.

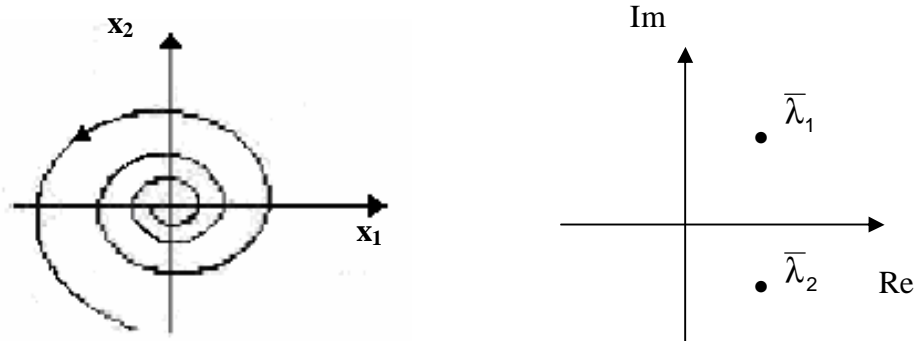


FIGURA 3.8 – Diagrama de fase para  $\bar{\lambda}_{1,2} = \hat{\alpha} \pm \hat{\beta}i$ ,  $\hat{\alpha} > 0, \hat{\beta} > 0$

- c) **Centro (ponto fixo estável)** quando  $\hat{\alpha} = 0$ , temos que  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  são imaginários puros.

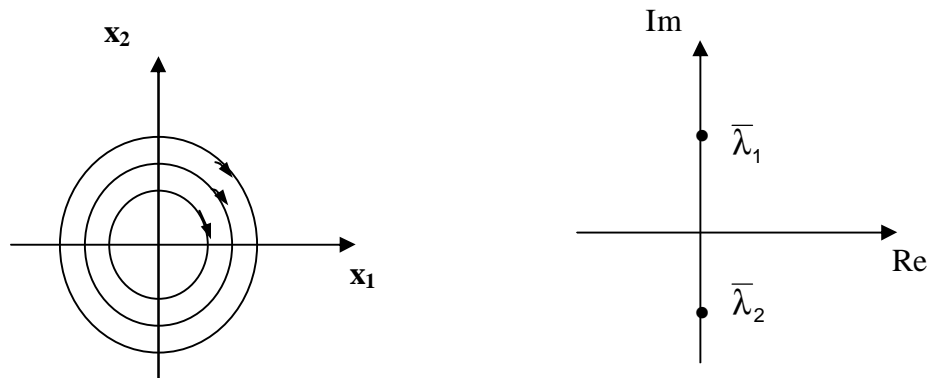


FIGURA 3.9 – Diagrama de fase para  $\bar{\lambda}_{1,2} = \pm \hat{\beta}i$

4) No caso do ponto de equilíbrio em que  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  são reais e iguais, temos que as trajetórias no plano de fase são retas através da origem:

- a) **Nó ou Nodo Próprio Estável** quando  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 < 0$  as retas convergem para o ponto fixo:



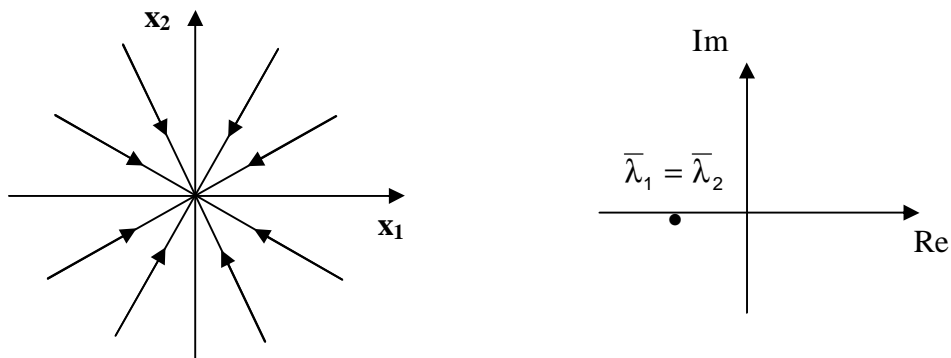


FIGURA 3.10 – Diagrama de fase para  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 < 0$

b) **Nó ou Nodo Próprio Instável** quando  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 > 0$  as retas divergem do ponto fixo:

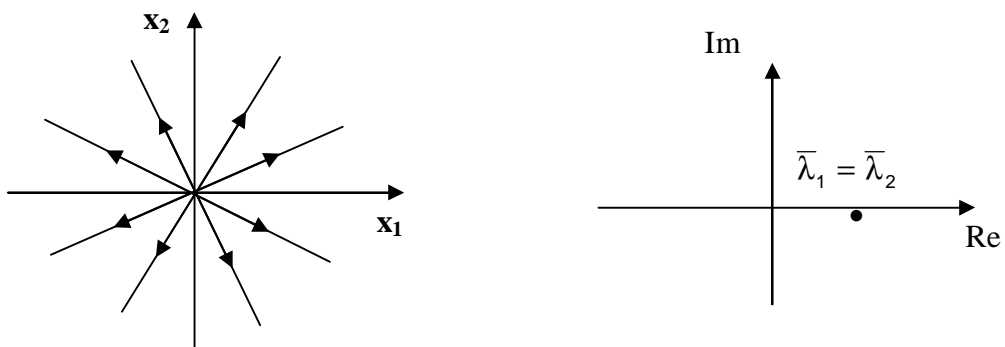


FIGURA 3.11 – Diagrama de fase para  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 > 0$

### 3.6 Órbitas Periódicas

Os sistemas dinâmicos podem algumas vezes ter oscilações periódicas ou não. Uma solução periódica de um sistema autônomo corresponde a órbitas fechadas ou ciclos no espaço de fase. As órbitas fechadas no  $\mathbb{R}^2$  são soluções periódicas que não se interceptam devido à unicidade (Verhulst, 1990). Em um sistema dissipativo, tal órbita é também chamada de **ciclo limite**. Existem questões fundamentais associadas ao estudo de órbitas periódicas: existência e determinação da estabilidade. Apresentamos aqui o critério de Bendixson e o

Teorema de Poincaré-Bendixson que nos permite analisar a existência de ciclos limites no plano.

### 3.6.1 Critério de Bendixson

Consideremos o sistema autônomo:

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad \frac{d\bar{x}_2}{dt} = \bar{f}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad (3.13)$$

em um domínio  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ . Então podemos descrever o critério de Bendixson como (Verhulst, 1990): se o divergente de  $\bar{f}_1$  e  $\bar{f}_2$  ( $\nabla \bullet (\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ ) não tem sinal definido (muda o sinal) ou é identicamente zero então **existe órbita periódica**.

O critério de Bendixson é condição necessária, mas não suficiente para a existência de órbitas periódicas. E ainda é válido apenas para sistemas de 2ª ordem, não sendo possível estender para ordens superiores.

### 3.6.2 Teorema de Poincaré-Bendixson

Definindo inicialmente uma notação para indicar o comportamento da solução  $\gamma$ :

$$\text{Para } t \geq 0 \rightarrow \gamma^+(x^0)$$

$$\text{Para } t \leq 0 \rightarrow \gamma^-(x^0)$$

O conjunto de todos os pontos limites positivos de uma órbita  $\gamma$  é denominado conjunto  $\omega$ -limite. O conjunto de todos os pontos limites negativos é denominado conjunto  $\alpha$ -limite. Sendo assim pode-se agora enunciar o teorema. Considere a equação:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (3.14)$$

e assumamos que  $\gamma^+$  é uma órbita positiva, ou seja, limitada e que  $\omega(\gamma^+)$  contém apenas pontos ordinários (que não são pontos críticos). Então,  $\omega(\gamma^+)$  é uma órbita periódica. Se  $\omega(\gamma^+) \neq \gamma^+$  a órbita periódica é um ciclo limite (análogo para uma órbita  $\gamma^-$  negativa limite).

Uma técnica numérica que nos possibilita a avaliação da estabilidade do movimento periódico é denominada seção de Poincaré, no qual essa órbita aparecerá como um ponto fixo. A seção de Poincaré relaciona o cruzamento da trajetória num plano adequadamente definido com o cruzamento subsequente do plano pela mesma trajetória. Poincaré faz a análise através de métodos qualitativos, entendendo o problema globalmente, verificando os movimentos possíveis e estabilidades associadas.

Tal técnica traz várias vantagens no estudo de equações diferenciais ordinárias como por exemplo:

- a) redução da dimensão do sistema;
- b) grande facilidade de interpretação.

### 3.7 Estabilidade de Liapunov

A análise de estabilidade de Liapunov fornece uma definição geométrica de estabilidade de um estado de equilíbrio. Seja um sistema de equações diferenciais n-dimensional:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x}) \tag{3.15}$$

sendo  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ , cuja solução é determinada pelas condições iniciais e é dada por  $\bar{x} = \bar{x}(\bar{x}_0, t)$ , e com estado de equilíbrio é caracterizado por:

$$\bar{F}(\bar{x}_0) = 0, \quad \bar{x}_0 = \bar{x}(\bar{x}_0, t_0) \tag{3.16}$$

Então a estabilidade pode ser definida segundo Liapunov da seguinte forma:

1. Uma solução  $\bar{x}(\bar{x}_e, t)$  é **estável no sentido de Liapunov** se para qualquer número pequeno  $\varepsilon > 0$  existe um número  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que  $\|\bar{x}_0 - \bar{x}_e\| < \delta(\varepsilon)$  implica  $\|\bar{x}(\bar{x}_0, t) - \bar{x}(\bar{x}_e, t)\| < \varepsilon$ ,  $t_0 \leq t < \infty$ . A solução  $\bar{x} = \bar{x}(\bar{x}_0, t)$  permanece o tempo todo em um tubo fino em torno de  $\bar{x}(\bar{x}_e, t)$ .
2. A solução  $\bar{x}(\bar{x}_e, t)$  é **instável** se ela não é estável, isto é, para a instabilidade sempre existe algum  $\varepsilon > 0$ , e algum  $\delta$  numa vizinhança de  $\bar{x}_e$ , para o qual  $\bar{x}(\bar{x}_0, t)$  deixa o tubo em algum momento  $t$ .

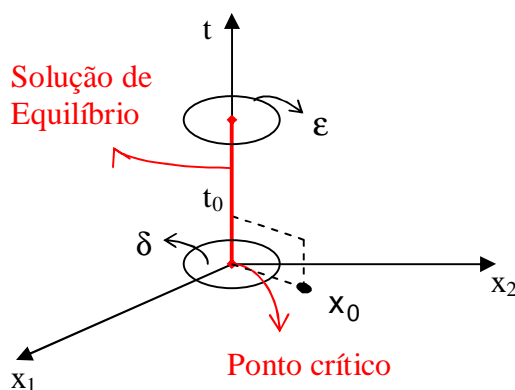


FIGURA 3.12 – Parâmetros da estabilidade de Liapunov

Das definições acima, nota-se que a estabilidade é uma dependência contínua e uniforme das condições iniciais e estas definições são locais. Existe um método para análise de estabilidade baseado em certas propriedades das denominadas funções de Liapunov e que permite estabelecer uma análise de estabilidade de caráter “global”. A principal dificuldade consiste na escolha de uma função conveniente.

Quando se fala em estabilidade deve-se distinguir ainda se a estabilidade é assintótica ou não e a estabilidade orbital (que também pode ser assintótica) (Minorsky, 1962).

No caso de sistemas hamiltonianos, o teorema KAM - Kolmogorov, Arnold, Moser (Giorgilli, 1989) dá condições que devem ser verificadas para que um movimento que sofra pequenas perturbações possa preservar características do movimento antes de ser perturbado. Se o espaço de fase de um sistema com  $n$  graus de liberdade for integrável, as trajetórias dos pontos representativos devem permanecer em um toro  $n$ -dimensional definido por  $n$  constantes  $c_i$  de movimento, independentes e em involução, isto é,  $\{c_i, c_j\} = 0$ , em que  $\{ \}$  é o parênteses de Poisson. O teorema KAM estabelece que, sob condições convenientes, as perturbações não destroem o toro, mas apenas o deforma, permanecendo a trajetória em torno de superfícies  $n$ -dimensionais vizinhas do toro inicial. As condições são bastante restritivas, pois além de supor que as perturbações são pequenas e deve-se estar adequadamente longe das ressonâncias. Antes de terminarmos esta breve introdução convém lembrar que sistemas hamiltonianos preservam a soma das áreas projetadas em cada par canônico  $(q_i, p_i)$ ,  $i = 1 \dots n$ . Isto faz com que seus pontos de equilíbrio sejam tais que se  $\lambda$  é auto-valor  $-\lambda$  também o é.

## 4 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Neste capítulo são introduzidas as equações do movimento utilizando a forma canônica das equações do movimento rotacional para torque conservativos, incluindo a hamiltoniana associada ao torque de gradiente de gravidade. As equações do movimento rotacional livre de torques externos são analisadas, obtendo-se os pontos e regiões de equilíbrio do movimento. Um estudo qualitativo do plano de fase do problema de Euler é realizado, considerando tanto o satélite simétrico (o qual possui dois momentos principais de inércia iguais) quanto o satélite não-simétrico (com todos os momentos principais de inércia diferentes). Uma análise da estabilidade, com levantamento das condições necessárias e suficientes para a estabilidade do movimento, com a obtenção de pontos e regiões de equilíbrio é feita. Finalizando este Capítulo, uma análise preliminar da estabilidade do movimento rotacional na presença do torque de gradiente de gravidade é discutida em termos do critério de Routh-Hurwitz.

### 4.1 Equações do Movimento em Variáveis de Andoyer

Como dito no Capítulo 3, as variáveis de Andoyer e as variáveis de Delaunay caracterizam o movimento do satélite em torno de seu centro de massa e o movimento do centro de massa do satélite em torno da Terra, respectivamente, e são adequadas para a utilização do formalismo hamiltoniano para descrever o movimento rotacional de um satélite artificial.

Na análise do movimento rotacional do satélite artificial aqui realizada é incluída a influência do torque de gradiente de gravidade considerando o satélite simétrico, o que corresponde a dois momentos principais de inércia iguais (momento principal A em torno do eixo  $x_{PI}$  igual ao momento principal B em torno do eixo  $y_{PI}$ ). O torque de gradiente de gravidade é causado pela diferença na intensidade e direção da força gravitacional com que diferentes partes do satélite são atraídas pela Terra. Deste modo, com o formalismo

hamiltoniano, as equações do movimento rotacional são dadas por (Kinoshita, 1972; Zanardi, 1986):

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{I}_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_i}, \\ \frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \mathcal{I}_i}; \end{cases} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4.1)$$

em que:  $L_i$ ,  $\mathcal{I}$  são as variáveis de Andoyer e  $F$  é a hamiltoniana do problema, que em termos das variáveis de Andoyer e de Delaunay, é expressa por (Zanardi, 1986):

$$\begin{aligned} F(L_1, L_2, L_3, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3, L, G, H, \mathcal{I}, g, h) = \\ F_0(L, L_1, L_2) + F_1(L_1, L_2, L_3, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3, L, G, H, \mathcal{I}, g, h); \end{aligned} \quad (4.2)$$

com  $L_1, L_2, L_3, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$  representando as variáveis de Andoyer, independente de  $\mathcal{I}$  e  $L, G, H, \mathcal{I}, g, h$  representando as variáveis de Delaunay, ambas introduzidas no Capítulo 3, e

$$F_0 = -\frac{\mu^2 M^3}{2L^2} + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right] L_1^2 + \frac{1}{A} L_2^2 \right\}; \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} F_1 = \frac{\mu^4 M^7}{L^6} \left\{ \frac{C-A}{M} \left\{ \left[ 1 + 3 \epsilon \cos \mathcal{I} \right] P_2 \left( \frac{L_1}{L_2} \right) \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{8} (1 + \theta^2 + \theta_2^2 - 3\theta^2 \theta_2^2) \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{8} \text{sen} 2I \text{sen} 2I_2 \cos(h - \mathcal{I}_3) - \frac{3}{8} \text{sen}^2 I \text{sen}^2 I_2 \cos(2h - 2\mathcal{I}_3) \right] + \right. \\ \left. - \frac{3}{16} (1 - 3\theta^2) \text{sen} 2I_2 \text{sen} 2J_2 \cos \mathcal{I}_2 + \frac{3}{16} (1 - 3\theta^2) \text{sen}^2 I_2 \text{sen}^2 J_2 \cos 2\mathcal{I}_2 + \right. \\ \left. + \sum_{\epsilon} \frac{3}{16} \text{sen} 2I (1 - \epsilon \theta_2) (1 + 2\epsilon \theta_2) \text{sen} 2J_2 \cos(h - \mathcal{I}_3 - \epsilon \mathcal{I}_2) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\varepsilon} \varepsilon \frac{3}{16} \text{sen}^2 I \text{sen} I_2 (1 - \varepsilon \theta_2) \text{sen} 2J_2 \cos(2h - 2\prime_3 + \varepsilon \prime_2) + \\
& - \sum_{\varepsilon} \varepsilon \frac{3}{16} \text{sen} 2I \text{sen} I_2 (1 - \varepsilon \theta_2) \text{sen}^2 J_2 \cos(h - \prime_3 + 2\varepsilon \prime_2) + \\
& - \sum_{\varepsilon} \frac{3}{32} \text{sen}^2 I (1 - \varepsilon \theta_2)^2 \text{sen}^2 J_2 \cos(2h - 2\prime_3 + 2\varepsilon \prime_2) \Big] + \\
& + P_2 \left( \frac{L_1}{L_2} \right) \left\{ \frac{3}{8} \text{sen}^2 I (1 - 3\theta_2^2) \left[ \cos(2\prime_+ 2g) + e \left[ -\frac{1}{2} \cos(\prime_+ 2g) + \frac{7}{2} \cos(3\prime_+ 2g) \right] \right] + \right. \\
& + \sum_{\varepsilon} \varepsilon \frac{3}{8} \text{sen} I (1 + \varepsilon \theta) \text{sen} I_2 \left[ \cos[2\prime_+ 2g + \varepsilon(h - \prime_3)] + e \left[ -\frac{1}{2} \cos[\prime_+ 2g + \varepsilon(h - \prime_3)] + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{7}{2} \cos[3\prime_+ 2g + \varepsilon(h - \prime_3)] \right] \right] - \sum_{\varepsilon} \frac{3}{16} (1 + \varepsilon \theta)^2 \text{sen}^2 I_2 \left[ \cos[2\prime_+ 2g + \varepsilon(2h - 2\prime_3)] + \right. \\
& + \left. e \left[ -\frac{1}{2} \cos[\prime_+ 2g + \varepsilon(2h - 2\prime_3)] + \frac{7}{2} \cos[3\prime_+ 2g + \varepsilon(2h - 2\prime_3)] \right] \right] \Big\} + \\
& + \sum_{\varepsilon} \frac{9}{32} \text{sen}^2 I \text{sen} 2I_2 \text{sen} 2J_2 \left\{ \cos[2\prime_+ 2g + \varepsilon \prime_2] + e \left[ -\frac{1}{2} \cos[\prime_+ 2g + \varepsilon \prime_3] + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{7}{2} \cos[3\prime_+ 2g + \varepsilon \prime_3] \right] \right\} - \sum_{\varepsilon \delta} \varepsilon \frac{3}{16} \text{sen} I (1 + \varepsilon \theta) (1 - \delta \theta_2) (1 + 2\delta \theta_2) \\
& \text{sen} 2J_2 \left\{ \cos[2\prime_+ 2g + \varepsilon(h - \prime_3) + \varepsilon \delta \prime_2] + e \left[ -\frac{1}{2} \cos[\prime_+ 2g + \varepsilon(h - \prime_3) + \varepsilon \delta \prime_2] + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{7}{2} \cos[3\prime_+ 2g + \varepsilon(h - \prime_3) + \varepsilon \delta \prime_2] \right] \right\} + \sum_{\varepsilon \delta} \delta \frac{3}{32} \text{sen} I_2 (1 + \varepsilon \theta)^2 (1 - \delta \theta_2) \\
& \text{sen} 2J_2 \left\{ \cos[2\prime_+ 2g + \varepsilon(2h - 2\prime_3) + \varepsilon \delta \prime_2] + e \left[ -\frac{1}{2} \cos[\prime_+ 2g + \varepsilon(2h - 2\prime_3) + \varepsilon \delta \prime_2] + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{7}{2} \cos[3\prime_+ 2g + \varepsilon(2h - 2\prime_3) + \varepsilon \delta \prime_2] \right] \right\} - \sum_{\varepsilon} \frac{9}{32} \text{sen}^2 I \text{sen}^2 I_2 \text{sen}^2 J_2 \\
& \left\{ \cos[2\prime_+ 2g + 2\varepsilon \prime_2] + e \left[ -\frac{1}{2} \cos[\prime_+ 2g + 2\varepsilon \prime_2] + \frac{7}{2} \cos[3\prime_+ 2g + 2\varepsilon \prime_2] \right] \right\} + \\
& + \sum_{\varepsilon \delta} \varepsilon \delta \frac{3}{16} \text{sen} I (1 + \varepsilon \theta) \text{sen} I_2 (1 - \delta \theta_2) \text{sen}^2 J_2 \left\{ \cos[2\prime_+ 2g + \varepsilon(h - \prime_3) + 2\varepsilon \delta \prime_2] + \right. \\
& + \left. e \left[ -\frac{1}{2} \cos[\prime_+ 2g + \varepsilon(h - \prime_3) + 2\varepsilon \delta \prime_2] + \frac{7}{2} \cos[3\prime_+ 2g + \varepsilon(h - \prime_3) + 2\varepsilon \delta \prime_2] \right] \right\} + \\
& - \sum_{\varepsilon \delta} \frac{3}{64} (1 - \varepsilon \theta)^2 (1 - \delta \theta_2)^2 \text{sen}^2 J_2 \left\{ \cos[2\prime_+ 2g + \varepsilon(2h - 2\prime_3) + 2\varepsilon \delta \prime_2] + \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + e \left[ -\frac{1}{2} \cos \left[ \sqrt{1+2g+\varepsilon(2h-2I_3)} + 2\varepsilon\delta I_2 \right] + \right. \\
& \left. + \frac{7}{2} \cos \left[ 3\sqrt{1+2g+\varepsilon(2h-2I_3)} + 2\varepsilon\delta I_2 \right] \right] \Bigg\} \Bigg\} \Bigg\}; \quad (4.4)
\end{aligned}$$

sendo que:

A = B e C são os momentos principais de inércia do satélite;

$\sum_{\varepsilon}$  e  $\sum_{\varepsilon, \delta}$  significam que  $\delta$  e  $\varepsilon$  assumem valores +1 e -1;

M é a massa do satélite;

$m$  é a constante gravitacional da Terra;

$$\theta = \frac{H}{G} = \cos I;$$

$$\theta_2 = \frac{L_3}{L_2} = \cos I_2;$$

I é a inclinação orbital;

$I_2$  é a inclinação do plano do momento angular com o plano do Equador;

$P_2\left(\frac{L_1}{L_2}\right)$  é o polinômio de Legendre;

$e$  é a excentricidade da órbita do satélite;

$J_2$  é a inclinação do equador do satélite com relação ao plano do momento angular de rotação.

As equações do movimento (4.1) são utilizadas na seqüência deste trabalho para a análise da estabilidade do movimento rotacional. É importante salientar

que a hamiltoniana, dada por (4.2), independe da variável angular  $\angle_1$ , de modo que sua conjugada  $L_1$  permanece constante e o sistema pode ser reduzido a dois graus de liberdade. Uma solução analítica para estas equações foi obtida por Zanardi (1986), sendo determinado que o torque de gradiente de gravidade causa variações periódicas no módulo do momento angular de rotação  $L_2$  e em sua projeções  $L_1$  e  $L_3$  no eixo principal de inércia  $Z_{PI}$  e no eixo inercial  $Z_S$ , respectivamente, e variações lineares e periódicas nas variáveis angulares  $\angle_1$ ,  $\angle_2$  e  $\angle_3$ .

Quando não são considerados torques externos atuantes no satélite, ou seja, movimento rotacional livre de torque externos (MRLTE), as equações do movimento, são dadas por:

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{dL_2}{dt} = \frac{dL_3}{dt} = \frac{d\angle_3}{dt} = 0; \quad (4.5)$$

$$\frac{d\angle_1}{dt} = \left[ \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right] L_1; \quad \frac{d\angle_2}{dt} = \frac{1}{A} L_2. \quad (4.6)$$

Integrando estas equações tem-se que  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $\angle_3$  permanecem constantes e

$$\angle_1 = \left[ \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right] L_1 t + \angle_{10}; \quad \angle_2 = \frac{1}{A} L_2 t + \angle_{20}; \quad (4.7)$$

com  $\angle_{10}$  e  $\angle_{20}$  representando as condições iniciais do problema.

Verifica-se assim que na ausência de torques externos e para satélites simétricos (com  $A = B$ ) apenas as variáveis angulares  $\angle_1$  e  $\angle_2$  sofrem variações lineares com o tempo, associadas diretamente com a rotação do satélite.

No item a seguir é realizado um estudo da estabilidade do movimento rotacional livre de torques, mas considerando um satélite não simétrico, com

todos o momentos principais de inércia diferentes, para o qual a hamiltoniana do movimento é expressa por (Kinoshita, 1972):

$$F = \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{sen}^2 \mathcal{I}_1}{A} + \frac{\text{cos}^2 \mathcal{I}_1}{B} \right] (L_2^2 - L_1^2) + \frac{L_1^2}{2C}. \quad (4.8)$$

Neste caso as equações do MRLTE são dadas por:

$$\frac{dL_2}{dt} = \frac{dL_3}{dt} = \frac{d\mathcal{I}_3}{dt} = 0; \quad (4.9)$$

$$\frac{dL_1}{dt} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right] (L_2^2 - L_1^2) \text{sen} 2\mathcal{I}_1; \quad (4.10)$$

$$\frac{d\mathcal{I}_1}{dt} = - \left[ \frac{\text{sen}^2 \mathcal{I}_1}{A} + \frac{\text{cos}^2 \mathcal{I}_1}{B} \right] L_1 + \frac{L_1}{C}; \quad (4.11)$$

$$\frac{d\mathcal{I}_2}{dt} = \left[ \frac{\text{sen}^2 \mathcal{I}_1}{A} + \frac{\text{cos}^2 \mathcal{I}_1}{B} \right] L_2. \quad (4.12)$$

Estas equações se reduzem as equações (4.5) e (4.6) para o caso de satélites simétricos, com  $A = B$ . As soluções destas equações foram apresentadas por Kinoshita (Kinoshita, 1972, 1992) em termos de funções e integrais elípticas, salientando que as variáveis métricas  $L_2$  e  $L_3$  e a variável angular  $\mathcal{I}_3$  permanecem constantes. Pelas equações (4.10) – (4.12) observa-se que a equação diferencial da variável  $\mathcal{I}_2$  depende apenas da variável  $\mathcal{I}_1$  (uma vez que  $L_2$  é constante) e que as equações diferenciais de  $\mathcal{I}_1$  e  $L_1$  ficam dependendo apenas de  $\mathcal{I}_1$  e  $L_1$ , com o problema se reduzindo a um grau de liberdade e podendo ser inicialmente representado no plano de fase  $(\mathcal{I}_1, L_1)$ , como será visto no item 4.2 .

## 4.2 Estabilidade do Movimento Rotacional de um Satélite Artificial Livre de Torques Externos

Neste item é realizado um estudo preliminar da estabilidade do movimento rotacional livre de torques externos de um satélite artificial, utilizando as variáveis de Andoyer e considerando satélites não-simétricos (ou seja satélites com diferentes momentos principais de inércia). Como os torques externos não são considerados, o problema se reduz a um sistema hamiltoniano conservativo com um grau de liberdade. O espaço de fase analisado está associado a variável angular  $\mathcal{I}_1$  e seu momento generalizado  $L_1$  (que corresponde a componente do momento angular de rotação no eixo principal de inércia  $z_{PI}$ ). Pontos de equilíbrio são determinados considerando diferentes conjuntos de dados para o satélite, sendo que regiões de libração e circulação devem também ser obtidas. Esta abordagem inicial sobre a estabilidade do movimento rotacional é útil para estabelecer pontos de equilíbrio e regiões de estabilidade quando parcelas de torques externos atuantes no satélite forem incluídas nas equações do movimento.

O problema consiste no estudo das trajetórias de fase do movimento rotacional livre de torques externos, nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio. As equações do movimento são dadas por (4.9) - (4.12), sendo que a hamiltoniana, representada por (4.8), depende periodicamente da variável angular  $\mathcal{I}_1$ , com período  $\pi$ . A região do plano de fase  $(\mathcal{I}_1, L_1)$  é determinada pelo retângulo definido por:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{I}_1 \leq \pi \\ -L_2 &\leq L_1 \leq L_2 \end{aligned}$$

com  $L_1$  sendo definida por (3.1).

Os pontos de equilíbrio do sistema de equações definidos pelas equações (4.10) e (4.11) são:

$$\text{I)} \quad \angle_1 = 0, L_1 = 0;$$

$$\text{II)} \quad \angle_1 = \pi, L_1 = 0;$$

$$\text{III)} \quad \angle_1 = \frac{\pi}{2}, L_1 = 0.$$

Para analisar o comportamento ao redor destes pontos de equilíbrio no espaço de fase  $(\angle_1, L_1)$  é necessário construir a Hessiana do problema em estudo.

A Hessiana da Hamiltoniana do MRLTE é dada por:

$$D^2F = \begin{bmatrix} F_{\angle_1 \angle_1} & F_{\angle_1 L_1} \\ F_{L_1 \angle_1} & F_{L_1 L_1} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

com a hamiltoniana F neste caso dada por (4.8), de modo que:

$$\begin{aligned} F_{\angle_1 L_1} = F_{L_1 \angle_1} &= \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) L_1 \sin 2\angle_1 \\ F_{\angle_1 \angle_1} &= \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) (L_1^2 - L_2^2) \cos 2\angle_1 \\ F_{L_1 L_1} &= \frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \angle_1}{A} - \frac{\cos^2 \angle_1}{B} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para verificar se um ponto estacionário de F é um máximo (mínimo) relativo, considera-se o sinal algébrico de  $F_{\angle_1 \angle_1}$  (que coincide com o sinal algébrico de  $F_{L_1 L_1}$ ), bem como o da forma quadrática definida pelo determinante da matriz Hessiana:

$$\Delta = \det D^2F = \Delta = F_{\angle_1 \angle_1} F_{L_1 L_1} - F_{\angle_1 L_1}^2 \quad (4.15)$$

sendo que (Swokowski, 1995):

✓ Quando  $\Delta > 0$  e  $F_{\varphi_1} > 0$ , tem-se um mínimo relativo.

✓ Quando  $\Delta > 0$  e  $F_{\varphi_1} < 0$ , tem-se um máximo relativo.

✓ Quando  $\Delta < 0$  tem-se um ponto de sela.

Considerando primeiramente o caso em que os momentos principais de inércia satisfazem à:

$$\mathbf{A < B < C}$$

a) Para os pontos de equilíbrio  $\varphi_1 = L_1 = 0$  e  $\varphi_1 = \pi, L_1 = 0$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} F_{\varphi_1} = F_{L_1} &= 0, \\ F_{\varphi_1} &> 0, \\ F_{L_1} &< 0, \\ \Delta &< 0, \end{aligned}$$

de modo que estes pontos de equilíbrio definem Pontos de Sela.

Este caso corresponde à hamiltoniana

$$F_B = \frac{L_2^2}{2B} \tag{4.16}$$

e as soluções determinam a separatriz no espaço de fase  $(\varphi_1, L_1)$ , estando associada ao movimento rotacional em torno do eixo principal de inércia  $y_{PI}$ , caracterizando um equilíbrio instável, equivalente as apresentadas no Capítulo 3. O mesmo é verdade para os casos que seguem.

b) Para o ponto de equilíbrio  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  e  $L_1 = 0$  tem-se que:

$$\begin{aligned}
F_{L_1} &= F_{L_1'} = 0, \\
F_{L_1''} &< 0, \\
F_{L_1''' } &< 0, \\
\Delta &> 0,
\end{aligned}$$

de modo que o ponto de equilíbrio define um ponto de Máximo relativo, associado à hamiltoniana:

$$F_A = \frac{L_2^2}{2A} \quad (4.17)$$

que corresponde a rotação em torno do eixo de menor momento principal de inércia (eixo  $x_{PI}$ ), correspondendo ao um ponto estável para o movimento rotacional na ausência de torques externos.

A Figura 4.1 exemplifica este caso, considerando os valores normalizados para a Lua (Deprit, 1967), com a hamiltoniana assumindo valores entre  $F_A$  e  $F_B$ , isto é:

$$F_B \leq F \leq F_A$$

e entre os valores

$$F_C \leq F \leq F_B$$

com  $F_C$  associada a hamiltoniana para o caso especial de  $L_1 = \pm L_2$ , que assume a forma:

$$F_C = \frac{L_2^2}{2C} \quad (4.18).$$

A hamiltoniana  $F_C$  está relacionada ao movimento rotacional em torno do eixo principal de inércia  $z_{PI}$  do satélite.

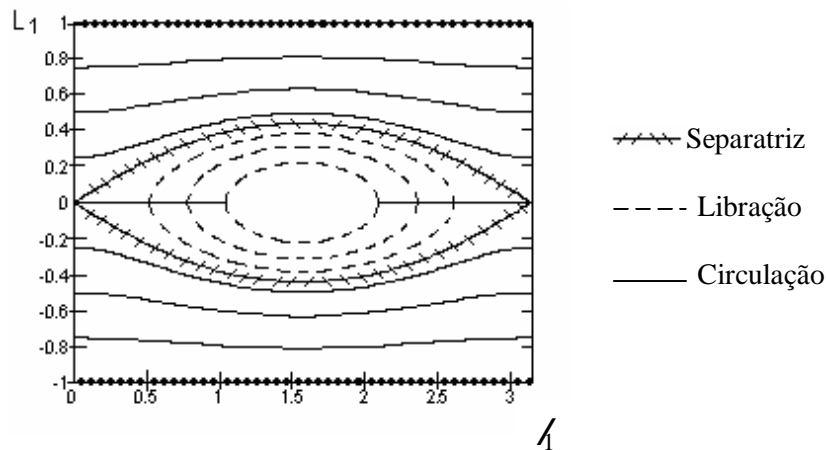


FIGURA 4.1 – Espaço de Fase  $(\lambda_1, L_1)$  para valores normalizados da Lua, para

$A < B < C$ , com  $F_A = 0,50031119$  (ponto central com  $\lambda_1 = \pi/2$  e  $L_1 = 0$ ),  $F_B = 0,50025113$  (separatriz, curva  $\times\times\times\times$ ) e  $F_C = 0,5$  ( $L_1 = \pm L_2$ , curva  $\longleftrightarrow$ )

Pela Figura 4.1, quando a hamiltoniana assume valores entre  $F_B$  e  $F_A$  as trajetórias definem librações em torno do ponto de equilíbrio estável e quando a hamiltoniana assume valores entre  $F_B$  e  $F_C$  as trajetórias definem circulações em torno do ponto de equilíbrio estável. Para  $F = F_B$  é definida a separatriz do espaço de fase. Para  $F = F_C$  são definidas linhas retas para  $L_1 = L_2$  e  $L_1 = -L_2$ .

Considerando agora o caso em que os momentos principais de inércia satisfazem à:

$$B < A < C$$

a) para os pontos de equilíbrio  $\lambda_1 = L_1 = 0$  e  $\lambda_1 = \pi, L_1 = 0$  tem-se:

$$F_{\lambda_1 L_1} = F_{L_1 \lambda_1} = 0,$$

$$F_{\lambda_1 \lambda_1} < 0,$$

$$F_{L_1 L_1} < 0,$$

$$\Delta > 0,$$



de modo que os pontos de equilíbrio definem Pontos de Máximo Relativos, com a hamiltoniana máxima dada por (4.16), associada ao movimento de rotação em torno do eixo de menor momento principal de inércia (eixo  $y_{PI}$ ) e correspondendo a um equilíbrio estável do movimento rotacional livre de torques externos.

c) para o ponto de equilíbrio  $\dot{\ell}_1 = \frac{\pi}{2}$  e  $L_1 = 0$  tem-se:

$$\begin{aligned} F_{\dot{\ell}_1} &= F_{L_1 \dot{\ell}_1} = 0, \\ F_{\dot{\ell}_1 \dot{\ell}_1} &> 0, \\ F_{L_1 L_1} &> 0, \\ \Delta &< 0, \end{aligned}$$

com o ponto de equilíbrio correspondendo a um Ponto de Sela, com a hamiltoniana dada por (4.17), associada ao movimento de rotação em torno do eixo de momento de inércia médio (eixo  $x_{PI}$ ), correspondendo a um ponto de equilíbrio instável.

A Figura 4.2 exemplifica este caso para uma aplicação a um satélite de pequeno porte, com características similares ao Satélite de Coleta de Dados Brasileiro (SCD1), com  $A = 11,06 \text{ kg m}^2/\text{s}$ ,  $B = 10,67 \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $C = 13 \text{ kg m}^2/\text{s}$ .

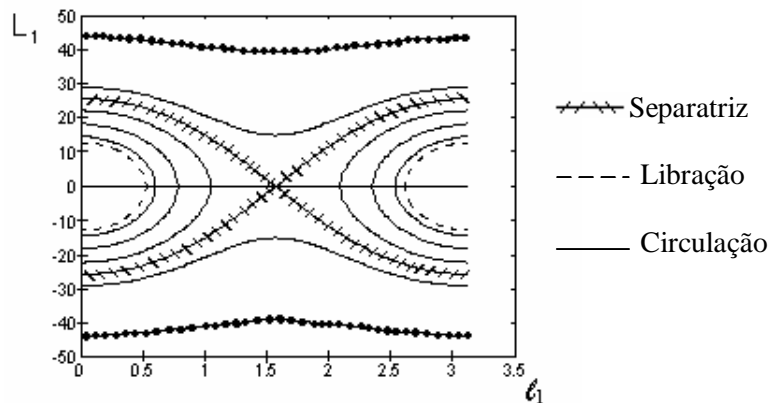


FIGURA 4.2 - Espaço de Fase ( $\dot{\ell}_1, L_1$ ) para satélite de pequeno porte, para  $B < A < C$ , com a separatriz definida pela curva  $\text{---}\times\text{---}$

Pela Figura 4.2, quando a hamiltoniana assume valores entre  $F_B$  e  $F_A$  as trajetórias definem librações em torno dos pontos de equilíbrio estáveis e quando a hamiltoniana assume valores entre  $F_A$  e  $F_C$  as trajetórias definem circulações em torno dos pontos de equilíbrio estáveis. Para  $F = F_A$  é definida a separatriz do espaço de fase. Para  $F = F_C$  são definidas linhas retas para  $L_1 = L_2$  e  $L_1 = -L_2$ .

Para finalizar é analisado o caso em que os momentos principais de inércia satisfazem à:

$$\mathbf{A > B > C}$$

a) para os pontos de equilíbrio  $\varphi_1 = L_1 = 0$  e  $\varphi_1 = \pi$ ,  $L_1 = 0$  tem-se:

$$\begin{aligned} F_{\varphi_1} &= F_{L_1 \varphi_1} = 0, \\ F_{\varphi_1 \varphi_1} &< 0, \\ F_{L_1 L_1} &> 0, \\ \Delta &< 0, \end{aligned}$$

de modo que os pontos de equilíbrio definem Pontos de Sela, com a hamiltoniana dada por (4.16), associada ao movimento de rotação em torno do eixo de momento principal de inércia intermediário (eixo  $y_{PI}$ ) e correspondendo a um equilíbrio instável.

b) para o ponto de equilíbrio  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  e  $L_1 = 0$  tem-se:

$$\begin{aligned} F_{\varphi_1} &= F_{L_1 \varphi_1} = 0, \\ F_{\varphi_1 \varphi_1} &> 0, \\ F_{L_1 L_1} &> 0, \\ \Delta &> 0, \end{aligned}$$

com o ponto de equilíbrio correspondendo a um ponto de Mínimo relativo, com a hamiltoniana dada por (4.17), associada ao movimento de rotação em torno

do eixo de maior momento de inércia (eixo  $x_{PI}$ ), correspondendo a um ponto de equilíbrio estável para o MRLTE.

