



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-14199-TDI/1100

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA INTERMITÊNCIA ALFVÊNICA NA
HELIOFERA NA PRESENÇA DE RUÍDO**

Wanderson Muniz Santana

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Geofísica Espacial, orientada
pelos Drs. Abraham Chian Long Chian e Erico Luiz Rempel, aprovada no dia
14 de fevereiro de 2006.

550.8.013

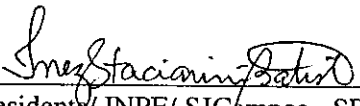
Santana, W. M.

Simulação numérica da intermitência Alfvênica na
heliosfera na presença de ruído / Wanderson Muniz Santana.
- São José dos Campos: INPE, 2006.
144p. ; (INPE-14199-TDI/1100).


1. Intermitência. 2. Ondas Alfvén. 3. Ruído. 4. Heliosfera.
5. Simulação numérica. I. Título.

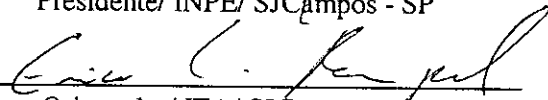
Aprovado pela Banca Examinadora em
cumprimento ao requisito exigido para
a obtenção do Título de **Mestre em**
Geofísica Espacial.

Dra Inez Staciarini Batista



Presidente/ INPE/ SJCampos - SP


Dr. Erico Rempel



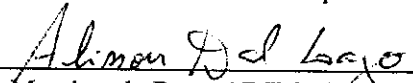
Orientador/ ITA/ SJCampos - SP

Dr. Abraham Chiang Long-Chian



Orientador/ INPE/ SJCampos - SP

Dr. Alisson Dal Lago



Membro da Banca/ INPE/ SJCampos - SP

Dr. Gilberto Corso



Convidado/ UFRN/ Natal - RN

Aluno: Wanderson Muniz Santana

São José dos Campos, 14 de fevereiro de 2006.

*“Jamais se desespere em meio às mais sombrias aflições de sua vida,
pois das nuvens mais negras cai água límpida e fecunda”.*

PROVÉRBIO CHINÊS

*A Alanna, Ísis e Ítalo. Por tudo que representamos
juntos.*

AGRADECIMENTOS

Expresso minha profunda gratidão a todas as pessoas que estiveram ao meu lado, incentivando e amparando a realização deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo auxílio financeiro de dois anos de bolsa de Mestrado. Também gostaria de agradecer à Fundação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro para as viagens a congressos nacionais.

Aos meus orientadores Abraham Chian-Long Chian e Erico Luiz Rempel, pelo inestimável incentivo, apoio e orientação.

A meus pais, que primeiro fizeram de mim seu filho; depois deixaram que fosse seu amigo.

Aos amigos Rodrigo Miranda Cerda, Fernando Simões, Alan Prestes e Widinei Fernandes pelos votos de confiança e pelas palavras confortadoras que me deram quando esperança me faltou.

A minha esposa Alanna, a quem amo profundamente.

A todos os meus colegas da Divisão de Geofísica Espacial e Aeronomia.

RESUMO

O estudo da intermitência e caos é necessário para o entendimento dos processos físicos fundamentais na relação Sol-Terra, onde a presença de múltiplos estados estacionários pode gerar uma dinâmica complexa se houver fontes estocásticas. O objetivo deste trabalho é aplicar a teoria de caos para investigar a natureza intermitente do ambiente Heliosférico na presença de ruído, baseado em simulações numéricas de um modelo não-linear de ondas de Alfvén. Assim, destacamos evidências observacionais do regime Alfvênico na Heliosfera. A seguir é feita uma revisão dos conceitos básicos da Teoria de Caos. Apresentamos uma revisão do modelo da equação de Schrödinger não-linear derivativa (DNLS) e suas soluções estacionárias, e posteriormente, a partir da introdução de ruído no modelo, analisamos o comportamento transiente, o fenômeno de intermitência e descontinuidades nas soluções numéricas. Finalmente, ressaltamos a relevância desse tipo de estudo na pesquisa da física de plasma.