A Figura 4.3 exemplifica o espaço de fase  $(I_1, L_1)$  para uma aplicação à um satélite de médio porte, com as seguintes características:  $A = 3,9499 \times 10^5 \text{ kg m}^2/\text{s}$ ,  $B = 3,33455 \times 10^5 \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $C = 1,0307 \times 10^5 \text{ kg m}^2/\text{s}$ .

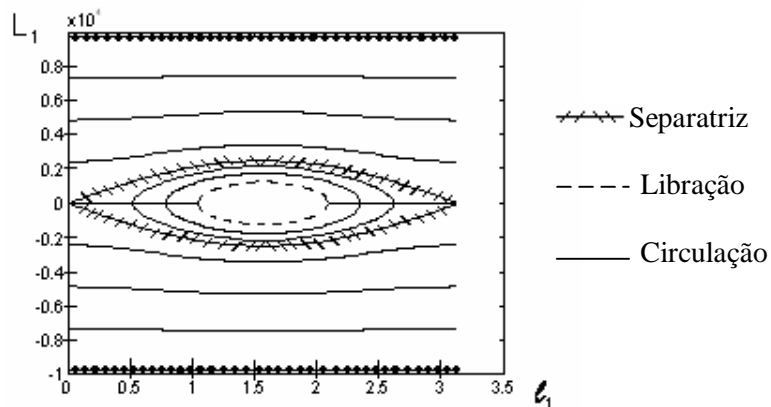


FIGURA 4.3 - Espaço de Fase  $(I_1, L_1)$  para satélite de médio porte, para  $A > B > C$ , com a separatriz definida pela curva  $\text{---}$  ( $F = F_B \text{ ---}$ )

Pela Figura 4.3, quando a hamiltoniana assume valores entre  $F_B$  e  $F_A$  as trajetórias definem librações em torno do ponto de equilíbrio estável e quando a hamiltoniana assume valores entre  $F_B$  e  $F_C$  as trajetórias definem circulações em torno do ponto de equilíbrio estável. As retas correspondem à  $F = F_C$ , com  $L_1 = L_2$  e  $L_1 = -L_2$ .

Assim esta análise salienta as alterações na configuração do espaço de fase  $(I_1, L_1)$  para diferentes condições dos momentos principais de inércia do satélite.

### 4.3 Análise da Estabilidade do Movimento Rotacional pelo Critério de Routh-Hurwitz

Nesta seção analisa-se a estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais sujeitos a ação do torque de gradiente de gravidade. O critério escolhido para a análise de estabilidade é o critério de Routh Hurwitz (Ogata, 1993), o qual permite investigar a estabilidade de sistemas de equações através dos coeficientes das equações características associada ao sistema linearizado, sem que haja necessidade de determinar as raízes da equação característica. O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz fornece uma resposta à questão da estabilidade; no entanto, não é o suficiente em muitos casos.

Utilizou-se um caso particular para o qual foram determinados os pontos de equilíbrio e assim verificou-se sua estabilidade.

O procedimento utilizado no critério de Routh-Hurwitz se resume em:

- 1) Escrever a equação característica para o sistema de equações linearizado na seguinte forma:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

- 2) Se um dos coeficientes é zero ou negativo na presença de pelo menos um coeficiente positivo, então há pelo menos uma raiz com parte real positiva e, portanto, o sistema **NÃO É ESTÁVEL**.
- 3) Se todos os coeficientes são positivos, é construída uma tabela (tabela de Routh), cujos elementos estão associados com os coeficientes da equação característica em linhas e colunas da seguinte forma:

$$\begin{array}{r}
\lambda^n \quad a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad a_6 \quad \mathbf{L} \\
\lambda^{n-1} \quad a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad a_7 \quad \mathbf{L} \\
\lambda^{n-2} \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad \mathbf{L} \\
\lambda^{n-3} \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad \mathbf{L} \\
\mathbf{M} \\
\lambda^2 \quad d_1 \quad d_2 \quad \mathbf{L} \\
\lambda^1 \quad e_1 \quad \mathbf{L} \\
\lambda^0 \quad f_1 \quad \mathbf{L}
\end{array}$$

em que:  $b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$  são formados pela combinação entre os elementos das linhas anteriores.

4) O critério de estabilidade de Routh Hurwitz diz que o número de raízes da equação característica com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal nos coeficientes da primeira coluna da tabela ( $a_0, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$ ). Se todos estes coeficientes possuem o mesmo sinal, então todas as raízes da equação característica apresentam parte real negativa e, portanto o sistema é ESTÁVEL.

#### 4.3.1 Aplicação do Critério de Routh-Hurwitz ao Movimento Rotacional

Para aplicação deste critério ao movimento rotacional de satélites artificiais, com as equações do movimento descritas por (4.1), é necessário linearizar estas equações em torno das condições de equilíbrio. Como já observado, a hamiltoniana associada ao problema, dada por (4.2), independe da variável angular  $\angle_1$ , de modo que sua conjugada  $L_1$  permanece constante. Deste modo a análise da estabilidade do sistema é reduzido ao estudo de um sistema de quatro equações diferenciais, associadas as variáveis de Andoyer  $L_2, L_3, \angle_2$  e  $\angle_3$ . O sistema linearizado então pode ser colocado na forma

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{JG} \mathbf{v}, \quad (4.19)$$

com  $v$  descrevendo o vetor de estado,  $G$  a Hessiana e  $J$  a matriz simplética padrão, sendo dadas por:

$$v = \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial I_2^2} = a_{11} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2 \partial I_3} = a_{12} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2 \partial L_2} = a_{13} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2 \partial L_3} = a_{14} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial I_3 \partial I_2} = a_{21} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_3^2} = a_{22} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_3 \partial L_2} = a_{23} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_3 \partial L_3} = a_{24} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial I_2} = a_{31} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial I_3} = a_{32} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2^2} = a_{33} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial L_3} = a_{34} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial I_2} = a_{41} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial I_3} = a_{42} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial L_2} = a_{43} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3^2} = a_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

$$J = \begin{bmatrix} Z_2 & I_2 \\ -I_2 & Z_2 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

em que  $I_2$  é a matriz identidade de ordem 2,  $Z_2$  é uma matriz nula de ordem 2 e os coeficientes  $a_{ij}$  são obtidos utilizando a hamiltoniana  $F$  dada em (4.2). Os elementos  $a_{ij}$  da Hessiana  $G$  são facilmente calculados, mas envolvem muitos cálculos algébricos e estão apresentados no Apêndice A (Cabette et al., 2005).

A equação característica associada à matriz  $JG$  do sistema (4.19) pode ser obtida por:

$$\text{Det} [\lambda I_4 - JG] = 0, \quad (4.23)$$

em que  $I_4$  é a matriz identidade 4x4 e sendo expressa da seguinte forma:

$$\bar{\alpha}_0 \lambda^4 + \bar{\alpha}_2 \lambda^2 + \bar{\alpha}_4 = 0, \quad (4.24)$$

em que

$$\bar{\alpha}_0 = 1, \quad (4.25)$$

$$\bar{\alpha}_2 = -a_{13}^2 + a_{44}a_{22} - 2a_{14}a_{23} + 2a_{12}a_{34} + a_{11}a_{33} - a_{24}^2, \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_4 = & -a_{11}a_{44}a_{23}^2 + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}^2a_{34}^2 - a_{14}^2a_{22}a_{33} - a_{12}^2a_{33}a_{44} + \\ & + 2a_{12}a_{13}a_{44}a_{23} + a_{11}a_{33}a_{24}^2 + 2a_{14}a_{12}a_{24}a_{23} - 2a_{14}a_{13}a_{24}a_{23} + \\ & + 2a_{13}a_{22}a_{14}a_{34} - 2a_{13}a_{12}a_{34}a_{24} + 2a_{11}a_{23}a_{24}a_{34} - a_{11}a_{22}a_{34}^2 + \\ & - a_{44}a_{22}a_{13}^2 + a_{24}^2a_{13}^2a_{14}^2a_{23}^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

O polinômio característico (4.24) é uma função par, visto que os coeficientes  $\bar{\alpha}_3$  e  $\bar{\alpha}_1$  são nulos, assim se  $\lambda$  é uma raiz característica deste polinômio tem-se que  $-\lambda$  também é, com a mesma multiplicidade. Isto é consequência do caráter hamiltoniano das equações.

Para a equação característica (4.24), associada ao movimento rotacional em estudo, a primeira linha da tabela de Routh é formada pelos coeficientes  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_4$ . A segunda linha seria formada pelos coeficientes  $\bar{\alpha}_1$  e  $\bar{\alpha}_3$ , que são nulos. Como existe uma linha nula na tabela de Routh, é necessário a utilização de um polinômio auxiliar, formado a partir da derivada de  $P(\lambda)$  em relação a  $\lambda$ :

$$P(\lambda) = \bar{\alpha}_0\lambda^4 + \bar{\alpha}_2\lambda^2 + \bar{\alpha}_4 = 0 \quad (4.28)$$

$$\frac{dP(\lambda)}{d\lambda} = 4\bar{\alpha}_0\lambda^3 + 2\bar{\alpha}_2\lambda \quad (4.29)$$

Assim podemos construir a tabela a seguir:

$\lambda^4$	$\bar{\alpha}_0$	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\alpha}_4$
$\lambda^3$	$4\bar{\alpha}_0$	$2\bar{\alpha}_2$	0
$\lambda^2$	$b_1$	$b_2$	0
$\lambda^1$	$c_1$	0	
$\lambda^0$	$d_1$		

em que:

$$b_1 = \frac{4\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_0 2\bar{\alpha}_2}{4\bar{\alpha}_0} = \frac{\bar{\alpha}_2}{2}, \quad (4.30)$$

$$b_2 = \frac{4\bar{\alpha}_4\bar{\alpha}_0 - \bar{\alpha}_0 0}{4\bar{\alpha}_0} = \bar{\alpha}_4, \quad (4.31)$$

$$c_1 = \frac{b_1 2\bar{\alpha}_2 - 4\bar{\alpha}_0 b_2}{b_1} = \frac{2(\bar{\alpha}_2^2 - 4\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_4)}{\bar{\alpha}_2}, \quad (4.32)$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 0}{c_1} = b_2 = \bar{\alpha}_4, \quad (4.33)$$

Pelo critério de Routh todos os elementos da primeira coluna da tabela devem ter o mesmo sinal para que o sistema seja estável. No caso em estudo, o primeiro termo da primeira coluna  $\bar{\alpha}_0 = 1$ , ou seja, é positivo. Logo para que o sistema seja estável é necessário que os demais termos da primeira coluna sejam maiores que zero, ou seja,  $\bar{\alpha}_0, b_1, c_1, d_1 > 0$ .

Assim as seguintes condições são necessárias:

$$\bar{\alpha}_0 > 0, \quad \bar{\alpha}_2 > 0, \quad \bar{\alpha}_4 > 0$$

$$\bar{\alpha}_2^2 > 4\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_4$$

Então para o tipo de equação característica em estudo, pelo critério de Routh temos as condições que devem ser satisfeitas para que o sistema seja ESTÁVEL.

#### 4.3.2 Análise da Estabilidade para um Conjunto de Pontos de Equilíbrio

Consideram-se condições iniciais para as variáveis de Andoyer e de Delaunay para um satélite simétrico de médio porte (Zanardi, 1986).



### **Dados orbitais e geométricos**

$$\mu = 3,986003 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$I = 0,5533 \text{ rad}$$

$$e = 0,01617$$

$$a = 6,95964 \times 10^3 \text{ km}$$

$$M = 11550 \text{ kg}$$

$$A = B = 3,9499 \times 10^{-1} \text{ kg km}^2$$

$$C = 1,0307 \times 10^{-1} \text{ kg km}^2$$

### **Condições Iniciais para as Variáveis de Andoyer**

$$L_1 = 0 \quad \quad \quad \ell_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$L_2 = 9,7307 \times 10^{-3} \text{ kg km}^2 \text{ s}^{-1} \quad \quad \quad \ell_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$L_3 = -2,9956 \times 10^{-3} \text{ kg km}^2 \text{ s}^{-1} \quad \quad \quad \ell_3 = 4,8244 \text{ rad}$$

$$I_2 = 1,8837 \text{ rad} \quad \quad \quad J_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

### **Condições de órbita para Delaunay consideradas fixas no desenvolvimento**

$$L = \sqrt{\mu a} \quad \quad \quad \ell = 0$$

$$G = L\sqrt{1 - e^2} \quad \quad \quad g = 0$$

$$H = G \cos I \quad \quad \quad h = \frac{\pi}{6}$$

Os pontos de equilíbrio de fato para estas condições são obtidos com o auxílio de um programa numérico desenvolvido no MATHEMATICA para as equações do movimento rotacional (4.1), assumido os valores:

$$\begin{array}{ll}
L_1 = -5.16995 \times 10^{-04} \text{ kg km}^2\text{s}^{-1} & \dot{\lambda}_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \\
L_2 = 7.51908 \times 10^{-04} \text{ kg km}^2\text{s}^{-1} & \dot{\lambda}_2 = 7.85566 \times 10^{-01} \text{ rad} \\
L_3 = -5.40662 \times 10^{-04} \text{ kg km}^2\text{s}^{-1} & \dot{\lambda}_3 = -5.54028 \times 10^{-01} \text{ rad}
\end{array}$$

Então a partir dos dados assumidos encontram-se os valores dos coeficientes  $\bar{\alpha}_2$  e  $\bar{\alpha}_4$  implementando-se numericamente as equações, obtendo-se:

$$\begin{array}{l}
\bar{\alpha}_2 = 6,32628 \times 10^{-4} \\
\bar{\alpha}_4 = 7,90619 \times 10^{-10}
\end{array}$$

Deste modo as duas condições são satisfeitas pelo resultado obtido acima. Pode-se ainda observar que a equação característica não possui coeficiente negativo na presença de coeficientes positivos ( $\bar{\alpha}_0 = 1$ ,  $\bar{\alpha}_2 > 0$  e  $\bar{\alpha}_4 > 0$ ).

Portanto, pelo critério de Routh-Hurwitz, o sistema associado ao movimento rotacional de um satélite simétrico, sob a influência do torque de gradiente de gravidade, para este caso em particular É ESTÁVEL. A tabela de Routh para este caso é:

$\lambda^4$	1	$6,326279538 \times 10^{-4}$	$7,906199195 \times 10^{-10}$
$\lambda^3$	4	$1,265255908 \times 10^{-3}$	0
$\lambda^2$	$3,163139769 \times 10^{-4}$	$7,906199195 \times 10^{-10}$	0
$\lambda^1$	$2,654645897 \times 10^{-5}$	0	
$\lambda^0$	$7,906199195 \times 10^{-10}$		

Observa-se que não ocorrem mudanças de sinal na tabela de Routh, o que acarreta na condição de estabilidade para as condições aqui consideradas.

Salienta-se que neste caso, as condições iniciais  $L_1=0 \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\dot{\lambda}_1 = \pi/2 \text{ rad}$  correspondem às condições de equilíbrio para as equações do movimento rotacional livre de torques externos (MRLTE) discutidas, no item anterior, para um satélite não simétrico com  $A>B>C$ . Da análise realizada para o caso do

MRLTE, estes pontos são estáveis. No caso aqui analisado com a inclusão do torque de gradiente de gravidade, estes pontos não mais são pontos de equilíbrio do sistema de equações do movimento, dadas por (4.1), sendo que os pontos de equilíbrio das novas equações são estáveis de acordo com o critério de Routh-Hurwitz. Portanto, a inclusão do torque de gradiente de gravidade e o fato do satélite ser simétrico ( $A=B$ ) alteraram os pontos de equilíbrio, mas manteve as condições de estabilidade do problema.

Para sistemas lineares, em que a forma quadrática é definida, o critério de Routh-Hurwitz pode ser utilizado para se estudar a estabilidade. Quando a forma quadrática é indefinida um outro método deve ser considerado, por exemplo, o método de Arnold ou uma de suas variantes. Para sistemas não lineares, a contribuição da parte quadrática pode ser uma forma quadrática definida, mas a estabilidade não linear deve ser analisada à parte. É neste contexto que o nosso trabalho se insere.

Ainda, se ocorrerem ressonâncias, um outro método também deve ser considerado como, por exemplo, o método de Markeev (1969) utilizado por Riaguas *et al* (2001).

## 5 FORMA NORMAL PARA HAMILTONIANA DO MOVIMENTO ROTACIONAL

Neste capítulo são introduzidos os procedimentos para a obtenção da forma normal da hamiltoniana associada ao movimento rotacional de um satélite artificial, incluindo a parcela associada ao torque de gradiente de gravidade. Para facilitar os cálculos da normalização de um sistema hamiltoniano na vizinhança de um ponto de equilíbrio primeiramente expande-se a hamiltoniana em séries de potência com relação às coordenadas e momentos generalizados. Com esta hamiltoniana em série, determina-se uma transformação canônica linear que diagonaliza a parte linear do sistema, ou seja, que normaliza a parte quadrática da função hamiltoniana, para em seguida, ser estendida a termos de ordem mais alta ( $\mathfrak{R} > 2$ ) e com isso gera-se uma transformação canônica não-linear. No final deste capítulo está incluído um algoritmo salientando as etapas necessárias para a determinação da forma normal de quarta ordem da hamiltoniana do movimento rotacional, necessária para a aplicação do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko.

### 5.1 Transformações que Diagonalizam a Parte Quadrática da Função Hamiltoniana

O sistema de equações do movimento é dado por (4.1) e a hamiltoniana do movimento rotacional, com a inclusão do torque de gradiente de gravidade, é dada por (4.3). Como já observado no Capítulo 4, o problema se reduz a um sistema de dois graus de liberdade, associados com as variáveis de Andoyer  $L_2, L_3, \varphi_2$  e  $\varphi_3$ , com a variável  $L_1$  se mantendo constante, pois a hamiltoniana independe da variável angular  $\varphi_1$ .

Sejam o vetor de estado  $w$  e vetor  $F_w$  de derivadas parciais da hamiltoniana  $F(L_2, L_3, \varphi_2, \varphi_3)$  definidos como :

$$w = \begin{bmatrix} \dot{L}_2 \\ L_2 \\ \dot{L}_3 \\ L_3 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$F_w = \begin{bmatrix} F_{\dot{L}_2} \\ F_{L_2} \\ F_{\dot{L}_3} \\ F_{L_3} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

As equações do movimento, dadas por (4.1), podem ser descritas na forma

$$\dot{w} = J F_w, \quad (5.3)$$

sendo  $J$  a matriz simplética (4.22) reordenada de forma a corresponder à ordenação usada para  $w$ .

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Com base na equação (4.3), observa-se que a hamiltoniana do problema em questão não se apresenta na forma de polinômios. Portanto, o primeiro passo é expandi-la em série de Taylor ao redor do ponto de equilíbrio a ser estudado, obtendo assim uma série de potências na forma:

$$F(L_i, \dot{L}_i) = F_2(L_i, \dot{L}_i) + F_3(L_i, \dot{L}_i) + F_4(L_i, \dot{L}_i) + \dots, \quad (5.5)$$

com  $i = 1, 2$  e em que  $F_2(L_i, \dot{L}_i)$  é a parte quadrática da hamiltoniana dada por:

$$F_2 = (1/2) \left( f_{11} \dot{L}_2^2 + f_{22} L_2^2 + f_{33} \dot{L}_3^2 + f_{44} L_3^2 \right) + f_{12} L_2 L_3 + f_{13} L_2 \dot{L}_2 + f_{14} L_2 \dot{L}_3 + f_{23} L_3 \dot{L}_2 + f_{24} L_3 \dot{L}_3 + f_{34} \dot{L}_2 \dot{L}_3, \quad (5.6)$$

com os coeficientes  $f_{ij}$  apresentados no Apêndice A e determinados a partir das derivadas parciais da hamiltoniana com relação às variáveis de Andoyer  $L_2, L_3, I_2, I_3$ . Com os termos da expansão em  $F_2$  podemos encontrar a Hessiana P:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial I_2^2} = f_{11} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2 \partial L_2} = f_{12} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2 \partial I_3} = f_{13} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2 \partial L_3} = f_{14} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial I_2} = f_{21} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2^2} = f_{22} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial I_3} = f_{23} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial L_3} = f_{24} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial I_3 \partial I_2} = f_{31} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_3 \partial L_2} = f_{32} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_3^2} = f_{33} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_3 \partial L_3} = f_{34} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial I_2} = f_{41} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial L_2} = f_{42} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial I_3} = f_{43} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3^2} = f_{44} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Assim o sistema de equações linearizado pode ser colocado na forma

$$\dot{w} = JPw, \quad (5.8)$$

na qual a matriz JP é a matriz que deve ser diagonalizada.

### 5.1.1 Diagonalização da matriz JP

De modo similar ao realizado no item 4.3.1, o polinômio característico de JP é dado na seguinte forma:

$$\alpha_0 \lambda^4 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_4 = 0, \quad (5.9)$$

em que

$$\alpha_0 = 1, \quad (5.10)$$

$$\alpha_2 = -f_{13}^2 + f_{44} f_{22} - 2f_{14} f_{23} + 2f_{12} f_{34} + f_{11} f_{33} - f_{24}^2, \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 = & -f_{11} f_{44} f_{23}^2 + f_{11} f_{22} f_{33} f_{44} + f_{12}^2 f_{34}^2 - f_{14}^2 f_{22} f_{33} - f_{12}^2 f_{33} f_{44} + \\ & + 2f_{12} f_{13} f_{44} f_{23} + f_{11} f_{33} f_{24}^2 + 2f_{14} f_{12} f_{24} f_{23} - 2f_{14} f_{13} f_{24} f_{23} + \\ & + 2f_{13} f_{22} f_{14} f_{34} - 2f_{13} f_{12} f_{34} f_{24} + 2f_{11} f_{23} f_{24} f_{34} - f_{11} f_{22} f_{34}^2 + \\ & - f_{44} f_{22} f_{13}^2 + f_{24}^2 f_{13}^2 f_{14}^2 f_{23}^2, \end{aligned} \quad (5.12)$$

com os coeficientes  $f_{ij}$  apresentados no Apêndice A

O procedimento para diagonalização da matriz  $JP$  segue as seguintes etapas (Costa Filho, 2002; Stuchi, 2002):

**I -** Encontram-se os auto-valores relacionados a matriz  $JP$ ;

$$\lambda_i = \pm \sqrt{\frac{-\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_0}}{2}}, \text{ para } i = 1, 2. \quad (5.13)$$

Ressalta-se que como o polinômio característico, dado por (5.9), é par, então se  $\lambda_i$  é uma raiz característica deste polinômio, tem-se que  $-\lambda_i$  também é, com a mesma multiplicidade, como esperado, devido ao caráter hamiltoniano das equações.

**II -** Define-se uma matriz  $C$  cujas colunas são os auto-vetores associados aos auto-valores com normalização arbitrária. Desta forma podemos utilizar a saída de pacotes, tais como, MAPLE, MATHEMATICA, etc.

**III -** De posse da matriz  $C$ , pode-se fazer a transformação linear canônica

$$w = Dz, \quad (5.14)$$

com

$$z = (q_1, p_1, q_2, p_2) \quad (5.15)$$

sendo  $D$  uma matriz simplética, determinada a partir da matriz de auto-vetores  $C$ , usando as matrizes auxiliares  $N$  e  $R$ , do seguinte modo (Stuchi, 2002):

$$D = CN \quad (5.16)$$

$$\text{com } N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{r_2} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

$$R = C^T J C = \begin{pmatrix} 0 & r_1 & 0 & 0 \\ -r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & -r_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Observa-se realmente que utilizando (5.16), (5.17) e (5.18), verifica-se que:

$$D^T J D = J, \quad (5.19)$$

de modo que a transformação é canônica.

O sistema de equações em termos das variáveis  $(q_1, p_1, q_2, p_2)$ , para a hamiltoniana de 2ª ordem, é dado por

$$\mathfrak{K} = \{H_2, z\} \quad (5.20)$$

com  $H_2$  na forma normal expressa como:

$$H_2(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^2 v_i (q_i^2 + p_i^2), \quad (5.21)$$

sendo

$$v_i = \frac{\lambda_i}{2} \quad (5.22)$$

com  $\lambda_i$  dado em (5.13)

**IV** - Para auxiliar na determinação da forma normal é conveniente introduzir uma transformação que complexifica as coordenadas,



$$\begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (5.23)$$

com inversa 
$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix}$$

e determina-se que a parte quadrática da hamiltoniana na forma normal nestas variáveis complexas resulta:

$$HC_2 = H_2(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i x_i y_i \quad (5.24)$$

em que  $\lambda_i$  são os auto-valores complexos.

## 5.2 Extensão aos Termos de Ordens Superiores da Hamiltoniana

Aplicando-se a transformação D seguida da complexificação aos termos de ordens superiores  $H_3, H_4, \dots$  pode-se encontrar a hamiltoniana de 4ª ordem complexa com  $H_2$  já em forma normal complexa.

A hamiltoniana na forma de polinômios em termos das variáveis  $q_i$  e  $p_i$  pode ser expressa como:

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^2 v_i (q_i^2 + p_i^2) + H_3(q_i, p_i) + H_4(q_i, p_i) \dots \quad (5.25)$$

com

$$\begin{aligned} H_3 = & h_{3,1} p_2 q_1^2 + h_{3,2} q_2 q_1^2 + h_{3,3} p_1^3 + h_{3,4} p_2 p_1^2 + h_{3,5} p_2^2 p_1 + h_{3,6} q_1^3 + \\ & + h_{3,7} q_2^3 + h_{3,8} p_1 q_1^2 + h_{3,9} p_2 p_1 q_1 + h_{3,10} q_2 p_1 q_1 + h_{3,11} p_2 q_2 q_1 + \\ & + h_{3,12} q_1 p_1^2 + h_{3,13} p_2^2 q_1 + h_{3,14} q_2^2 q_1 + h_{3,15} p_2 q_2^2 + h_{3,16} p_2^2 q_2 + \\ & + h_{3,17} q_2 p_1^2 + h_{3,18} p_2 q_2 p_1 + h_{3,19} q_2^2 p_1 + h_{3,20} p_2^3 \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned}
H_4 = & h_{4,1} p_2 q_1^3 + h_{4,2} q_2 q_1^3 + h_{4,3} p_1^4 + h_{4,4} p_2^2 q_1^2 + h_{4,5} p_2^2 p_1^2 + \\
& + h_{4,6} q_1^4 + h_{4,7} q_2^4 + h_{4,8} p_1 q_1^3 + h_{4,9} p_2 p_1^2 q_1 + h_{4,10} q_2 p_1^2 q_1 + \\
& + h_{4,11} p_2^2 p_1 q_1 + h_{4,12} q_1^2 p_1^2 + h_{4,13} q_2^2 q_1 p_1 + h_{4,14} q_2^2 q_1^2 + \\
& + h_{4,15} p_2 q_2^2 q_1 + h_{4,16} p_2^2 q_2 q_1 + h_{4,17} q_2^2 p_1^2 + h_{4,18} p_2 q_2 p_1^2 + \\
& + h_{4,19} q_2^2 p_1^2 + h_{4,20} p_2^4 + h_{4,21} p_2 p_1^3 + h_{4,22} p_2 q_2 p_1 q_1 + \\
& + h_{4,23} p_2 p_1 q_1^2 + h_{4,24} q_1 p_1^3 + h_{4,25} q_2^3 q_1 + h_{4,26} p_2^3 q_1 + \\
& + h_{4,27} q_2 p_2 q_1^2 + h_{4,28} p_2^2 q_2^2 + h_{4,29} p_2 q_2^3 + h_{4,30} p_2^3 q_2 + \\
& + h_{4,31} q_2 p_1^3 + h_{4,32} p_2 q_2^2 p_1 + h_{4,33} p_2^2 q_2 p_1 + h_{4,34} q_2^3 p_1 + \\
& + h_{4,35} p_1 p_2^3
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Utilizando a transformação  $(p_i, q_i) \rightarrow (x_i, y_i)$ , dada por (5.23), a hamiltoniana H em termos das variáveis complexas é dada por:

$$H(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i x_i y_i + H_3(x_i, y_i) + H_4(x_i, y_i) \dots \tag{5.28}$$

em que  $H_3$  e  $H_4$  em termos das variáveis complexas são expressas pelos seguintes polinômios:

$$\begin{aligned}
HC_3 = & hc_{31} y_2 x_1^2 + hc_{32} x_2 x_1^2 + hc_{33} y_1^3 + hc_{34} y_2 y_1^2 + hc_{35} y_2^2 y_1 + \\
& + hc_{36} x_1^3 + hc_{37} x_2^3 + hc_{38} y_1 x_1^2 + hc_{39} y_2 y_1 x_1 + hc_{310} x_2 y_1 x_1 + \\
& + hc_{311} y_2 x_2 x_1 + hc_{312} x_1 y_1^2 + hc_{313} y_2^2 x_1 + hc_{314} x_2^2 x_1 + \\
& + hc_{315} y_2 x_2^2 + hc_{316} y_2^2 x_2 + hc_{317} x_2 y_1^2 + hc_{318} y_2 x_2 y_1 + \\
& + hc_{319} x_2^2 y_1 + hc_{320} y_2^3
\end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
HC_4 = & hc_{41} y_2 x_1^3 + hc_{42} x_2 x_1^3 + hc_{43} y_1^4 + hc_{44} y_2^2 x_1^2 + hc_{45} y_2^2 y_1^2 + \\
& + hc_{46} x_1^4 + hc_{47} x_2^4 + hc_{48} y_1 x_1^3 + hc_{49} y_2 y_1^2 x_1 + hc_{410} x_2 y_1^2 x_1 + \\
& + hc_{411} y_2^2 y_1 x_1 + hc_{412} x_1^2 y_1^2 + hc_{413} x_2^2 x_1 y_1 + hc_{414} x_2^2 x_1^2 + \\
& + hc_{415} y_2 x_2^2 x_1 + hc_{416} y_2^2 x_2 x_1 + hc_{417} x_2^2 y_1^2 + hc_{418} y_2 x_2 y_1^2 + \\
& + hc_{419} x_2^2 y_1^2 + hc_{420} y_2^4 + hc_{421} y_2 y_1^3 + hc_{422} y_2 x_2 y_1 x_1 + \\
& + hc_{423} y_2 y_1 x_1^2 + hc_{424} x_1 y_1^3 + hc_{425} x_2^3 x_1 + hc_{426} y_2^3 x_1 + \\
& + hc_{427} x_2 y_2 x_1^2 + hc_{428} y_2^2 x_2^2 + hc_{429} y_2 x_2^3 + hc_{430} y_2^3 x_2 + \\
& + hc_{431} x_2 y_1^3 + hc_{432} y_2 x_2^2 y_1 + hc_{433} y_2^2 x_2 y_1 + hc_{434} x_2^3 y_1 + \\
& + hc_{435} y_1 y_2^3
\end{aligned} \tag{5.30}$$

De posse da hamiltoniana escrita em termos das variáveis complexas, em que o termo quadrático  $H_2$  já se encontra diagonalizado podemos aplicar o método de Lie para finalmente determinar a forma normal para os termos de ordens superiores  $H_3, H_4, \dots, H_n$ . Fazemos apenas até 4ª ordem, pois é suficiente para a análise da estabilidade desejada.

### 5.3 Método de Lie

A forma normal da hamiltoniana  $H^{\text{nova}}$  a ser definida, é dada em termos da série de Lie por (Machuy, 2001; Stuchi, 2002):

$$H^{\text{nova}} = H + \{H, G\} + \frac{1}{2} \{\{H, G\}, G\} + \frac{1}{3!} \{\{\{H, G\}, G\}, G\} + \dots \quad (5.31)$$

sendo  $G = G(x, y)$  a função geratriz e  $\{H, G\} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}$  o colchete de Poisson. Observamos que o colchete de Poisson de dois polinômios homogêneos de graus  $r$  e  $s$ , respectivamente, é um polinômio homogêneo de grau  $r + s - 2$ .

Note que a hamiltoniana  $H^{\text{nova}}$  é o resultado da aplicação de uma transformação canônica definida pela função geratriz  $G(x, y)$  em  $H(x, y)$  por meio de  $(x, y) = T_G(q, p)$ . Então:

$$H^{\text{nova}}(x, y) = H(T_G^{-1}(x, y))$$

sendo  $T_G^{-1}(x, y)$ , a inversa de  $T_G$ , dada por:

$$q_i = x_i + \{x_i, G\} + \frac{1}{2!} \{\{x_i, G\}, G\} + L$$

$$p_i = y_i + \{y_i, G\} + \frac{1}{2!} \{\{y_i, G\}, G\} + L$$

Resumindo, traçar as variáveis (q, p) por (x, y) na hamiltoniana original equivale à expansão 5.31. Esta nova hamiltoniana, ordenada por grau, tem a seguinte forma até 4ª ordem (Machuy, 2001; Stuchi, 2002):

$$H_2^{\text{nova}} = H_2, \quad (5.32)$$

$$H_3^{\text{nova}} = H_3 + \{H_2, G_3\}, \quad (5.33)$$

$$H_4^{\text{nova}} = H_4 + \{H_3, G_3\} + \frac{1}{2!} \{ \{H_2, G_3\}, G_3 \} + \{H_2, G_4\}. \quad (5.34)$$

Este processo nos permite obter o número mínimo de monômios para cada grau, eliminando monômios não ressonantes (definido em Machuy, 2001). Sabe-se que os sistemas hamiltonianos são naturalmente ressonantes de ordem 2, 4, ... Como,  $H_2^{\text{nova}}$  já foi obtida anteriormente, então o próximo passo é determinar  $H_3^{\text{nova}}$  e  $H_4^{\text{nova}}$ . Descreve-se abaixo o procedimento necessário para se obter a forma normal da nova hamiltoniana (Machuy, 2001; Stuchi, 2002):

I – Como se deseja a dependência da nova hamiltoniana em potências de  $\mathcal{S}_k = \tilde{x}_k \tilde{y}_k$ , isto é:

$$H^{\text{nova}} = \lambda_1 \mathcal{S}_1 + \lambda_2 \mathcal{S}_2 + \sum_{m_1+m_2>2} \mathcal{S}_1^{m_1} \mathcal{S}_2^{m_2},$$

é fácil notar que isto só é possível nas ordens pares, portanto,  $H_3$  é necessariamente nula, ou seja, os termos de ordem 3 são não ressonantes:

$$H_3^{\text{nova}} = 0. \quad (5.35)$$

Portanto precisa-se encontrar  $G_3$  de maneira que  $H_3^{\text{nova}}$  seja zero. A função geratriz  $G_3$  é determinada a partir da equação homológica:

$$\{H_2, G_3\} = -H_3,$$

$$\sum \frac{\partial H_2}{\partial x} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial y} \frac{\partial G_3}{\partial x} = -\sum h_{j_x, j_y} x^{j_x} y^{j_y}$$

$$\sum \lambda y j_y g_{j_x, j_y} x^{j_x} y^{j_y-1} - \lambda x j_x g_{j_x, j_y} x^{j_x-1} y^{j_y} = -\sum h_{j_x, j_y} x^{j_x} y^{j_y}$$

$$\sum \lambda (j_y - j_x) g_{j_x, j_y} x^{j_x} y^{j_y-1} = -\sum h_{j_x, j_y} x^{j_x} y^{j_y}$$

portanto, o coeficiente é:

$$g_{j_x, j_y} = \frac{-h_{j_x, j_y}}{\sum \lambda (j_y - j_x)} \quad (5.36)$$

sendo,  $\sum \lambda (j_y - j_x) \neq 0$ , ou seja, não ressonantes e:

$$H_3(x_k, y_k) = \sum_{|j_x|+|j_y|=3} h_{j_x, j_y} x^{j_x} y^{j_y}, \quad (5.37)$$

$$G_3(x_k, y_k) = \sum_{|j_x|+|j_y|=3} g_{j_x, j_y} x^{j_x} y^{j_y}, \quad (5.38)$$

com os coeficientes  $g_{j_x, j_y}$  sendo determinados com auxílio de um algoritmo desenvolvido com o software MAPLE, a ser discutido no item 5.5, a seguir.

**II** - Este processo é repetido para a hamiltoniana  $H_4^{nova}$  (de quarto grau) encontrando-se  $G_4$ , calculando-se os colchetes de Poisson da equação (5.34), de maneira que alguns termos sejam eliminados da  $H_4(x_k, y_k)$ . Os termos que permanecem na hamiltoniana  $H_4^{nova}(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$  são denominados monômios ressonantes (Machuy, 2001) e  $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$  é um novo conjunto de variáveis complexas. A equação 5.34 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \{G_4, H_2\} + H_4^{nova} &= H_4 + \{H_3, G_3\} + \frac{1}{2} \{\{H_2, G_3\}, G_3\} \\ \{G_4, H_2\} + H_4^{nova} &= F_4 \end{aligned}$$

e a última equação é a equação homológica de 4ª ordem. Como não podemos eliminar todos os termos de  $F_4$ , escrevemos:

$$U_4 = F_4 - H_4^{nova}$$

sendo o resultado os monômios não ressonantes que levam à solução:

$$G_{j_x j_y} = \frac{r_{j_x j_y}}{\sum \lambda(j_x - j_y)}$$

com  $\sum \lambda(j_y - j_x) \neq 0$ , os demais monômios permanecem em  $H_4^{nova}$  e constituem a forma normal de 4ª ordem.

III – Para  $\mathfrak{N} > 4$  a solução manual é mais intrincada, pois o número de colchetes de Poisson de 4ª ordem é maior e necessitamos de um procedimento mais automático.

#### 5.4 Forma Normal da Hamiltoniana de 4ª ordem

Com os procedimentos anteriores e aplicando-se a inversa da transformação (5.23), a forma normal real da nova hamiltoniana  $H^{nova}(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$  é dada por:

$$H^{nova} = \sum_{i=1}^2 v_i S_i + \sum_{i,m} \delta_{i,m} S_i S_m + \dots \quad (5.39)$$

com:

$$S_i = \tilde{q}_i^2 + \tilde{p}_i^2, \quad (5.40)$$

$$S_m = \tilde{q}_m^2 + \tilde{p}_m^2, \quad (5.41)$$

ou ainda considerando termos até 4ª ordem:

$$H^{nova} = H_2^{nova} + H_4^{nova} , \quad (5.42)$$

$$\text{sendo } H_2^{nova} = \nu_1(\tilde{q}_1^2 + \tilde{p}_1^2) + \nu_2(\tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_2^2) \quad (5.43)$$

$$H_4^{nova} = \delta_{1,1}(\tilde{q}_1^4 + \tilde{p}_1^4 + 2\tilde{q}_1^2\tilde{p}_1^2) + \delta_{1,2}(\tilde{q}_1^2\tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_1^2\tilde{p}_2^2 + \tilde{p}_1^2\tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_1^2\tilde{p}_2^2) + \delta_{2,2}(\tilde{q}_2^4 + \tilde{p}_2^4 + 2\tilde{q}_2^2\tilde{p}_2^2) \quad (5.44)$$

em que  $(\tilde{p}_i, \tilde{q}_i)$  é usado para as novas variáveis reais.

O procedimento acima foi implementado semi-analiticamente (com coeficientes numéricos), para cada condição de equilíbrio, com o auxílio de um algoritmo desenvolvido com o software MAPLE, a ser discutido no item 5.5, a seguir.