NUMERICAL SIMULATION OF ALFVÉNIC INTERMITTENCY IN HELIOSPHERE IN THE PRESENCE OF NOISE

ABSTRACT

The study of intermittency and chaos is necessary for our understanding of the complex physical processes governing the Sun-Earth relation, where the presence of multiple steady states can lead to complex dynamics if there is a stochastic source. The objective of this work is to apply the chaos theory to investigate the intermittent nature of the heliospheric environment in the presence of noise, based on numerical simulation of a nonlinear model of Alfvén waves. Thus, we present the observational evidence of Alfvénic regime in the heliosphere. Next, we carried out an overview of the basic concepts of the chaos theory. We present an overview of the derivative nonlinear Schrödinger (DNLS) equation model and its spatially stationary solutions, and then, by introducing noise in the model, we analyze the transient behavior, the intermittency phenomenon and discontinuities in the numeric solutions. Finally, we discuss the relevance of this study in the plasmas physics research.

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	23
CAPÍTULO 2 - DADOS OBSERVACIONAIS DO VENTO SOLAR	25
2.1 - Origem da Turbulência Alfvênica do Vento Solar	25
2.2 - Alfvénicidade e Caos no Vento Solar	31
2.3 - Eventos de Intermittência no Vento Solar	35
CAPÍTULO 3 - SISTEMAS DINÂMICOS: CONCEITOS BÁSICOS	39
3.1 - Introdução	39
3.2 - Bifurcações	40
3.3 - Expoentes de Lyapunov	43
3.4 - Intermittência	46
3.4.1 - Intermittência Pomeau-Manneville	46
3.4.2 - Intermittência Induzida por Crise	48
3.4.3 - Intermittência Extrínseca	50
3.5 - Variedades Invariantes em Sistemas Contínuos no Tempo	51
3.6 - Cruzamentos Homoclínicos e Heteroclínicos	53
3.7 - Selas Caóticas	54
3.7.1 - Diferença entre Atrator Caótico e Sela Caótica	54
3.8 - O Ruído	56
CAPÍTULO 4 - NATUREZA CAÓTICA DO AMBIENTE SOL- TERRA: INTERMITÊNCIA ALFVÊNICA IN- TERPLANETÁRIA	57
4.1 - Introdução	57
4.2 - Modelo Não-Linear das Ondas de Alfvén	59
4.3 - Caos de Alfvén	61
4.4 - Intermittência de Alfvén Tipo-I	68
4.5 - Intermittência de Alfvén Induzida por Crise	71
4.6 - Discussão	78

CAPÍTULO 5 - COMPLEXIDADE ALFVÊNICA	83
5.1 - Introdução	83
5.2 - Multi-Estabilidade na Equação DNLS	84
5.3 - Transientes Induzidos pelo Ruído e Destruição dos Atratores	87
5.4 - Intermitência Induzida pelo Ruído e Expansão do Atrator	93
5.5 - Discussão	96
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÃO	99
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	103
APÊNDICE A - ONDAS DE ALFVÉN	117
A.1 - Introdução	117
A.2 - Oscilações e Ondas	118
A.2.1 - Plasma Frio	119
A.2.2 - Plasma Morno	119
A.2.3 - Plasma Quente	120
A.3 - Existência de Ondas MHD - Ondas de Alfvén	120
APÊNDICE B - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DNLS	125

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Esquema da trajetória do satélite Ulysses.	26
2.2 Modelo de convergência de fluxo para pontos de brilho de raio-X.	28
2.3 Visão do tapete magnético a partir dos dados do MDI.	29
2.4 Conjunto de imagens obtidas pelo satélite TRACE em 28 de Outubro de 2003 para uma explosão solar, no canal 195 Å às 12:31 UT.	30
2.5 Diagrama da interação entre feixes rápidos (B) com feixes lentos (A) e a região de compressão. O choque frontal (FS), interface (IF) e choque reverso (RS) são indicados. As ondas de Alfvén provenientes dos feixes rápidos são amplificadas na região RS-IF.	32
2.6 Figura do trabalho clássico de Belcher e Davis (1971), mostrando dados do plasma e do campo magnético para um período de vinte e quatro horas, ressaltando a presença de onda de Alfvén. Observa-se a correlação da velocidade com o campo magnético, componente a componente.	33
2.7 As linhas verticais (tracejadas) indicam a região de compressão observada a latitude -36° e a 4.5 UA do Sol. A região escura entre a interface IF e o choque reverso mostra oscilações de grande amplitude do campo magnético interplanetário (TSURUTANI <i>et al.</i> , 1995b).	34
2.8 Espectro de potência ilustrando duplicação de período.	35
2.9 PDFs das flutuações para a velocidade (painel da direita) e campo magnético (painel da esquerda) em diferentes escalas τ para dados do ventos solar.	36
2.10 Tempo de evolução das flutuações de velocidade $\delta V_\tau(t)$ para quatro diferentes escalas dos dados do vento solar. A escala aumenta do topo para a base.	37

3.1	A origem é (a) um atrator, (b) um repulsor, e (c) uma sela. As figuras também mostram um disco N da vizinhança dos pontos fixos, e o sistema iterado.	42
3.2	Evolução de uma hiper-esfera com eixo ε_0 em uma hiper-elipse com eixos $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ e $\varepsilon_3(t)$	44
3.3	Ilustração de intermitência intrínseca de Pomeau-Manneville (a) do tipo-1 e (b) tipo-3.	47
3.4	Ilustração do teorema da variedade estável. No ponto fixo \mathbf{p} a variedade estável W^s é tangente ao autovetor \mathbf{v}^s e a variedade instável W^u é tangente ao autovetor \mathbf{v}^u de $\mathbf{Df}(\mathbf{p})$	52
3.5	(a) Órbita homoclínica sobre os cruzamentos entre as variedades estável $W^s(B)$ e instável $W^u(B)$ de um ponto fixo B ; (b) Cruzamento heteroclí-nico entre variedades estável e instável de dois pontos de sela diferentes (A e B).	53
3.6	Representação de uma sela caótica como a intersecção de suas variedades estável W^s e instável W^u	54
3.7	Representação esquemática de uma região contendo uma sela caótica (a) e de um atrator caótico (b) para um mapa de duas dimensões. Em ambas as figuras a direção horizontal é a de contração e a vertical é a direção de expansão. A sela caótica em (a) é a intersecção entre um conjunto fractal de linhas horizontais (variedade estável) com um conjunto fractal de linhas verticais (variedade instável), algumas das quais são mostradas na figura. O atrator em (b) é um conjunto fractal de linhas verticais. As linhas horizontais que contêm pontos que convergem para pontos sobre o atrator cobrem toda a região mostrada em (b).	55
3.8	Função de densidade de probabilidade da distribuição Gaussiana para quatro diferentes conjuntos de parâmetros.	56
4.1	Mapa de tempo $T = 2\pi/\Omega$ gerado pela interseção da órbita com um conjunto de planos transversos ao fluxo.	64

- 4.2 Diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov máximo: visão global. (a) Diagrama de bifurcação, b_z como função de ν , (b) expoente de Lyapunov máximo λ_{max} como função de ν . Valores positivos de λ_{max} indicam um comportamento caótico e λ_{max} negativo indica ordem. As setas indicam uma janela periódica de período-2. Adotamos $a = 0.3$, $\Omega = -1$, $\lambda = 1/4$ e $\mu = 1/2$ 65
- 4.3 Diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov máximo: janela periódica de período-2. (a) Diagrama de bifurcação, b_z como função de ν , superposto pela sela caótica envolvente (cinza); (b) mesmo que (a), mostrando a conversão depois da crise do atrator caótico de banda (preto) na sela caótica de banda após a crise (cinza); (c) expoente de Lyapunov máximo, λ_{max} em função de ν . IC denota a crise interior, SNB denota a bifurcação sela-nó, SCS denota a sela caótica envolvente e BCS denota a sela caótica de banda 66
- 4.4 Órbitas periódicas instáveis no espaço de fase e plano de Poincaré para $\nu = 0.0616$. (a) Órbita periódica instável mediadora de período-2 gerada via uma bifurcação sela-nó em $\nu = 0.07738$, (b) uma órbita periódica instável acopladora de período-11 gerada via explosão em $\nu = 0.0616$, (c) uma órbita periódica instável de período-13 gerada via explosão em $\nu = 0.0621$. As cruces denotam os pontos de Poincaré das órbitas periódicas instáveis. 67
- 4.5 Intermitência de Alfvén tipo-I. (a) e (d): Série temporal de b_z em função de τ para $\nu = 0.07738$ e $\nu = 0.07739$, respectivamente; (b) e (e): mesmas séries temporais que (a) e (d), mas com b_z em função dos pontos de Poincaré; (c) e (f): espectros de potência de (a) e (d), respectivamente. 69
- 4.6 Atrator caótico e sela caótica na intermitência de Alfvén tipo-I para $\nu = 0.07739$. (a) Mapa de Poincaré do atrator caótico (CA); (b) sela caótica envolvente (SCS, em cinza) do atrator caótico de (a); (c) e (d): ampliações das duas regiões retangulares de (b). As cruces denotam o local dos pontos de Poincaré da órbita periódica instável mediadora de período-2 criada via uma bifurcação sela-nó em $\nu_{SNB} = 0.07738$ 70