### **5.5 Algoritmo Computacional para Forma Normal da Hamiltoniana do Movimento Rotacional**

É apresentado aqui um algoritmo para a determinação da forma normal da hamiltoniana do movimento rotacional com a inclusão do torque de gradiente de gravidade. Nos itens anteriores foram apresentados os procedimentos necessários para a obtenção desta forma normal, que inclui a diagonalização da matriz JP, a determinação da forma normal para a hamiltoniana de 2ª ordem ( $H_2$ ) e a extensão para termos de ordens superiores até 4ª ordem. Já este algoritmo detalha o processo de normalização, salientando alguns passos do programa semi-numérico desenvolvido no software MAPLE, pelo qual é determinada a forma normal até 4ª ordem da hamiltoniana do movimento rotacional, dada por (4.3). O algoritmo é composto por quatro etapas que são descritas, a seguir, com a notação do MAPLE, e o programa semi-numérico está disponível com esta pesquisadora.

## 1ª Etapa

A primeira etapa consiste na determinação dos pontos de equilíbrio do sistema de equações do movimento, dadas por (4.1), a partir de condições iniciais para o movimento rotacional (dadas pelas variáveis de Andoyer) e movimento translacional (dadas pelas variáveis de Delaunay), além das características físicas do satélite em estudo. Para esta finalidade foi construído um programa numérico com o software MATHEMATICA.

## 2ª Etapa

De posse da hamiltoniana do problema em questão, dada por (4.3), o primeiro passo é substituir todos os parâmetros considerados constantes, ou seja, os parâmetros relacionados com o movimento de translação (órbita) do satélite, e ainda os pontos de equilíbrio encontrados na 1ª Etapa. A hamiltoniana é escrita na vizinhança da origem, através de uma translação das variáveis de Andoyer, com a hamiltoniana (4.3) assumindo a forma apresentada no Apêndice B.

Com a hamiltoniana na vizinhança da origem calcula-se a Hessiana de  $H_2$ , dada por (5.7). Para isso, necessitam-se das derivadas de segunda ordem em relação às variáveis utilizadas na descrição do movimento de rotação (apresentadas no Apêndice A). Multiplica-se a Hessiana pela matriz simplética  $J$  determinando a matriz  $JP$ . A partir daí faz-se o procedimento de diagonalização. Obtém-se os auto-valores relacionados à matriz  $JP$  e seus respectivos auto-vetores necessários na determinação da matriz simplética  $D$ , utilizada para fazer a transformação linear que normaliza a parte quadrática, dada por (5.14). A hamiltoniana de 2ª ordem ( $H_2$ ) é expressa por:

$$H_2 = \frac{\lambda_1}{2} q_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} q_2^2 + \frac{\lambda_1}{2} p_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} p_2^2 + h_{q_1 p_1} q_1 p_1 + h_{q_1 q_2} q_1 q_2 + \\ + h_{q_1 p_2} q_1 p_2 + h_{p_1 q_2} p_1 q_2 + h_{p_1 p_2} p_1 p_2 + h_{q_2 p_2} q_2 p_2 \quad (5.45)$$



sendo que  $h_{q_i p_i}$  com  $i = 1, 2$  são termos eliminados para se obter a forma normal em variáveis reais, pois são nulos dentro da precisão de 16 dígitos estabelecida para os cálculos, resultando:

$$H_2 = \frac{\lambda_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\lambda_2}{2}(q_2^2 + p_2^2)$$

Com a transformação complexa abaixo:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p_y \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

determina-se a hamiltoniana quadrática nas variáveis complexas:

$$\begin{aligned} H_2^{\text{nova}} = & h_{x p_y} x p_y + h_{p_x p_y} p_x p_y + h_{x y} x y + h_{p_x y} p_x y + \\ & + h_y y^2 + h_{p_x} p_x^2 + h_x x^2 + h_{p_y} p_y^2 + \lambda_k y p_y + \lambda_k x p_x \end{aligned} \quad (5.47)$$

sendo que os termos  $h_{xy}$ ,  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $h_{p_x p_y}$ ,  $h_{x p_y}$ ,  $h_{p_x}$ ,  $h_{p_y}$ ,  $h_{p_x y}$  também são eliminados com a forma normal, pois são muito pequenos sendo considerados nulos, resultando:

$$H_2^{\text{nova}} = \lambda_1(x_1 y_1) + \lambda_2(x_2 + y_2)$$

### 3ª Etapa

Efetuada o procedimento de extensão da complexificação aos termos de ordens superiores, já descrito anteriormente no item 5.2, obtemos  $H_3$ , sua respectiva função geratriz  $G_3$  necessária para eliminação de  $H_3^{\text{nova}}$ . A hamiltoniana  $H_3$  possui 20 monômios, portanto  $G_3$  também, como mostra a Tabela 5.1. Estes 20 coeficientes são determinados a partir da equação homológica, dados por (5.36), sendo identificados manualmente e possuem

valores tais que eliminam todos os monômios de  $H_3^{nova}$  e ainda são utilizados na obtenção de  $H_4^{nova}$ .

TABELA 5.1 – Monômios de um polinômio homogêneo de 3º grau

Monômio	Coeficiente	Variáveis
1	3000	$x^3$
2	2100	$x^2 p_x$
3	2010	$x^2 y$
4	2001	$x^2 p_y$
5	1200	$x p_x^2$
6	1020	$x y^2$
7	1002	$x p_y^2$
8	1110	$x p_x y$
9	1101	$x p_x p_y$
10	1011	$x y p_y$
11	0300	$p_x^3$
12	0210	$p_x^2 y$
13	0201	$p_x^2 p_y$
14	0120	$p_x y^2$
15	0102	$p_x p_y^2$
16	0111	$p_x y p_y$
17	0030	$y^3$
18	0021	$y^2 p_y$
19	0012	$y p_y^2$
20	0003	$p_y^3$

Da tabela acima vemos que a função geratriz  $G_3$  assume a forma:

$$\begin{aligned}
 G_3 = & g_{3000} x^3 + g_{2100} x^2 p_x + g_{2010} x^2 y + g_{2001} x^2 p_y + \\
 & + g_{1200} x p_x^2 + g_{1110} x p_x y + g_{1101} x p_x p_y + g_{1020} x y^2 + \\
 & + g_{1011} x y p_y + g_{1002} x p_y^2 + g_{0300} p_x^3 + g_{0210} p_x^2 y + \\
 & + g_{0201} p_x^2 p_y + g_{0120} p_x y^2 + g_{0111} p_x y p_y + g_{0102} p_x p_y^2 + \\
 & + g_{0021} y^2 p_y + g_{0012} y p_y^2 + g_{0030} y^3 + g_{0003} p_y^3
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

em que os coeficientes de  $G_3$  têm a forma dada em (5.36).

Para o polinômio de 4º grau faz-se o mesmo processo descrito em II e obtém-se  $H_4$  e sua respectiva função geratriz  $G_4$ . A hamiltoniana  $H_4$  possui 35

monômios, conforme Tabela 5.2 e alguns destes monômios não podem ser eliminados, pois têm a forma  $p_1^{u_1} p_2^{u_2}$ ,  $u_1 + u_2 = 4$ .

TABELA 5.2 – Monômios de um polinômio homogêneo de 4º grau

Monômio	Coefficientes	Variáveis	Monômio	Coefficientes	Variáveis
1	4000	$x^4$	19	1012	$x y p_y^2$
2	3100	$x^3 p_x$	20	1003	$x p_y^3$
3	3010	$x^3 y$	21	0400	$p_x^4$
4	3001	$x^3 p_y$	22	0310	$p_x^3 y$
5	2200	$x^2 p_x^2$	23	0301	$p_x^3 p_y$
6	2110	$x^2 p_x y$	24	0220	$p_x^2 y^2$
7	2101	$x^2 p_x p_y^2$	25	0211	$p_x^2 y p_y$
8	2020	$x^2 y^2$	26	0202	$p_x^2 p_y^2$
9	2011	$x^2 y p_y$	27	0130	$p_x y^3$
10	2002	$x^2 p_y^2$	28	0121	$p_x y^2 p_y$
11	1300	$x p_x^3$	29	0112	$p_x y p_y^2$
12	1210	$x p_x^2 y$	30	0103	$p_x p_y^3$
13	1201	$x p_x^2 p_y$	31	0040	$y^4$
14	1120	$x p_x y^2$	32	0031	$y^3 p_y$
15	1102	$x p_x p_y^2$	33	0022	$y^2 p_y^2$
16	1111	$x p_x y p_y$	34	0013	$y p_y^3$
17	1030	$x y^3$	35	0004	$p_y^4$
18	1021	$x y^2 p_y$			

Supondo a função geratriz  $G_4$  como um polinômio homogêneo completo:

$$\begin{aligned}
 G_4 = & g_{4000} x^4 + g_{3100} x^3 p_x + g_{3010} x^3 y + g_{3001} x^3 p_y + \\
 & + g_{2200} x^2 p_x^2 + g_{2020} x^2 y^2 + g_{2002} x^2 p_y^2 + \\
 & + g_{2110} x^2 p_x y + g_{2011} x^2 y p_y + g_{0211} p_x^2 y p_y + \\
 & + g_{0121} p_x y^2 p_y + g_{0112} p_x y p_y^2 + g_{2101} x^2 p_x p_y + \\
 & + g_{1021} x y^2 p_y + g_{1201} x p_x^2 p_y + g_{1120} x p_x y^2 + \\
 & + g_{1102} x p_x p_y^2 + g_{1111} x p_x y p_y + g_{1030} x y^3 + \\
 & + g_{1012} x y p_y^2 + g_{1003} x p_y^3 + g_{0400} p_x^4 + g_{0040} y^4 \\
 & + g_{0310} p_x^3 y + g_{0301} p_x^3 p_y + g_{0220} p_x^2 y^2 + g_{0022} y^2 p_y^2 \\
 & + g_{0202} p_x^2 p_y^2 + g_{0130} p_x y^3 + g_{0112} p_x y p_y^2 + \\
 & + g_{0103} p_x p_y^3 + g_{0031} y^3 p_y + g_{0004} p_y^4 + g_{0013} y p_y^3
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

veremos quais coeficientes não são nulos e estes são determinados numericamente de acordo com a equação homológica. E a hamiltoniana  $H_4$  é dada por:

$$\begin{aligned}
H_4^{\text{nova}} = & h_{x^4} x^4 + h_{x^3p_x} x^3p_x + h_{x^3y} x^3y + h_{x^3p_y} x^3p_y + \\
& + h_{x^2p_x^2} x^2p_x^2 + h_{x^2y^2} x^2y^2 + h_{x^2p_y^2} x^2p_y^2 + h_{x^2p_x y} x^2p_x y + \\
& + h_{x^2yp_y} x^2yp_y + h_{p_x^2yp_y} p_x^2yp_y + h_{p_x y^2p_y} p_x y^2p_y + \\
& + h_{p_x y p_y^2} p_x y p_y^2 + h_{x^2p_x p_y} x^2p_x p_y + h_{x y^2p_y} x y^2p_y + \\
& + h_{x p_x^2p_y} x p_x^2p_y + h_{x p_x y^2} x p_x y^2 + h_{x p_x p_y^2} x p_x p_y^2 + \\
& + h_{x p_x y p_y} x p_x y p_y + h_{xy^3} x y^3 + h_{x y p_y^2} x y p_y^2 + h_{x p_y^3} x p_y^3 + \\
& + h_{p_x^4} p_x^4 + h_{p_x^3 y} p_x^3 y + h_{p_x^3 p_y} p_x^3 p_y + h_{p_x^2 y^2} p_x^2 y^2 + h_{p_x^2 p_y^2} p_x^2 p_y^2 + \\
& + h_{p_x y^3} p_x y^3 + h_{p_x y p_y^2} p_x y p_y^2 + h_{p_x p_y^3} p_x p_y^3 + h_{y^4} y^4 + \\
& + h_{y^3 p_y} y^3 p_y + h_{y^2 p_y^2} y^2 p_y^2 + h_{y p_y^3} y p_y^3 + h_{p_y^4} p_y^4
\end{aligned} \tag{5.50}$$

sendo que os termos  $h_{x^4}, h_{x^3p_x}, h_{x^3y}, h_{x^3p_y}, h_{x^2y^2}, h_{x^2p_y^2}, h_{x^2p_x y}, h_{x^2yp_y}, h_{p_x^2yp_y}, h_{p_x y^2p_y}, h_{p_x y p_y^2}, h_{x^2p_x p_y}, h_{x y^2p_y}, h_{x p_x^2p_y}, h_{x p_x y^2}, h_{x p_x p_y^2}, h_{xy^3}, h_{x y p_y^2}, h_{x p_y^3}, h_{p_x^4}, h_{p_x^3 y}, h_{y^4}, h_{p_x^3 p_y}, h_{p_x^2 y^2}, h_{p_x^2 p_y^2}, h_{p_x y^3}, h_{p_x y p_y^2}, h_{p_x p_y^3}, h_{y^3 p_y}, h_{y p_y^3}, h_{p_y^4}$  são eliminados com o procedimento para forma normal, pois são muito pequenos sendo considerados nulos.

#### 4ª Etapa

A última etapa consiste na determinação da hamiltoniana em termos das variáveis  $\tilde{p}_i$  e  $\tilde{q}_i$ , através da transformação inversa de (5.46), com  $H_2^{\text{nova}}$  e  $H_4^{\text{nova}}$  sendo expressas por:

$$H_2^{\text{nova}} = v_1(\tilde{q}_1^2 + \tilde{p}_1^2) + v_2(\tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_2^2) \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned}
H_4^{\text{nova}} = & \delta_{11}(\tilde{q}_1^4 + \tilde{p}_1^4 + 2 \tilde{q}_1^2 \tilde{p}_1^2) + \delta_{12}(\tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_1^2 \tilde{p}_2^2 + \tilde{p}_1^2 \tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_1^2 \tilde{p}_2^2) + \\
& + \delta_{22}(\tilde{q}_2^4 + \tilde{p}_2^4 + 2 \tilde{q}_2^2 \tilde{p}_2^2)
\end{aligned} \tag{5.52}$$

em que  $\tilde{p}_i$  e  $\tilde{q}_i$  ( $i = 1,2$ ) são as variáveis reais novas.

A forma normal da hamiltoniana do movimento rotacional de um satélite artificial dada por (5.39), com as hamiltonianas de 2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> ordem dadas respectivamente, por (5.43) e (5.44) (que correspondem à (5.51) e (5.52)), será então utilizada na aplicação do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko, a ser realizado no Capítulo 6.

## 6 ANÁLISE DA ESTABILIDADE ATRAVÉS DO TEOREMA DE ESTABILIDADE DE KOVALEV & SAVCHENKO

Neste capítulo o Teorema da Estabilidade de Kovalev e Savchenko é introduzido e aplicações deste teorema para a análise de estabilidade de pontos de equilíbrio associados ao movimento rotacional de alguns satélites artificiais é realizada. A forma normal da hamiltoniana do movimento rotacional de satélites artificiais com o torque de gradiente de gravidade é obtida pelo algoritmo introduzido no Capítulo 5 (implementado através do software MAPLE), com os pontos de equilíbrio determinados com auxílio de subrotinas desenvolvidas no software MATHEMATICA.

### 6.1 Teorema de Estabilidade de Kovalev e Savchenko

Seja a hamiltoniana  $H$  uma função analítica de coordenadas ( $\xi$ ) e momentos ( $\eta$ ) generalizados para um ponto  $P$ , com a forma normal desta hamiltoniana representada por  $H^\circ$  e expressa como:

$$H^\circ = \sum_{v=1}^2 \frac{\alpha_v^\circ}{2} R_v + \sum_{v,\mu=1}^2 \frac{\beta_{v\mu}^\circ}{4} R_v R_\mu + O_5, \quad (6.1)$$

com  $O_5$  indicando termos de ordem superior e

$$R_v = \xi_v^2 + \eta_v^2.$$

O movimento é Liapunov Estável se as seguintes condições são satisfeitas (Kovalev & Savchenko, 1975):

a) Os auto-valores do sistema linear reduzido, associado à hamiltoniana  $H$ , são imaginários puros  $\pm i\alpha_1^\circ$  e  $\pm i\alpha_2^\circ$ ;

b) A condição

$$k_1\alpha_1^0 + k_2\alpha_2^0 \neq 0 \quad (6.2)$$

é válida para todo  $k_1$  e  $k_2$  inteiros satisfazendo a desigualdade

$$|k_1| + |k_2| \leq 4; \quad (6.3)$$

c) O determinante  $D^0$  deve satisfazer a seguinte desigualdade:

$$D^0 = -(\beta_{11}^0\alpha_2^{02} - 2\beta_{12}^0\alpha_1^0\alpha_2^0 + \beta_{22}^0\alpha_1^{02}) \neq 0, \quad (6.4)$$

em que  $\beta_{\nu\mu}^0$  são os coeficientes de quarta ordem da hamiltoniana  $H^0$ , dada por (6.1).

Este teorema é útil para investigar a estabilidade de rotações uniformes de um corpo rígido com pontos de equilíbrio, e é aqui aplicado para analisar a estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais descrito em termos das variáveis canônicas de Andoyer. A demonstração deste teorema é realizada no artigo de Kovalev & Savchenko (1975), sendo que uma aplicação nele apresentada para um caso particular do movimento rotacional de corpos rígidos é discutida a seguir, salientando pontos importantes das regiões de equilíbrio.

## 6.2 Discussões sobre o Teorema

É discutido a seguir um caso particular do movimento rotacional de um corpo rígido, descrito em termos dos ângulos de Euler  $(y, q, j)$ , que relacionam um sistema de referência fixo no corpo rígido com um sistema inercial, e de seus momentos generalizados  $(p_\psi, p_\varphi, p_\vartheta)$ . A origem do sistema de referência fixo no corpo é considerada estando deslocada ao longo do eixo principal de inércia  $x_{PI}$  do corpo (correspondendo ao posicionamento do centro de massa). Os momentos generalizados são obtidos a partir da hamiltoniana descrita em

termos das componentes da velocidade e dos ângulos de Euler (Deprit,1967; Kaplan,1976; Zanardi,1983).

Assim, seja a hamiltoniana associada ao movimento rotacional de um corpo rígido, cujo centro de pressão alinha-se ao longo do primeiro eixo principal de inércia, dada por (Kovalev & Savchenko,1975):

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} \left\{ a_1 [(p_\psi - p_\varphi \cos \vartheta) \operatorname{sen} \varphi + p_\vartheta \cos \varphi \operatorname{sen} \vartheta]^2 + \right. \\
 & \left. + a_2 [(p_\psi - p_\varphi \cos \vartheta) \cos \varphi + p_\vartheta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \vartheta]^2 \right\} + \frac{a_3 p_\varphi^2}{2} + \\
 & + \Gamma \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \vartheta
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

em que:

$a_1, a_2, a_3$  estão associados com os momentos principais de inércia do corpo

( $A = I_x, B = I_y, C = I_z$ ) através de:

$$a_1 = \frac{1}{A}, \quad a_2 = \frac{1}{B}, \quad a_3 = \frac{1}{C}; \tag{6.6}$$

$p_\psi, p_\varphi, p_\vartheta$  são os momentos generalizados conjugados, respectivamente, às coordenadas generalizadas  $y, q, j$  ;

$\Gamma > 0$  ( $\Gamma < 0$ ) corresponde à parcela relacionada com o deslocamento da origem do sistema fixo no corpo ao longo do eixo de inércia  $x_{PI}$  (à esquerda (à direita)) .

A rotação estável para a velocidade angular  $\omega$ , em torno do eixo principal de inércia  $x_{PI}$ , é definida pelos seguintes valores das variáveis:

$$p_\vartheta = 0, \quad p_\varphi = 0, \quad p_\psi = \frac{\omega}{a_1}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \omega t + \psi_0. \tag{6.7}$$



Da hamiltoniana dada por (6.5) verifica-se que o corpo rígido em estudo representa um sistema mecânico com três graus de liberdade e uma coordenada ignorável ( $y$ ).

Assumindo pequenos deslocamentos da condição estável:

$$p_{\vartheta} = x_1, \quad p_{\varphi} = x_2, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} + y_1, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + y_2 \quad (6.8)$$

é encontrada uma expansão da hamiltoniana na vizinhança da posição de equilíbrio, com precisão até termos de quarta ordem:

$$H = H_2 + H_4 + \dots$$

$$\begin{aligned} 2H_2 &= a x_1^2 + b x_2^2 + (\omega^2 - e) y_1^2 + [(a-1)\omega^2 - e] y_2^2 + \\ &\quad + 2(a-1)\omega x_1 y_2 + 2\omega x_2 y_1 \\ 2H_4 &= (1-a) x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + \frac{8\omega^2 + e}{12} y_1^4 + \left[ \frac{4(1-a)\omega^2 + e}{12} \right] y_2^4 + \\ &\quad + \frac{2(a-1)\omega^2 + e}{2} y_1^2 y_2^2 + \frac{4\omega(1-a)}{3} x_1 y_2^3 + \\ &\quad + (a-1)\omega x_1 y_2 y_1^2 + \frac{5}{3}\omega x_2 y_1^3 + 2\omega(a-1) x_2 y_1 y_2^2 + \\ &\quad + 2(a-1) x_1 x_2 y_1 y_2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

em que:

$$a = \frac{a_2}{a_1}, \quad b = \frac{a_3}{a_1}, \quad \omega = p_{\psi} \sqrt{\frac{a_1}{|\Gamma|}}, \quad e = \begin{cases} 1, & \Gamma > 0 \\ -1, & \Gamma < 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

### 6.2.1 Condições Necessárias de Estabilidade

Para verificar as condições necessárias do teorema de Kovalev & Savchenko, encontrou-se a equação característica do sistema linearizado associados à hamiltoniana  $H_2$ :

$$\lambda^4 + Q_1 \lambda^2 + Q_2 = 0 \quad (6.11)$$

com:

$$Q_1 = (2 + ab - a - b) \omega^2 - e (a + b) \quad (6.12)$$

$$Q_2 = [(a - 1) \omega^2 - ea] [(b - 1) \omega^2 - eb] \quad (6.13)$$

Para que os autovalores sejam imaginários puros é necessário que:

$$Q_1 > 0, Q_2 > 0,$$

$$Q_1^2 - 4Q_2 > 0,$$

que correspondem:

$$(a + b - ab)^2 \omega^4 - 2e (a + b - ab) (4 - a - b) \omega^2 + (a - b)^2 > 0 \quad (6.14)$$

Para analisar as regiões de equilíbrio, foram analisados diversos valores para as razões  $a$  e  $b$  entre os momentos de inércia e para o parâmetro  $e$ , definidas em (6.10).

Quando  $e = -1$ , tem-se que a desigualdade (6.14) é válida:

- para  $b \geq a \geq 1$  e qualquer valor de  $\omega$ ;
- se  $b \geq 1 > a$  e  $\omega^2 < \frac{a}{(1-a)}$ ;
- se  $1 > a > b$  e  $\omega^2 < \frac{b}{(1-b)}$  ou  $\omega^2 > \frac{a}{(1-a)}$ .

Quando  $e = 1$ , tem-se que o domínio  $C$  é subdividido em diversas regiões  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$ ,  $C4$ ,  $C5$ , as quais estão bem definidas no artigo de Kovalev & Savchenko (1975) e representadas na Figura (6.1), com as condições

necessárias para estabilidade sendo sumarizadas de modo que a rotação é instável para:

§ qualquer valor de  $\omega$  no domínio C1;

§  $\omega^2 > \frac{a}{a-1}$ , no domínio C2;

§  $\omega_0^2 < \omega^2 < \frac{b}{b-1}$ ,  $\omega^2 < \frac{a}{a-1}$  no domínio C3;

§  $\omega_0^2 < \omega^2 < \frac{b}{b-1}$  no domínio C4;

§  $\omega^2 > \omega_0^2$ , no domínio C5;

sendo  $\omega_0^2 = \frac{4 - a - b + 2\sqrt{(a-2)(b-2)}}{a + b - ab}$

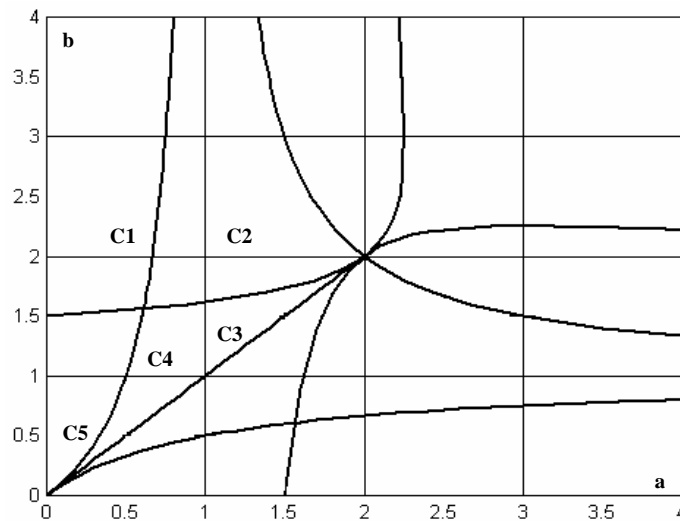


FIGURA 6.1 - Regiões de equilíbrio para diversos valores de a e b

Fonte: Adaptada de Kovalev e Savichenko (1975)

### 6.2.2 Redução a Forma Normal

No item anterior foram apresentadas as condições necessárias para estabilidade a partir da equação característica da hamiltoniana linearizada de ordem dois. Para a aplicação e análise do teorema de estabilidade aqui utilizado, torna-se necessário a redução da hamiltoniana (6.5) à sua forma normal até termos de quarta ordem, que está apresentada no artigo de Kovalev & Savchenko (1975).

De posse dessa hamiltoniana escrita na forma normal foram determinados os coeficientes  $\alpha_v^o$  e  $\beta_{v_{ii}}^o$  referentes, respectivamente, aos termos de 2ª e 4ª ordem da hamiltoniana.

E assim foi verificada a estabilidade do sistema associado à Hamiltonina (6.5), através das três condições impostas pelo teorema enunciado no item 6.1 deste capítulo. Um estudo das regiões de estabilidade foi apresentado no artigo, para o caso de momentos de inércia iguais  $A = B$ , ou seja, admitindo  $a = 1$  e também para o caso geral, em que os momentos de inércia são todos diferentes.

Na seção a seguir o teorema de Kovalev & Savchenko será aplicado para o movimento rotacional de um satélite artificial com a inclusão do torque de gradiente de gravidade, e, devido à extensão da hamiltoniana do problema, apenas resultados numéricos são determinados para cada ponto de equilíbrio analisado.

### 6.3 Aplicações do teorema de estabilidade

O teorema da estabilidade de Kovalev & Savchenko é utilizado para analisar o movimento rotacional de satélites artificiais considerando características físicas e dados iniciais de satélites de médio e pequeno porte, classificados de acordo com suas dimensões físicas e massa. O satélite de pequeno porte possui algumas características dos Satélites de Coleta de Dados Brasileiro, SCD1 e

SCD2, e o satélite de médio porte possui algumas características do satélite americano PEGASUS (Zanardi, 1986).

O procedimento para a aplicação do teorema de estabilidade é detalhado a seguir e esquematizado na Figura (6.2).

Inicialmente foram determinados os pontos de equilíbrio para cada conjunto de dados, utilizando um programa desenvolvido no software MATHEMATICA. Este programa contém a hamiltoniana com o gradiente de gravidade e suas respectivas derivadas com relação às variáveis de Andoyer, a partir das quais são calculados os pontos de equilíbrio.

Para cada tipo de satélite (de médio ou pequeno porte), os dados orbitais são fixos, variando-se somente os momentos principais de inércia A, B e C, sendo todos os satélites posicionados no perigeu de sua órbita. Assim para cada conjunto de momentos principais de inércia (conjunto de dados de satélites) são calculados os pontos de equilíbrio do sistema em questão.

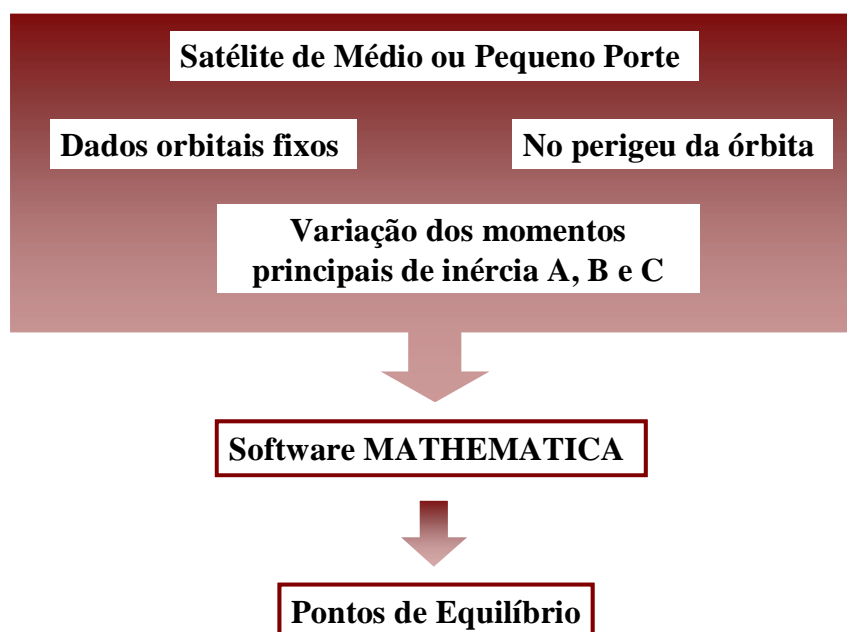


FIGURA 6.2 – Esquema do procedimento para a aplicação do teorema de estabilidade

Os elementos orbitais e as variáveis de Delaunay são apresentados juntamente com tabelas contendo os pontos de equilíbrio determinados, considerando cada conjunto de momentos principais escolhidos aleatoriamente e seus respectivos pontos de equilíbrio.

Após a determinação dos pontos de equilíbrio foi necessária uma análise dos valores obtidos para as variáveis de Andoyer, uma vez que o ângulo de inclinação  $J_2$  não pode ser nulo, pois as variáveis de Andoyer tornam-se indefinidas, sendo que estes casos foram desconsiderados. Verificou-se também a magnitude da velocidade de rotação, pois algumas condições de equilíbrio levaram a velocidades nulas, que também não foram consideradas. Os valores dos ângulos  $J_2$  e da velocidade estão também indicados nas tabelas a seguir, juntamente com o período de rotação do satélite.

Na seqüência da análise da estabilidade foi determinada a forma normal através do algoritmo discutido no Capítulo 5, e desenvolvido no software MAPLE, para cada conjunto de dados de satélites.

Por último foram verificadas as condições necessárias do teorema de estabilidade de Kovalev & Shavchenko, sendo que nas tabelas também está indicado o resultado da análise: estável ou instável.

Salienta-se que para alguns conjuntos de dados de satélites, os momentos principais de inércia A e B não são iguais, como na análise realizada no Capítulo 5. Para estes casos, a hamiltoniana do torque livre foi dada por (4.8).

A Tabela 6.1 apresenta um resumo quantitativo das simulações realizadas para cada conjunto de dados de satélites associados a cada tipo de satélite (um satélite de médio porte M e dois satélites de pequeno porte A e B). A descrição detalhada das aplicações é realizada a seguir.

TABELA 6.1 – Descrição quantitativa das aplicações aos satélites de médio porte M e pequeno porte A e B

Satélite	Total de Conjuntos de Dados	Total de Pontos de Equilíbrio Gerados e Simulações	Quantidade de Movimentos Estáveis	Quantidade de Movimentos Instáveis	
<b>M</b>	<b>10</b>	<b>13</b>	<b>1</b>	<b>12</b>	
				Falha da 1 <sup>a</sup> condição do teorema	Falha da 3 <sup>a</sup> condição do teorema
				<b>12</b>	<b>0</b>
<b>A</b>	<b>40</b>	<b>90</b>	<b>2</b>	<b>88</b>	
				Falha da 1 <sup>a</sup> condição do teorema	Falha da 3 <sup>a</sup> condição do teorema
				<b>80</b>	<b>8</b>
<b>B</b>	<b>51</b>	<b>112</b>	<b>4</b>	<b>108</b>	
				Falha da 1 <sup>a</sup> condição do teorema	Falha da 3 <sup>a</sup> condição do teorema
				<b>90</b>	<b>18</b>

### 6.3.1 Aplicações para Satélites de Médio Porte M

Os dados orbitais dos satélites de médio porte são apresentados abaixo, os quais são similares aos dados do satélite americano PEGASUS (Crenshaw & Fitzpatrick, 1968).

Nas Tabelas 6.2, 6.3, 6.4 são apresentados os resultados da análise para cada conjunto de dados relacionados com os momentos principais de inércia do satélite e pontos de equilíbrio determinados.

**Treze** pontos de equilíbrio foram gerados a partir dos **dez** conjuntos de dados dos satélites do tipo M e **treze** aplicações foram realizadas, sendo que aqui são apresentados os resultados selecionados de três conjuntos de dados, incluindo resultados estáveis, mostrando **um** movimento estável e os demais instáveis.

Observa-se que o número de movimentos estáveis para este tipo de satélites é muito reduzido. Salienta-se que na análise da estabilidade aqui realizada, em todos os casos instáveis a condição do teorema não verificada estava relacionada com auto-valores reais ou não imaginários puros da equação característica do sistema linear.

Para exemplificar, apresentamos abaixo a análise das condições do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko, juntamente com a equação característica e a forma normal da hamiltoniana para os dados da Tabela 6.2, que resultou em um movimento estável:

### 1. Equação característica:

$$s^4 + 0,6326279540 \times 10^{-5} s^2 + 0,7906199207 \times 10^{-11}$$

### 2. Auto valores:

$$\alpha_1^o = \pm 2,147561413 \times 10^{-3} i$$

$$\alpha_2^o = \pm 1,309297336 \times 10^{-3} i$$

como são auto-valores imaginários puros, a primeira condição do teorema está satisfeita;

### 3. Forma normal da hamiltoniana:

$$H_2^{\text{nova}} = 1,073780705 \times 10^{-3} (\tilde{q}_1^2 + \tilde{p}_1^2) + 6,546486666 \times 10^{-4} (\tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_2^2)$$

$$H_4^{\text{nova}} = 1,528319798 (\tilde{q}_1^4 + \tilde{p}_1^4 + 2\tilde{q}_1^2 \tilde{p}_1^2) + \\ + 2,010930611 (\tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_1^2 \tilde{p}_2^2 + \tilde{p}_1^2 \tilde{p}_2^2 + \tilde{p}_1^2 \tilde{q}_2^2) + \\ + 0,3836079235 (\tilde{q}_2^4 + \tilde{p}_2^4 + 2\tilde{q}_2^2 \tilde{p}_2^2)$$



#### 4. A segunda condição do teorema:

$$\pm k_1 \alpha_1^0 \pm k_2 \alpha_2^0 \neq 0 \text{ com } |k_1| + |k_2| \leq 4$$

$$\S \quad k_1 \alpha_1^0 + k_2 \alpha_2^0 \neq 0, \text{ para } +\alpha_1^0 \text{ e } +\alpha_2^0$$

$$k_1 = 1 \quad \text{e} \quad k_2 = 3$$

$$1 (2,147561413 \times 10^{-3}) + 3 (1,309297336 \times 10^{-3}) = 6,075453 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 2 \quad \text{e} \quad k_2 = 2$$

$$2 (2,147561413 \times 10^{-3}) + 2 (1,309297336 \times 10^{-3}) = 6,913717 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 3 \quad \text{e} \quad k_2 = 1$$

$$3 (2,147561413 \times 10^{-3}) + 1 (1,309297336 \times 10^{-3}) = 7,751981 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 1 \quad \text{e} \quad k_2 = 2$$

$$1 (2,147561413 \times 10^{-3}) + 2 (1,309297336 \times 10^{-3}) = 4,766156 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 2 \quad \text{e} \quad k_2 = 1$$

$$2 (2,147561413 \times 10^{-3}) + 1 (1,309297336 \times 10^{-3}) = 5,60442 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 1 \quad \text{e} \quad k_2 = 1$$

$$1 (2,147561413 \times 10^{-3}) + 1 (1,309297336 \times 10^{-3}) = 3,456858 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 0 \quad \text{e} \quad k_2 = 1$$

$$0 (2,147561413 \times 10^{-3}) + 1 (1,309297336 \times 10^{-3}) = 1,309297 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 0 \quad \text{e} \quad k_2 = 2$$

$$0 (2,147561413 \times 10^{-3}) + 2 (1,309297336 \times 10^{-3}) = 2,618594 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 0 \quad \text{e} \quad k_2 = 3$$

$$0 (2,147561413 \times 10^{-3}) + 3 (1,309297336 \times 10^{-3}) = 3,927892 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 0 \quad \text{e} \quad k_2 = 4$$

$$0 (2,147561413 \times 10^{-3}) + 4 (1,309297336 \times 10^{-3}) = 5,237189 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 1 \quad \text{e} \quad k_2 = 0$$

$$1 (2,147561413 \times 10^{-3}) + 0 (1,309297336 \times 10^{-3}) = 2,147561 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 2 \quad \text{e} \quad k_2 = 0$$

$$2 (2,147561413 \times 10^{-3}) + 0 (1,309297336 \times 10^{-3}) = 4,295122 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 3 \quad \text{e} \quad k_2 = 0$$

$$3 (2,147561413 \times 10^{-3}) + 0 (1,309297336 \times 10^{-3}) = 6,442684 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 4 \quad \text{e} \quad k_2 = 0$$

$$4 (2,147561413 \times 10^{-3}) + 0 (1,309297336 \times 10^{-3}) = 8,590245 \times 10^{-3}$$

Para todos os casos, a menos do sinal, os resultados são iguais. Assim a segunda condição está satisfeita.

**5. O determinante  $D^o$  é dado por:**

$$D^o = -(\beta_{11}^o \alpha_2^{o2} - 2\beta_{12}^o \alpha_1^o \alpha_2^o + \beta_{22}^o \alpha_1^{o2})$$

$$D^o = - (6,113279192 (1,71425951 \times 10^{-6}) + \\ - 2 (8,043722444 (2,147561413 \times 10^{-3}) (1,309297333 \times 10^{-3})) + \\ + 1,534431692 (6,83694968 \times 10^{-6}))$$

$$D^o = -1,64673086 \times 10^{-6} \neq 0$$

como  $D^o$  é não nulo então a terceira condição é satisfeita e o movimento é **ESTÁVEL**, dentro de uma precisão numérica de  $10^{-16}$ .

Estes procedimentos foram utilizados para todas as aplicações realizadas com cada conjunto de dados.



**DADOS SATÉLITE MÉDIO PORTE M**

**Dados Orbitais e Geométricos**

Inclinação da Órbita (I) = 0,5533 rad  $\cong$  31,7° ;

Excentricidade da Órbita (e) = 0,01617;

Semi-eixo (a) = 6959,64 km;

Massa do Satélite (M) = 11550kg;

$\mu = 3,986003 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ .

**Variáveis de Delaunay**

$$L = M \sqrt{\mu a} = 608336931,2$$

$$G = L \sqrt{1 - e^2} = 608257395,4$$

$$H = G \cos I = 517502360,1$$

$$\dot{\alpha} = 0 \text{ rad}$$

$$g = 0 \text{ rad}$$

$$h = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

TABELA 6.2 – Conjunto de dados para o satélite M1

<b>MOMENTOS DE INÉRCIA PARA A = B &gt; C</b>				
<b>SATÉLITE MÉDIO PORTE M1</b>				
<b>A/B</b>	<b>A/C</b>	<b>A (kg.km<sup>2</sup>)</b>	<b>B (kg.km<sup>2</sup>)</b>	<b>C (kg.km<sup>2</sup>)</b>
1	3,832249	3,9499x10 <sup>-1</sup>	3,9499x10 <sup>-1</sup>	1,0307x10 <sup>-1</sup>
<b>PONTOS DE EQUILIBRIO</b>				
<b>L<sub>1</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>L<sub>2</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>L<sub>3</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>ℓ<sub>2</sub> (rad)</b>	<b>ℓ<sub>3</sub> (rad)</b>
-5,169949x10 <sup>-4</sup>	7,519081x10 <sup>-4</sup>	-5,406616 x10 <sup>-4</sup>	7,855662x10 <sup>-1</sup>	-5,540278x10 <sup>-1</sup>
7,524937x10 <sup>-7</sup>	1,094573x10 <sup>-6</sup>	-8,848338x10 <sup>-7</sup>	-2,368893x10 <sup>-3</sup>	4,930612x10 <sup>-1</sup>
<b>ESTABILIDADE M1</b>				
<b>L<sub>2</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>J<sub>2</sub> (°)</b>	<b>W (rpm)</b>	<b>T (s)</b>	<b>Estabilidade</b>
7,519081x10 <sup>-4</sup>	-39,4	0,07003316	86,128608	<b>ESTÁVEL</b>
1,094573x10 <sup>-6</sup>	39,4	0,000101949	591692,75	<b>INSTÁVEL</b>

TABELA 6.3 – Conjunto de dados para o satélite M2

<b>MOMENTOS DE INÉRCIA PARA A &lt; B &lt; C</b>				
<b>SATÉLITE MÉDIO PORTE M2</b>				
<b>A/B</b>	<b>A/C</b>	<b>A (kg.km<sup>2</sup>)</b>	<b>B (kg.km<sup>2</sup>)</b>	<b>C (kg.km<sup>2</sup>)</b>
0,323701	0,105186	0,9499x10 <sup>-1</sup>	2,9345x10 <sup>-1</sup>	9,0307x10 <sup>-1</sup>
<b>PONTOS DE EQUILIBRIO</b>				
<b>L<sub>1</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>L<sub>2</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>L<sub>3</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>ℓ<sub>2</sub> (rad)</b>	<b>ℓ<sub>3</sub> (rad)</b>
2,234076x10 <sup>-6</sup>	3,211887x10 <sup>-6</sup>	-1,801435x10 <sup>-6</sup>	1,460935x10 <sup>-3</sup>	4,772100x10 <sup>-1</sup>
<b>ESTABILIDADE M2</b>				
<b>L<sub>2</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>J<sub>2</sub> (°)</b>	<b>W (rpm)</b>	<b>T (s)</b>	<b>Estabilidade</b>
3,211887x10 <sup>-6</sup>	39,9	3,4143x10 <sup>-5</sup>	1766925	<b>INSTÁVEL</b>

TABELA 6.4 – Conjunto dados para o satélite M3

<b>MOMENTOS DE INÉRCIA PARA <math>A \neq B \neq C</math></b>				
<b>SATÉLITE MÉDIO PORTE M3</b>				
<b>A/B</b>	<b>A/C</b>	<b>A (kg.km<sup>2</sup>)</b>	<b>B (kg.km<sup>2</sup>)</b>	<b>C (kg.km<sup>2</sup>)</b>
0,114133	0,260943	$1,0307 \times 10^{-3}$	$9,0307 \times 10^{-3}$	$3,9499 \times 10^{-3}$
<b>PONTOS DE EQUILÍBRIO</b>				
<b>L<sub>1</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>L<sub>2</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>L<sub>3</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>ℓ<sub>2</sub> (rad)</b>	<b>ℓ<sub>3</sub> (rad)</b>
$1,287023 \times 10^{-9}$	$1,852162 \times 10^{-9}$	$-1,038321 \times 10^{-9}$	$-3,943203 \times 10^{-5}$	$4,887362 \times 10^{-1}$
<b>ESTABILIDADE M3</b>				
<b>L<sub>2</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>J<sub>2</sub> (°)</b>	<b>W (rpm)</b>	<b>T (s)</b>	<b>Estabilidade</b>
$1,852162 \times 10^{-9}$	39,8	$4,68 \times 10^{-7}$	13425609,6	<b>INSTÁVEL</b>

### 6.3.2 Aplicações para Satélite de Pequeno Porte A

Os dados orbitais dos satélites de pequeno porte A são apresentados abaixo, os quais são similares aos dados do Satélite de Coleta de Dados Brasileiro SCD1 (Orlando, Lopes, Kuga, 1997; Kuga, Orlando, Lopes, 1999).

De modo similar ao satélite de médio porte, nas Tabelas 6.5, 6.6, 6.7 são apresentados os resultados da análise para cada conjunto de dados relacionados com os momentos principais de inércia do satélite e pontos de equilíbrio determinados.

**Noventa** pontos de equilíbrio foram gerados e **noventa** aplicações foram realizadas associadas a **quarenta** conjuntos de dados para os satélites do tipo A, sendo que aqui são apresentados os resultados selecionados de três conjuntos de dados, incluindo todos os resultados estáveis, que mostram um total de **dois** movimentos estáveis e os demais instáveis.

Observa-se que o número de movimentos estáveis para este tipo de satélite ainda é pequeno, mas maior que para os casos de satélite de médio porte considerados. Salienta-se que na análise da estabilidade aqui realizada, a maioria dos casos instáveis (**oitenta** pontos de equilíbrio) a condição do teorema não verificada estava relacionada com auto-valores reais ou não

imaginários puros da equação característica do sistema linear (ou seja, falha na primeira condição). Os demais casos instáveis (**oito** pontos de equilíbrio) satisfizeram a primeira condição dos auto-valores serem imaginários puros, mas falharam na terceira condição resultando em um  $D^0$  nulo.

Exemplificando, é apresentada abaixo a análise das três condições do teorema de estabilidade (Kovalev & Savchenko, 1975), juntamente com a equação característica e a forma normal da hamiltoniana para os dados da Tabela 6.5, que resultaram em um movimento estável:

### 1 .Equação característica:

$$s^4 + 7,148597053 \times 10^{-7} s^2 + 2,925832509 \times 10^{-17}$$

### 2. Auto-valores:

$$\alpha_1^0 = \pm 8,45469559 \times 10^{-4} i$$

$$\alpha_2^0 = \pm 6,39774249 \times 10^{-6} i$$

como são auto-valores imaginários puros, a primeira condição do teorema está satisfeita;

### 3. Forma normal da hamiltoniana:

$$H_2^{\text{nova}} = 4,22734779 \times 10^{-4} (\tilde{q}_1^2 + \tilde{p}_1^2) + 3,19887125 \times 10^{-6} (\tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_2^2)$$

$$H_4^{\text{nova}} = -4833,139312 (\tilde{q}_1^4 + \tilde{p}_1^4 + 2\tilde{q}_1^2 \tilde{p}_1^2) + \\ -111,846833 (\tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_1^2 \tilde{p}_2^2 + \tilde{p}_1^2 \tilde{p}_2^2 + \tilde{p}_1^2 \tilde{q}_2^2) + \\ + 5,82641659 (\tilde{q}_2^4 + \tilde{p}_2^4 + 2\tilde{q}_2^2 \tilde{p}_2^2)$$

### 4. A segunda condição do teorema:

$$\pm k_1 \alpha_1^0 \pm k_2 \alpha_2^0 \neq 0 \text{ com } |k_1| + |k_2| \leq 4$$

$$\S \quad k_1 \alpha_1^0 + k_2 \alpha_2^0 \neq 0, \text{ para } +\alpha_1^0 \text{ e } +\alpha_2^0$$

$$k_1 = 1 \text{ e } k_2 = 3$$

$$1 (8,45469559 \times 10^{-4}) + 3 (6,39774249 \times 10^{-6}) = 8,6466279 \times 10^{-4}$$

$$k_1 = 2 \text{ e } k_2 = 2$$

$$2 (8,45469559 \times 10^{-4}) + 2 (6,39774249 \times 10^{-6}) = 1,7037346 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 3 \text{ e } k_2 = 1$$

$$3 (8,45469559 \times 10^{-4}) + 1 (6,39774249 \times 10^{-6}) = 2,5458064 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 1 \text{ e } k_2 = 2$$

$$1 (8,45469559 \times 10^{-4}) + 2 (6,39774249 \times 10^{-6}) = 8,5826504 \times 10^{-4}$$

$$k_1 = 2 \text{ e } k_2 = 1$$

$$2 (8,45469559 \times 10^{-4}) + 1 (6,39774249 \times 10^{-6}) = 1,6973369 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 1 \text{ e } k_2 = 1$$

$$1 (8,45469559 \times 10^{-4}) + 1 (6,39774249 \times 10^{-6}) = 8,5186730 \times 10^{-4}$$

$$k_1 = 0 \text{ e } k_2 = 1$$

$$0 (8,45469559 \times 10^{-4}) + 1 (6,39774249 \times 10^{-6}) = 6,3977425 \times 10^{-6}$$

$$k_1 = 0 \text{ e } k_2 = 2$$

$$0 (8,45469559 \times 10^{-4}) + 2 (6,39774249 \times 10^{-6}) = 1,2795485 \times 10^{-5}$$

$$k_1 = 0 \text{ e } k_2 = 3$$

$$0 (8,45469559 \times 10^{-4}) + 3 (6,39774249 \times 10^{-6}) = 1,9193228 \times 10^{-5}$$

$$k_1 = 0 \text{ e } k_2 = 4$$

$$0 (8,45469559 \times 10^{-4}) + 4 (6,39774249 \times 10^{-6}) = 2,5590969 \times 10^{-5}$$

$$k_1 = 1 \text{ e } k_2 = 0$$

$$1 (8,45469559 \times 10^{-4}) + 0 (6,39774249 \times 10^{-6}) = 8,4546956 \times 10^{-4}$$

$$k_1 = 2 \text{ e } k_2 = 0$$

$$2 (8,45469559 \times 10^{-4}) + 0 (6,39774249 \times 10^{-6}) = 1,6909391 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 3 \text{ e } k_2 = 0$$

$$3 (8,45469559 \times 10^{-4}) + 0 (6,39774249 \times 10^{-6}) = 2,5364087 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 4 \text{ e } k_2 = 0$$

$$4 (8,45469559 \times 10^{-4}) + 0 (6,39774249 \times 10^{-6}) = 3,3818782 \times 10^{-3}$$

Para todos os casos, a menos do sinal, os resultados são iguais. Logo a segunda condição está satisfeita.

## 5. O determinante $D^o$ é dado por:

$$D^o = -(\beta_{11}^o \alpha_2^{o2} - 2\beta_{12}^o \alpha_1^o \alpha_2^o + \beta_{22}^o \alpha_1^{o2})$$

$$D^o = -(-19332,55725 (40,9311091 \times 10^{-11}) + \\ -2(-447,387332 (8,45469559 \times 10^{-4}) (6,39774249 \times 10^{-6})) + \\ + 23,3056664 (7,1481878 \times 10^{-9}))$$

$$D^o = -1,2586359 \times 10^{-5} \neq 0$$

como  $D^o$  é não nulo então a terceira condição é satisfeita e o movimento é **ESTÁVEL**, dentro de uma precisão numérica de  $10^{-16}$ .



### DADOS SATÉLITE PEQUENO PORTE A

#### Dados Orbitais e Geométricos (similares ao SCD1)

Inclinação da Órbita (I) = 0,4364 rad  $\cong$  25° ;

Excentricidade da Órbita (e) = 0,0045;

Semi-eixo (a) = 7139,61585 km;

Massa do Satélite (M) = 100kg;

$\mu = 3,986003 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ .

#### Variáveis de Delaunay

$$L = M \sqrt{\mu a} = 5334653,709$$

$$G = L \sqrt{1 - e^2} = 5334599,696$$

$$H = G \cos I = 4834636,634$$

$$l = 0$$

$$g = 4,542 \text{ rad}$$

$$h = 4,545 \text{ rad}$$

TABELA 6.5 – Conjunto de dados para o satélite A1

<b>MOMENTOS DE INÉRCIA PARA A = B &lt; C</b>				
<b>SATÉLITE PEQUENO PORTE A1</b>				
A/B	A/C	A (kg.km <sup>2</sup> )	B (kg.km <sup>2</sup> )	C (kg.km <sup>2</sup> )
1,082699	0,820769	10,67x10 <sup>-6</sup>	9,855x10 <sup>-6</sup>	13x10 <sup>-6</sup>
<b>PONTOS DE EQUILIBRIO (I)</b>				
L <sub>1</sub> (kg.km <sup>2</sup> /s)	L <sub>2</sub> (kg.km <sup>2</sup> /s)	L <sub>3</sub> (kg.km <sup>2</sup> /s)	ℓ <sub>2</sub> (rad)	ℓ <sub>3</sub> (rad)
9,344552x10 <sup>-8</sup>	5,848491x10 <sup>-7</sup>	4,470823x10 <sup>-7</sup>	2,7357522	2,922390
3,821021x10 <sup>-6</sup>	4,455682x10 <sup>-6</sup>	4,256291x10 <sup>-6</sup>	-8,629368x10 <sup>-1</sup>	3,6580167
<b>ESTABILIDADE A1</b>				
L2(kg.km <sup>2</sup> /s)	J <sub>2</sub> (°)	W (rpm)	T (s)	Estabilidade
5,848491x10 <sup>-7</sup>	9,16	0,431889	14,54815	<b>INSTÁVEL</b>
4,455682x10 <sup>-6</sup>	49,14	3,290348	1,909581	<b>ESTÁVEL</b>

TABELA 6.6 – Conjunto de dados para o satélite A2

<b>MOMENTOS DE INÉRCIA PARA C &gt; A &gt; B</b>				
<b>SATÉLITE PEQUENO PORTE A2</b>				
A/B	A/C	A (kg.km <sup>2</sup> )	B (kg.km <sup>2</sup> )	C (kg.km <sup>2</sup> )
1,159783	0,820769	10,67x10 <sup>-6</sup>	9,20x10 <sup>-6</sup>	13x10 <sup>-6</sup>
<b>PONTOS DE EQUILIBRIO</b>				
L <sub>1</sub> (kg.km <sup>2</sup> /s)	L <sub>2</sub> (kg.km <sup>2</sup> /s)	L <sub>3</sub> (kg.km <sup>2</sup> /s)	ℓ <sub>2</sub> (rad)	ℓ <sub>3</sub> (rad)
8,678173x10 <sup>-6</sup>	3,338037x10 <sup>-6</sup>	-2,134387x10 <sup>-6</sup>	3,160353x10 <sup>-1</sup>	-7,038969x10 <sup>-1</sup>
<b>ESTABILIDADE A2</b>				
L2(kg.km <sup>2</sup> /s)	J <sub>2</sub> (°)	W (rpm)	T (s)	Estabilidade
3,338037x10 <sup>-6</sup>	148,9	2,4650119	24,4699	<b>INSTÁVEL</b>

TABELA 6.7 – Conjunto de dados para o satélite A3

<b>MOMENTOS DE INÉRCIA PARA A = C &gt; B</b>				
<b>SATÉLITE PEQUENO PORTE A3</b>				
A/B	A/C	A (kg.km <sup>2</sup> )	B (kg.km <sup>2</sup> )	C (kg.km <sup>2</sup> )
1,894737	1	18x10 <sup>-6</sup>	9,5x10 <sup>-6</sup>	18x10 <sup>-6</sup>
<b>PONTOS DE EQUILIBRIO</b>				
L <sub>1</sub> (kg.km <sup>2</sup> /s)	L <sub>2</sub> (kg.km <sup>2</sup> /s)	L <sub>3</sub> (kg.km <sup>2</sup> /s)	ℓ <sub>2</sub> (rad)	ℓ <sub>3</sub> (rad)
9,917149x10 <sup>-6</sup>	1,216693x10 <sup>-5</sup>	-9,882007x10 <sup>-6</sup>	-8,731495x10 <sup>-1</sup>	3,41015229
-1,345692x10 <sup>-5</sup>	1,493357x10 <sup>-5</sup>	1,287302x10 <sup>-5</sup>	-1,22931297	2,28324014
<b>ESTABILIDADE A3</b>				
L2(kg.km <sup>2</sup> /s)	J <sub>2</sub> (°)	W (rpm)	T (s)	Estabilidade
1,216693x10 <sup>-5</sup>	46,7	6,489029	9,295464	<b>ESTÁVEL</b>
1,493357x10 <sup>-5</sup>	51,6	7,964571	7,573360	<b>INSTÁVEL</b>



### 6.3.3. Aplicações para Satélite de Pequeno Porte B

Os dados orbitais dos satélites de pequeno porte B são apresentados abaixo, os quais são similares aos dados do Satélite de Coleta de Dados Brasileiro SCD2 (Orlando, Lopes, Kuga, 1997; Kuga, Orlando, Lopes, 1999).

Nas Tabelas 6.8, 6.9, 6.10 são apresentados os resultados da análise para cada conjunto de dados relacionados com os momentos principais de inércia do satélite e pontos de equilíbrio determinados.

Dos **cinquenta e um** conjuntos de dados de satélites do tipo B, **cento e doze** pontos de equilíbrio foram determinados e **cento e doze** aplicações realizadas, sendo que aqui são apresentados os resultados selecionados de três conjuntos de dados e sua respectiva estabilidade.

Observa-se que apenas **quatro** dos casos analisados foram estáveis e que **cento e oito** casos foram instáveis. **Noventa** casos instáveis não satisfizeram a primeira condição do teorema de estabilidade, ou seja, os auto-valores do sistema linear obtidos foram reais ou não imaginários puros (falhando na primeira condição). Os outros **dezoito** casos instáveis satisfizeram a primeira condição dos auto-valores serem imaginários puros, mas falharam na terceira condição resultando em um  $D^0$  nulo.

Como exemplo, para o conjunto de dados do satélite da tabela 6.8 apresenta-se abaixo a análise das condições do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko, juntamente com a equação característica e a forma normal da hamiltoniana, que resultou em um movimento estável:

#### 1 .Equação característica:

$$s^4 + 1,00238473 \times 10^{-5} s^2 + 7,3602652 \times 10^{-17}$$

## 2. Auto-valores:

$$\alpha_1^o = \pm 1,001154981 \times 10^{-3} i$$

$$\alpha_2^o = \pm 8,569526581 \times 10^{-6} i$$

como são auto-valores imaginários puros, a primeira condição do teorema está satisfeita;

## 3. Forma normal da hamiltoniana:

$$H_2^{\text{nova}} = 5,005774892 \times 10^{-4} (\tilde{q}_1^2 + \tilde{p}_1^2) - 4,284763298 \times 10^{-6} (\tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_2^2)$$

$$H_4^{\text{nova}} = (418,4012745) (\tilde{q}_1^4 + \tilde{p}_1^4 + 2\tilde{q}_1^2 \tilde{p}_1^2) + \\ (-749,7293591) (\tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_1^2 \tilde{p}_2^2 + \tilde{p}_1^2 \tilde{p}_2^2 + \tilde{p}_1^2 \tilde{q}_2^2) + \\ +(17,16293613) (\tilde{q}_2^4 + \tilde{p}_2^4 + 2\tilde{q}_2^2 \tilde{p}_2^2)$$

## 4. A segunda condição do teorema:

$$\pm k_1 \alpha_1^o \pm k_2 \alpha_2^o \neq 0 \text{ com } |k_1| + |k_2| \leq 4$$

$$\S \quad k_1 \alpha_1^o + k_2 \alpha_2^o \neq 0, \text{ para } +\alpha_1^o \text{ e } +\alpha_2^o$$

$$k_1 = 1 \text{ e } k_2 = 3$$

$$1 (1,001154981 \times 10^{-3}) + 3 (8,569526581 \times 10^{-6}) = 1,026863 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 2 \text{ e } k_2 = 2$$

$$2 (1,001154981 \times 10^{-3}) + 2 (8,569526581 \times 10^{-6}) = 2,019449 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 3 \text{ e } k_2 = 1$$

$$3 (1,001154981 \times 10^{-3}) + 1 (8,569526581 \times 10^{-6}) = 9,018964 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 1 \text{ e } k_2 = 2$$

$$1 (1,001154981 \times 10^{-3}) + 2 (8,569526581 \times 10^{-6}) = 1,018294 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 2 \text{ e } k_2 = 1$$

$$2 (1,001154981 \times 10^{-3}) + 1 (8,569526581 \times 10^{-6}) = 2,010879 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 1 \text{ e } k_2 = 1$$

$$1 (1,001154981 \times 10^{-3}) + 1 (8,569526581 \times 10^{-6}) = 1,009724 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 0 \quad e \quad k_2 = 1$$

$$0(1,001154981 \times 10^{-3}) + 1(8,569526581 \times 10^{-6}) = 8,56952658 \times 10^{-6}$$

$$k_1 = 0 \quad e \quad k_2 = 2$$

$$0(1,001154981 \times 10^{-3}) + 2(8,569526581 \times 10^{-6}) = 1,7139053 \times 10^{-5}$$

$$k_1 = 0 \quad e \quad k_2 = 3$$

$$0(1,001154981 \times 10^{-3}) + 3(8,569526581 \times 10^{-6}) = 2,5708579 \times 10^{-5}$$

$$k_1 = 0 \quad e \quad k_2 = 4$$

$$0(1,001154981 \times 10^{-3}) + 4(8,569526581 \times 10^{-6}) = 3,4278106 \times 10^{-5}$$

$$k_1 = 1 \quad e \quad k_2 = 0$$

$$1(1,001154981 \times 10^{-3}) + 0(8,569526581 \times 10^{-6}) = 1,00115498 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 2 \quad e \quad k_2 = 0$$

$$2(1,001154981 \times 10^{-3}) + 0(8,569526581 \times 10^{-6}) = 2,0023099 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 3 \quad e \quad k_2 = 0$$

$$3(1,001154981 \times 10^{-3}) + 0(8,569526581 \times 10^{-6}) = 3,0034649 \times 10^{-3}$$

$$k_1 = 4 \quad e \quad k_2 = 0$$

$$4(1,001154981 \times 10^{-3}) + 0(8,569526581 \times 10^{-6}) = 4,0046199 \times 10^{-3}$$

Para todos os casos, a menos do sinal, os resultados são iguais. Logo a segunda condição está satisfeita.

##### 5. O determinante $D^o$ é dado por:

$$D^o = -(\beta_{11}^o \alpha_2^{o2} - 2\beta_{12}^o \alpha_1^o \alpha_2^o + \beta_{22}^o \alpha_1^{o2})$$

$$D^o = - (1673,605098 (7,34367858 \times 10^{-11}) + \\ - 2(2998,917436 (1,001154981 \times 10^{-3}) (8,569526581 \times 10^{-6})) + \\ + 68,65174452 (1,00231129 \times 10^{-6}))$$

$$D^o = -1,73959704 \times 10^{-5} \neq 0$$

como  $D^o$  é não nulo então a terceira condição é satisfeita e o movimento é **ESTÁVEL**, dentro de uma precisão numérica de  $10^{-16}$ .



## DADOS SATÉLITE PEQUENO PORTE B

### Dados Orbitais e Geométricos (similares ao SCD2)

Inclinação da Órbita (I) = 0,4363 rad  $\cong$  25° ;

Excentricidade da Órbita (e) = 0,00178;

Semi-eixo (a) = 7133,6797 km;

Massa do Satélite (M) = 100kg;

$\mu = 3,986003 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ .

### Variáveis de Delaunay

$$L = M \sqrt{\mu a} = 5332435,53$$

$$G = L \sqrt{1 - e^2} = 5332427,08$$

$$H = G \cos I = 4832893,01$$

$$l = 0$$

$$g = 1,0629 \text{ rad}$$

$$h = 5,4341 \text{ rad}$$

TABELA 6.8 – Conjunto de dados para o satélite B1

<b>MOMENTOS DE INÉRCIA PARA A &gt; C &gt; B</b>				
<b>SATÉLITE PEQUENO PORTE B1</b>				
<b>A/B</b>	<b>A/C</b>	<b>A (kg.km<sup>2</sup>)</b>	<b>B (kg.km<sup>2</sup>)</b>	<b>C (kg.km<sup>2</sup>)</b>
3,442478	2,357576	38,9x10 <sup>-6</sup>	11,3x10 <sup>-6</sup>	16,5x10 <sup>-6</sup>
<b>PONTOS DE EQUILIBRIO</b>				
<b>L<sub>1</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>L<sub>2</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>L<sub>3</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>l<sub>2</sub> (rad)</b>	<b>l<sub>3</sub> (rad)</b>
-2,593532x10 <sup>-7</sup>	9,629173x10 <sup>-7</sup>	-3,873965x10 <sup>-7</sup>	-2,6661593	2,341267x10 <sup>-1</sup>
2,982413x10 <sup>-6</sup>	7,874188x10 <sup>-6</sup>	4,184753x10 <sup>-6</sup>	-4,124454x10 <sup>-1</sup>	8,685149x10 <sup>-1</sup>
<b>ESTABILIDADE B1</b>				
<b>L2(kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>J<sub>2</sub> (°)</b>	<b>W (rpm)</b>	<b>T (s)</b>	<b>Estabilidade</b>
9,629173x10 <sup>-7</sup>	-15,43	0,560243	107,66511	<b>ESTÁVEL</b>
7,874188x10 <sup>-6</sup>	21,70	4,581346	13,166127	<b>INSTÁVEL</b>

TABELA 6.9 – Conjunto de dados para o satélite B2

<b>MOMENTOS DE INÉRCIA PARA A &lt; B &lt; C</b>				
<b>SATÉLITE PEQUENO PORTE B2</b>				
<b>A/B</b>	<b>A/C</b>	<b>A (kg.km<sup>2</sup>)</b>	<b>B (kg.km<sup>2</sup>)</b>	<b>C (kg.km<sup>2</sup>)</b>
0,044524	0,0050678	18,7x10 <sup>-6</sup>	4,2x10 <sup>-4</sup>	36,9x10 <sup>-4</sup>
<b>PONTOS DE EQUILIBRIO</b>				
<b>L<sub>1</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>L<sub>2</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>L<sub>3</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>ℓ<sub>2</sub> (rad)</b>	<b>ℓ<sub>3</sub> (rad)</b>
-1,319617x10 <sup>-4</sup>	3,339101x10 <sup>-4</sup>	-1,128251x10 <sup>-4</sup>	3,61184191	6,83621613
1,103193x10 <sup>-4</sup>	2,669569x10 <sup>-4</sup>	1,378868x10 <sup>-4</sup>	9,85571649	7,668219x10 <sup>-1</sup>
<b>ESTABILIDADE B2</b>				
<b>L2(kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>J<sub>2</sub> (°)</b>	<b>W (rpm)</b>	<b>T (s)</b>	<b>Estabilidade</b>
3,339101x10 <sup>-4</sup>	-22,64	0,868709	69,43437	<b>INSTÁVEL</b>
2,669569x10 <sup>-4</sup>	23,68	0,694522	86,84911	<b>ESTÁVEL</b>

TABELA 6.10 – Conjunto de dados para o satélite B3

<b>MOMENTOS DE INÉRCIA PARA B &lt; A &lt; C</b>				
<b>SATÉLITE PEQUENO PORTE B3</b>				
<b>A/B</b>	<b>A/C</b>	<b>A (kg.km<sup>2</sup>)</b>	<b>B (kg.km<sup>2</sup>)</b>	<b>C (kg.km<sup>2</sup>)</b>
202,11268	0,777778	28,7x10 <sup>-4</sup>	14,2x10 <sup>-6</sup>	36,9x10 <sup>-4</sup>
<b>PONTOS DE EQUILIBRIO</b>				
<b>L<sub>1</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>L<sub>2</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>L<sub>3</sub> (kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>ℓ<sub>2</sub> (rad)</b>	<b>ℓ<sub>3</sub> (rad)</b>
1,556442x10 <sup>-4</sup>	3,766381x10 <sup>-4</sup>	1,945379x10 <sup>-4</sup>	3,57253115	7,668158x10 <sup>-1</sup>
6,177910x10 <sup>-5</sup>	1,495167x10 <sup>-4</sup>	-7,719734x10 <sup>-5</sup>	8,99438387	-8,66109029
<b>ESTABILIDADE B3</b>				
<b>L2(kg.km<sup>2</sup>/s)</b>	<b>J<sub>2</sub> (°)</b>	<b>W (rpm)</b>	<b>T (s)</b>	<b>Estabilidade</b>
3,766381x10 <sup>-4</sup>	23,68	0,979871	61,558214	<b>ESTÁVEL</b>
1,495167x10 <sup>-4</sup>	-23,68	0,388987	155,06763	<b>ESTÁVEL</b>

## 7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi apresentada uma abordagem para a análise da estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais na presença do torque de gradiente de gravidade. As variáveis canônicas de Andoyer foram utilizadas para descrever o movimento rotacional e se mostraram adequadas para a aplicação do teorema da estabilidade de Kovalev & Savchenko (1975). Para a aplicação deste teorema foi necessário obter a forma normal da hamiltoniana associada ao problema, de modo que uma discussão detalhada referente ao processo de normalização foi realizada, incluindo um algoritmo para a determinação desta forma normal da hamiltoniana do movimento rotacional em estudo.

Aplicações foram realizadas para três grupos de satélites artificiais, classificados de acordo com suas características de forma e dimensão, como satélites de médio e pequeno porte. Considerou-se que os mesmos se encontravam no perigeu de suas órbitas. Para os diferentes dados dos satélites considerados, inicialmente foram levantados os pontos de equilíbrio, a seguir determinada à forma normal da hamiltoniana em cada ponto e por fim analisadas as três condições necessárias do teorema de Kovalev & Savchenko (1975). Na determinação destes pontos de equilíbrio foi verificado que alguns correspondiam a singularidades das variáveis de Andoyer (ângulo de inclinação  $J_2$  nulo) ou a uma velocidade de rotação nula, sendo que tais pontos foram excluídos da análise. Um total de **duzentas e quinze** simulações foram realizadas, considerando casos com os três momentos principais de inércia diferentes e casos com dois momentos principais de inércia iguais ( $I_x = I_y$ ). Das **treze** simulações realizadas para o satélite de médio porte, **uma** apresentou movimento estável de acordo com o teorema de Kovalev & Savchenko. Das **noventa** simulações realizadas para o satélite de pequeno porte A, **duas** mostraram movimentos estáveis, enquanto que das **cento e doze** simulações para o satélite de pequeno porte B, **quatro** apresentaram movimentos estáveis.

De um modo geral, observou-se nas aplicações um número restrito de movimentos estáveis. Isto se justificaria pela presença de vários termos periódicos na hamiltoniana do torque de gradiente de gravidade ou pelo fato de que os pontos estáveis estariam associados com os pontos de equilíbrio que foram excluídos, devido a singularidades das variáveis de Andoyer. Esta última justificativa se aplica principalmente aos dados dos satélites de pequeno porte utilizados, os quais possuem características orbitais e físicas similares aos Satélites de Coleta de Dados Brasileiros, que são estabilizados por rotação e corresponderiam ao ângulo de inclinação  $J_2 = 0$  (Orlando, Lopes, Kuga, 1997; Kuga, Orlando, Lopes, 1999). Salienta-se também que o satélite de médio porte, possui características orbitais e físicas similares ao satélite americano PEGASUS, o qual possui um movimento rotacional **aleatório** (Crenshaw & Fitzpatrick, 1968).

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz foi também discutido, com uma aplicação realizada para um conjunto de dados do satélite de médio porte, o qual se mostrou estável pelos dois critérios utilizados. Para sistemas lineares, em que a forma quadrática é definida, o critério de Routh-Hurwitz pode ser utilizado para se estudar a estabilidade. Como já foi dito, quando a forma quadrática é indefinida um outro método deve ser considerado, por exemplo, o método de Arnold ou uma de suas variantes. Aqui no caso utilizamos o teorema de estabilidade de Kovalev & Savchenko que é uma variante do teorema de Arnold. Para sistemas não lineares, a contribuição da parte quadrática pode ser uma forma quadrática definida, mas a estabilidade não linear deve ser analisada à parte. Foi neste contexto que o trabalho aqui apresentado contribuiu.

A abordagem aqui realizada foi semi-analítica devido ao grande volume de cálculos algébricos realizados, associado com a hamiltoniana do torque de gradiente de gravidade. Assim os pontos de equilíbrio do problema foram determinados através de uma sub-rotina implementada com o software

MATHEMATICA e na determinação da forma normal foi utilizado um programa desenvolvido no software MAPLE, no qual de posse da hamiltoniana do problema em questão, o primeiro passo foi substituir todos os parâmetros relacionados com o movimento de translação (órbita) do satélite, e os pontos de equilíbrio encontrados. Obteve-se a hamiltoniana escrita na vizinhança da origem, através de uma translação das variáveis de Andoyer.

A partir dessa hamiltoniana na vizinhança da origem calculou-se a Hessiana. Para isso necessitou-se das derivadas segundas das variáveis relacionadas ao movimento de rotação (apresentadas no Apêndice A). Encontrou-se o sistema linearizado, ao qual é associado uma matriz  $JP$ , e a partir daí procedeu-se sua diagonalização. Determinou-se os auto-valores relacionados a matriz  $JP$  e seus respectivos auto-vetores necessários na determinação da matriz simplética  $D$  utilizada para fazer a transformação linear que normalizou a parte quadrática. Após a obtenção da forma normal da parte quadrática efetuou-se o procedimento de extensão aos termos de ordens superiores via método de Lie-Hori. Determinou-se a Hamiltoniana de 3ª ordem ( $H_3$ ), sua respectiva função geratriz  $G_3$  e os coeficientes necessários para eliminação de  $H_3^{nova}$ . A hamiltoniana  $H_3$  apresentou 20 monômios, assim como sua função geratriz  $G_3$ . Estes 20 coeficientes foram determinados a partir de uma equação homológica, sendo identificados manualmente, possuindo valores tais que eliminaram todos os monômios de  $H_3^{nova}$  e ainda foram utilizados na obtenção de  $H_4^{nova}$ .

Para o polinômio de 4º grau fez-se o mesmo processo e obteve-se  $H_4$  e sua respectiva função geratriz  $G_4$ . Alguns dos monômios não foram eliminados. Sendo que todos os coeficientes relacionados com os 20 monômios de  $H_3$  e os 35 monômios de  $H_4$  são determinados numericamente pela identificação dos monômios na aplicação em cada ponto de equilíbrio do problema em estudo. A última etapa consistiu na determinação da hamiltoniana em termos das coordenadas e momentos generalizados  $\tilde{p}_i$  e  $\tilde{q}_i$ , com  $H_2^{nova}$  e  $H_4^{nova}$  em sua



forma normal, utilizada na aplicação do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko. A verificação das três condições equilíbrio do teorema de Kovalev & Savchenko também foi realizada através de um programa desenvolvido no MAPLE.

Em continuidade a este trabalho pode-se se sugerir:

- verificar a estabilidade de movimento utilizando apenas pequenas parcelas significativas da hamiltoniana do torque de gradiente de gravidade;
- otimização no processo de determinação de pontos de equilíbrio e normalização da hamiltoniana do problema, de modo que possam ser analisados um conjunto maior de dados para o satélite;
- aplicação do teorema de estabilidade de Kovalev & Savshenko (1975) para outros conjuntos de variáveis;
- a análise da estabilidade na presença de torque não conservativos, o que levaria a extensão do teorema para a forma canônica estendida da hamiltoniana.

De um modo geral este trabalho contribui para a análise da missão de satélites artificiais, de modo a se apontar regiões em que o movimento rotacional é estável, o que levaria a um pequeno número de manobras de atitude para manter a atitude desejada, correspondendo a uma economia de combustível, se o controle fosse realizado por sistema propulsivo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARNOLD, V. I. The stability of the equilibrium position of a Hamiltonian system of ordinary differential equations in the general elliptic case. **Soviet. Math Dokl. Akad. Nauk. USSR**, v.137, n. 2, p. 247-257, 1961.

BHATNAGAR, K. B.; GUPTA, U. The existence and stability of the libration points of an axisymmetric body moving around axisymmetric body. **Astronomy and Astrophysics**, v. 91, p. 194-201, 1980.

\_\_\_\_\_. The existence and stability of the equilibrium points of a triaxial rigid body moving around another body. **Celestial Mechanics**, v. 39, p. 67-83, 1986.

BELETSKY, V. V. **Motion of an artificial satellite about its center of mass**. Moscow: Nauka, 1965 (in Russian), English translation: Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1966.

BENETTIN, G.; GALGANI, L.; GIORGILLI, A. A proof of nekhoroshev's theorem for the stability times in nearly integrable hamiltonian systems. **Celestial Mechanics**, v. 37, n. 1, p. 1-25, 1985.

BROUWER, O.; CLEMENCE, G.M. **Methods of celestial mechanics**. New York: Academic Press, 1961. 598 p.

CABETTE, R. E. S.; ZANARDI, M. C.; VILHENA DE MORAES, R. Analise de pontos de equilíbrio do movimento rotacional de satélites artificiais, com torque de gradiente de gravidade. In: CNMAC – CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 28., 2005, São Paulo, **Anais...** São Paulo: Editora do SENAC, 2005. p.1-5. CR-ROM.

CHUDNENKO, A. N. On the stability of uniform rotations of a rigid body around the principal axis. **PMM**, U.S.S.R., v. 44, n. 245-253, p. 174-179, 1981.

CORDEIRO, R. R. **Estabilidade linear de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas aplicadas a alguns problemas da dinâmica orbital**. 1994. Tese de doutorado - Observatório Nacional, Rio de Janeiro, 1994.

COSTA FILHO, O. O. Uma forma normal para sistemas dinâmicos hamiltonianos. In: I Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, v. 1, 2002, São José do Rio Preto. **Anais...** São José do Rio Preto: SBMAC, 2002. p. 211-234.

CRENSHAW, J. U.; FITZPATRICK, P. M. Gravity effects on the rotational motion of a uniaxial artificial satellite. **AIAA Journal**, v.6, p. 2140, 1968.

DEPRIT, A. Free rotation of a rigid body studied in the phase plane. **Am. J. Phys.**, v. 55, p. 424-428, 1967.

EL-GOHARY, A. I. On the stability of an equilibrium position and rotational motion of a gyrost. **Mechanics Research Communications**, v. 24, n. 4, p. 457-462, 1997.

\_\_\_\_\_. Optimal control of a rotational motion of a gyrost. **Mechanics Research Communications**, v. 27, n. 1, p. 59-67, 2000.

ELIPE, A.; FERRER, S. On the equilibrium solutions in the circular planar restricted three rigid bodies problem. **Celestial Mechanics**, v. 37, n. 1, p. 59-70, 1985.

ELIPE, A.; LANCHARES, V.; LÓPEZ-MORTALLA, T.; RIAGUAS, A. Nonlinear stability in resonant cases: a geometrical approach. **J. Nonlinear Science**, v. 11, p. 211-222, 2001.

ELIPE, A.; LÓPEZ-MORTALLA, T. On the Liapunov stability of stationary points around a central body. In: AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, 2004, Providence, RI. **Proceedings...** Providence, 2004, p. 1-13.

FANNY, C.; BADAOU, E. Relative equilibrium in the three-body problem with a rigid body. **Celestial Mechanics**, v. 69, n. 3, p. 293-315, 1998.

GIORGILLI, A. New insights on the stability from recent results in classical perturbation theory. In: BENEST, D.; FROESCHLE, C. (Ed.). **Les methodes modernes de la mécanique celeste**, Edition Frontières, Goutelas, 1989. p. 249-284.

GUTIÉRREZ-ROMERO, S.; PALACIÁN, J. F.; YANGUAS, P. The invariant manifolds of a finite straight segment. **Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza**, v. 25, p. 137-148, 2004.

HEGGIE, D. C. Bifurcation at complex instability. **Celestial Mechanics**, v. 35, n. 4, p. 357-382, 1985.

KANE, T. R.; SHIPPY, D. J. Attitude stability of a spinning unsymmetrical satellite in a circular orbit. **The Journal of the Astronautical Sciences**, v. X, n. 4, p. 114-119, 1963.

KAPLAN, M. H. **Modern spacecraft dynamics & control**. New York: John Wiley & Sons, 1976.

KINOSHITA, H. Stationary motions of an axisymmetric body around a spherical body and their stabilities. **Publ. Astron. Soc. Japan**, v. 22, p. 383-403, 1970.

\_\_\_\_\_. Stationary motions of a triaxial body and their stabilities. **Publ. Astron. Soc. Japan**, v. 24, p. 409-417, 1972.

\_\_\_\_\_. Analytical expansions of torque-free motions for short and long axis modes. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 53, p. 365-375, 1992.

KOVALEV, A. M.; SAVCHENKO, A. Ia. Stability of uniform rotations of a rigid body about a principal axis. **PMM**, v. 39, n. 4, p. 650-660, 1975.

KUGA, H. K. ; ORLANDO, V.; LOPES, R. V. F. Flight dynamics operations during leap for the INPE's second environmental data collecting satellite SCD2. **RBCM Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, v. 21. p. 339-344, 1999.