4.7	Tempo de intermitência característico para a intermitência de Alfvén tipo-I. $\log_{10} \tau$ como função de $\log_{10}(\nu - \nu_{SNB})$	71
4.8	Crise interior de Alfvén em $\nu = 0.06212$. (a) Mapa de Poincaré do atrator caótico de banda (CA, em preto) e sela caótica envolvente (SCS, em cinza); (b) e (c): ampliações das duas regiões retangulares de (a). As cruces denotam os pontos de Poincaré das órbitas periódicas instáveis mediadoras de período-2 e SM (linha fina) denota sua variedade estável.	73
4.9	Intermitência de Alfvén induzida pela crise. (a) e (d): Séries temporais b_z em função de τ para $\nu = 0.06212$ e $\nu = 0.0616$, respectivamente; (b) e (e): mesmas séries temporais que em (a) e (d), com b_z em função dos pontos de Poincaré; (c) e (f) mostram os respectivos espectros de potência de (a) e (d).	74
4.10	Atrator caótico e sela caótica na intermitência de Alfvén induzida pela crise para $\nu = 0.0616$. (a) Mapa de Poincaré do atrator caótico (CA); (b) sela caótica envolvente (SCS, em cinza) e a sela caótica de banda (BCS, em preto) embebendo o atrator caótico de (a); (c) e (d): ampliações das duas regiões retangulares de (b). As cruces denotam os pontos de Poincaré das órbitas periódicas instáveis mediadoras de período-2 e SM (linha fina) denota sua variedade estável.	75
4.11	Órbita periódica instável acopladora para a intermitência de Alfvén induzida pela crise em $\nu = 0.0616$. (a) Uma órbita periódica instável acopladora de período-11 (cruces) criada via explosão em $\nu = 0.0616$, (b) e (c): ampliações das duas regiões retangulares de (a). A sela caótica envolvente (SCS) está em cinza, a sela caótica de banda em preto e SM (linha fina) denota a variedade estável da órbita periódica instável mediadora de período-2.	76

4.12	Órbita periódica instável acopladora para a intermitência de Alfvén induzida pela crise em $\nu = 0.0616$. (a) Uma órbita periódica instável acopladora de período-13 criada via explosão em $\nu = 0.0621$, (b) e (c): ampliações das duas regiões retangulares de (a). A sela caótica envolvente (SCS) está em cinza, a sela caótica de banda em preto e SM (linha fina) denota a variedade estável da órbita periódica instável mediadora de período-2.	77
4.13	Tempo de intermitência característico da intermitência de Alfvén induzida pela crise. $\log_{10} \tau$ em função de $\log_{10}(\nu_{IC} - \nu)$	78
5.1	(a) Diagrama de Bifurcação, $b_z \times \nu$, para as Equações (4.6)-(4.8) mostrando a evolução de quatro atratores distintos (A_1 , A_2 , A_3 e A_4); (b) Ampliação de uma porção de (a) mostrando o atrator A_3 . BC denota a crise de fronteira e as linhas tracejadas representam as órbitas periódicas instáveis responsáveis pela crise.	85
5.2	Atratores periódicos A_1 (círculo), A_2 (triângulos), e A_4 (quadrados) e suas respectivas bacias de atração. Em branco temos a bacia do atrator A_1 , em azul a bacia do atrator A_2 e em verde a bacia do atrator A_4 , em $\nu = 0.01746$	86
5.3	Sela caótica na fronteira entre as bacias de atração de A_1 e A_4 , em $\nu = 0.01746$	87
5.4	(a) Diagrama de bifurcação do atrator A_4 sem ruído . (b) Diagrama de bifurcação de A_4 com ruído ($\sigma = 0.0025$).	88
5.5	Série estroboscópica de b_z para o atrator A_4 de período-6 em $\nu = 0.01746$; (a) sem ruído; (b) com ruído gaussiano usando média zero e desvio padrão $\sigma = 0.0032$; (c) e (d) mostram os correspondentes espectros de potência.	89
5.6	Bacias de atração e atrator A_4 em $\nu = 0.01746$ na presença de ruído ($\sigma = 0.0032$). O atrator A_4 , alargado devido a influência do ruído, ainda não ultrapassa os contornos de sua bacia.	91

5.7	(a) Transiente induzido pelo ruído para $\sigma = 0.017$ em $\nu = 0.01746$, mostrando o salto das soluções do atrator A_4 para o atrator A_2 , e em seguida para o atrator A_1 ; (b) Mapa de Poincaré das séries temporais mostradas em (a), em suas bacias de atração.	92
5.8	Transientes caóticos intrínsecos (a)-(c) e extrínsecos (d)-(f). (a) Série temporal caótica de A_2 no momento da crise de contorno em $\nu = 0.01514$; (b) transiente caótico logo após o ponto da crise de contorno, em $\nu = 0.01513$; (c) redução do tempo de transiente para um ponto da crise ainda mais distante, em $\nu = 0.01512$; (d) caos induzido pelo ruído para A_2 em $\nu = 0.01746$, com $\sigma = 0.00272$; (e) transiente caótico em $\nu = 0.01746$ devido ao aumento na intensidade do ruído, $\sigma = 0.00288$; (f) redução do tempo transiente devido a um ruído ainda maior que o anterior, $\sigma = 0.00304$	93
5.9	(a) Intermitência induzida pelo ruído em $\nu = 0.01746$, com $\sigma = 0.064$. Os triângulos foram marcados sempre que as órbitas se aproximam da vizinhança do atrator A_2 , enquanto que os quadrados denotam a aproximação das órbitas à vizinhança do atrator A_4 . Os círculos representam pontos na vizinhança de A_1 ou da sela caótica envolvente. (b) Ampliação do intervalo indicado pela barra em (a).	95
5.10	Bacia de atração e pontos de Poincaré da trajetória ruidosa intermitente da Figura (5.9) em $\nu = 0.01746$. As trajetórias passam a maior parte do tempo na bacia do atrator A_1 , mas saltam intermitentemente entre as bacias dos atratores A_2 e A_4 , percorrendo a sela caótica no contorno da bacia. O nível de ruído é $\sigma = 0.064$	96
A.1	Relação entre as grandezas oscilantes, durante a propagação da onda de Alfvén. Note as linhas de campo magnético externo B distorcidas pelo plasma.	117

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A Heliosfera é um objeto de estudo fundamental para as ciências espaciais e astrofísicas. Não somente por ser o primeiro passo na compreensão do espaço vizinho, mas também pelo fato do espaço nas redondezas do Sol ser um rico laboratório, de onde se pode obter dados “in situ” para elaboração de teorias aplicáveis ao entendimento de processos astrofísicos para os quais a obtenção de dados é problemática.

A atividade solar (ejeção de massa coronal, explosões solares, fluxos de ventos rápidos, etc.) causa numerosos efeitos, tais como variabilidade climática, tempestades geomagnéticas, variações ionosféricas, modulação de raios cósmicos e outros, que estatisticamente também seguem as peridiocidades solares (C. *et al.*, 1993; GONZALEZ, 2004; KANE, 2003; RIGOZO *et al.*, 2002; VALDIVIA *et al.*, 2005).