KUZMINA, L. K. Methods of stability theory in general idealization problem of mechanics. **Applied Mechanics in the Americas**, v. 8, p. 1247-1250, 1999.

LANCHARES, V.; PASCUAL, A.I. Stability of equilibria for 2-d resonant hamiltonian systems: a geometrical approach. **Monografias del Semin. Matem. García de Galdeano**, v. 27, p. 377-383, 2003.

LUM, K. Y.; BLOCH, A. M. Generalized Serret-Andoyer transformation and applications for the controlled rigid body. **Dynamical and Control**, v. 9, p. 39-66, 1999.

MACHUY, A. L. F. **Cálculo efetivo da forma normal parcial para o problema de Hill**. 2001. 71p. Dissertação de Mestrado - Instituto de Matemática, UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001.

MACIEJEWSKI, A. J. Reduction, relative equilibria and potencial in the two rigid bodies problem. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 63, p. 1-28, 1996.

MARKEEV, A. P. On the stability of the triangular libration points in the circular bounded three-body problem. **Prikl. Mat. Mech.** v. 33, p. 112-116, 1969.

MICHALAKIS, D. G.; MAVRAGANIS, A. G. The equilibrium configurations of the restricted problem of 2 + 2 triaxial rigid bodies. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 63, n. 1, p. 81-100, 1996.

MINORSKI, N. **Nonlinear Oscillations**. Princeton: Van Nostrand, 1962.

MOREIRA, L. S. **Variáveis canônicas não singulares e o movimento rotacional de satélites artificiais**. 2006. 168 p. Dissertação de Mestrado -

FEG/UNESP – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá/ Universidade Estadual Paulista, 2006.

MOSER, J. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 11, p. 81-114, 1958.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1993, 781 p. Tradução de Ivan José de Albuquerque.

ORLANDO, V.; LOPES, R. V. F.; KUGA, H. K. INPE'S flight dynamics team experience through four years of scd1 in-orbit operations: main issues, improvements and trends, In: ESA International Symposium on Spaceflight Dynamics, 1997, Darmstadt, Alemanha. **Proceedings ... Alemanha: 1997**. p. 433- 437.

PASCAL, M. Attitude equilibrium of dual spin satellites subject to gravitational torques of n-bodies. **Celestial Mechanics**, v. 36, n. 4, p. 319-347, 1985.

\_\_\_\_\_. Numerical investigation of all possible equilibrium of dual spin satellite. **Celestial Mechanics**, v. 37, n. 1, p. 81-93, 1985.

POZHARITSKII, G. K. On the construction of the Liapunov functions from the integrals of the equations for perturbed motion. **PMM**, v. 22, n. 2, p. 145-154, 1958.

RIAGUAS, A.; ELIPE, A.; LÓPEZ-MORTALLA, T. Nonlinear stability of the equilibria in the gravity field of a finite straight segment. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 81, p. 235-248, 2001.

SCHINLER, G. M. Satellite librations in the vicinity of equilibrium solutions. **ACTA Astronautical**, v. 5, p. 233, 1960.

SIEGEL, C. L.; MOSER, J. K. **Lectures in celestial mechanics**. New York: Springer, 1971.

SOSNITSKII, S. P. The stabilization of the equilibrium of conservative systems using gyroscopic forces. **J. Appl. Maths. Mechs.**, v. 64, n. 1, p. 53-63, 2000.

STEICHEN, D.; GIORGILLI, A. Long time stability for the main problem of artificial satellites. **Celestial Mechanics**, v. 69, n. 3, p. 317-330, 1998.

STUCHI, T. J. KAM tori in the center manifold of the 3-D Hill problem. **Advances in Space Dynamics**, v. 2, p. 112-127, 2002.

SHUSTER, M. D. A Survey of attitude representation. **J. of the Astron. Sci.**, v. 41, n. 4, p. 439-517, 1994.

SZEBEHELY, V. Review of concepts of stability. **Celestial Mechanics**, v. 34, n. 1-4, p. 49-64, 1984.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com geometria analítica**: 2. ed. São Paulo: Editora Makron Books, v. 2, 1995. Tradução de Alfredo Alves Faria.

TEOFILATTO, P.; GRAZIANI, F. On librational motion of spacecraft. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 7, n. 10, p. 1721-1744, 1996.

THOMSON, W. T. Stability of single axis gyros in a circular orbit. **AIAA Jornal**, v. 1, n. 7, p. 1556-1559, 1963.

VERHULST, F. **Nonlinear differential equations and dynamical systems**. Berlin, Germany : Springer, 1990, 277 p.

VILHENA DE MORAES, R. A semi-analytical method to study perturbed rotational motion. **Celestial Mechanics**, n. 45, p. 281-284, 1989.

ZANARDI, M. C. Study of the terms of coupling between rotational and translational motion. **Celestial Mechanics**, v. 39, n. 2, p. 147-164, 1986.

ZANARDI, M. C. Attitude propagation using non-singular canonical variables. **Adv. in the Astron. Sci**, v. 1000, p.551-564, 1998.

ZANARDI, M. C.; VILHENA DE MORAES, R. Analytical and semi-analytical analysis of an artificial satellite's rotational motion. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 75, p.227-250, 1999.

ZANARDI, M. C.; VILHENA DE MORAES, R.; CABETTE, R. E. S.; GARCIA, R. V. Spacecraft's attitude prediction: solar radiation torque and the earth's shadow. **Advances in Space Research**, v. 36, p.466-471, 2005.

ZANARDI, M. C. **Dinâmica de atitude de satélites artificiais**. 2005. 235 p. Tese de Livre Docência - FEG/UNESP – Faculdade de Engenharia / Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2005.

WERTZ, J. R. **Spacecraft attitude determination and control**. London: Reidel, Kluwer Academic Publishers, 1978.



## APÊNDICE A

### TERMOS DA HESSIANA DO PROBLEMA

Apresenta-se aqui os termos da Hessiana associados com as derivadas a segunda da hamiltoniana do movimento rotacional, que leva em conta o torque de gradiente de gravidade. Os termos aparecem em sua forma geral, em que os parâmetros constantes e os pontos de equilíbrio ainda não estão substituídos, sendo apresentados na linguagem MAPLE, com a seguinte analogia simbólica:  $m = Mi$ ,  $\theta = T$ ,  $I = II$ ,  $L_1 = LI$ ,  $L_2 = L2$ ,  $L_3 = L3$ ,  $l_2 = l2$ ,  $l_3 = l3$ .

O Primeiro termo  $a_{11} = f_{11}$  equivale a  $\frac{\partial^2 F}{\partial \ell_2^2}$ :

$$\begin{aligned}
 a_{11} = Mi^4 M^6 (C - A) & \left( (1 + 3 e \cos(l)) \left( \frac{3}{4} \frac{(1 - 3 T^2) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(l2)}{L2^2} \right. \right. \\
 & - \frac{3}{4} \frac{(1 - 3 T^2) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2 l2) L3 LI}{L2^2} - \frac{3}{8} \frac{\sin(2 II) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2 L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(h - l3 + l2)}{L2} \\
 & - \frac{3}{8} \frac{\sin(2 II) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2 L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(h - l3 - l2)}{L2} \\
 & + \frac{3}{8} \frac{\sin(II)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2 h - 2 l3 - l2)}{L2} \\
 & - \frac{3}{8} \frac{\sin(II)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2 h - 2 l3 + l2)}{L2} \\
 & - \frac{3}{4} \sin(2 II) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 - 2 l2) \\
 & + \frac{3}{4} \sin(2 II) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 + 2 l2) \\
 & + \frac{3}{8} \sin(II)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \cos(2 h - 2 l3 - 2 l2) + \frac{3}{8} \sin(II)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \cos(2 h - 2 l3 + 2 l2) \left. \right) \\
 & - \frac{9}{8} \frac{\sin(II)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2 l + 2 g - l2)}{L2^2} \\
 & - \frac{9}{8} \frac{\sin(II)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2 l + 2 g + l2)}{L2^2} - \frac{3}{8} \sin(II) (1 + T)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(-\cos(2l + 2g + h - l3 + l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3 + l2) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3 + l2)\right) \left)L2 - \frac{3}{8} \sin(II)\right. \\
& (1 + T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(-\cos(2l + 2g + h - l3 - l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3 - l2) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3 - l2)\right) \left)L2 + \frac{3}{8} \sin(II)\right. \\
& (1 - T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(-\cos(2l + 2g - h + l3 + l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 + l2) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 + l2)\right) \left)L2 + \frac{3}{8} \sin(II)\right. \\
& (1 - T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(-\cos(2l + 2g - h + l3 - l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 - l2) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 - l2)\right) \left)L2 + \frac{3}{16} (1 + T)^2\right. \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(-\cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + l2) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + l2)\right) \left)L2 - \frac{3}{16}\right. \\
& (1 + T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(-\cos(2l + 2g + 2h - 2l3 - l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 - l2) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 - l2)\right) \left)L2 - \frac{3}{16}\right. \\
& (1 - T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(-\cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 + l2) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + l2)\right) \left)L2 + \frac{3}{16}\right. \\
& (1 - T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(-\cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2)\right) \left)L2 - \frac{9}{32}\right. \\
& \sin(II)^2 \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \\
& (-4 \cos(2l + 2g - 2l2) + e (2 \cos(l + 2g - 2l2) - 14 \cos(3l + 2g - 2l2))) - \frac{9}{32} \\
& \sin(II)^2 \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \\
& (-4 \cos(2l + 2g + 2l2) + e (2 \cos(l + 2g + 2l2) - 14 \cos(3l + 2g + 2l2))) + \frac{3}{16} \\
& \sin(II) (1 + T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g + h - l3 + 2l2) \\
& + e (2 \cos(l + 2g + h - l3 + 2l2) - 14 \cos(3l + 2g + h - l3 + 2l2))) - \frac{3}{16} \sin(II) \\
& (1 + T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g + h - l3 - 2l2) \\
& + e (2 \cos(l + 2g + h - l3 - 2l2) - 14 \cos(3l + 2g + h - l3 - 2l2))) + \frac{3}{16} \sin(II)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1-T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g - h + l3 + 2l2)) \\
& + e (2 \cos(l + 2g - h + l3 + 2l2) - 14 \cos(3l + 2g - h + l3 + 2l2)) - \frac{3}{16} \sin(II) \\
& (1-T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g - h + l3 - 2l2)) \\
& + e (2 \cos(l + 2g - h + l3 - 2l2) - 14 \cos(3l + 2g - h + l3 - 2l2)) - \frac{3}{64} (1+T)^2 \\
& \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2)) \\
& + e (2 \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) - 14 \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2)) - \frac{3}{64} \\
& (1+T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2)) \\
& + e (2 \cos(l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) - 14 \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2)) - \frac{3}{64} \\
& (1-T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2)) \\
& + e (2 \cos(l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2) - 14 \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2)) - \frac{3}{64} \\
& (1-T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2)) \\
& + e (2 \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2) - 14 \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2)) \Bigg) / L^6
\end{aligned}$$

**O termo  $a_{12} = a_{21} = f_{13} = f_{31}$  equivale a  $\frac{\partial^2 F}{\partial l_2 \partial l_3} = \frac{\partial^2 F}{\partial l_3 \partial l_2}$ :**

$$\begin{aligned}
a_{12} = Mi^4 M^6 (C-A) & \left( (1+3e \cos(l)) \left( \frac{3}{8} \frac{\sin(2II) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(h - l3 + l2)}{L2} \right. \right. \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(2II) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(h - l3 - l2)}{L2} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(II)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 - l2)}{L2} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(II)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 + l2)}{L2} \\
& - \frac{3}{8} \sin(2II) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 - 2l2) \\
& - \frac{3}{8} \sin(2II) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 + 2l2) \\
& + \frac{3}{8} \sin(II)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2l3 - 2l2) \\
& \left. - \frac{3}{8} \sin(II)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2l3 + 2l2) \right) - \frac{3}{8} \sin(II) (1+T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(\cos(2l + 2g + h - l3 + l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3 + l2)\right) \Big) L2 - \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1 + T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(-\cos(2l + 2g + h - l3 - l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3 - l2) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3 - l2)\right) \Big) L2 + \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1 - T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(-\cos(2l + 2g - h + l3 + l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 + l2) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 + l2)\right) \Big) L2 + \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1 - T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(\cos(2l + 2g - h + l3 - l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 - l2)\right) \Big) L2 + \frac{3}{16} (1 + T)^2 \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} (2 \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2)) \\
& + e (-\cos(l + 2g + 2h - 2l3 + l2) + 7 \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + l2)) \Big) L2 - \frac{3}{16} \\
& (1 + T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} (-2 \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 - l2)) \\
& + e (\cos(l + 2g + 2h - 2l3 - l2) - 7 \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 - l2)) \Big) L2 - \frac{3}{16} \\
& (1 - T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} (-2 \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + l2)) \\
& + e (\cos(l + 2g - 2h + 2l3 + l2) - 7 \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + l2)) \Big) L2 + \frac{3}{16} \\
& (1 - T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} (2 \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2)) \\
& + e (-\cos(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) + 7 \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2)) \Big) L2 + \frac{3}{16} \\
& \sin(II) (1 + T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (2 \cos(2l + 2g + h - l3 + 2l2)) \\
& + e (-\cos(l + 2g + h - l3 + 2l2) + 7 \cos(3l + 2g + h - l3 + 2l2)) \Big) - \frac{3}{16} \sin(II) \\
& (1 + T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-2 \cos(2l + 2g + h - l3 - 2l2)) \\
& + e (\cos(l + 2g + h - l3 - 2l2) - 7 \cos(3l + 2g + h - l3 - 2l2)) \Big) + \frac{3}{16} \sin(II) \\
& (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-2 \cos(2l + 2g - h + l3 + 2l2)) \\
& + e (\cos(l + 2g - h + l3 + 2l2) - 7 \cos(3l + 2g - h + l3 + 2l2)) \Big) - \frac{3}{16} \sin(II) \\
& (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (2 \cos(2l + 2g - h + l3 - 2l2)) \\
& + e (-\cos(l + 2g - h + l3 - 2l2) + 7 \cos(3l + 2g - h + l3 - 2l2)) \Big) - \frac{3}{64} (1 + T)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (4 \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) \\
& + e(-2 \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) + 14 \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2))) - \frac{3}{64} \\
& (1 + T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) \\
& + e(2 \cos(l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) - 14 \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2))) - \frac{3}{64} \\
& (1 - T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2) \\
& + e(2 \cos(l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2) - 14 \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2))) - \frac{3}{64} \\
& (1 - T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (4 \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2) \\
& + e(-2 \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2) + 14 \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2))) \Bigg) / \\
& L^6
\end{aligned}$$

**O termo  $a_{13} = a_{31} = f_{12} = f_{21}$  equivale a  $\frac{\partial^2 F}{\partial l_2 \partial L_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial l_2}$ :**

$$\begin{aligned}
a_{13} = Mi^4 M^6 (C - A) & \left( (1 + 3e \cos(l)) \left( \frac{3}{2} \frac{(1 - 3T^2) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \sin(l2)}{L2^3} \right. \right. \\
& + \frac{3}{4} \frac{(1 - 3T^2) L3^3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \sin(l2)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}} + \frac{3}{4} \frac{(1 - 3T^2) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI^3 \sin(l2)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{3}{4} \frac{(1 - 3T^2) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \sin(2l2) L3 LI}{L2^3} - \frac{3}{8} \frac{(1 - 3T^2) \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \sin(2l2) L3^3 LI}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5} \\
& - \frac{3}{8} \frac{(1 - 3T^2) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \sin(2l2) L3 LI^3}{\sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} L2^5} + \frac{3}{8} \frac{\sin(2II) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \sin(h - l3 + l2)}{L2^2} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(2II) L3 \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \sin(h - l3 + l2)}{L2^3} - \frac{3}{4} \frac{\sin(2II) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \sin(h - l3 + l2)}{L2^3} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(2II) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI^3 \sin(h - l3 + l2)}{L2^4 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(h - l3 - l2)}{L2^2} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) L3 \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(h - l3 - l2)}{L2^3} \\
& - \frac{3}{4} \frac{\sin(2H) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(h - l3 - l2)}{L2^3} + \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) L1^3 \sin(h - l3 - l2)}{L2^4 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2h - 2l3 - l2)}{L2^2} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2h - 2l3 - l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2h - 2l3 - l2)}{L2^3} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^3 \sin(2h - 2l3 - l2)}{L2^4 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2h - 2l3 + l2)}{L2^2} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2h - 2l3 + l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2h - 2l3 + l2)}{L2^3} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^3 \sin(2h - 2l3 + l2)}{L2^4 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h - l3 - 2l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3} - \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h - l3 - 2l2)}{L2^2} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(2H) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \sin(h - l3 - 2l2)}{L2^3} + \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h - l3 + 2l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h - l3 + 2l2)}{L2^2} + \frac{3}{4} \frac{\sin(2H) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \sin(h - l3 + 2l2)}{L2^3} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(2h - 2l3 - 2l2) L3}{L2^2} - \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 L1^2 \sin(2h - 2l3 - 2l2)}{L2^3} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(2h - 2l3 + 2l2) L3}{L2^2} + \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 L1^2 \sin(2h - 2l3 + 2l2)}{L2^3} \Bigg) \\
& - \frac{9}{4} \frac{\sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2l + 2g - l2)}{L2^3} + \frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 L3^3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2l + 2g - l2)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1^3 \sin(2l + 2g - l2)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} + \frac{9}{4} \frac{\sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2l + 2g + l2)}{L2^3} \\
& - \frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 L3^3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2l + 2g + l2)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}} \\
& - \frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1^3 \sin(2l + 2g + l2)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} + \frac{3}{8} \sin(H) (1 + T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \\
& \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \left(-\sin(2l + 2g + h - l3 + l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 + l2)\right) \Bigg) / L2^2 - \frac{3}{8} \sin(H) \\
& (1 + T) L3 \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \left(-\sin(2l + 2g + h - l3 + l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 + l2)\right) \Bigg) / L2^3 + \frac{3}{4} \sin(H) \\
& (1 + T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \left(-\sin(2l + 2g + h - l3 + l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 + l2)\right) \Bigg) / L2^3 - \frac{3}{8} \sin(H) \\
& (1 + T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) L1^3 \left(-\sin(2l + 2g + h - l3 + l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 + l2)\right) \Bigg) / \left(L2^4\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L^2}} \left) + \frac{3}{8} \sin(II) (1+T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L^2}} \left( \right. \\
& \left. \sin(2l + 2g + h - l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 - l2) \right) \right) \Big/ L2^2 + \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1+T) L3 \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L^2}} \left( \sin(2l + 2g + h - l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 - l2) \right) \right) \Big/ L2^3 - \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1+T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L^2}} \left( \sin(2l + 2g + h - l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 - l2) \right) \right) \Big/ L2^3 - \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1+T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI^3 \left( \sin(2l + 2g + h - l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 - l2) \right) \right) \Big/ \left( L2^4 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L^2}} \right) - \frac{3}{8} \sin(II) (1-T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L^2}} \left( \right. \\
& \left. -\sin(2l + 2g - h + l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 + l2) \right) \right) \Big/ L2^2 - \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1-T) L3 \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L^2}} \left( -\sin(2l + 2g - h + l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 + l2) \right) \right) \Big/ L2^3 + \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1-T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L^2}} \left( -\sin(2l + 2g - h + l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 + l2) \right) \right) \Big/ L2^3 + \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1-T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI^3 \left( -\sin(2l + 2g - h + l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 + l2) \right) \right) \Big/ \left( L2^4 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L^2}} \right) - \frac{3}{8} \sin(II) (1-T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L^2}} \left( \right. \\
& \left. \sin(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) \Big/ L2^2 + \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1-T) L3 \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L^2}} \left( \sin(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) \Big/ L2^3 - \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1-T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L^2}} \left( \sin(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) \Big/ L2^3 + \frac{3}{8} \sin(II)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& (1-T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI^3 \left(\sin(2l+2g-h+l3-l2)\right. \\
& \left. + e \left(-\frac{1}{2} \sin(l+2g-h+l3-l2) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g-h+l3-l2)\right)\right) / \left(L2^4\right. \\
& \left.\sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} - \frac{3}{16} (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(\right.\right. \\
& \left.\left. - \sin(2l+2g+2h-2l3+l2)\right)\right. \\
& \left. + e \left(\frac{1}{2} \sin(l+2g+2h-2l3+l2) - \frac{7}{2} \sin(3l+2g+2h-2l3+l2)\right)\right) / L2^2 + \frac{3}{16} \\
& (1+T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(-\sin(2l+2g+2h-2l3+l2)\right. \\
& \left. + e \left(\frac{1}{2} \sin(l+2g+2h-2l3+l2) - \frac{7}{2} \sin(3l+2g+2h-2l3+l2)\right)\right) L3^2 / \left(\right. \\
& \left.\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4\right) + \frac{3}{16} (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(\right. \\
& \left.\left. - \sin(2l+2g+2h-2l3+l2)\right)\right. \\
& \left. + e \left(\frac{1}{2} \sin(l+2g+2h-2l3+l2) - \frac{7}{2} \sin(3l+2g+2h-2l3+l2)\right)\right) / L2^3 + \frac{3}{16} \\
& (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI^3 \left(-\sin(2l+2g+2h-2l3+l2)\right. \\
& \left. + e \left(\frac{1}{2} \sin(l+2g+2h-2l3+l2) - \frac{7}{2} \sin(3l+2g+2h-2l3+l2)\right)\right) / \left(L2^4\right. \\
& \left.\sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}\right) + \frac{3}{16} (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(\right. \\
& \left.\sin(2l+2g+2h-2l3-l2)\right. \\
& \left. + e \left(-\frac{1}{2} \sin(l+2g+2h-2l3-l2) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g+2h-2l3-l2)\right)\right) / L2^2 - \frac{3}{16} \\
& (1+T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(\sin(2l+2g+2h-2l3-l2)\right. \\
& \left. + e \left(-\frac{1}{2} \sin(l+2g+2h-2l3-l2) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g+2h-2l3-l2)\right)\right) L3^2 / \\
& \left(\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4\right) + \frac{3}{16} (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(\right. \\
& \left.\sin(2l+2g+2h-2l3-l2)\right. \\
& \left. + e \left(-\frac{1}{2} \sin(l+2g+2h-2l3-l2) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g+2h-2l3-l2)\right)\right) / L2^3 - \frac{3}{16} \\
& (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI^3 \left(\sin(2l+2g+2h-2l3-l2)\right. \\
& \left. + e \left(-\frac{1}{2} \sin(l+2g+2h-2l3-l2) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g+2h-2l3-l2)\right)\right) / \left(L2^4\right. \\
& \left.\sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}\right) + \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(\right. \\
& \left.\left. - \sin(2l+2g-2h+2l3+l2)\right)\right. \\
& \left. + e \left(\frac{1}{2} \sin(l+2g-2h+2l3+l2) - \frac{7}{2} \sin(3l+2g-2h+2l3+l2)\right)\right) / L2^2 - \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1-T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(-\sin(2l+2g-2h+2l3+l2)\right. \\
& \left.+ e\left(\frac{1}{2}\sin(l+2g-2h+2l3+l2) - \frac{7}{2}\sin(3l+2g-2h+2l3+l2)\right)\right) L3^2 \left/ \left(\right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4\right) + \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(\right. \right. \\
& \left. \left. -\sin(2l+2g-2h+2l3+l2)\right.\right. \\
& \left. \left. + e\left(\frac{1}{2}\sin(l+2g-2h+2l3+l2) - \frac{7}{2}\sin(3l+2g-2h+2l3+l2)\right)\right)\right) / L2^3 - \frac{3}{16} \\
& (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI^3 \left(-\sin(2l+2g-2h+2l3+l2)\right. \\
& \left.+ e\left(\frac{1}{2}\sin(l+2g-2h+2l3+l2) - \frac{7}{2}\sin(3l+2g-2h+2l3+l2)\right)\right) \left/ \left(L2^4\right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}\right) - \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(\right. \right. \\
& \left. \left. \sin(2l+2g-2h+2l3-l2)\right.\right. \\
& \left. \left. + e\left(-\frac{1}{2}\sin(l+2g-2h+2l3-l2) + \frac{7}{2}\sin(3l+2g-2h+2l3-l2)\right)\right)\right) / L2^2 + \frac{3}{16} \\
& (1-T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(\sin(2l+2g-2h+2l3-l2)\right. \\
& \left.+ e\left(-\frac{1}{2}\sin(l+2g-2h+2l3-l2) + \frac{7}{2}\sin(3l+2g-2h+2l3-l2)\right)\right) L3^2 \left/ \right. \\
& \left(\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4\right) + \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left(\right. \\
& \left. \sin(2l+2g-2h+2l3-l2)\right. \\
& \left. + e\left(-\frac{1}{2}\sin(l+2g-2h+2l3-l2) + \frac{7}{2}\sin(3l+2g-2h+2l3-l2)\right)\right) / L2^3 + \frac{3}{16} \\
& (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI^3 \left(\sin(2l+2g-2h+2l3-l2)\right. \\
& \left.+ e\left(-\frac{1}{2}\sin(l+2g-2h+2l3-l2) + \frac{7}{2}\sin(3l+2g-2h+2l3-l2)\right)\right) \left/ \left(L2^4\right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}\right) - \frac{9}{16} \sin(II)^2 L3^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right)\right. \\
& \left. (2 \sin(2l+2g-2l2) + e(-\sin(l+2g-2l2) + 7 \sin(3l+2g-2l2))) / L2^3 - \frac{9}{16}\right. \\
& \left. \sin(II)^2 \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) LI^2\right. \\
& \left. (2 \sin(2l+2g-2l2) + e(-\sin(l+2g-2l2) + 7 \sin(3l+2g-2l2))) / L2^3 - \frac{9}{16}\right. \\
& \left. \sin(II)^2 L3^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right)\right. \\
& \left. (-2 \sin(2l+2g+2l2) + e(\sin(l+2g+2l2) - 7 \sin(3l+2g+2l2))) / L2^3 - \frac{9}{16}\right. \\
& \left. \sin(II)^2 \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) LI^2\right. \\
& \left. (-2 \sin(2l+2g+2l2) + e(\sin(l+2g+2l2) - 7 \sin(3l+2g+2l2))) / L2^3 + \frac{3}{16}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin(II) (1 + T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-2 \sin(2l + 2g + h - l3 + 2l2)) \\
& + e (\sin(l + 2g + h - l3 + 2l2) - 7 \sin(3l + 2g + h - l3 + 2l2)) L3^2 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3 \right) + \frac{3}{16} \sin(II) (1 + T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) ( \\
& -2 \sin(2l + 2g + h - l3 + 2l2) \\
& + e (\sin(l + 2g + h - l3 + 2l2) - 7 \sin(3l + 2g + h - l3 + 2l2)) / L2^2 + \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1 + T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI^2 (-2 \sin(2l + 2g + h - l3 + 2l2) \\
& + e (\sin(l + 2g + h - l3 + 2l2) - 7 \sin(3l + 2g + h - l3 + 2l2)) / L2^3 - \frac{3}{16} \sin(II) \\
& (1 + T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (2 \sin(2l + 2g + h - l3 - 2l2) \\
& + e (-\sin(l + 2g + h - l3 - 2l2) + 7 \sin(3l + 2g + h - l3 - 2l2)) L3^2 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3 \right) + \frac{3}{16} \sin(II) (1 + T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) ( \\
& 2 \sin(2l + 2g + h - l3 - 2l2) \\
& + e (-\sin(l + 2g + h - l3 - 2l2) + 7 \sin(3l + 2g + h - l3 - 2l2)) / L2^2 - \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1 + T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI^2 (2 \sin(2l + 2g + h - l3 - 2l2) \\
& + e (-\sin(l + 2g + h - l3 - 2l2) + 7 \sin(3l + 2g + h - l3 - 2l2)) / L2^3 + \frac{3}{16} \\
& \sin(II) (1 - T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-2 \sin(2l + 2g - h + l3 + 2l2) \\
& + e (\sin(l + 2g - h + l3 + 2l2) - 7 \sin(3l + 2g - h + l3 + 2l2)) L3^2 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3 \right) - \frac{3}{16} \sin(II) (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) ( \\
& -2 \sin(2l + 2g - h + l3 + 2l2) \\
& + e (\sin(l + 2g - h + l3 + 2l2) - 7 \sin(3l + 2g - h + l3 + 2l2)) / L2^2 + \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI^2 (-2 \sin(2l + 2g - h + l3 + 2l2) \\
& + e (\sin(l + 2g - h + l3 + 2l2) - 7 \sin(3l + 2g - h + l3 + 2l2)) / L2^3 - \frac{3}{16} \sin(II) \\
& (1 - T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (2 \sin(2l + 2g - h + l3 - 2l2) \\
& + e (-\sin(l + 2g - h + l3 - 2l2) + 7 \sin(3l + 2g - h + l3 - 2l2)) L3^2 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3 \right) - \frac{3}{16} \sin(II) (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) ( \\
& 2 \sin(2l + 2g - h + l3 - 2l2) \\
& + e (-\sin(l + 2g - h + l3 - 2l2) + 7 \sin(3l + 2g - h + l3 - 2l2)) / L2^2 - \frac{3}{8} \sin(II)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{8} \frac{(1-3T^2) \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2l2) L1}{L2^2} - \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \left(1-\frac{2L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \sin(h-l3+l2)}{L2^2} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(2H) \left(1+\frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \sin(h-l3+l2)}{L2^2} - \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \left(1+\frac{2L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \sin(h-l3-l2)}{L2^2} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(2H) \left(1-\frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \sin(h-l3-l2)}{L2^2} + \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1+\frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2h-2l3-l2) L3}{\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^3} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2h-2l3-l2)}{L2^2} + \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1-\frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2h-2l3+l2) L3}{\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^3} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2h-2l3+l2)}{L2^2} - \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \left(1+\frac{L3}{L2}\right) \left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h-l3-2l2) L3}{\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^2} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} \left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h-l3-2l2)}{L2} - \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \left(1-\frac{L3}{L2}\right) \left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h-l3+2l2) L3}{\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^2} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} \left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h-l3+2l2)}{L2} - \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1+\frac{L3}{L2}\right) \left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(2h-2l3-2l2)}{L2} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1-\frac{L3}{L2}\right) \left(1-\frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(2h-2l3+2l2)}{L2} \left. \right\} - \frac{3}{16} (1+T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} \\
& L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \left( -\sin(2l+2g+2h-2l3+l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l+2g+2h-2l3+l2) - \frac{7}{2} \sin(3l+2g+2h-2l3+l2) \right) \right) / L2^2 \\
& + \frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2l+2g-l2)}{L2^2} - \frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 L3^2 L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2l+2g-l2)}{L2^4 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}} \\
& - \frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2l+2g+l2)}{L2^2} \\
& + \frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 L3^2 L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2l+2g+l2)}{L2^4 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}} + \frac{3}{8} \sin(H) (1+T) \left(1+\frac{2L3}{L2}\right) L1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( -\sin(2l + 2g + h - l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 + l2) \right) \right) / L2^2 - \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1 + T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( -\sin(2l + 2g + h - l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 + l2) \right) \right) / L2^2 - \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1 + T) \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \sin(2l + 2g + h - l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 - l2) \right) \right) / L2^2 + \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1 + T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \sin(2l + 2g + h - l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 - l2) \right) \right) / L2^2 + \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1 - T) \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( -\sin(2l + 2g - h + l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 + l2) \right) \right) / L2^2 - \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1 - T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( -\sin(2l + 2g - h + l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 + l2) \right) \right) / L2^2 - \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1 - T) \left( 1 + \frac{2L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \sin(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) / L2^2 + \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1 - T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \sin(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) / L2^2 - \frac{3}{16} \\
& (1 + T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( -\sin(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g + 2h - 2l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right) \right) L3 \quad / \quad \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3 \right) - \frac{3}{16} (1 + T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. \sin(2l + 2g + 2h - 2l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + 2h - 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + 2h - 2l3 - l2) \right) \right) / L2^2 + \frac{3}{16} \\
& (1 + T)^2 \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \sin(2l + 2g + 2h - 2l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + 2h - 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + 2h - 2l3 - l2) \right) \right) L3 \quad / \quad \left( \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^3} - \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} LI} \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. -\sin(2l+2g-2h+2l3+l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l+2g-2h+2l3+l2) - \frac{7}{2} \sin(3l+2g-2h+2l3+l2) \right) \right) / L2^2 + \frac{3}{16} \\
& (1-T)^2 \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( -\sin(2l+2g-2h+2l3+l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l+2g-2h+2l3+l2) - \frac{7}{2} \sin(3l+2g-2h+2l3+l2) \right) \right) L3 \quad / \quad \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^3} - \frac{3}{16} (1-T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \sin(2l+2g-2h+2l3-l2) \right. \right. \\
& \left. \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l+2g-2h+2l3-l2) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g-2h+2l3-l2) \right) \right) \right) L3 \quad / \quad \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^3} - \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} LI} \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \sin(2l+2g-2h+2l3-l2) \right. \right. \\
& \left. \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l+2g-2h+2l3-l2) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g-2h+2l3-l2) \right) \right) \right) / L2^2 + \frac{9}{16} \\
& \sin(H)^2 L3 \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \\
& (2 \sin(2l+2g-2l2) + e(-\sin(l+2g-2l2) + 7 \sin(3l+2g-2l2))) / L2^2 + \frac{9}{16} \\
& \sin(H)^2 L3 \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \\
& (-2 \sin(2l+2g+2l2) + e(\sin(l+2g+2l2) - 7 \sin(3l+2g+2l2))) / L2^2 - \frac{3}{16} \\
& \sin(H) (1+T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) (-2 \sin(2l+2g+h-l3+2l2) \\
& + e(\sin(l+2g+h-l3+2l2) - 7 \sin(3l+2g+h-l3+2l2))) L3 \quad / \quad \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^2} - \frac{3}{16} \sin(H) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \right. \right. \\
& \left. \left. -2 \sin(2l+2g+h-l3+2l2) \right. \right. \\
& \left. \left. + e(\sin(l+2g+h-l3+2l2) - 7 \sin(3l+2g+h-l3+2l2)) \right) / L2 - \frac{3}{16} \sin(H) \right. \\
& (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) (2 \sin(2l+2g+h-l3-2l2) \\
& + e(-\sin(l+2g+h-l3-2l2) + 7 \sin(3l+2g+h-l3-2l2))) / L2 + \frac{3}{16} \sin(H) \\
& (1+T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) (2 \sin(2l+2g+h-l3-2l2) \\
& + e(-\sin(l+2g+h-l3-2l2) + 7 \sin(3l+2g+h-l3-2l2))) L3 \quad / \quad \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^2} + \frac{3}{16} \sin(H) (1-T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \sin(2l + 2g - h + l3 + 2l2) \\
& + e (\sin(l + 2g - h + l3 + 2l2) - 7 \sin(3l + 2g - h + l3 + 2l2)) / L2 - \frac{3}{16} \sin(II) \\
& (1 - T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) (-2 \sin(2l + 2g - h + l3 + 2l2) \\
& + e (\sin(l + 2g - h + l3 + 2l2) - 7 \sin(3l + 2g - h + l3 + 2l2))) L3 \left/ \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^2} \right) + \frac{3}{16} \sin(II) (1 - T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) ( \right. \\
& \left. 2 \sin(2l + 2g - h + l3 - 2l2) \right. \\
& + e (-\sin(l + 2g - h + l3 - 2l2) + 7 \sin(3l + 2g - h + l3 - 2l2))) L3 \left/ \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^2} \right) + \frac{3}{16} \sin(II) (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) ( \right. \\
& \left. 2 \sin(2l + 2g - h + l3 - 2l2) \right. \\
& + e (-\sin(l + 2g - h + l3 - 2l2) + 7 \sin(3l + 2g - h + l3 - 2l2))) / L2 + \frac{3}{32} (1 + T)^2 \\
& \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) (-2 \sin(2l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) \\
& + e (\sin(l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) - 7 \sin(3l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2))) / L2 - \frac{3}{32} \\
& (1 + T)^2 \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) (2 \sin(2l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) \\
& + e (-\sin(l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) + 7 \sin(3l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2))) / L2 - \frac{3}{32} \\
& (1 - T)^2 \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) (-2 \sin(2l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2) \\
& + e (\sin(l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2) - 7 \sin(3l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2))) / L2 + \frac{3}{32} \\
& (1 - T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) (2 \sin(2l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2) \\
& + e (-\sin(l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2) + 7 \sin(3l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2))) / L2 \left/ \right/ L^6
\end{aligned}$$

**O termo  $a_{22} = f_{33}$  equivale a  $\frac{\partial^2 F}{\partial \ell_3^2}$ :**

$$\begin{aligned}
a_{22} = Mi^4 M^6 (C - A) & \left( (1 + 3e \cos(l)) \left( \frac{3LI^2}{2L2^2} - \frac{1}{2} \right) \right. \\
& \left. \left( \frac{3}{4} \frac{\sin(2II) L3}{L2} \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \cos(h - l3) + \frac{3}{2} \sin(II)^2 \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right) \cos(2h - 2l3) \right) \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(h - l3 + l2)}{L2} \\
& -\frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(h - l3 - l2)}{L2} \\
& +\frac{3}{2} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 - l2)}{L2} \\
& -\frac{3}{2} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 + l2)}{L2} \\
& -\frac{3}{16} \sin(2H) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 - 2l2) \\
& +\frac{3}{16} \sin(2H) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 + 2l2) \\
& +\frac{3}{8} \sin(H)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2l3 - 2l2) \\
& +\frac{3}{8} \sin(H)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2l3 + 2l2) \left. \right) + \left(\frac{3L1^2}{2L2^2} - \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{4} \sin(H)\right. \\
& (1-T) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \\
& \left. \left(-\cos(2l + 2g - h + l3) + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3)\right)\right) L2 \right. \\
& +\frac{3}{4} \sin(H) (1+T) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \\
& \left. \left(-\cos(2l + 2g + h - l3) + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3)\right)\right) L2 \right. \\
& -\frac{3}{16} (1-T)^2 \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g - 2h + 2l3)) \\
& + e (2 \cos(l + 2g - 2h + 2l3) - 14 \cos(3l + 2g - 2h + 2l3)) - \frac{3}{16} (1+T)^2 \\
& \left. \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g + 2h - 2l3)) \right. \\
& \left. + e (2 \cos(l + 2g + 2h - 2l3) - 14 \cos(3l + 2g + 2h - 2l3)) \right) + \frac{9}{8} \\
& \frac{\sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g - l3) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - l3)\right)}{L2^2} \\
& +\frac{9}{8} \\
& \frac{\sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g + l3) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + l3)\right)}{L2^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{8} \sin(II) (1+T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. -\cos(2l+2g+h-l3+l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+l2) - \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+l2) \right) \right) \left. \right) L2 - \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1+T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( -\cos(2l+2g+h-l3-l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-l2) - \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-l2) \right) \right) \left. \right) L2 + \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1-T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( -\cos(2l+2g-h+l3+l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+l2) - \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+l2) \right) \right) \left. \right) L2 + \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1-T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( -\cos(2l+2g-h+l3-l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3-l2) - \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3-l2) \right) \right) \left. \right) L2 + \frac{3}{16} (1+T)^2 \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} (-4 \cos(2l+2g+2h-2l3+l2) \\
& + e (2 \cos(l+2g+2h-2l3+l2) - 14 \cos(3l+2g+2h-2l3+l2))) / L2 - \frac{3}{16} \\
& (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} (-4 \cos(2l+2g+2h-2l3-l2) \\
& + e (2 \cos(l+2g+2h-2l3-l2) - 14 \cos(3l+2g+2h-2l3-l2))) / L2 - \frac{3}{16} \\
& (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} (-4 \cos(2l+2g-2h+2l3+l2) \\
& + e (2 \cos(l+2g-2h+2l3+l2) - 14 \cos(3l+2g-2h+2l3+l2))) / L2 + \frac{3}{16} \\
& (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} (-4 \cos(2l+2g-2h+2l3-l2) \\
& + e (2 \cos(l+2g-2h+2l3-l2) - 14 \cos(3l+2g-2h+2l3-l2))) / L2 + \frac{3}{16} \\
& \sin(II) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( -\cos(2l+2g+h-l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+2l2) - \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+2l2) \right) \right) - \frac{3}{16} \sin(II) \\
& (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( -\cos(2l+2g+h-l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) - \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2) \right) \right) + \frac{3}{16} \sin(II) \\
& (1-T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( -\cos(2l+2g-h+l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+2l2) - \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+2l2) \right) \right) - \frac{3}{16} \sin(II)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1-T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left(-\cos(2l + 2g - h + l3 - 2l2)\right) \\
& + e \left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 - 2l2) - \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 - 2l2)\right) \left(-\frac{3}{64} (1+T)^2\right) \\
& \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2)) \\
& + e (2 \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) - 14 \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2)) \left(-\frac{3}{64}\right) \\
& (1+T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2)) \\
& + e (2 \cos(l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) - 14 \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2)) \left(-\frac{3}{64}\right) \\
& (1-T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2)) \\
& + e (2 \cos(l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2) - 14 \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2)) \left(-\frac{3}{64}\right) \\
& (1-T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (-4 \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2)) \\
& + e (2 \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2) - 14 \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2)) \left(-\frac{3}{64}\right)
\end{aligned}$$