Também, à medida que a utilização do espaço vai se tornando imprescindível à concessão dos sistemas de comunicações, defesa e monitoramento de recursos na Terra, a previsão do clima espacial se torna um requisito fundamental. É prioritário compreender os processos físicos básicos envolvidos na determinação do clima espacial, de maneira que se permita criar modelos e fazer previsões deste ambiente. Para isso, faz-se necessário entender as origens da variabilidade solar, e os efeitos da atividade solar sobre a coroa e o vento solar. Até o momento, ainda não existe um entendimento de todos os processos físicos presentes no clima espacial e como estes interagem entre si. Portanto, a conexão Sol-Terra é um sistema interativo, de vasta complexidade, onde causas e efeitos estão conectados por meio de uma série de processos ainda não tão bem entendidos e que são difíceis de descrever.

São fortes as indicações de que uma parte considerável de transferência de energia do Sol para o espaço, e em particular para as magnetosferas planetárias, ocorra através de eventos magnetohidrodinâmicos (MHDs), em particular ondas Alfvén. O estudo de fenômenos MHDs no meio interplanetário e na magnetosfera se mostra particularmente interessante, pois abre a possibilidade de se compreender processos até agora impossíveis de serem simulados em laboratório. Durante o mínimo solar, por exemplo, as ondas Alfvén interplanetárias seriam as causas dominantes da intermitência observada na reconexão magnética na magnetopausa.

Em astrofísica é comum a observação de sinais que apresentam uma dinâmica aparen-

temente irregular, ou semi-irregular. Existem também fontes de emissão de raios-X que geram sinais intermitentes. Tais características podem ser devidas não apenas a propriedades intrínsecas do sistema, como atratores caóticos, mas também à presença de ruído, ou ainda à presença de caos e ruído (GEISEL, 1985).

Nós usamos o termo intermitência para descrevermos a dinâmica de um sistema que passa longos intervalos de tempo entre dois ou mais diferentes estados. Ela ocorre sempre que o comportamento de um sistema parece comutar entre dois comportamentos qualitativamente diferentes, mesmo que todos os parâmetros de controle permaneçam constantes e nenhum ruído esteja presente.

É comum que sistemas estudados na literatura não-linear possuam um pequeno número de estados assintóticos (atratores) no espaço de fase. Cada um desses estados do sistema são crucialmente dependentes das condições iniciais adotadas. Este comportamento, chamado de multi-estabilidade, pode ser ainda mais complexo se considerarmos a presença de ruído, que poderia possibilitar a transição entre esses estados, conforme a intensidade do ruído ultrapasse um determinado valor crítico. Neste trabalho, propomos a investigação de regimes intermitentes da Heliosfera, originados pela influência de ruído, utilizando modelos não-lineares.

A presente dissertação de Mestrado está organizada nos próximos Capítulos da seguinte forma: no Capítulo 2 serão apresentadas evidências do caráter Alfvênico, caótico e intermitente do vento solar, onde discutimos os fenômenos que acreditamos ser mais relevantes para o nosso trabalho. No terceiro Capítulo serão apresentados conceitos fundamentais sobre caos e complexidade. No Capítulo 4 o modelo estudado por Hada *et al.* (1990), Buti (1992), Chian *et al.* (2002a) e Rempel e Chian (2004) para a equação de Schrödinger não-linear derivativa (DNLS), com seu devido formalismo matemático e suas soluções numéricas é apresentado. No quinto Capítulo apresentamos os resultados obtidos da investigação do efeito do ruído na dinâmica das ondas de Alfvén não-lineares descritas pela equação DNLS. Finalmente, no sexto e último Capítulo desta dissertação, ressaltamos nossas observações finais.

CAPÍTULO 2

DADOS OBSERVACIONAIS DO VENTO SOLAR

Neste Capítulo tentaremos descrever o meio original em que a teoria Magnetohidrodinâmica (MHD) se desenvolveu. Desde sua descrição até sua interação com a magnetosfera, daremos aqui algumas características do vento solar e de seus constituintes principais. Existe uma conexão fundamental entre o Sol e o vento solar, e é notável o quanto foi difícil para os cientistas encontrá-la. Em parte, devido à dificuldade de se fazer medidas precisas, o que só foi possível graças ao desenvolvimento tecnológico alcançado nas últimas décadas, mas também em virtude das relações não serem tão óbvias.

2.1 Origem da Turbulência Alfvênica do Vento Solar

Em 1930, Sidney Chapman e Vicent Ferraro, desejando explicar as perturbações observadas nos dados dos magnetômetros terrestres após uma grande explosão solar, sugeriram a idéia de que uma nuvem neutra de plasma saindo do Sol poderia impactar o campo geomagnético, compactando o campo, o que esclareceria a fase inicial de uma tempestade geomagnética, onde a intensidade do campo aumenta levemente antes de dar início à tempestade (DAVID, 1989). No modelo de Chapman e Ferraro as nuvens de plasma seriam liberadas intermitentemente.

Sobre um estudo das caudas dos cometas em 1951, Bierman concluiu que nem todas essas caudas poderiam ser explicadas somente pela pressão da radiação. Haveria também uma pressão devido a um feixe de partículas emitidas continuamente pelo Sol (DAVID, 1989).

Estudos subseqüentes de Parker *et al.* (1979) mostraram que, em contraste com a atmosfera terrestre, a coroa solar não está em equilíbrio hidrostático, mas sim expandindo-se continuamente, com matéria saindo do Sol em direção ao espaço. Parker chamou isto de *vento solar*.

O vento solar proporciona um ambiente único e ideal para se estudar ondas, instabilidades e turbulências em plasmas. É também o único meio acessível no qual a turbulência MHD não-colisional pode ser medida diretamente. Isto representa um tópico de fundamental importância tanto para a física de plasma espacial quanto para a astrofísica de plasma.

Durante as últimas décadas, observações *in situ* na eclíptica e em altas latitudes Heliosféricas têm sido extremamente valiosas para derramar alguma luz sobre a intrincada natureza da turbulência do plasma espacial. Uma grande contribuição nesta área foi dada pelas missões espaciais Ulysses e Galileo. O objetivo principal da missão Ulysses era observar as atividades solares em altas latitudes. Ao longo de sua trajetória uma grande variedade de fenômenos, entre os quais ondas em plasmas espaciais, rádio explosões, variações de densidade eletrônica e descontinuidades foram observadas. A Figura 2.1 mostra o esquema da trajetória do satélite no sistema solar.

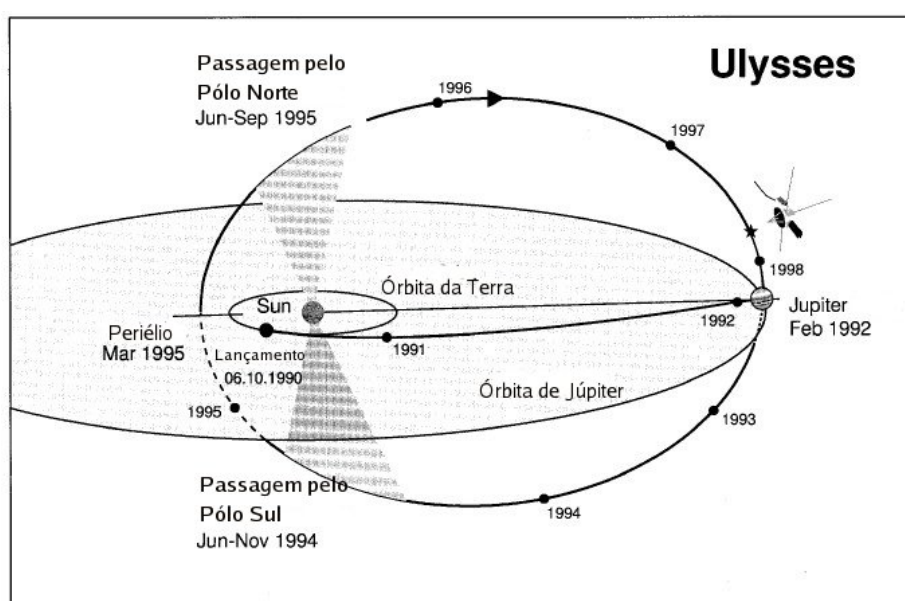


FIGURA 2.1 - Esquema da trajetória do satélite Ulysses.
 FONTE: Tsurutani e Ho (1999)

A importância do vento solar e das flutuações Alfvênicas na relação Sol-Terra e na física da magnetosfera não podem ser subestimadas pois estes são os principais meios através dos quais a atividade solar comunica-se com o ambiente terrestre, o que justifica seu contínuo monitoramento. Assim, é possível utilizar observações do vento solar para quantificar testes teóricos a fim de descrever o comportamento de fusão de plasmas laboratoriais, o que é útil para proporcionar informações quantitativas a respeito do (1) início, mecanismos de saturação não-linear, e níveis de ondas assintóticas de várias instabilidades em plasmas, (2) detalhes do possível equilíbrio das equações de Vlasov-Maxwell¹ não-lineares em um plasma colisional, e (3) taxas