**O termo  $a_{23} = a_{32} = f_{23} = f_{32}$  equivale a  $\frac{\partial^2 F}{\partial l_3 \partial L_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial l_3}$  :**

$$\begin{aligned}
a_{23} = Mi^4 M^6 (C - A) & \left( -3 LI^2 \left( \frac{3}{4} \sin(II) (1-T) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right. \right. \\
& \left. \left( -\sin(2l + 2g - h + l3) + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3) \right) \right) \right) L2 \\
& + \frac{3}{4} \sin(II) (1+T) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \\
& \left( \sin(2l + 2g + h - l3) + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3) \right) \right) L2 \\
& - \frac{3}{16} (1-T)^2 \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) (-2 \sin(2l + 2g - 2h + 2l3)) \\
& + e (\sin(l + 2g - 2h + 2l3) - 7 \sin(3l + 2g - 2h + 2l3)) \left(-\frac{3}{16} (1+T)^2\right) \\
& \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) (2 \sin(2l + 2g + 2h - 2l3)) \\
& + e (-\sin(l + 2g + 2h - 2l3) + 7 \sin(3l + 2g + 2h - 2l3)) \left(-\frac{3}{32} (1+T)^2\right) \\
& \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) (2 \sin(2l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e(-\sin(l+2g+2h-2l_3+2l_2)+7\sin(3l+2g+2h-2l_3+2l_2))L_3/L_2^2 \\
& + \frac{3}{8}\sin(H)(1+T)\left(1+\frac{L_3}{L_2}\right)\left(1-\frac{2L_3}{L_2}\right)L_1\sqrt{1-\frac{L_1^2}{L_2^2}}\left(\sin(2l+2g+h-l_3-l_2)\right. \\
& \left.+ e\left(-\frac{1}{2}\sin(l+2g+h-l_3-l_2)+\frac{7}{2}\sin(3l+2g+h-l_3-l_2)\right)\right)/L_2^2+\frac{3}{8}\sin(H) \\
& (1+T)L_3\left(1-\frac{2L_3}{L_2}\right)L_1\sqrt{1-\frac{L_1^2}{L_2^2}}\left(\sin(2l+2g+h-l_3-l_2)\right. \\
& \left.+ e\left(-\frac{1}{2}\sin(l+2g+h-l_3-l_2)+\frac{7}{2}\sin(3l+2g+h-l_3-l_2)\right)\right)/L_2^3-\frac{3}{4}\sin(H) \\
& (1+T)\left(1+\frac{L_3}{L_2}\right)L_3L_1\sqrt{1-\frac{L_1^2}{L_2^2}}\left(\sin(2l+2g+h-l_3-l_2)\right. \\
& \left.+ e\left(-\frac{1}{2}\sin(l+2g+h-l_3-l_2)+\frac{7}{2}\sin(3l+2g+h-l_3-l_2)\right)\right)/L_2^3-\frac{3}{8}\sin(H) \\
& (1+T)\left(1+\frac{L_3}{L_2}\right)\left(1-\frac{2L_3}{L_2}\right)L_1^3\left(\sin(2l+2g+h-l_3-l_2)\right. \\
& \left.+ e\left(-\frac{1}{2}\sin(l+2g+h-l_3-l_2)+\frac{7}{2}\sin(3l+2g+h-l_3-l_2)\right)\right)/\left(L_2^4\right. \\
& \left.\sqrt{1-\frac{L_1^2}{L_2^2}}\right)-\frac{3}{8}\sin(H)(1-T)\left(1+\frac{L_3}{L_2}\right)\left(1-\frac{2L_3}{L_2}\right)L_1\sqrt{1-\frac{L_1^2}{L_2^2}}\left(\right. \\
& \left.-\sin(2l+2g-h+l_3+l_2)\right. \\
& \left.+ e\left(\frac{1}{2}\sin(l+2g-h+l_3+l_2)-\frac{7}{2}\sin(3l+2g-h+l_3+l_2)\right)\right)/L_2^2-\frac{3}{8}\sin(H) \\
& (1-T)L_3\left(1-\frac{2L_3}{L_2}\right)L_1\sqrt{1-\frac{L_1^2}{L_2^2}}\left(-\sin(2l+2g-h+l_3+l_2)\right. \\
& \left.+ e\left(\frac{1}{2}\sin(l+2g-h+l_3+l_2)-\frac{7}{2}\sin(3l+2g-h+l_3+l_2)\right)\right)/L_2^3+\frac{3}{4}\sin(H) \\
& (1-T)\left(1+\frac{L_3}{L_2}\right)L_3L_1\sqrt{1-\frac{L_1^2}{L_2^2}}\left(-\sin(2l+2g-h+l_3+l_2)\right. \\
& \left.+ e\left(\frac{1}{2}\sin(l+2g-h+l_3+l_2)-\frac{7}{2}\sin(3l+2g-h+l_3+l_2)\right)\right)/L_2^3+\frac{3}{8}\sin(H) \\
& (1-T)\left(1+\frac{L_3}{L_2}\right)\left(1-\frac{2L_3}{L_2}\right)L_1^3\left(-\sin(2l+2g-h+l_3+l_2)\right. \\
& \left.+ e\left(\frac{1}{2}\sin(l+2g-h+l_3+l_2)-\frac{7}{2}\sin(3l+2g-h+l_3+l_2)\right)\right)/\left(L_2^4\right. \\
& \left.\sqrt{1-\frac{L_1^2}{L_2^2}}\right)+\frac{3}{32}(1+T)^2\left(1+\frac{L_3}{L_2}\right)\left(1-\frac{L_1^2}{L_2^2}\right)(2\sin(2l+2g+2h-2l_3-2l_2) \\
& + e(-\sin(l+2g+2h-2l_3-2l_2)+7\sin(3l+2g+2h-2l_3-2l_2))L_3/L_2^2 \\
& -\frac{3}{32}(1+T)^2\left(1+\frac{L_3}{L_2}\right)^2L_1^2(2\sin(2l+2g+2h-2l_3-2l_2) \\
& + e(-\sin(l+2g+2h-2l_3-2l_2)+7\sin(3l+2g+2h-2l_3-2l_2)))/L_2^3+ \\
& \frac{3}{32}(1-T)^2\left(1+\frac{L_3}{L_2}\right)\left(1-\frac{L_1^2}{L_2^2}\right)(-2\sin(2l+2g-2h+2l_3+2l_2) \\
& + e(\sin(l+2g-2h+2l_3+2l_2)-7\sin(3l+2g-2h+2l_3+2l_2))L_3/L_2^2 \\
& -\frac{3}{32}(1-T)^2\left(1+\frac{L_3}{L_2}\right)^2L_1^2(-2\sin(2l+2g-2h+2l_3+2l_2) \\
& + e(\sin(l+2g-2h+2l_3+2l_2)-7\sin(3l+2g-2h+2l_3+2l_2)))/L_2^3+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + 3 e \cos(l)) \left[ \frac{3 L I^2 \left( \frac{3}{4} \frac{\sin(2 H) L^3 \sqrt{1 - \frac{L^3^2}{L^2}} \sin(h - l_3)}{L^2} - \frac{3}{4} \sin(H)^2 \left( 1 - \frac{L^3^2}{L^2} \right) \right)}{L^2^3} \right. \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(2 H) \left( 1 + \frac{L^3}{L^2} \right) \left( 1 - \frac{2 L^3}{L^2} \right) L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L^2}} \sin(h - l_3 + l_2)}{L^2^2} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(2 H) L^3 \left( 1 - \frac{2 L^3}{L^2} \right) L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L^2}} \sin(h - l_3 + l_2)}{L^2^3} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(2 H) \left( 1 + \frac{L^3}{L^2} \right) L^3 L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L^2}} \sin(h - l_3 + l_2)}{L^2^3} + \frac{3}{8} \frac{\sin(2 H) \left( 1 + \frac{L^3}{L^2} \right) \left( 1 - \frac{2 L^3}{L^2} \right) L I^3 \sin(h - l_3 + l_2)}{L^2^4 \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L^2}}} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(2 H) \left( 1 - \frac{L^3}{L^2} \right) \left( 1 + \frac{2 L^3}{L^2} \right) L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L^2}} \sin(h - l_3 - l_2)}{L^2^2} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(2 H) L^3 \left( 1 + \frac{2 L^3}{L^2} \right) L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L^2}} \sin(h - l_3 - l_2)}{L^2^3} \\
& - \frac{3}{4} \frac{\sin(2 H) \left( 1 - \frac{L^3}{L^2} \right) L^3 L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L^2}} \sin(h - l_3 - l_2)}{L^2^3} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(2 H) \left( 1 - \frac{L^3}{L^2} \right) \left( 1 + \frac{2 L^3}{L^2} \right) L I^3 \sin(h - l_3 - l_2)}{L^2^4 \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L^2}}} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L^3^2}{L^2}} \left( 1 + \frac{L^3}{L^2} \right) L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L^2}} \sin(2 h - 2 l_3 - l_2)}{L^2^2} \\
& - \frac{3}{4} \frac{\sin(H)^2 \left( 1 + \frac{L^3}{L^2} \right) L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L^2}} \sin(2 h - 2 l_3 - l_2) L^3^2}{\sqrt{1 - \frac{L^3^2}{L^2}} L^2^4} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L^3^2}{L^2}} L^3 L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L^2}} \sin(2 h - 2 l_3 - l_2)}{L^2^3} \\
& - \frac{3}{4} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L^3^2}{L^2}} \left( 1 + \frac{L^3}{L^2} \right) L I^3 \sin(2 h - 2 l_3 - l_2)}{L^2^4 \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L^2}}} \\
& - \frac{3}{4} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L^3^2}{L^2}} \left( 1 - \frac{L^3}{L^2} \right) L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L^2}} \sin(2 h - 2 l_3 + l_2)}{L^2^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2h - 2l3 + l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(\Pi)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2h - 2l3 + l2)}{L2^3} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(\Pi)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^3 \sin(2h - 2l3 + l2)}{L2^4 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} + \frac{3}{16} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h - l3 - 2l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3} \\
& - \frac{3}{16} \frac{\sin(2\Pi) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h - l3 - 2l2)}{L2^2} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \sin(h - l3 - 2l2)}{L2^3} \\
& - \frac{3}{16} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h - l3 + 2l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3} - \frac{3}{16} \frac{\sin(2\Pi) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h - l3 + 2l2)}{L2^2} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \sin(h - l3 + 2l2)}{L2^3} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(2h - 2l3 - 2l2) L3}{L2^2} - \frac{3}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 L1^2 \sin(2h - 2l3 - 2l2)}{L2^3} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(2h - 2l3 + 2l2) L3}{L2^2} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 L1^2 \sin(2h - 2l3 + 2l2)}{L2^3} + \left( \frac{3L1^2}{2L2^2} - \frac{1}{2} \right) \left( \right. \\
& \left. \frac{3}{4} \frac{\sin(2\Pi) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \sin(h - l3)}{L2^2} - \frac{3}{4} \frac{\sin(2\Pi) L3^3 \sin(h - l3)}{L2^4 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}} \right. \\
& \left. - \frac{3}{2} \frac{\sin(\Pi)^2 L3^2 \sin(2h - 2l3)}{L2^3} \right) + \left( \frac{3L1^2}{2L2^2} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{3}{4} \sin(\Pi) (1 - T) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( -\sin(2l+2g-h+l3) + e \left( \frac{1}{2} \sin(l+2g-h+l3) - \frac{7}{2} \sin(3l+2g-h+l3) \right) \right) / \\
& L2^2 - \frac{3}{4} \sin(H) (1-T) L3^3 \\
& \left( -\sin(2l+2g-h+l3) + e \left( \frac{1}{2} \sin(l+2g-h+l3) - \frac{7}{2} \sin(3l+2g-h+l3) \right) \right) \\
& / \left( L2^4 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{4} \sin(H) (1+T) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \\
& \left( \sin(2l+2g+h-l3) + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l+2g+h-l3) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g+h-l3) \right) \right) / \\
& L2^2 + \frac{3}{4} \sin(H) (1+T) L3^3 \\
& \left( \sin(2l+2g+h-l3) + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l+2g+h-l3) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g+h-l3) \right) \right) \\
& / \left( L2^4 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{8} (1-T)^2 L3^2 (-2 \sin(2l+2g-2h+2l3) \\
& + e (\sin(l+2g-2h+2l3) - 7 \sin(3l+2g-2h+2l3))) / L2^3 - \frac{3}{8} (1+T)^2 L3^2 \\
& (2 \sin(2l+2g+2h-2l3)) \\
& + \frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 L3^3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} e \left( -\frac{1}{2} \sin(l+2g-l3) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g-l3) \right)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1^3 e \left( \frac{1}{2} \sin(l+2g-l3) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g-l3) \right)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} - \frac{9}{4} \\
& \frac{\sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} e \left( \frac{1}{2} \sin(l+2g+l3) - \frac{7}{2} \sin(3l+2g+l3) \right)}{L2^3} \\
& + \frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 L3^3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} e \left( \frac{1}{2} \sin(l+2g+l3) - \frac{7}{2} \sin(3l+2g+l3) \right)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1^3 e \left( \frac{1}{2} \sin(l+2g+l3) - \frac{7}{2} \sin(3l+2g+l3) \right)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} + \frac{3}{8} \\
& \sin(H) (1+T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 + \frac{2L3}{L2} \right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \left( \sin(2l+2g+h-l3+l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l+2g+h-l3+l2) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g+h-l3+l2) \right) \right) / L2^2 - \frac{3}{8} \sin(H)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1+T) L3 \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \sin(2l + 2g + h - l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 + l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 + l2) \right) \right) / L2^3 + \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1+T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \sin(2l + 2g + h - l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 + l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 + l2) \right) \right) / L2^3 - \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1+T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI^3 \left( \sin(2l + 2g + h - l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 + l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 + l2) \right) \right) / \left( L2^4 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{8} \sin(II) (1-T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. -\sin(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 - l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) / L2^2 + \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1-T) L3 \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( -\sin(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 - l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) / L2^3 - \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1-T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( -\sin(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 - l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) / L2^3 + \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1-T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI^3 \left( -\sin(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 - l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) / \left( L2^4 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{16} (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. 2 \sin(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right. \\
& \left. + e (-\sin(l + 2g + 2h - 2l3 + l2) + 7 \sin(3l + 2g + 2h - 2l3 + l2)) \right) / L2^2 + \frac{3}{16} \\
& (1+T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} (2 \sin(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \\
& \left. + e (-\sin(l + 2g + 2h - 2l3 + l2) + 7 \sin(3l + 2g + 2h - 2l3 + l2)) \right) L3^2 / \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4 \right) + \frac{3}{16} (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. 2 \sin(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right. \\
& \left. + e (-\sin(l + 2g + 2h - 2l3 + l2) + 7 \sin(3l + 2g + 2h - 2l3 + l2)) \right) / L2^3 + \frac{3}{16}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& (1+T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} \left(1-\frac{L3}{L2}\right) LI^3 (2 \sin(2l+2g+2h-2l3+l2)) \\
& + e(-\sin(l+2g+2h-2l3+l2)+7 \sin(3l+2g+2h-2l3+l2))) / \left( L2^4 \right. \\
& \left. \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{16} (1+T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} \left(1+\frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} ( \\
& 2 \sin(2l+2g+2h-2l3-l2) \\
& + e(-\sin(l+2g+2h-2l3-l2)+7 \sin(3l+2g+2h-2l3-l2))) / L2^2 - \frac{3}{16} \\
& (1+T)^2 \left(1+\frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} (2 \sin(2l+2g+2h-2l3-l2) \\
& + e(-\sin(l+2g+2h-2l3-l2)+7 \sin(3l+2g+2h-2l3-l2))) L3^2 / \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^4 \right) + \frac{3}{16} (1+T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L3 LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} ( \\
& 2 \sin(2l+2g+2h-2l3-l2) \\
& + e(-\sin(l+2g+2h-2l3-l2)+7 \sin(3l+2g+2h-2l3-l2))) / L2^3 - \frac{3}{16} \\
& (1+T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} \left(1+\frac{L3}{L2}\right) LI^3 (2 \sin(2l+2g+2h-2l3-l2) \\
& + e(-\sin(l+2g+2h-2l3-l2)+7 \sin(3l+2g+2h-2l3-l2))) / \left( L2^4 \right. \\
& \left. \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} \left(1+\frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} ( \\
& -2 \sin(2l+2g-2h+2l3+l2) \\
& + e(\sin(l+2g-2h+2l3+l2)-7 \sin(3l+2g-2h+2l3+l2))) / L2^2 - \frac{3}{16} \\
& (1-T)^2 \left(1+\frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} (-2 \sin(2l+2g-2h+2l3+l2) \\
& + e(\sin(l+2g-2h+2l3+l2)-7 \sin(3l+2g-2h+2l3+l2))) L3^2 / \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^4 \right) + \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L3 LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} ( \\
& -2 \sin(2l+2g-2h+2l3+l2) \\
& + e(\sin(l+2g-2h+2l3+l2)-7 \sin(3l+2g-2h+2l3+l2))) / L2^3 - \frac{3}{16} \\
& (1-T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} \left(1+\frac{L3}{L2}\right) LI^3 (-2 \sin(2l+2g-2h+2l3+l2) \\
& + e(\sin(l+2g-2h+2l3+l2)-7 \sin(3l+2g-2h+2l3+l2))) / \left( L2^4 \right. \\
& \left. \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} \left(1-\frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} ( \\
& -2 \sin(2l+2g-2h+2l3-l2) \\
& + e(\sin(l+2g-2h+2l3-l2)-7 \sin(3l+2g-2h+2l3-l2))) / L2^2 + \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1-T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} (-2 \sin(2l+2g-2h+2l3-l2) \\
& + e(\sin(l+2g-2h+2l3-l2) - 7 \sin(3l+2g-2h+2l3-l2))) L3^2 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4 \right) + \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} ( \\
& -2 \sin(2l+2g-2h+2l3-l2) \\
& + e(\sin(l+2g-2h+2l3-l2) - 7 \sin(3l+2g-2h+2l3-l2))) / L2^3 + \frac{3}{16} \\
& (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI^3 (-2 \sin(2l+2g-2h+2l3-l2) \\
& + e(\sin(l+2g-2h+2l3-l2) - 7 \sin(3l+2g-2h+2l3-l2))) \Big/ \left( L2^4 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{16} \sin(II) (1+T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left(\sin(2l+2g+h-l3+2l2) \right. \\
& \left. + e\left(-\frac{1}{2} \sin(l+2g+h-l3+2l2) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g+h-l3+2l2)\right)\right) L3^2 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3 \right) + \frac{3}{16} \sin(II) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \right. \\
& \left. \sin(2l+2g+h-l3+2l2) \right. \\
& \left. + e\left(-\frac{1}{2} \sin(l+2g+h-l3+2l2) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g+h-l3+2l2)\right)\right) / L2^2 + \frac{3}{8} \\
& \sin(II) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI^2 \left(\sin(2l+2g+h-l3+2l2) \right. \\
& \left. + e\left(-\frac{1}{2} \sin(l+2g+h-l3+2l2) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g+h-l3+2l2)\right)\right) / L2^3 - \frac{3}{16} \\
& \sin(II) (1+T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left(\sin(2l+2g+h-l3-2l2) \right. \\
& \left. + e\left(-\frac{1}{2} \sin(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g+h-l3-2l2)\right)\right) L3^2 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3 \right) + \frac{3}{16} \sin(II) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \right. \\
& \left. \sin(2l+2g+h-l3-2l2) \right. \\
& \left. + e\left(-\frac{1}{2} \sin(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g+h-l3-2l2)\right)\right) / L2^2 - \frac{3}{8} \\
& \sin(II) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI^2 \left(\sin(2l+2g+h-l3-2l2) \right. \\
& \left. + e\left(-\frac{1}{2} \sin(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \sin(3l+2g+h-l3-2l2)\right)\right) / L2^3 + \frac{3}{16} \\
& \sin(II) (1-T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left(-\sin(2l+2g-h+l3+2l2) \right. \\
& \left. + e\left(\frac{1}{2} \sin(l+2g-h+l3+2l2) - \frac{7}{2} \sin(3l+2g-h+l3+2l2)\right)\right) L3^2 \Big/ \left( \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3 \right) - \frac{3}{16} \sin(II) (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \right. \\
& -\sin(2 l + 2 g - h + l3 + 2 l2) \\
& + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2 g - h + l3 + 2 l2) - \frac{7}{2} \sin(3 l + 2 g - h + l3 + 2 l2) \right) \left. \right) / L2^2 + \frac{3}{8} \\
& \sin(II) (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI^2 \left( -\sin(2 l + 2 g - h + l3 + 2 l2) \right. \\
& + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2 g - h + l3 + 2 l2) - \frac{7}{2} \sin(3 l + 2 g - h + l3 + 2 l2) \right) \left. \right) / L2^3 - \frac{3}{16} \\
& \sin(II) (1 - T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( -\sin(2 l + 2 g - h + l3 - 2 l2) \right. \\
& + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2 g - h + l3 - 2 l2) - \frac{7}{2} \sin(3 l + 2 g - h + l3 - 2 l2) \right) \left. \right) L3^2 / \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3 \right) - \frac{3}{16} \sin(II) (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \right. \\
& -\sin(2 l + 2 g - h + l3 - 2 l2) \\
& + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2 g - h + l3 - 2 l2) - \frac{7}{2} \sin(3 l + 2 g - h + l3 - 2 l2) \right) \left. \right) / L2^2 - \frac{3}{8} \\
& \sin(II) (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI^2 \left( -\sin(2 l + 2 g - h + l3 - 2 l2) \right. \\
& + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2 g - h + l3 - 2 l2) - \frac{7}{2} \sin(3 l + 2 g - h + l3 - 2 l2) \right) \left. \right) / L2^3 - \frac{3}{32} \\
& (1 + T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right)^2 LI^2 (2 \sin(2 l + 2 g + 2 h - 2 l3 + 2 l2) \\
& + e (-\sin(l + 2 g + 2 h - 2 l3 + 2 l2) + 7 \sin(3 l + 2 g + 2 h - 2 l3 + 2 l2))) / L2^3 - \\
& \frac{3}{32} (1 - T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) (-2 \sin(2 l + 2 g - 2 h + 2 l3 - 2 l2) \\
& + e (\sin(l + 2 g - 2 h + 2 l3 - 2 l2) - 7 \sin(3 l + 2 g - 2 h + 2 l3 - 2 l2))) L3 / L2^2 \\
& - \frac{3}{32} (1 - T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right)^2 LI^2 (-2 \sin(2 l + 2 g - 2 h + 2 l3 - 2 l2) \\
& + e (\sin(l + 2 g - 2 h + 2 l3 - 2 l2) - 7 \sin(3 l + 2 g - 2 h + 2 l3 - 2 l2))) / L2^3 \left. \right) / L^6
\end{aligned}
\right)
\end{aligned}$$

O termo  $a_{24} = a_{42} = f_{34} = f_{43}$  equivale a  $\frac{\partial^2 F}{\partial l_3 \partial L_3} = \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial l_3}$  :

$$a_{24} = Mi^4 M^6 (C - A) \left( \frac{3}{8} \sin(II) (1 + T) \left( 1 - \frac{2 L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \sin(2l + 2g + h - l3 - l2) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 - l2) \right) / L2^2 + \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1 + T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \sin(2l + 2g + h - l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 - l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 - l2) \right) \right) / L2^2 + \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1 - T) \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( -\sin(2l + 2g - h + l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 + l2) \right) \right) / L2^2 - \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1 - T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( -\sin(2l + 2g - h + l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 + l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 + l2) \right) \right) / L2^2 - \frac{3}{32} (1 + T)^2 \\
& \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) (2 \sin(2l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) \\
& + e (-\sin(l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) + 7 \sin(3l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2))) / L2 - \frac{3}{32} \\
& (1 - T)^2 \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) (-2 \sin(2l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2) \\
& + e (\sin(l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2) - 7 \sin(3l + 2g - 2h + 2l3 + 2l2))) / L2 + \\
& (1 + 3e \cos(l)) \left( \left( \frac{3LI^2}{2L2^2} - \frac{1}{2} \right) \left( -\frac{3}{4} \frac{\sin(2II) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \sin(h - l3)}{L2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{4} \frac{\sin(2II) L3^2 \sin(h - l3)}{L2^3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}} + \frac{3}{2} \frac{\sin(II)^2 L3 \sin(2h - 2l3)}{L2^2} \right) \right) \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(2II) \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \sin(h - l3 + l2)}{L2^2} - \frac{3}{4} \frac{\sin(2II) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \sin(h - l3 + l2)}{L2^2} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(2II) \left( 1 + \frac{2L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \sin(h - l3 - l2)}{L2^2} + \frac{3}{4} \frac{\sin(2II) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \sin(h - l3 - l2)}{L2^2} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(II)^2 \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \sin(2h - 2l3 - l2) L3}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3} \\
& - \frac{3}{4} \frac{\sin(II)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \sin(2h - 2l3 - l2)}{L2^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{4} \frac{\sin(II)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2h - 2l3 + l2) L3}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3} \\
& \frac{3}{4} \frac{\sin(II)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \sin(2h - 2l3 + l2)}{L2^2} \\
& - \frac{3}{16} \frac{\sin(2II) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h - l3 - 2l2) L3}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^2} + \frac{3}{16} \frac{\sin(2II) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h - l3 - 2l2)}{L2} \\
& + \frac{3}{16} \frac{\sin(2II) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h - l3 + 2l2) L3}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^2} + \frac{3}{16} \frac{\sin(2II) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(h - l3 + 2l2)}{L2} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(II)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(2h - 2l3 - 2l2)}{L2} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(II)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \sin(2h - 2l3 + 2l2)}{L2} \left. \right) + \left( \frac{3L1^2}{2L2^2} - \frac{1}{2} \right) \left( -\frac{3}{4} \sin(II) \right) \\
& (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \\
& \left( -\sin(2l + 2g - h + l3) + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3) \right) \right) L2 \\
& + \frac{3}{4} \sin(II) (1 - T) L3^2 \\
& \left( -\sin(2l + 2g - h + l3) + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3) \right) \right) \\
& / \left( L2^3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} + \frac{3}{4} \sin(II) (1 + T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) \\
& \left( \sin(2l + 2g + h - l3) + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3) \right) \right) L2 \\
& - \frac{3}{4} \sin(II) (1 + T) L3^2 \\
& \left( \sin(2l + 2g + h - l3) + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3) \right) \right) \\
& / \left( L2^3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} + \frac{3}{8} (1 - T)^2 L3 (-2 \sin(2l + 2g - 2h + 2l3)) \right) \\
& + e (\sin(l + 2g - 2h + 2l3) - 7 \sin(3l + 2g - 2h + 2l3)) / L2^2 + \frac{3}{8} (1 + T)^2 L3 ( \\
& 2 \sin(2l + 2g + 2h - 2l3) / \\
& + e (-\sin(l + 2g + 2h - 2l3) + 7 \sin(3l + 2g + 2h - 2l3)) / L2^2 \left. \right) - \frac{3}{16} (1 + T)^2 \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} (2 \sin(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e(-\sin(l+2g+2h-2l3+l2)+7\sin(3l+2g+2h-2l3+l2)) / L2^2 + \\
& \frac{9}{8} \frac{\sin(II)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} e\left(-\frac{1}{2}\sin(l+2g-l3)+\frac{7}{2}\sin(3l+2g-l3)\right)}{L2^2} \\
& - \frac{9}{8} \frac{\sin(II)^2 L3^2 LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} e\left(-\frac{1}{2}\sin(l+2g-l3)+\frac{7}{2}\sin(3l+2g-l3)\right)}{L2^4 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{9}{8} \frac{\sin(II)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} e\left(\frac{1}{2}\sin(l+2g+l3)-\frac{7}{2}\sin(3l+2g+l3)\right)}{L2^2} \\
& - \frac{9}{8} \frac{\sin(II)^2 L3^2 LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} e\left(\frac{1}{2}\sin(l+2g+l3)-\frac{7}{2}\sin(3l+2g+l3)\right)}{L2^4 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}} + \frac{3}{8} \\
& \sin(II) (1+T) \left(1+\frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \left(\sin(2l+2g+h-l3+l2) \right. \\
& \left. + e\left(-\frac{1}{2}\sin(l+2g+h-l3+l2)+\frac{7}{2}\sin(3l+2g+h-l3+l2)\right)\right) / L2^2 - \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1+T) \left(1-\frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \left(\sin(2l+2g+h-l3+l2) \right. \\
& \left. + e\left(-\frac{1}{2}\sin(l+2g+h-l3+l2)+\frac{7}{2}\sin(3l+2g+h-l3+l2)\right)\right) / L2^2 - \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1-T) \left(1+\frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \left(-\sin(2l+2g-h+l3-l2) \right. \\
& \left. + e\left(\frac{1}{2}\sin(l+2g-h+l3-l2)-\frac{7}{2}\sin(3l+2g-h+l3-l2)\right)\right) / L2^2 + \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1-T) \left(1-\frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \left(-\sin(2l+2g-h+l3-l2) \right. \\
& \left. + e\left(\frac{1}{2}\sin(l+2g-h+l3-l2)-\frac{7}{2}\sin(3l+2g-h+l3-l2)\right)\right) / L2^2 - \frac{3}{16} (1+T)^2 \\
& \left(1-\frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} (2\sin(2l+2g+2h-2l3+l2) \\
& + e(-\sin(l+2g+2h-2l3+l2)+7\sin(3l+2g+2h-2l3+l2))) L3 \quad / \quad \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^3 \right) - \frac{3}{16} (1+T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} ( \\
& 2\sin(2l+2g+2h-2l3-l2) \\
& + e(-\sin(l+2g+2h-2l3-l2)+7\sin(3l+2g+2h-2l3-l2))) / L2^2 + \frac{3}{16} \\
& (1+T)^2 \left(1+\frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} (2\sin(2l+2g+2h-2l3-l2) \\
& + e(-\sin(l+2g+2h-2l3-l2)+7\sin(3l+2g+2h-2l3-l2))) L3 \quad / \quad \left( \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^3} \Big) - \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} ( \\
& -2 \sin(2l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \\
& + e (\sin(l + 2g - 2h + 2l3 + l2) - 7 \sin(3l + 2g - 2h + 2l3 + l2))) / L2^2 + \frac{3}{16} \\
& (1-T)^2 \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} (-2 \sin(2l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \\
& + e (\sin(l + 2g - 2h + 2l3 + l2) - 7 \sin(3l + 2g - 2h + 2l3 + l2))) L3 \quad / \quad \left( \right. \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^3} \Big) - \frac{3}{16} (1-T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} ( \\
& -2 \sin(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \\
& + e (\sin(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) - 7 \sin(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2))) L3 \quad / \quad \left( \right. \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^3} \Big) - \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} ( \\
& -2 \sin(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \\
& + e (\sin(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) - 7 \sin(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2))) / L2^2 - \frac{3}{16} \\
& \sin(II) (1+T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \sin(2l + 2g + h - l3 + 2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 + 2l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 + 2l2) \right) \right) L3 \quad / \quad \left( \right. \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^2} \Big) - \frac{3}{16} \sin(II) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \right. \\
& \sin(2l + 2g + h - l3 + 2l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 + 2l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 + 2l2) \right) \right) L2 - \frac{3}{16} \\
& \sin(II) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \sin(2l + 2g + h - l3 - 2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 - 2l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 - 2l2) \right) \right) L2 + \frac{3}{16} \\
& \sin(II) (1+T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \sin(2l + 2g + h - l3 - 2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \sin(l + 2g + h - l3 - 2l2) + \frac{7}{2} \sin(3l + 2g + h - l3 - 2l2) \right) \right) L3 \quad / \quad \left( \right. \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^2} \Big) + \frac{3}{16} \sin(II) (1-T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \right. \\
& -\sin(2l + 2g - h + l3 + 2l2) \\
& \left. + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 + 2l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 + 2l2) \right) \right) L2 - \frac{3}{16} \sin(II) \\
& (1-T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( -\sin(2l + 2g - h + l3 + 2l2) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 + 2l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 + 2l2) \right) \Bigg) L3 \Bigg/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^2} \right) + \frac{3}{16} \sin(II) (1 - T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{L1^2}{L2^2} \right) \left( \right. \\
& \left. -\sin(2l + 2g - h + l3 - 2l2) \right) \\
& + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 - 2l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 - 2l2) \right) \Bigg) L3 \Bigg/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^2} \right) + \frac{3}{16} \sin(II) (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} \left( 1 - \frac{L1^2}{L2^2} \right)} \left( \right. \\
& \left. -\sin(2l + 2g - h + l3 - 2l2) \right) \\
& + e \left( \frac{1}{2} \sin(l + 2g - h + l3 - 2l2) - \frac{7}{2} \sin(3l + 2g - h + l3 - 2l2) \right) \Bigg) L2 + \frac{3}{32} \\
& (1 + T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{L1^2}{L2^2} \right) (2 \sin(2l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) \\
& + e (-\sin(l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) + 7 \sin(3l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2))) / L2 + \frac{3}{32} \\
& (1 - T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{L1^2}{L2^2} \right) (-2 \sin(2l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2) \\
& + e (\sin(l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2) - 7 \sin(3l + 2g - 2h + 2l3 - 2l2))) / L2 \Bigg) \Bigg/ L^6
\end{aligned}$$

**O termo  $a_{33} = f_{22}$  equivale a  $\frac{\partial^2 F}{\partial L_2^2}$ :**

$$\begin{aligned}
a_{33} = & \frac{1}{A} + Mi^4 M^6 (C - A) ((l + 3e \cos(l)) \left( \right. \\
& - 6 L1^2 \left[ -\frac{3 L3^2}{4 L2^3} + \frac{9 T^2 L3^2}{4 L2^3} + \frac{3}{4} \frac{\sin(2II) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} \cos(h - l3)}}{L2^2} \right. \\
& \left. \left. - \frac{3 \sin(2II) L3^3 \cos(h - l3)}{4 L2^4 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}} - \frac{3 \sin(II)^2 L3^2 \cos(2h - 2l3)}{4 L2^3} \right] \right) \Bigg/ L2^3 + \left( \frac{3 L1^2}{2 L2^2} - \frac{1}{2} \right) \\
& \left( \frac{9 L3^2}{4 L2^4} - \frac{27 T^2 L3^2}{4 L2^4} - \frac{3}{2} \frac{\sin(2II) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} \cos(h - l3)}}{L2^3} \right. \\
& \left. + \frac{15 \sin(2II) L3^3 \cos(h - l3)}{4 L2^5 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}} + \frac{3 \sin(2II) L3^5 \cos(h - l3)}{4 L2^7 \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)}} \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{9 \sin(II)^2 L3^2 \cos(2h - 2l3)}{L2^4} \right) + 9 LI^2 \left( -\frac{1}{8} + \frac{3 T^2}{8} + \frac{3 L3^2}{8 L2^2} - \frac{9 T^2 L3^2}{8 L2^2} \right. \\
& \left. - \frac{3 \sin(2 II) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \cos(h - l3)}{L2} - \frac{3 \sin(II)^2 \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2l3)}{8} \right) / \\
& L2^4 - \frac{9 (1 - 3 T^2) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(l2)}{L2^4} \\
& + \frac{21 (1 - 3 T^2) L3^3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(l2)}{L2^6 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}} + \frac{21 (1 - 3 T^2) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI^3 \cos(l2)}{L2^6 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{3 (1 - 3 T^2) L3^5 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(l2)}{L2^8 \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)}} - \frac{3 (1 - 3 T^2) L3^3 LI^3 \cos(l2)}{L2^8 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{3 (1 - 3 T^2) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI^5 \cos(l2)}{L2^8 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right)^{(3/2)}} + \frac{9 (1 - 3 T^2) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2l2) L3 LI}{L2^4} \\
& - \frac{21 (1 - 3 T^2) \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2l2) L3^3 LI}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^6} - \frac{21 (1 - 3 T^2) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \cos(2l2) L3 LI^3}{\sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} L2^6} \\
& - \frac{3 (1 - 3 T^2) \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2l2) L3^5 LI}{\left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^8} + \frac{3 (1 - 3 T^2) \cos(2l2) L3^3 LI^3}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} L2^8} \\
& - \frac{3 (1 - 3 T^2) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \cos(2l2) L3 LI^5}{\left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^8} + \frac{3 \sin(2 II) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2 L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(h - l3 + l2)}{L2^3} \\
& + \frac{3 \sin(2 II) L3 \left(1 - \frac{2 L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(h - l3 + l2)}{L2^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3 \sin(2H) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(h - l3 + l2)}{L2^4} \\
& - \frac{15}{8} \frac{\sin(2H) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI^3 \cos(h - l3 + l2)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}} - \frac{3}{2} \frac{\sin(2H) L3^2 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(h - l3 + l2)}{L2^5} \\
& - \frac{3}{4} \frac{\sin(2H) L3 \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI^3 \cos(h - l3 + l2)}{L2^6 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}} + \frac{3}{2} \frac{\sin(2H) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L3 LI^3 \cos(h - l3 + l2)}{L2^6 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{2L3}{L2}\right) LI^5 \cos(h - l3 + l2)}{L2^7 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right)^{(3/2)}} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(2H) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(h - l3 - l2)}{L2^3} \\
& - \frac{3}{2} \frac{\sin(2H) L3 \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(h - l3 - l2)}{L2^4} \\
& + \frac{3 \sin(2H) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(h - l3 - l2)}{L2^4} \\
& - \frac{15}{8} \frac{\sin(2H) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI^3 \cos(h - l3 - l2)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}} - \frac{3}{2} \frac{\sin(2H) L3^2 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(h - l3 - l2)}{L2^5} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(2H) L3 \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI^3 \cos(h - l3 - l2)}{L2^6 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}} - \frac{3}{2} \frac{\sin(2H) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L3 LI^3 \cos(h - l3 - l2)}{L2^6 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI^5 \cos(h - l3 - l2)}{L2^7 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right)^{(3/2)}} \\
& - \frac{3}{4} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 - l2)}{L2^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{15}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 - l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5} \\
& - \frac{3}{2} \frac{\sin(\Pi)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 - l2)}{L2^4} \\
& + \frac{15}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^3 \cos(2h - 2l3 - l2)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 - l2) L3^4}{\left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^7} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(\Pi)^2 L3^3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 - l2)}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^6} - \frac{3}{4} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^3 \cos(2h - 2l3 - l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^7 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(\Pi)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 L1^3 \cos(2h - 2l3 - l2)}{L2^6 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} + \frac{3}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^5 \cos(2h - 2l3 - l2)}{L2^7 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right)^{(3/2)}} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(\Pi)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 + l2)}{L2^3} \\
& - \frac{15}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 + l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5} \\
& - \frac{3}{2} \frac{\sin(\Pi)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 + l2)}{L2^4} \\
& - \frac{15}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^3 \cos(2h - 2l3 + l2)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 + l2) L3^4}{\left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^7} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(\Pi)^2 L3^3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 + l2)}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^6} + \frac{3}{4} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^3 \cos(2h - 2l3 + l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^7 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(\Pi)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 L1^3 \cos(2h - 2l3 + l2)}{L2^6 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} - \frac{3}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^5 \cos(2h - 2l3 + l2)}{L2^7 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right)^{(3/2)}} \\
& - \frac{9}{16} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 - 2l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4} \\
& - \frac{3}{16} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 - 2l2) L3^4}{\left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^6} - \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) L3^3 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 - 2l2)}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \cos(h - l3 - 2l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^6} + \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 - 2l2)}{L2^3} \\
& - \frac{3}{4} \frac{\sin(2\Pi) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 L1^2 \cos(h - l3 - 2l2)}{L2^5} - \frac{9}{8} \frac{\sin(2\Pi) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \cos(h - l3 - 2l2)}{L2^4} \\
& + \frac{9}{16} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 + 2l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4} \\
& + \frac{3}{16} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 + 2l2) L3^4}{\left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^6} - \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) L3^3 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 + 2l2)}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5} \\
& - \frac{3}{4} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \cos(h - l3 + 2l2) L3^2}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^6} + \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 + 2l2)}{L2^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{4} \frac{\sin(2H) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 L1^2 \cos(h - l3 + 2 l2)}{L2^5} + \frac{9}{8} \frac{\sin(2H) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \cos(h - l3 + 2 l2)}{L2^4} \\
& -\frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2 l3 - 2 l2) L3}{L2^3} - \frac{3}{16} \frac{\sin(H)^2 L3^2 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2 l3 - 2 l2)}{L2^4} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(H)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \cos(2h - 2 l3 - 2 l2) L3}{L2^5} + \frac{9}{16} \frac{\sin(H)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 L1^2 \cos(2h - 2 l3 - 2 l2)}{L2^4} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2 l3 + 2 l2) L3}{L2^3} - \frac{3}{16} \frac{\sin(H)^2 L3^2 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2 l3 + 2 l2)}{L2^4} \\
& -\frac{3}{4} \frac{\sin(H)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \cos(2h - 2 l3 + 2 l2) L3}{L2^5} + \frac{9}{16} \frac{\sin(H)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 L1^2 \cos(2h - 2 l3 + 2 l2)}{L2^4} \\
& 9 L1^2 \left( \frac{3}{8} \sin(H)^2 \left(1 - \frac{3 L3^2}{L2^2}\right) \left( \cos(2 l + 2 g) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2 g) + \frac{7}{2} \cos(3 l + 2 g) \right) \right) - \right. \\
& \quad \left. \frac{3}{4} \sin(H) (1 - T) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right. \\
& \left. \left( \cos(2 l + 2 g - h + l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2 g - h + l3) + \frac{7}{2} \cos(3 l + 2 g - h + l3) \right) \right) \right) L2 \\
& + \frac{3}{4} \sin(H) (1 + T) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2 l + 2 g + h - l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2 g + h - l3) + \frac{7}{2} \cos(3 l + 2 g + h - l3) \right) \right) L2 \\
& - \frac{3}{16} (1 - T)^2 \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) \left( \cos(2 l + 2 g - 2 h + 2 l3) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2 g - 2 h + 2 l3) + \frac{7}{2} \cos(3 l + 2 g - 2 h + 2 l3) \right) \right) - \frac{3}{16} (1 + T)^2 \\
& \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right) \left( \cos(2 l + 2 g + 2 h - 2 l3) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2 g + 2 h - 2 l3) + \frac{7}{2} \cos(3 l + 2 g + 2 h - 2 l3) \right) \right) \Big/ L2^4 \\
& \left( \frac{3 L1^2}{2 L2^2} - \frac{1}{2} \right) \left( -\frac{27}{4} \frac{\sin(H)^2 L3^2 \left( \cos(2 l + 2 g) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2 g) + \frac{7}{2} \cos(3 l + 2 g) \right) \right)}{L2^4} \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{2} \sin(H) (1 - T) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right. \\
& \left. \left( \cos(2 l + 2 g - h + l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2 g - h + l3) + \frac{7}{2} \cos(3 l + 2 g - h + l3) \right) \right) \right) \Big/ \\
& L2^3 + \frac{15}{4} \sin(H) (1 - T) L3^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \cos(2l + 2g - h + l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3) \right) \right) \\
& \quad / \left( L2^5 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{4} \sin(II) (1 - T) L3^5 \\
& \left( \cos(2l + 2g - h + l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3) \right) \right) \\
& \quad / \left( L2^7 \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} \right) + \frac{3}{2} \sin(II) (1 + T) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l + 2g + h - l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3) \right) \right) / \\
& L2^3 - \frac{15}{4} \sin(II) (1 + T) L3^3 \\
& \left( \cos(2l + 2g + h - l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3) \right) \right) \\
& \quad / \left( L2^5 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{4} \sin(II) (1 + T) L3^5 \\
& \left( \cos(2l + 2g + h - l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3) \right) \right) \\
& \quad / \left( L2^7 \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} \right) + \frac{9}{8} (1 - T)^2 L3^2 \left( \cos(2l + 2g - 2h + 2l3) \right. \\
& \quad \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3) \right) \right) / L2^4 + \frac{9}{8} (1 + T)^2 \\
& L3^2 \left( \cos(2l + 2g + 2h - 2l3) \right. \\
& \quad \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3) \right) \right) / L2^4 - 6 L I^2 \left( \right. \\
& \quad \left. \frac{9}{4} \frac{\sin(II)^2 L3^2 \left( \cos(2l + 2g) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g) \right) \right)}{L2^3} + \frac{3}{4} \sin(II) \right. \\
& \quad \left. (1 - T) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right. \\
& \left( \cos(2l + 2g - h + l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3) \right) \right) / \\
& L2^2 - \frac{3}{4} \sin(II) (1 - T) L3^3 \\
& \left( \cos(2l + 2g - h + l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3) \right) \right) \\
& \quad / \left( L2^4 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{4} \sin(II) (1 + T) L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \cos(2l+2g+h-l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3) \right) \right) / \\
& L2^2 + \frac{3}{4} \sin(H) (1+T) L3^3 \\
& \left( \cos(2l+2g+h-l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3) \right) \right) \\
& / \left( L2^4 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{8} (1-T)^2 L3^2 \left( \cos(2l+2g-2h+2l3) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3) \right) \right) / L2^3 - \frac{3}{8} (1+T)^2 \\
& L3^2 \left( \cos(2l+2g+2h-2l3) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3) \right) \right) / L2^3 \left. \right) / L2^3 + \frac{27}{4} \\
& \sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l+2g-l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-l3) \right) \right) / L2^4 - \frac{63}{8} \\
& \sin(H)^2 L3^3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l+2g-l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-l3) \right) \right) / \left( L2^6 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) - \frac{63}{8} \sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1^3 \\
& \left( \cos(2l+2g-l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-l3) \right) \right) / \left( L2^6 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \right) - \frac{9}{8} \sin(H)^2 L3^5 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l+2g-l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-l3) \right) \right) / \left( L2^8 \right. \\
& \left. \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} \right) + \frac{9}{4} \frac{\sin(H)^2 L3^3 L1^3 \left( \cos(2l+2g-l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-l3) + \frac{7}{2} \cos( \right. \right. \\
& \left. \left. L2^8 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{9}{8} \sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1^5 \right. \right. \\
& \left. \left. \left( \cos(2l+2g-l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-l3) \right) \right) \right) / \left( L2^8 \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} + \frac{27}{4} \sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l + 2g + l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + l3) \right) \right) / L2^4 - \frac{63}{8} \\
& \sin(H)^2 L3^3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l + 2g + l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + l3) \right) \right) / \left( L2^6 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} - \frac{63}{8} \sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI^3 \right) \\
& \left( \cos(2l + 2g + l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + l3) \right) \right) / \left( L2^6 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} - \frac{9}{8} \sin(H)^2 L3^5 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) \\
& \left( \cos(2l + 2g + l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + l3) \right) \right) / \left( L2^8 \right. \\
& \left. \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} + \frac{9}{4} \frac{\sin(H)^2 L3^3 LI^3 \left( \cos(2l + 2g + l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + l3) + \frac{7}{2} \cos( \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. L2^8 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{9}{8} \sin(H)^2 L3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI^5 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \cos(2l + 2g + l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + l3) \right) \right) \right) / \left( L2^8 \right. \right. \\
& \left. \left. \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} - \frac{3}{4} \sin(H) (1 + T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \cos(2l + 2g + h - l3 + l2) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3 + l2) \right) \right) \right) / L2^3 + \frac{3}{2} \sin(H) \\
& (1 + T) L3 \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l + 2g + h - l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3 + l2) \right) \right) / L2^4 - 3 \sin(H) \\
& (1 + T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l + 2g + h - l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3 + l2) \right) \right) / L2^4 + \frac{15}{8} \\
& \sin(H) (1 + T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 + \frac{2L3}{L2}\right) LI^3 \left( \cos(2l + 2g + h - l3 + l2) \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3+l_2) \right) \Big/ \left( L2^5 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{2} \sin(II) (1+T) L3^2 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l+2g+h-l_3+l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3+l_2) \right) \right) \Big/ L2^5 - \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1+T) L3 \left( 1 + \frac{2L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l+2g+h-l_3+l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3+l_2) \right) \right) \Big/ \left( L2^6 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{2} \sin(II) (1+T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) L3 LI^3 \left( \cos(2l+2g+h-l_3+l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3+l_2) \right) \right) \Big/ \left( L2^6 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{8} \sin(II) (1+T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 + \frac{2L3}{L2} \right) LI^5 \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+h-l_3+l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3+l_2) \right) \right) \Big/ \left( L2^7 \right. \\
& \left. \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} \right) - \frac{3}{4} \sin(II) (1+T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+h-l_3-l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3-l_2) \right) \right) \Big/ L2^3 - \frac{3}{2} \sin(II) \\
& (1+T) L3 \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l+2g+h-l_3-l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3-l_2) \right) \right) \Big/ L2^4 + 3 \sin(II) \\
& (1+T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l+2g+h-l_3-l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3-l_2) \right) \right) \Big/ L2^4 + \frac{15}{8} \\
& \sin(II) (1+T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l+2g+h-l_3-l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3-l_2) \right) \right) \Big/ \left( L2^5 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{2} \sin(II) (1+T) L3^2 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l+2g+h-l_3-l_2) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-l2) \right) \Big/ L2^5 + \frac{3}{4} \sin(II) \\
(1+T) L3 \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l+2g+h-l3-l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-l2) \right) \Big/ \left( L2^6 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{2} \sin(II) (1+T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) L3 LI^3 \left( \cos(2l+2g+h-l3-l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-l2) \right) \Big/ \left( L2^6 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{8} \sin(II) (1+T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI^5 \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+h-l3-l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-l2) \right) \Big/ \left( L2^7 \right. \\
& \left. \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} \right) + \frac{3}{4} \sin(II) (1-T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g-h+l3+l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+l2) \right) \Big/ L2^3 + \frac{3}{2} \sin(II) \\
(1-T) L3 \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l+2g-h+l3+l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+l2) \right) \Big/ L2^4 - 3 \sin(II) \\
(1-T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l+2g-h+l3+l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+l2) \right) \Big/ L2^4 - \frac{15}{8} \\
& \sin(II) (1-T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l+2g-h+l3+l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+l2) \right) \Big/ \left( L2^5 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{2} \sin(II) (1-T) L3^2 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l+2g-h+l3+l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+l2) \right) \Big/ L2^5 - \frac{3}{4} \sin(II) \\
(1-T) L3 \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l+2g-h+l3+l2) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3+l_2) \right) \Big/ \left( L^2{}^6 \right. \\
& \left. \sqrt{1-\frac{LI^2}{L^2}} \right) + \frac{3}{2} \sin(II) (1-T) \left( 1 + \frac{L_3}{L_2} \right) L_3 LI^3 \left( \cos(2l+2g-h+l_3+l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3+l_2) \right) \right) \Big/ \left( L^2{}^6 \right. \\
& \left. \sqrt{1-\frac{LI^2}{L^2}} \right) - \frac{3}{8} \sin(II) (1-T) \left( 1 + \frac{L_3}{L_2} \right) \left( 1 - \frac{2L_3}{L_2} \right) LI^5 \left( \cos(2l+2g-h+l_3+l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3+l_2) \right) \right) \Big/ \left( L^2{}^7 \right. \\
& \left. \left( 1 - \frac{LI^2}{L^2} \right)^{(3/2)} \right) + \frac{3}{4} \sin(II) (1-T) \left( 1 - \frac{L_3}{L_2} \right) \left( 1 + \frac{2L_3}{L_2} \right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L^2}} \left( \cos(2l+2g-h+l_3-l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3-l_2) \right) \right) \Big/ L^2{}^3 - \frac{3}{2} \sin(II) \\
& (1-T) L_3 \left( 1 + \frac{2L_3}{L_2} \right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L^2}} \left( \cos(2l+2g-h+l_3-l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3-l_2) \right) \right) \Big/ L^2{}^4 + 3 \sin(II) \\
& (1-T) \left( 1 - \frac{L_3}{L_2} \right) L_3 LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L^2}} \left( \cos(2l+2g-h+l_3-l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3-l_2) \right) \right) \Big/ L^2{}^4 - \frac{15}{8} \\
& \sin(II) (1-T) \left( 1 - \frac{L_3}{L_2} \right) \left( 1 + \frac{2L_3}{L_2} \right) LI^3 \left( \cos(2l+2g-h+l_3-l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3-l_2) \right) \right) \Big/ \left( L^2{}^5 \right. \\
& \left. \sqrt{1-\frac{LI^2}{L^2}} \right) - \frac{3}{2} \sin(II) (1-T) L_3^2 LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L^2}} \left( \cos(2l+2g-h+l_3-l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3-l_2) \right) \right) \Big/ L^2{}^5 + \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1-T) L_3 \left( 1 + \frac{2L_3}{L_2} \right) LI^3 \left( \cos(2l+2g-h+l_3-l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3-l_2) \right) \right) \Big/ \left( L^2{}^6 \right. \\
& \left. \sqrt{1-\frac{LI^2}{L^2}} \right) - \frac{3}{2} \sin(II) (1-T) \left( 1 - \frac{L_3}{L_2} \right) L_3 LI^3 \left( \cos(2l+2g-h+l_3-l_2) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3-l2) \right) \Big/ \left( L2^6 \right. \\
& \left. \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} - \frac{3}{8} \sin(H) (1-T) \left( 1-\frac{L3}{L2} \right) \left( 1+\frac{2L3}{L2} \right) L1^5 \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \cos(2l+2g-h+l3-l2) \right) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3-l2) \right) \Big/ \left( L2^7 \right. \\
& \left. \left( 1-\frac{L1^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} + \frac{3}{8} (1+T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} \left( 1-\frac{L3}{L2} \right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \cos(2l+2g+2h-2l3+l2) \right) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3+l2) \right) \Big/ L2^3 - \\
& \frac{15}{16} (1+T)^2 \left( 1-\frac{L3}{L2} \right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \left( \cos(2l+2g+2h-2l3+l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3+l2) \right) \Big) L3^2 \\
& \Big/ \left( \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^5 - \frac{3}{4} (1+T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L3 L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \cos(2l+2g+2h-2l3+l2) \right) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3+l2) \right) \Big/ L2^4 - \\
& \frac{15}{16} (1+T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} \left( 1-\frac{L3}{L2} \right) L1^3 \left( \cos(2l+2g+2h-2l3+l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3+l2) \right) \Big) \Big/ \left( \right. \\
& \left. L2^5 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} - \frac{3}{16} (1+T)^2 \left( 1-\frac{L3}{L2} \right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \cos(2l+2g+2h-2l3+l2) \right) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3+l2) \right) \Big) L3^4 \\
& \Big/ \left( \left( 1-\frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} L2^7 + \frac{3}{8} (1+T)^2 L3^3 L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \cos(2l+2g+2h-2l3+l2) \right) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3+l2) \right) \Big) \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^6 + \frac{3}{8} (1+T)^2 \left( 1-\frac{L3}{L2} \right) L1^3 \left( \cos(2l+2g+2h-2l3+l2) \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l_3+l_2) \right) \Big) L^3 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1-\frac{L^3}{L^2}} L^2 \sqrt{1-\frac{L^2}{L^2}} \right) + \frac{3}{8} (1+T)^2 \sqrt{1-\frac{L^3}{L^2}} L^3 L^3 \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+2h-2l_3+l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l_3+l_2) \right) \Big) \Big/ \left( \right. \\
& \left. L^2 \sqrt{1-\frac{L^2}{L^2}} \right) - \frac{3}{16} (1+T)^2 \sqrt{1-\frac{L^3}{L^2}} \left( 1-\frac{L^3}{L^2} \right) L^5 \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+2h-2l_3+l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l_3+l_2) \right) \Big) \Big/ \left( \right. \\
& \left. L^2 \left( 1-\frac{L^2}{L^2} \right)^{(3/2)} \right) - \frac{3}{8} (1+T)^2 \sqrt{1-\frac{L^3}{L^2}} \left( 1+\frac{L^3}{L^2} \right) L \sqrt{1-\frac{L^2}{L^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+2h-2l_3-l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l_3-l_2) \right) \Big) \Big/ L^3 + \\
& \frac{15}{16} (1+T)^2 \left( 1+\frac{L^3}{L^2} \right) L \sqrt{1-\frac{L^2}{L^2}} \left( \cos(2l+2g+2h-2l_3-l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l_3-l_2) \right) \Big) \Big) L^3 \\
& \Big/ \left( \sqrt{1-\frac{L^3}{L^2}} L^2 \right) - \frac{3}{4} (1+T)^2 \sqrt{1-\frac{L^3}{L^2}} L^3 L \sqrt{1-\frac{L^2}{L^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+2h-2l_3-l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l_3-l_2) \right) \Big) \Big/ L^2 + \\
& \frac{15}{16} (1+T)^2 \sqrt{1-\frac{L^3}{L^2}} \left( 1+\frac{L^3}{L^2} \right) L^3 \left( \cos(2l+2g+2h-2l_3-l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l_3-l_2) \right) \Big) \Big/ \left( \right. \\
& \left. L^2 \sqrt{1-\frac{L^2}{L^2}} \right) + \frac{3}{16} (1+T)^2 \left( 1+\frac{L^3}{L^2} \right) L \sqrt{1-\frac{L^2}{L^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+2h-2l_3-l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l_3-l_2) \right) \Big) \Big) L^3 \\
& \Big/ \left( \left( 1-\frac{L^3}{L^2} \right)^{(3/2)} L^2 \right) + \frac{3}{8} (1+T)^2 L^3 L \sqrt{1-\frac{L^2}{L^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+2h-2l_3-l_2) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l_3-l_2) \right) \Bigg) / \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L_3^2}{L_2^2}} L_2^6 \right) - \frac{3}{8} (1+T)^2 \left( 1 + \frac{L_3}{L_2} \right) L_1^3 \left( \cos(2l+2g+2h-2l_3-l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l_3-l_2) \right) \Bigg) L_3^2 / \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L_3^2}{L_2^2}} L_2^7 \sqrt{1 - \frac{L_1^2}{L_2^2}} \right) + \frac{3}{8} (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L_3^2}{L_2^2}} L_3 L_1^3 \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+2h-2l_3-l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l_3-l_2) \right) \Bigg) / \left( \right. \\
& \left. L_2^6 \sqrt{1 - \frac{L_1^2}{L_2^2}} \right) + \frac{3}{16} (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L_3^2}{L_2^2}} \left( 1 + \frac{L_3}{L_2} \right) L_1^5 \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+2h-2l_3-l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l_3-l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l_3-l_2) \right) \Bigg) / \left( \right. \\
& \left. L_2^7 \left( 1 - \frac{L_1^2}{L_2^2} \right)^{(3/2)} \right) - \frac{3}{8} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L_3^2}{L_2^2}} \left( 1 + \frac{L_3}{L_2} \right) L_1 \sqrt{1 - \frac{L_1^2}{L_2^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g-2h+2l_3+l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l_3+l_2) \right) \Bigg) / L_2^3 + \\
& \frac{15}{16} (1-T)^2 \left( 1 + \frac{L_3}{L_2} \right) L_1 \sqrt{1 - \frac{L_1^2}{L_2^2}} \left( \cos(2l+2g-2h+2l_3+l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l_3+l_2) \right) \Bigg) L_3^2 \\
& / \left( \sqrt{1 - \frac{L_3^2}{L_2^2}} L_2^5 \right) - \frac{3}{4} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L_3^2}{L_2^2}} L_3 L_1 \sqrt{1 - \frac{L_1^2}{L_2^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g-2h+2l_3+l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l_3+l_2) \right) \Bigg) / L_2^4 \\
& \frac{15}{16} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L_3^2}{L_2^2}} \left( 1 + \frac{L_3}{L_2} \right) L_1^3 \left( \cos(2l+2g-2h+2l_3+l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l_3+l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l_3+l_2) \right) \Bigg) / \left( \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L2^5 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} + \frac{3}{16} (1-T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \right) \right) L3^4 \\
& \left/ \left( \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^7 \right) + \frac{3}{8} (1-T)^2 L3^3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \right) \right) \left/ \left( \right. \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^6 \right) - \frac{3}{8} (1-T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^3 \left( \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \right) \right) L3^2 \left/ \left( \right. \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^7 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{8} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 L1^3 \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \right) \right) \left/ \left( \right. \right. \\
& L2^6 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} + \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^5 \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \right) \right) \left/ \left( \right. \right. \\
& L2^7 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} \left. \right) + \frac{3}{8} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right) \right) \left/ L2^3 - \right. \\
& \frac{15}{16} (1-T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \left( \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right) \right) L3^2 \\
& \left/ \left( \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5 \right) - \frac{3}{4} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right) \right) \left/ L2^4 - \right. \\
& \frac{15}{16} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^3 \left( \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-l2) \right) \Big) / \left( \right. \\
& L2^5 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} - \frac{3}{16} (1-T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l+2g-2h+2l3-l2) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-l2) \right) \Big) \Big) L3^4 \\
& / \left( \left( \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} L2^7 \right) + \frac{3}{8} (1-T)^2 L3^3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \\
& \cos(2l+2g-2h+2l3-l2) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-l2) \right) \Big) \Big) / \left( \right. \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^6 \Big) + \frac{3}{8} (1-T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l+2g-2h+2l3-l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-l2) \right) \Big) \Big) L3^2 / \left( \right. \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^7 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \Big) + \frac{3}{8} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 LI^3 \left( \right. \\
& \cos(2l+2g-2h+2l3-l2) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-l2) \right) \Big) \Big) / \left( \right. \\
& L2^6 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} - \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI^5 \left( \right. \\
& \cos(2l+2g-2h+2l3-l2) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-l2) \right) \Big) \Big) / \left( \right. \\
& L2^7 \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} \Big) + \frac{27}{16} \sin(I)^2 L3^2 \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \\
& \left( \cos(2l+2g-2l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2l2) \right) \right) / L2^4 - \\
& \frac{9}{4} \sin(I)^2 L3^2 LI^2 \\
& \left( \cos(2l+2g-2l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2l2) \right) \right) / L2^6 + \\
& \frac{27}{16} \sin(I)^2 \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right) LI^2 \\
& \left( \cos(2l+2g-2l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2l2) \right) \right) / L2^4 + \\
& \frac{27}{16} \sin(I)^2 L3^2 \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left( \cos(2l+2g+2l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2l2) \right) \right) / L2^4 - \\
& \frac{9}{4} \sin(H)^2 L3^2 LI^2 \\
& \left( \cos(2l+2g+2l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2l2) \right) \right) / L2^6 + \\
& \frac{27}{16} \sin(H)^2 \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right) LI^2 \\
& \left( \cos(2l+2g+2l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2l2) \right) \right) / L2^4 - \\
& \frac{9}{16} \sin(H) (1+T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \cos(2l+2g+h-l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+2l2) \right) \right) L3^2 \quad / \quad \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^4} \right) - \frac{3}{16} \sin(H) (1+T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+h-l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+2l2) \right) \right) L3^4 \quad / \quad \left( \right. \\
& \left. \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} L2^6 \right) + \frac{3}{8} \sin(H) (1+T) L3^3 \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \cos(2l+2g+h-l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+2l2) \right) \right) \quad / \quad \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^5} \right) + \frac{3}{4} \sin(H) (1+T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI^2 \left( \cos(2l+2g+h-l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+2l2) \right) \right) L3^2 \quad / \quad \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^6} \right) - \frac{3}{8} \sin(H) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L3} \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+h-l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+2l2) \right) \right) / L2^3 + \frac{3}{4} \\
& \sin(H) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L3} LI^2 \left( \cos(2l+2g+h-l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+2l2) \right) \right) / L2^5 - \frac{9}{8} \\
& \sin(H) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right)} LI^2 \left( \cos(2l+2g+h-l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+2l2) \right) \right) / L2^4 + \frac{9}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin(H) (1+T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g+h-l3-2l2)\right) \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2)\right) L3^2 \left/ \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^4} \right) + \frac{3}{16} \sin(H) (1+T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \cos(2l+2g+h-l3-2l2) \right) \right. \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2)\right) L3^4 \left/ \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^6 \right) + \frac{3}{8} \sin(H) (1+T) L3^3 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \cos(2l+2g+h-l3-2l2) \right) \right. \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2)\right) \left/ \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^5} \right) - \frac{3}{4} \sin(H) (1+T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \cos(2l+2g+h-l3-2l2) \right) \right. \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2)\right) L3^2 \left/ \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^6} \right) - \frac{3}{8} \sin(H) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \cos(2l+2g+h-l3-2l2) \right) \right. \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2)\right) \left/ L2^3 + \frac{3}{4} \right. \\
& \left. \sin(H) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 L1^2 \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \cos(2l+2g+h-l3-2l2) \right) \right. \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2)\right) \left/ L2^5 + \frac{9}{8} \right. \\
& \left. \sin(H) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \cos(2l+2g+h-l3-2l2) \right) \right. \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2)\right) \left/ L2^4 - \frac{9}{16} \right. \\
& \left. \sin(H) (1-T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \cos(2l+2g-h+l3+2l2) \right) \right. \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+2l2)\right) L3^2 \left/ \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^4} \right) - \frac{3}{16} \sin(H) (1-T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left( \right. \right. \\
& \left. \left. \cos(2l+2g-h+l3+2l2) \right) \right. \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+2l2)\right) L3^4 \left/ \left( \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^6 \left[ -\frac{3}{8} \sin(H) (1-T) L3^3 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \cos(2l+2g-h+l3+2l2) \right. \right. \\
& \left. \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+2l2) \right) \right) \right] / \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5 \right) + \frac{3}{4} \sin(H) (1-T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI^2 \left( \cos(2l+2g-h+l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+2l2) \right) \right) \left. \right) L3^2 / \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^6 \right) + \frac{3}{8} \sin(H) (1-T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g-h+l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+2l2) \right) \right) \left. \right) / L2^3 - \frac{3}{4} \\
& \sin(H) (1-T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L3 LI^2 \left( \cos(2l+2g-h+l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+2l2) \right) \right) \left. \right) / L2^5 - \frac{9}{8} \\
& \sin(H) (1-T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI^2 \left( \cos(2l+2g-h+l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+2l2) \right) \right) \left. \right) / L2^4 + \frac{9}{16} \\
& \sin(H) (1-T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \cos(2l+2g-h+l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3-2l2) \right) \right) \left. \right) L3^2 / \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4 \right) + \frac{3}{16} \sin(H) (1-T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g-h+l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3-2l2) \right) \right) \left. \right) L3^4 / \left( \right. \\
& \left. \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^6 \right) - \frac{3}{8} \sin(H) (1-T) L3^3 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \cos(2l+2g-h+l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3-2l2) \right) \right) \left. \right) / \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5 \right) \\
& - \frac{3}{4} \sin(H) (1-T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI^2 \left( \cos(2l+2g-h+l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3-2l2) \right) \right) \left. \right) L3^2 / \left( \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^6} \Big) + \frac{3}{8} \sin(H) (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L3} \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \Big( \\
& \cos(2l + 2g - h + l3 - 2l2) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 - 2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 - 2l2) \right) \Big) \Big) / L2^3 - \frac{3}{4} \\
& \sin(H) (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L3} L1^2 \left( \cos(2l + 2g - h + l3 - 2l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 - 2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 - 2l2) \right) \Big) \Big) / L2^5 + \frac{9}{8} \\
& \sin(H) (1 - T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)} L1^2 \left( \cos(2l + 2g - h + l3 - 2l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 - 2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 - 2l2) \right) \Big) \Big) / L2^4 + \frac{3}{16} \\
& (1 + T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left( \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) \right) \Big) \Big) L3 / \\
& L2^3 - \frac{3}{32} (1 + T)^2 L3^2 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left( \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) \right) \Big) \Big) / L2^4 \\
& - \frac{3}{8} (1 + T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \left( \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) \right) \Big) \Big) L3 / \\
& L2^5 + \frac{9}{32} (1 + T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 L1^2 \left( \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + 2l2) \right) \Big) \Big) / L2^4 \\
& - \frac{3}{16} (1 + T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left( \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) \right) \Big) \Big) L3 / \\
& L2^3 - \frac{3}{32} (1 + T)^2 L3^2 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left( \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) \right) \Big) \Big) / L2^4 \\
& + \frac{3}{8} (1 + T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \left( \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 - 2l2) \right) \Big) \Big) L3 /
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L2^5 + \frac{9}{32} (1+T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 LI^2 \left( \cos(2l+2g+2h-2l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3-2l2) \right) \right) / L2^4 \\
& - \frac{3}{16} (1-T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \cos(2l+2g-2h+2l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3+2l2) \right) \right) L3 / \\
& L2^3 - \frac{3}{32} (1-T)^2 L3^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \cos(2l+2g-2h+2l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3+2l2) \right) \right) / L2^4 \\
& + \frac{3}{8} (1-T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI^2 \left( \cos(2l+2g-2h+2l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3+2l2) \right) \right) L3 / \\
& L2^5 + \frac{9}{32} (1-T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right)^2 LI^2 \left( \cos(2l+2g-2h+2l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3+2l2) \right) \right) / L2^4 \\
& + \frac{3}{16} (1-T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \cos(2l+2g-2h+2l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-2l2) \right) \right) L3 / \\
& L2^3 - \frac{3}{32} (1-T)^2 L3^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \cos(2l+2g-2h+2l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-2l2) \right) \right) / L2^4 \\
& (1-T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI^2 \left( \cos(2l+2g-2h+2l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-2l2) \right) \right) L3 / \\
& L2^5 + \frac{9}{32} (1-T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right)^2 LI^2 \left( \cos(2l+2g-2h+2l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-2l2) \right) \right) / L2^4
\end{aligned}$$

O termo  $a_{34} = a_{43} = f_{24} = f_{42}$  equivale a  $\frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial L_3} = \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial L_2}$  :

$$\begin{aligned}
 a_{34} = Mi^4 M^6 (C - A) \left( (1 + 3e \cos(l)) \right) & \left( -3 L I^2 \left( \frac{3 L 3}{4 L 2^2} - \frac{9 T^2 L 3}{4 L 2^2} - \frac{3}{4} \frac{\sin(2 II) \sqrt{1 - \frac{L 3^2}{L 2^2}} \cos(h - l 3)}{L 2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{3}{4} \frac{\sin(2 II) L 3^2 \cos(h - l 3)}{L 2^3 \sqrt{1 - \frac{L 3^2}{L 2^2}}} + \frac{3}{4} \frac{\sin(II)^2 L 3 \cos(2 h - 2 l 3)}{L 2^2} \right) / L 2^3 + \left( \frac{3 L I^2}{2 L 2^2} - \frac{1}{2} \right) \left( \right. \\
 & - \frac{3 L 3}{2 L 2^3} + \frac{9 T^2 L 3}{2 L 2^3} + \frac{3}{4} \frac{\sin(2 II) \sqrt{1 - \frac{L 3^2}{L 2^2}} \cos(h - l 3)}{L 2^2} \\
 & - \frac{3 \sin(2 II) \cos(h - l 3) L 3^2}{L 2^4 \sqrt{1 - \frac{L 3^2}{L 2^2}}} - \frac{3 \sin(2 II) L 3^4 \cos(h - l 3)}{4 L 2^6 \left( 1 - \frac{L 3^2}{L 2^2} \right)^{(3/2)}} \\
 & \left. - \frac{3 \sin(II)^2 L 3 \cos(2 h - 2 l 3)}{2 L 2^3} \right) + \frac{3}{2} \frac{(1 - 3 T^2) \sqrt{1 - \frac{L 3^2}{L 2^2}} L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L 2^2}} \cos(l 2)}{L 2^3} \\
 & - \frac{15}{4} \frac{(1 - 3 T^2) L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L 2^2}} \cos(l 2) L 3^2}{L 2^5 \sqrt{1 - \frac{L 3^2}{L 2^2}}} - \frac{3}{4} \frac{(1 - 3 T^2) \sqrt{1 - \frac{L 3^2}{L 2^2}} L I^3 \cos(l 2)}{L 2^5 \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L 2^2}}} \\
 & - \frac{3}{4} \frac{(1 - 3 T^2) L 3^4 L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L 2^2}} \cos(l 2)}{L 2^7 \left( 1 - \frac{L 3^2}{L 2^2} \right)^{(3/2)}} + \frac{3}{4} \frac{(1 - 3 T^2) L 3^2 L I^3 \cos(l 2)}{L 2^7 \sqrt{1 - \frac{L 3^2}{L 2^2}} \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L 2^2}}} \\
 & + \frac{15}{16} \frac{(1 - 3 T^2) \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L 2^2}} \cos(2 l 2) L 3^2 L I}{\sqrt{1 - \frac{L 3^2}{L 2^2}} L 2^5} \\
 & + \frac{3}{16} \frac{(1 - 3 T^2) \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L 2^2}} \cos(2 l 2) L 3^4 L I}{\left( 1 - \frac{L 3^2}{L 2^2} \right)^{(3/2)} L 2^7} - \frac{3}{16} \frac{(1 - 3 T^2) \cos(2 l 2) L 3^2 L I^3}{\sqrt{1 - \frac{L 3^2}{L 2^2}} \sqrt{1 - \frac{L I^2}{L 2^2}} L 2^7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{8} \frac{(1-3T^2) \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2l2) L1}{L2^3} + \frac{3}{16} \frac{(1-3T^2) \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} \cos(2l2) L1^3}{\sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} L2^5} \\
& -\frac{3}{4} \frac{\sin(2H) \left(1-\frac{2L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \cos(h-l3+l2)}{L2^3} + \frac{3}{2} \frac{\sin(2H) L3 L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \cos(h-l3+l2)}{L2^4} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \left(1-\frac{2L3}{L2}\right) L1^3 \cos(h-l3+l2)}{L2^5 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}} + \frac{3}{2} \frac{\sin(2H) \left(1+\frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \cos(h-l3+l2)}{L2^3} \\
& -\frac{3}{4} \frac{\sin(2H) \left(1+\frac{L3}{L2}\right) L1^3 \cos(h-l3+l2)}{L2^5 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}} + \frac{3}{4} \frac{\sin(2H) \left(1+\frac{2L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \cos(h-l3-l2)}{L2^3} \\
& + \frac{3}{2} \frac{\sin(2H) L3 L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \cos(h-l3-l2)}{L2^4} - \frac{3}{8} \frac{\sin(2H) \left(1+\frac{2L3}{L2}\right) L1^3 \cos(h-l3-l2)}{L2^5 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}} \\
& -\frac{3}{2} \frac{\sin(2H) \left(1-\frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \cos(h-l3-l2)}{L2^3} + \frac{3}{4} \frac{\sin(2H) \left(1-\frac{L3}{L2}\right) L1^3 \cos(h-l3-l2)}{L2^5 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}} \\
& -\frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1+\frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h-2l3-l2) L3}{\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^4} \\
& -\frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1+\frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h-2l3-l2) L3^3}{\left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^6} \\
& -\frac{3}{4} \frac{\sin(H)^2 L3^2 L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h-2l3-l2)}{\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^5} + \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \left(1+\frac{L3}{L2}\right) L1^3 \cos(2h-2l3-l2) L3}{\sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^6 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h-2l3-l2)}{L2^3} - \frac{3}{8} \frac{\sin(H)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L1^3 \cos(2h-2l3-l2)}{L2^5 \sqrt{1-\frac{L1^2}{L2^2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{9}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 + l2) L3}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 + l2) L3^3}{\left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^6} \\
& - \frac{3}{4} \frac{\sin(\Pi)^2 L3^2 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 + l2)}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5} - \frac{3}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^3 \cos(2h - 2l3 + l2) L3}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^6 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\sin(\Pi)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 + l2)}{L2^3} - \frac{3}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1^3 \cos(2h - 2l3 + l2)}{L2^5 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 - 2l2) L3}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3} + \frac{3}{16} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 - 2l2) L3^3}{\left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^5} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) L3^2 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 - 2l2)}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4} - \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \cos(h - l3 - 2l2) L3}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5} \\
& - \frac{3}{16} \frac{\sin(2\Pi) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 - 2l2)}{L2^2} + \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1^2 \cos(h - l3 - 2l2)}{L2^4} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 + 2l2) L3}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3} - \frac{3}{16} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 + 2l2) L3^3}{\left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^5} \\
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) L3^2 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 + 2l2)}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4} + \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \cos(h - l3 + 2l2) L3}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5} \\
& - \frac{3}{16} \frac{\sin(2\Pi) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 + 2l2)}{L2^2} + \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1^2 \cos(h - l3 + 2l2)}{L2^4}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{16} \frac{\sin(II)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2l3 - 2l2)}{L2^2} + \frac{3}{16} \frac{\sin(II)^2 L3 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2l3 - 2l2)}{L2^3} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(II)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI^2 \cos(2h - 2l3 - 2l2)}{L2^4} - \frac{3}{16} \frac{\sin(II)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2l3 + 2l2)}{L2^2} \\
& + \frac{3}{16} \frac{\sin(II)^2 L3 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2l3 + 2l2)}{L2^3} + \frac{3}{8} \frac{\sin(II)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI^2 \cos(2h - 2l3 + 2l2)}{L2^4} \\
& \frac{9}{2} \frac{\sin(II)^2 L3 \left( \cos(2l + 2g) + e \left( \frac{1}{2} \cos(l + 2g) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g) \right) \right)}{L2^3} + \frac{3}{4} \sin(II) (1 - T) \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l + 2g - h + l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3) \right) \right) / \\
& L2^2 - 3 \sin(II) (1 - T) \\
& \left( \cos(2l + 2g - h + l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3) \right) \right) \\
& L3^2 / \left( L2^4 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{4} \sin(II) (1 - T) L3^4 \\
& \left( \cos(2l + 2g - h + l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3) \right) \right) \\
& / \left( L2^6 \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} \right) - \frac{3}{4} \sin(II) (1 + T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l + 2g + h - l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3) \right) \right) / \\
& L2^2 + 3 \sin(II) (1 + T) \\
& \left( \cos(2l + 2g + h - l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3) \right) \right) \\
& L3^2 / \left( L2^4 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{4} \sin(II) (1 + T) L3^4 \\
& \left( \cos(2l + 2g + h - l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3) \right) \right) \\
& / \left( L2^6 \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} \right) - \frac{3}{4} (1 - T)^2 L3 \left( \cos(2l + 2g - 2h + 2l3) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3) \right) \Big/ L2^3 - \frac{3}{4} (1+T)^2 \\
& L3 \left( \cos(2l+2g+2h-2l3) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3) \right) \right) \Big/ L2^3 \\
& 3L1^2 \left( \frac{9}{4} \frac{\sin(II)^2 L3 \left( \cos(2l+2g) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g) \right) \right)}{L2^2} - \frac{3}{4} \right. \\
& \left. \sin(II) (1-T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right. \\
& \left. \left( \cos(2l+2g-h+l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3) \right) \right) \right) L2 \\
& + \frac{3}{4} \sin(II) (1-T) L3^2 \\
& \left( \cos(2l+2g-h+l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3) \right) \right) \\
& \Big/ \left( L2^3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} + \frac{3}{4} \sin(II) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) \\
& \left( \cos(2l+2g+h-l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3) \right) \right) L2 \\
& - \frac{3}{4} \sin(II) (1+T) L3^2 \\
& \left( \cos(2l+2g+h-l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3) \right) \right) \\
& \Big/ \left( L2^3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} + \frac{3}{8} (1-T)^2 L3 \left( \cos(2l+2g-2h+2l3) \right. \right. \\
& \left. \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3) \right) \right) \right) \Big/ L2^2 + \frac{3}{8} (1+T)^2 \\
& L3 \left( \cos(2l+2g+2h-2l3) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3) \right) \right) \Big/ L2^2 \Big/ L2^3 \\
& \frac{9}{4} \sin(II)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l+2g-l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-l3) \right) \right) \Big/ L2^3 + \frac{45}{8} L2^5 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \\
& \sin(II)^2 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l+2g-l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-l3) \right) \right) L3^2 \Big/ \left( \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{8} \sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1^3 \\
& \left( \cos(2l + 2g - l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - l3) \right) \right) / \left( L2^5 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \right) + \frac{9}{8} \sin(H)^2 L3^4 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l + 2g - l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - l3) \right) \right) / \left( L2^7 \right. \\
& \left. \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} \right) - \frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 L3^2 L1^3 \left( \cos(2l + 2g - l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - l3) \right) \right)}{L2^7 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} \\
& - \frac{9}{4} \sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l + 2g + l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + l3) \right) \right) / L2^3 + \frac{45}{8} \\
& \sin(H)^2 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l + 2g + l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + l3) \right) \right) L3^2 / \left( \right. \\
& \left. L2^5 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) + \frac{9}{8} \sin(H)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L1^3 \\
& \left( \cos(2l + 2g + l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + l3) \right) \right) / \left( L2^5 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \right) + \frac{9}{8} \sin(H)^2 L3^4 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l + 2g + l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + l3) \right) \right) / \left( L2^7 \right. \\
& \left. \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} \right) - \frac{9}{8} \frac{\sin(H)^2 L3^2 L1^3 \left( \cos(2l + 2g + l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + l3) \right) \right)}{L2^7 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}}} \\
& - \frac{3}{4} \sin(H) (1 + T) \left( 1 + \frac{2L3}{L2} \right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \left( \cos(2l + 2g + h - l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3 + l2) \right) \right) / L2^3 - \frac{3}{2} \sin(H) \\
& (1 + T) L3 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \left( \cos(2l + 2g + h - l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3 + l2) \right) \right) / L2^4 + \frac{3}{8} \sin(H)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1+T) \left( 1 + \frac{2L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l+2g+h-l3+l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+l2) \right) \right) / \left( L2^5 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{2} \sin(II) (1+T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+h-l3+l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+l2) \right) \right) / L2^3 - \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1+T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l+2g+h-l3+l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+l2) \right) \right) / \left( L2^5 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{4} \sin(II) (1+T) \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+h-l3-l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-l2) \right) \right) / L2^3 - \frac{3}{2} \sin(II) \\
& (1+T) L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l+2g+h-l3-l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-l2) \right) \right) / L2^4 - \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1+T) \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l+2g+h-l3-l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-l2) \right) \right) / \left( L2^5 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{2} \sin(II) (1+T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+h-l3-l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-l2) \right) \right) / L2^3 + \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1+T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l+2g+h-l3-l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-l2) \right) \right) / \left( L2^5 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{4} \sin(II) (1-T) \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g-h+l3+l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+l2) \right) \right) / L2^3 + \frac{3}{2} \sin(II)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1-T) L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l + 2g - h + l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 + l2) \right) \right) / L2^4 + \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1-T) \left( 1 - \frac{2L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l + 2g - h + l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 + l2) \right) \right) / \left( L2^5 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{2} \sin(II) (1-T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l + 2g - h + l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 + l2) \right) \right) / L2^3 - \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1-T) \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l + 2g - h + l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 + l2) \right) \right) / \left( L2^5 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{4} \sin(II) (1-T) \left( 1 + \frac{2L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) / L2^3 + \frac{3}{2} \sin(II) \\
& (1-T) L3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) / L2^4 - \frac{3}{8} \sin(II) \\
& (1-T) \left( 1 + \frac{2L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) / \left( L2^5 \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{2} \sin(II) (1-T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) / L2^3 + \frac{3}{4} \sin(II) \\
& (1-T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) / \left( L2^5 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \Big) + \frac{9}{16} (1+T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right) \right) \Big) L3 \ / \\
& \left( \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4 \right) + \frac{3}{16} (1+T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right) \right) \Big) L3^3 \\
& \ / \left( \left( \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^6 \right) - \frac{3}{8} (1+T)^2 L3^2 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \\
& \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \\
& \left. \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right) \right) \right) \ / \left( \right. \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5 \Big) - \frac{3}{16} (1+T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI^3 \left( \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right) \right) \Big) L3 \ / \left( \right. \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^6 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \Big) + \frac{3}{8} (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right) \right) \Big) / L2^3 - \\
& \frac{3}{16} (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI^3 \left( \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right) \right) \Big) \ / \left( \right. \\
& L2^5 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \Big) + \frac{3}{8} (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 - l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 - l2) \right) \right) \Big) / L2^3 - \frac{3}{8} \\
& (1+T)^2 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 - l2) \right) \right) \Big) L3^2 \\
& \ / \left( \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5 \right) - \frac{3}{16} (1+T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI^3 \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 - l2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3-l2) \right) \Big/ \left( \right. \\
& L2^5 \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} - \frac{9}{16} (1+T)^2 \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l+2g+2h-2l3-l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3-l2) \right) \right) L3 \Big/ \\
& \left( \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^4 - \frac{3}{16} (1+T)^2 \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \\
& \cos(2l+2g+2h-2l3-l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3-l2) \right) \right) L3^3 \\
& \Big/ \left( \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} L2^6 + \frac{3}{16} (1+T)^2 \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI^3 \left( \right. \right. \\
& \cos(2l+2g+2h-2l3-l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3-l2) \right) \right) L3 \Big/ \left( \right. \\
& \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^6 \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} + \frac{3}{8} (1-T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l+2g-2h+2l3+l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3+l2) \right) \right) / L2^3 - \frac{3}{8} \\
& (1-T)^2 LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l+2g-2h+2l3+l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3+l2) \right) \right) L3^2 \\
& \Big/ \left( \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^5 - \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} LI^3 \left( \right. \right. \\
& \cos(2l+2g-2h+2l3+l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3+l2) \right) \right) \Big/ \left( \right. \\
& L2^5 \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} - \frac{9}{16} (1-T)^2 \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l+2g-2h+2l3+l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3+l2) \right) \right) L3 \Big/
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4 \right) - \frac{3}{16} (1-T)^2 \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \right) \right) \Big) L3^3 \\
& \left/ \left( \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} L2^6 \right) + \frac{3}{16} (1-T)^2 \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI^3 \left( \right. \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \right) \right) \Big) L3 \left/ \left( \right. \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^6 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) + \frac{9}{16} (1-T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right) \right) \Big) L3 \left/ \right. \\
& \left( \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4 \right) + \frac{3}{16} (1-T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right) \right) \Big) L3^3 \\
& \left/ \left( \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} L2^6 \right) - \frac{3}{8} (1-T)^2 L3^2 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right) \right) \Big) \left/ \left( \right. \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5 \right) - \frac{3}{16} (1-T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI^3 \left( \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right) \right) \Big) L3 \left/ \left( \right. \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^6 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \right) + \frac{3}{8} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right) \right) \Big) / L2^3 - \\
& \frac{3}{16} (1-T)^2 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI^3 \left( \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right) \right) \Big) \left/ \left( \right. \right. \\
& L2^5 \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \Big) - \frac{9}{8} \sin(\Pi)^2 L3 \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left( \cos(2l+2g-2l_2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2l_2) \right) \right) / L^2 + \frac{9}{8} \sin(H)^2 L^3 L^2 \\
& \left( \cos(2l+2g-2l_2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2l_2) \right) \right) / L^2 + \frac{9}{8} \sin(H)^2 L^3 \left( 1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \\
& \left( \cos(2l+2g+2l_2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2l_2) \right) \right) / L^2 + \frac{9}{8} \sin(H)^2 L^3 L^2 \\
& \left( \cos(2l+2g+2l_2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2l_2) \right) \right) / L^2 + \frac{3}{8} \sin(H) (1+T) \left( 1 - \frac{L^3}{L^2} \right) \left( 1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \left( \cos(2l+2g+h-l_3+2l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3+2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3+2l_2) \right) \right) L^3 / \left( \sqrt{1 - \frac{L^3}{L^2}} L^2 \right) + \frac{3}{16} \sin(H) (1+T) \left( 1 - \frac{L^3}{L^2} \right) \left( 1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \left( \cos(2l+2g+h-l_3+2l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3+2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3+2l_2) \right) \right) L^3 / \left( \left( 1 - \frac{L^3}{L^2} \right)^{(3/2)} L^2 \right) - \frac{3}{8} \sin(H) (1+T) L^3 \left( 1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \left( \cos(2l+2g+h-l_3+2l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3+2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3+2l_2) \right) \right) / \left( \sqrt{1 - \frac{L^3}{L^2}} L^2 \right) - \frac{3}{8} \sin(H) (1+T) \left( 1 - \frac{L^3}{L^2} \right) L^2 \left( \cos(2l+2g+h-l_3+2l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3+2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3+2l_2) \right) \right) L^3 / \left( \sqrt{1 - \frac{L^3}{L^2}} L^2 \right) + \frac{3}{16} \sin(H) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L^3}{L^2}} \left( 1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \left( \cos(2l+2g+h-l_3+2l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3+2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3+2l_2) \right) \right) / L^2 - \frac{3}{8} \sin(H) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L^3}{L^2}} L^2 \left( \cos(2l+2g+h-l_3+2l_2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l_3+2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l_3+2l_2) \right) \right) / L^2 + \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin(II) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g+h-l3-2l2)\right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2) \right) \Big/ L2^2 - \frac{3}{8} \\
& \sin(II) (1+T) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g+h-l3-2l2)\right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2) \right) \Big/ L3^2 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4 \right) - \frac{3}{8} \sin(II) (1+T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI^2 \left(\cos(2l+2g+h-l3-2l2)\right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2) \right) \Big/ L2^4 - \frac{3}{8} \\
& \sin(II) (1+T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g+h-l3-2l2)\right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2) \right) \Big/ L3 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3 \right) - \frac{3}{16} \sin(II) (1+T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+h-l3-2l2) \right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2) \right) \Big/ L3^3 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^5 \right) + \frac{3}{8} \sin(II) (1+T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI^2 \left(\cos(2l+2g+h-l3-2l2)\right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2) \right) \Big/ L3 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^5 \right) - \frac{3}{16} \sin(II) (1-T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g-h+l3+2l2) \right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+2l2) \right) \Big/ L2^2 + \frac{3}{8} \\
& \sin(II) (1-T) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g-h+l3+2l2)\right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+2l2) \right) \Big/ L3^2 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4 \right) + \frac{3}{8} \sin(II) (1-T) \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} LI^2 \left(\cos(2l+2g-h+l3+2l2)\right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+2l2) \right) \Big/ L2^4 + \frac{3}{8} \\
& \sin(II) (1-T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g-h+l3+2l2)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3+2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3+2l_2) \right) \Big) L^3 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L^3}{L^2}} L^2 \right) + \frac{3}{16} \sin(\Pi) (1-T) \left( 1 + \frac{L^3}{L^2} \right) \left( 1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g-h+l_3+2l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3+2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3+2l_2) \right) \Big) L^3 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \left( 1 - \frac{L^3}{L^2} \right)^{(3/2)} L^2 \right) - \frac{3}{8} \sin(\Pi) (1-T) \left( 1 + \frac{L^3}{L^2} \right) L^2 \left( \cos(2l+2g-h+l_3+2l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3+2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3+2l_2) \right) \Big) L^3 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L^3}{L^2}} L^2 \right) - \frac{3}{8} \sin(\Pi) (1-T) \left( 1 - \frac{L^3}{L^2} \right) \left( 1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g-h+l_3-2l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3-2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3-2l_2) \right) \Big) L^3 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L^3}{L^2}} L^2 \right) - \frac{3}{16} \sin(\Pi) (1-T) \left( 1 - \frac{L^3}{L^2} \right) \left( 1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g-h+l_3-2l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3-2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3-2l_2) \right) \Big) L^3 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \left( 1 - \frac{L^3}{L^2} \right)^{(3/2)} L^2 \right) + \frac{3}{8} \sin(\Pi) (1-T) L^2 \left( 1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \left( \cos(2l+2g-h+l_3-2l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3-2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3-2l_2) \right) \Big) \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L^3}{L^2}} L^2 \right) + \frac{3}{8} \sin(\Pi) (1-T) \left( 1 - \frac{L^3}{L^2} \right) L^2 \left( \cos(2l+2g-h+l_3-2l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3-2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3-2l_2) \right) \Big) L^3 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L^3}{L^2}} L^2 \right) - \frac{3}{16} \sin(\Pi) (1-T) \sqrt{1 - \frac{L^3}{L^2}} \left( 1 - \frac{L^2}{L^2} \right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g-h+l_3-2l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3-2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3-2l_2) \right) \Big) \Big/ L^2 + \frac{3}{8} \\
& \sin(\Pi) (1-T) \sqrt{1 - \frac{L^3}{L^2}} L^2 \left( \cos(2l+2g-h+l_3-2l_2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l_3-2l_2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l_3-2l_2) \right) \Big) \Big/ L^4 - \frac{3}{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1+T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g+2h-2l3+2l2)\right) \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3+2l2)\right) \Big) / L2^2 \\
& + \frac{3}{32} (1+T)^2 L3 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g+2h-2l3+2l2)\right) \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3+2l2)\right) \Big) / L2^3 \\
& + \frac{3}{16} (1+T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \left(\cos(2l+2g+2h-2l3+2l2)\right) \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3+2l2)\right) \Big) / L2^4 \\
& + \frac{3}{32} (1+T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g+2h-2l3-2l2)\right) \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3-2l2)\right) \Big) / L2^2 \\
& + \frac{3}{32} (1+T)^2 L3 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g+2h-2l3-2l2)\right) \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3-2l2)\right) \Big) / L2^3 \\
& - \frac{3}{16} (1+T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \left(\cos(2l+2g+2h-2l3-2l2)\right) \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3-2l2)\right) \Big) / L2^4 \\
& + \frac{3}{32} (1-T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g-2h+2l3+2l2)\right) \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3+2l2)\right) \Big) / L2^2 \\
& + \frac{3}{32} (1-T)^2 L3 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g-2h+2l3+2l2)\right) \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3+2l2)\right) \Big) / L2^3 \\
& - \frac{3}{16} (1-T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1^2 \left(\cos(2l+2g-2h+2l3+2l2)\right) \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3+2l2)\right) \Big) / L2^4 \\
& - \frac{3}{32} (1-T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g-2h+2l3-2l2)\right) \\
& + e \left(-\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-2l2)\right) \Big) / L2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{32} (1-T)^2 L3 \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \cos(2l+2g-2h+2l3-2l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-2l2) \right) \Big) / L2^3 \\
& + \frac{3}{16} (1-T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI^2 \left( \cos(2l+2g-2h+2l3-2l2) \right. \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-2l2) \right) \Big) / L2^4
\end{aligned}$$

**O termo  $a_{44} = f_{44}$  equivale a  $\frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial L_3}$ :**

$$\begin{aligned}
a_{44} = Mi^4 M^6 (C-A) & \left( (1+3e \cos(l)) \left( \left( \frac{3LI^2}{2L2^2} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{3}{4L2^2} - \frac{9T^2}{4L2^2} \right) \right. \right. \\
& + \frac{9 \sin(2II) \cos(h-l3) L3}{4 L2^3 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}} + \frac{3 \sin(2II) L3^3 \cos(h-l3)}{4 L2^5 \left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)}} \\
& \left. \left. + \frac{3 \sin(II)^2 \cos(2h-2l3)}{4 L2^2} \right) + \frac{9 (1-3T^2) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \cos(l2) L3}{4 L2^4 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}}} \right. \\
& + \frac{3 (1-3T^2) L3^3 LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \cos(l2)}{4 L2^6 \left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)}} - \frac{9 (1-3T^2) \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2l2) L3 LI}{16 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^4} \\
& - \frac{3 (1-3T^2) \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2l2) L3^3 LI}{16 \left(1-\frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^6} - \frac{3 \sin(2II) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \cos(h-l3+l2)}{2 L2^3} \\
& - \frac{3 \sin(2II) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \cos(h-l3-l2)}{2 L2^3} + \frac{3 \sin(II)^2 LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2h-2l3-l2) L3}{4 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^4} \\
& + \frac{3 \sin(II)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1-\frac{LI^2}{L2^2}} \cos(2h-2l3-l2)}{8 \sqrt{1-\frac{L3^2}{L2^2}} L2^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 - l2) L3^2}{\left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^5} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 + l2)}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 + l2) L3^2}{\left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^5} + \frac{3}{4} \frac{\sin(\Pi)^2 L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{L2^2}} \cos(2h - 2l3 + l2) L3}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4} \\
& - \frac{3}{16} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2l3 + 2l2)}{L2^2} - \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 - 2l2) L3}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3} \\
& - \frac{3}{16} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 - 2l2)}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^2} - \frac{3}{16} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 - 2l2) L3^2}{\left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^4} \\
& + \frac{3}{16} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 + 2l2)}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^2} + \frac{3}{16} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 + 2l2) L3^2}{\left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^4} \\
& - \frac{3}{8} \frac{\sin(2\Pi) \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(h - l3 + 2l2) L3}{\sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3} - \frac{3}{16} \frac{\sin(\Pi)^2 \left(1 - \frac{L1^2}{L2^2}\right) \cos(2h - 2l3 - 2l2)}{L2^2} \left. \right\} + \left(\frac{3L1^2}{2L2^2} - \frac{1}{2}\right) \left( \right. \\
& \left. \frac{9}{4} \frac{\sin(\Pi)^2 \left( \cos(2l + 2g) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g) \right) \right)}{L2^2} + \frac{9}{4} \sin(\Pi) \right) \\
& (1 - T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \cos(2l + 2g - h + l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3) \right) \right) L3 \\
& \left/ \left( L2^3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} + \frac{3}{4} \sin(\Pi) (1 - T) L3^3 \right) \right. \\
& \left( \cos(2l + 2g - h + l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3) \right) \right) \\
& \left/ \left( L2^5 \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} \right) - \frac{9}{4} \sin(\Pi) (1 + T) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \cos(2l+2g+h-l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3) \right) \right) L3 \\
& \quad / \left( L2^3 \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) - \frac{3}{4} \sin(\Pi) (1+T) L3^3 \\
& \left( \cos(2l+2g+h-l3) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3) \right) \right) \\
& \quad / \left( L2^5 \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} \right) + \frac{3}{8} (1-T)^2 \left( \cos(2l+2g-2h+2l3) \right. \\
& \quad \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3) \right) \right) / L2^2 + \frac{3}{8} (1+T)^2 \\
& \left( \cos(2l+2g+2h-2l3) \right. \\
& \quad \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3) \right) \right) / L2^2 + \frac{3}{8} \\
& (1-T)^2 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l+2g-2h+2l3-l2) \right. \\
& \quad \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-l2) \right) \right) L3 \quad / \\
& \left( \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4 \right) + \frac{3}{8} (1+T)^2 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l+2g+2h-2l3+l2) \right. \\
& \quad \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3+l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3+l2) \right) \right) L3 \quad / \\
& \left( \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4 \right) - \frac{27}{8} \sin(\Pi)^2 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l+2g-l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-l3) \right) \right) L3 \quad / \left( L2^4 \right. \\
& \quad \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) - \frac{9}{8} \sin(\Pi)^2 L3^3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l+2g-l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-l3) \right) \right) / \left( L2^6 \right. \\
& \quad \left. \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} \right) - \frac{27}{8} \sin(\Pi)^2 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \\
& \left( \cos(2l+2g+l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+l3) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+l3) \right) \right) L3 \quad / \left( L2^4 \right. \\
& \quad \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} \right) - \frac{9}{8} \sin(\Pi)^2 L3^3 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \cos(2l + 2g + l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + l3) \right) \right) / \left( L2^6 \right. \\
& \left. \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} \right) + \frac{3}{2} \sin(II) (1 + T) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l + 2g + h - l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3 + l2) \right) \right) / L2^3 + \frac{3}{2} \sin(II) \\
& (1 + T) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l + 2g + h - l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - l3 - l2) \right) \right) / L2^3 - \frac{3}{2} \sin(II) \\
& (1 - T) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l + 2g - h + l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 + l2) \right) \right) / L2^3 - \frac{3}{2} \sin(II) \\
& (1 - T) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l + 2g - h + l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + l3 - l2) \right) \right) / L2^3 - \frac{3}{16} \\
& (1 + T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right) \right) / \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3 \right) - \frac{3}{16} (1 + T)^2 \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 + l2) \right) \right) L3^2 \\
& / \left( \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} L2^5 \right) + \frac{3}{8} (1 + T)^2 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 - l2) \right) \right) L3 / \\
& \left( \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^4 \right) + \frac{3}{16} (1 + T)^2 \left( 1 + \frac{L3}{L2} \right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 - l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 - l2) \right) \right) / \left( \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^3} + \frac{3}{16} (1+T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g + 2h - 2l3 - l2) \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2l3 - l2) \right) \right) L3^2 \\
& \left/ \left( \left( \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^5 \right) + \frac{3}{8} (1-T)^2 LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \\
& \left. \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \right) \right) \right) L3 \left/ \right. \\
& \left( \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^4} + \frac{3}{16} (1-T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \\
& \left. \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \right) \right) \right) \left/ \right. \left( \right. \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^3} + \frac{3}{16} (1-T)^2 \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \\
& \left. \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 + l2) \right) \right) \right) L3^2 \\
& \left/ \left( \left( \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^5 \right) - \frac{3}{16} (1-T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \right. \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \\
& \left. \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right) \right) \right) \left/ \right. \left( \right. \\
& \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^3} - \frac{3}{16} (1-T)^2 \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) LI \sqrt{1 - \frac{LI^2}{L2^2}} \left( \right. \\
& \cos(2l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \\
& \left. \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2l3 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2l3 - l2) \right) \right) \right) L3^2 \\
& \left/ \left( \left( \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^5 \right) + \frac{9}{16} \sin(H)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \right. \right. \\
& \left. \left( \cos(2l + 2g - 2l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2l2) \right) \right) \right) / L2^2 + \\
& \frac{9}{16} \sin(H)^2 \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \\
& \left. \left( \cos(2l + 2g + 2l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2l2) \right) \right) \right) / L2^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{16} \sin(H) (1+T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g+h-l3+2l2)\right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+2l2) \right) \Bigg/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^2} \right) - \frac{3}{16} \sin(H) (1+T) \left(1 - \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+h-l3+2l2) \right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+2l2) \right) \Bigg/ \left( \right. \\
& \left. \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^4 \right) + \frac{3}{8} \sin(H) (1+T) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g+h-l3+2l2)\right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3+2l2) \right) \Bigg/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^3} \right) + \frac{3}{8} \sin(H) (1+T) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g+h-l3-2l2)\right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2) \right) \Bigg/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^3} \right) + \frac{3}{16} \sin(H) (1+T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+h-l3-2l2) \right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2) \right) \Bigg/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^2} \right) + \frac{3}{16} \sin(H) (1+T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g+h-l3-2l2) \right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-l3-2l2) \right) \Bigg/ \left( \right. \\
& \left. \left(1 - \frac{L3^2}{L2^2}\right)^{(3/2)} L2^4 \right) - \frac{3}{8} \sin(H) (1-T) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left(\cos(2l+2g-h+l3+2l2)\right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+2l2) \right) \Bigg/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^3} \right) - \frac{3}{16} \sin(H) (1-T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g-h+l3+2l2) \right) \\
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+2l2) \right) \Bigg/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2} L2^2} \right) - \frac{3}{16} \sin(H) (1-T) \left(1 + \frac{L3}{L2}\right) \left(1 - \frac{LI^2}{L2^2}\right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g-h+l3+2l2) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3+2l2) \right) \Big) L^3 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} L2^4 \right) - \frac{3}{32} (1-T)^2 \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \cos(2l+2g-2h+2l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3-2l2) \right) \right) \Big) / L2^2 \\
& + \frac{3}{16} \sin(II) (1-T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \cos(2l+2g-h+l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3-2l2) \right) \right) \Big) \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^2 \right) + \frac{3}{16} \sin(II) (1-T) \left( 1 - \frac{L3}{L2} \right) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l+2g-h+l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3-2l2) \right) \right) \Big) L^3 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \left( 1 - \frac{L3^2}{L2^2} \right)^{(3/2)} L2^4 \right) - \frac{3}{8} \sin(II) (1-T) \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \cos(2l+2g-h+l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+l3-2l2) \right) \right) \Big) L^3 \Big/ \left( \right. \\
& \left. \sqrt{1 - \frac{L3^2}{L2^2}} L2^3 \right) - \frac{3}{32} (1+T)^2 \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \cos(2l+2g+2h-2l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3+2l2) \right) \right) \Big) / L2^2 \\
& - \frac{3}{32} (1+T)^2 \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \cos(2l+2g+2h-2l3-2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2l3-2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2l3-2l2) \right) \right) \Big) / L2^2 \\
& - \frac{3}{32} (1-T)^2 \left( 1 - \frac{LI^2}{L2^2} \right) \left( \cos(2l+2g-2h+2l3+2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l+2g-2h+2l3+2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g-2h+2l3+2l2) \right) \right) \Big) / L2^2 \Big) / L^6
\end{aligned}$$



## APÊNDICE B

### HAMILTONIANA DO PROBLEMA ESCRITA NA VIZINHANÇA DA ORIGEM

$$\begin{aligned}
 H_t := & -\frac{M_i^2 M^3}{2 L^2} + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \frac{L I^2}{2} + \frac{(p_1 + L_2)^2}{2 A} + M_i^4 M^6 (C - A) \left( (1 + 3 e \cos(l)) \right) \left( \right. \\
 & \left( \frac{3 L I^2}{2 (p_1 + L_2)^2} - \frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{8} + \frac{3 T^2}{8} + \frac{3 (p_2 + L_3)^2}{8 (p_1 + L_2)^2} - \frac{9 T^2 (p_2 + L_3)^2}{8 (p_1 + L_2)^2} \right. \\
 & \left. - \frac{3}{4} \frac{\sin(2 \Pi) (p_2 + L_3) \sqrt{1 - \frac{(p_2 + L_3)^2}{(p_1 + L_2)^2}} \cos(h - q_2 - l_3)}{p_1 + L_2} \right. \\
 & \left. - \frac{3}{8} \sin(\Pi)^2 \left( 1 - \frac{(p_2 + L_3)^2}{(p_1 + L_2)^2} \right) \cos(2 h - 2 q_2 - 2 l_3) \right) \\
 & - \frac{3}{4} \frac{(1 - 3 T^2) (p_2 + L_3) \sqrt{1 - \frac{(p_2 + L_3)^2}{(p_1 + L_2)^2}} L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{(p_1 + L_2)^2}} \cos(q_1 + l_2)}{(p_1 + L_2)^2} + \\
 & \frac{3}{16} \frac{(1 - 3 T^2) \sqrt{1 - \frac{(p_2 + L_3)^2}{(p_1 + L_2)^2}} \sqrt{1 - \frac{L I^2}{(p_1 + L_2)^2}} \cos(2 q_1 + 2 l_2) (p_2 + L_3) L I}{(p_1 + L_2)^2} \\
 & + \frac{3}{8} \sin(2 \Pi) \left( 1 + \frac{p_2 + L_3}{p_1 + L_2} \right) \left( 1 - \frac{2 (p_2 + L_3)}{p_1 + L_2} \right) L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{(p_1 + L_2)^2}} \\
 & \cos(h - q_2 - l_3 + q_1 + l_2) / (p_1 + L_2) + \frac{3}{8} \sin(2 \Pi) \left( 1 - \frac{p_2 + L_3}{p_1 + L_2} \right) \left( 1 + \frac{2 (p_2 + L_3)}{p_1 + L_2} \right) \\
 & L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{(p_1 + L_2)^2}} \cos(h - q_2 - l_3 - q_1 - l_2) / (p_1 + L_2) - \frac{3}{8} \sin(\Pi)^2 \\
 & \sqrt{1 - \frac{(p_2 + L_3)^2}{(p_1 + L_2)^2}} \left( 1 + \frac{p_2 + L_3}{p_1 + L_2} \right) L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{(p_1 + L_2)^2}} \\
 & \cos(2 h - 2 q_2 - 2 l_3 - q_1 - l_2) / (p_1 + L_2) + \frac{3}{8} \sin(\Pi)^2 \sqrt{1 - \frac{(p_2 + L_3)^2}{(p_1 + L_2)^2}} \\
 & \left( 1 - \frac{p_2 + L_3}{p_1 + L_2} \right) L I \sqrt{1 - \frac{L I^2}{(p_1 + L_2)^2}} \cos(2 h - 2 q_2 - 2 l_3 + q_1 + l_2) / (p_1 + L_2) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{16} \sin(2H) \sqrt{1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}} \left(1 + \frac{p2 + L3}{p1 + L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}\right) \\
& \cos(h - q2 - l3 - 2q1 - 2l2) - \frac{3}{16} \sin(2H) \sqrt{1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}} \left(1 - \frac{p2 + L3}{p1 + L2}\right) \\
& \left(1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}\right) \cos(h - q2 - l3 + 2q1 + 2l2) \\
& - \frac{3}{32} \sin(H)^2 \left(1 + \frac{p2 + L3}{p1 + L2}\right)^2 \left(1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}\right) \cos(2h - 2q2 - 2l3 - 2q1 - 2l2) \\
& - \frac{3}{32} \sin(H)^2 \left(1 - \frac{p2 + L3}{p1 + L2}\right)^2 \left(1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}\right) \cos(2h - 2q2 - 2l3 + 2q1 + 2l2) \\
& + \left(\frac{3L1^2}{2(p1 + L2)^2} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{8}\right. \\
& \left. \sin(H)^2 \left(1 - \frac{3(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}\right) \left(\cos(2l + 2g) + e\left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g)\right)\right)\right) \\
& - \frac{3}{4} \sin(H) (1 - T) (p2 + L3) \sqrt{1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}} \left(\cos(2l + 2g - h + q2 + l3)\right. \\
& \left. + e\left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + q2 + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + q2 + l3)\right)\right) (p1 + L2) + \frac{3}{4} \\
& \sin(H) (1 + T) (p2 + L3) \sqrt{1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}} \left(\cos(2l + 2g + h - q2 - l3)\right. \\
& \left. + e\left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - q2 - l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - q2 - l3)\right)\right) (p1 + L2) - \frac{3}{16} \\
& (1 - T)^2 \left(1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}\right) \left(\cos(2l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3)\right. \\
& \left. + e\left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3)\right)\right) - \frac{3}{16} \\
& (1 + T)^2 \left(1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}\right) \left(\cos(2l + 2g + 2h - 2q2 - 2l3)\right. \\
& \left. + e\left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2q2 - 2l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2q2 - 2l3)\right)\right) + \frac{9}{8} \\
& \sin(H)^2 (p2 + L3) \sqrt{1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}} L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}} \\
& \left(\cos(2l + 2g - q1 - l2) + e\left(\frac{1}{2} \cos(l + 2g - q2 - l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - q2 - l3)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& / (p1 + L2)^2 + \frac{9}{8} \sin(II)^2 (p2 + L3) \sqrt{1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}} L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}} \\
& \left( \cos(2l + 2g + q1 + l2) + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + q2 + l3) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + q2 + l3) \right) \right) \\
& / (p1 + L2)^2 - \frac{3}{8} \sin(II) (1 + T) \left( 1 - \frac{p2 + L3}{p1 + L2} \right) \left( 1 + \frac{2(p2 + L3)}{p1 + L2} \right) L1 \\
& \sqrt{1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}} \left( \cos(2l + 2g + h - q2 - l3 + q1 + l2) + \right. \\
& \left. e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - q2 - l3 + q1 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - q2 - l3 + q1 + l2) \right) \right) \\
& / (p1 + L2) - \frac{3}{8} \sin(II) (1 + T) \left( 1 + \frac{p2 + L3}{p1 + L2} \right) \left( 1 - \frac{2(p2 + L3)}{p1 + L2} \right) L1 \\
& \sqrt{1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}} \left( \cos(2l + 2g + h - q2 - l3 - q1 - l2) + \right. \\
& \left. e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + h - q2 - l3 - q1 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + h - q2 - l3 - q1 - l2) \right) \right) \\
& / (p1 + L2) + \frac{3}{8} \sin(II) (1 - T) \left( 1 + \frac{p2 + L3}{p1 + L2} \right) \left( 1 - \frac{2(p2 + L3)}{p1 + L2} \right) L1 \\
& \sqrt{1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}} \left( \cos(2l + 2g - h + q2 + l3 + q1 + l2) + \right. \\
& \left. e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + q2 + l3 + q1 + l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + q2 + l3 + q1 + l2) \right) \right) \\
& / (p1 + L2) + \frac{3}{8} \sin(II) (1 - T) \left( 1 - \frac{p2 + L3}{p1 + L2} \right) \left( 1 + \frac{2(p2 + L3)}{p1 + L2} \right) L1 \\
& \sqrt{1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}} \left( \cos(2l + 2g - h + q2 + l3 - q1 - l2) + \right. \\
& \left. e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - h + q2 + l3 - q1 - l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - h + q2 + l3 - q1 - l2) \right) \right) \\
& / (p1 + L2) + \frac{3}{16} (1 + T)^2 \sqrt{1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}} \left( 1 - \frac{p2 + L3}{p1 + L2} \right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l + 2g + 2h - 2q2 - 2l3 + q1 + l2) + e \left( \right. \right. \\
& \left. \left. -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2q2 - 2l3 + q1 + l2) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2q2 - 2l3 + q1 + l2) \right) \right) (p1 + L2) - \frac{3}{16} (1 + T)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}} \left(1 + \frac{p2 + L3}{p1 + L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l + 2g + 2h - 2q2 - 2l3 - q1 - l2) + e \left( \right. \right. \\
& \left. \left. -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2h - 2q2 - 2l3 - q1 - l2) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2h - 2q2 - 2l3 - q1 - l2) \right) \right) (p1 + L2) - \frac{3}{16} (1 - T)^2 \\
& \sqrt{1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}} \left(1 + \frac{p2 + L3}{p1 + L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3 + q1 + l2) + e \left( \right. \right. \\
& \left. \left. -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3 + q1 + l2) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3 + q1 + l2) \right) \right) (p1 + L2) + \frac{3}{16} (1 - T)^2 \\
& \sqrt{1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}} \left(1 - \frac{p2 + L3}{p1 + L2}\right) L1 \sqrt{1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}} \left( \right. \\
& \left. \cos(2l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3 - q1 - l2) + e \left( \right. \right. \\
& \left. \left. -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3 - q1 - l2) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3 - q1 - l2) \right) \right) (p1 + L2) - \frac{9}{32} \sin(II)^2 \\
& \left(1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}\right) \left( \cos(2l + 2g - 2q1 - 2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2q1 - 2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2q1 - 2l2) \right) \right) - \frac{9}{32} \sin(II)^2 \\
& \left(1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}\right) \left( \cos(2l + 2g + 2q1 + 2l2) \right. \\
& \left. + e \left( -\frac{1}{2} \cos(l + 2g + 2q1 + 2l2) + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g + 2q1 + 2l2) \right) \right) + \frac{3}{16} \sin(II) \\
& (1 + T) \sqrt{1 - \frac{(p2 + L3)^2}{(p1 + L2)^2}} \left(1 - \frac{p2 + L3}{p1 + L2}\right) \left(1 - \frac{L1^2}{(p1 + L2)^2}\right) \left( \right. \\
& \left. \cos(2l + 2g + h - q2 - l3 + 2q1 + 2l2) + e \left( \right. \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-q_2-l_3+2q_1+2l_2) \\
& +\frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-q_2-l_3+2q_1+2l_2) \Big) - \frac{3}{16} \sin(II)(1+T) \\
& \sqrt{1-\frac{(p_2+L_3)^2}{(p_1+L_2)^2}} \left(1+\frac{p_2+L_3}{p_1+L_2}\right) \left(1-\frac{L_1^2}{(p_1+L_2)^2}\right) \Big) \Big( \\
& \cos(2l+2g+h-q_2-l_3-2q_1-2l_2) + e \Big( \\
& -\frac{1}{2} \cos(l+2g+h-q_2-l_3-2q_1-2l_2) \\
& +\frac{7}{2} \cos(3l+2g+h-q_2-l_3-2q_1-2l_2) \Big) \Big) + \frac{3}{16} \sin(II)(1-T) \\
& \sqrt{1-\frac{(p_2+L_3)^2}{(p_1+L_2)^2}} \left(1+\frac{p_2+L_3}{p_1+L_2}\right) \left(1-\frac{L_1^2}{(p_1+L_2)^2}\right) \Big) \Big( \\
& \cos(2l+2g-h+q_2+l_3+2q_1+2l_2) + e \Big( \\
& -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+q_2+l_3+2q_1+2l_2) \\
& +\frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+q_2+l_3+2q_1+2l_2) \Big) \Big) - \frac{3}{16} \sin(II)(1-T) \\
& \sqrt{1-\frac{(p_2+L_3)^2}{(p_1+L_2)^2}} \left(1-\frac{p_2+L_3}{p_1+L_2}\right) \left(1-\frac{L_1^2}{(p_1+L_2)^2}\right) \Big) \Big( \\
& \cos(2l+2g-h+q_2+l_3-2q_1-2l_2) + e \Big( \\
& -\frac{1}{2} \cos(l+2g-h+q_2+l_3-2q_1-2l_2) \\
& +\frac{7}{2} \cos(3l+2g-h+q_2+l_3-2q_1-2l_2) \Big) \Big) - \frac{3}{64} (1+T)^2 \left(1-\frac{p_2+L_3}{p_1+L_2}\right)^2 \\
& \left(1-\frac{L_1^2}{(p_1+L_2)^2}\right) \Big) \Big( \cos(2l+2g+2h-2q_2-2l_3+2q_1+2l_2) + e \Big( \\
& -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2q_2-2l_3+2q_1+2l_2) \\
& +\frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2q_2-2l_3+2q_1+2l_2) \Big) \Big) - \frac{3}{64} (1+T)^2 \left(1+\frac{p_2+L_3}{p_1+L_2}\right)^2 \\
& \left(1-\frac{L_1^2}{(p_1+L_2)^2}\right) \Big) \Big( \cos(2l+2g+2h-2q_2-2l_3-2q_1-2l_2) + e \Big( \\
& -\frac{1}{2} \cos(l+2g+2h-2q_2-2l_3-2q_1-2l_2) \\
& +\frac{7}{2} \cos(3l+2g+2h-2q_2-2l_3-2q_1-2l_2) \Big) \Big) - \frac{3}{64} (1-T)^2 \left(1+\frac{p_2+L_3}{p_1+L_2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( 1 - \frac{LI^2}{(pI + L2)^2} \right) \left( \cos(2l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3 + 2q1 + 2l2) + e \left( \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3 + 2q1 + 2l2) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3 + 2q1 + 2l2) \right) \right) - \frac{3}{64} (1 - T)^2 \left( 1 - \frac{p2 + L3}{p1 + L2} \right)^2 \\
& \left( 1 - \frac{LI^2}{(pI + L2)^2} \right) \left( \cos(2l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3 - 2q1 - 2l2) + e \left( \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \cos(l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3 - 2q1 - 2l2) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{7}{2} \cos(3l + 2g - 2h + 2q2 + 2l3 - 2q1 - 2l2) \right) \right) \Bigg) / L^6
\end{aligned}$$