¹A equação de Vlasov é uma equação diferencial parcial que descreve a evolução temporal da função de distribuição no espaço de fase e que incorpora diretamente os campos eletromagnéticos

de transporte de energia e momento geralmente dentro do ruído de plasmas não-colisionais. Tal informação é essencial para a realização de confinamento de plasmas de fusão em dispositivos de laboratórios.

As propriedades do plasma do vento solar mais importantes para a magnetosfera são as seguintes:

- a) o vento solar sopra todo o tempo, com velocidade geralmente em torno de 200-700 km/s . Essa diferença na velocidade é referente aos dois tipos de ventos que emanam do Sol: os feixes rápidos e os feixes lentos;
- b) sua energia é aproximadamente constante, e o fluxo tem direção radial a partir do Sol;
- c) consiste principalmente de elétrons e prótons, com pouca percentagem de partículas α e núcleos pesados;
- d) o vento possui rajadas com períodos que vão de minutos a horas;
- e) a densidade de partículas está num intervalo de 3 a 10 cm^{-3} , sendo seu valor típico 5 cm^{-3} . A energia do próton é de aproximadamente 1/2 KeV e do elétron de 1/4 eV .

Os buracos coronais presentes na coroa são as fontes de feixe de alta velocidade do vento solar. Mais importante e mais interessante para a física de plasma é o fato de que o buraco coronal parece ser o maior participante na criação da Heliosfera (PARKER *et al.*, 1979), isto é, na extensa origem do meio interestelar e no preenchimento do espaço interplanetário com o plasma quente de alta velocidade e campo magnético. Esta noção tem sido reforçada pelos modelos de campo magnético do Sol, que sugerem a presença de linhas de campo abertas no buraco coronal e linhas de campo fechadas nas demais regiões.

Em termos do aquecimento da coroa solar, os satélites Yohkoh (que já não está mais em funcionamento) e SOHO deram importantes indícios das estruturas presentes na

internos. Ela pode ser obtida da equação de Boltzmann com o termo $(\delta f_\alpha/\delta t)$ igual a zero, mas incluindo os campos internos no termo de força, tal que:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \left[\vec{F}_{ext} + q_\alpha (\vec{E}_i + \vec{v} \times \vec{B}_i) \right] \cdot \vec{\nabla} f_\alpha = 0$$

superfície do Sol e no vento solar. O Yokkoh descobriu, por exemplo, que quando campos de grande escala se fecham após erupções eles ficam caracterizados com estruturas de pontas. Por isso, observações da temperatura nas regiões ativas mostram que todos os “loops” aquecidos são ou pontas ou pares de estruturas aparentemente em interação (PRIEST, 1999).

Alguns modelos clássicos têm sido propostos para o aquecimento da coroa solar. Um deles são as ondas de Alfvén, que podem se dissipar no interior da Heliosfera. Entretanto, recentemente tem sido observadas tais ondas pelo SOHO e, nas variações de períodos de 30 a 1000 segundos, observa-se que embora elas estejam presentes na cromosfera e região de transição, pelo tempo que elas passam na coroa, elas têm que ser ou refletidas ou dissipadas (IRELAND *et al.*, 1998).

Um outro mecanismo para o aquecimento da coroa solar seria a reconexão magnética, onde os processos de aquecimento ocorreriam pelos pontos de brilho de raio-X. Os pontos de brilho de raio-X ocorrem sobre fragmentos magnéticos apontando em direções opostas causados pela emergência dos fluxos magnéticos ou pela convergência dos fragmentos magnéticos, gerando a reconexão na coroa superior (overlying). A idéia básica é que fluxos magnéticos emergem em uma célula super-granular, a qual então se move para a vizinhança, onde uma polaridade tende a se acumular, enquanto outra se reconecta com estruturas de polaridades opostas, formando um ponto de brilho, conforme exemplifica a Figura 2.2 (PRIEST, 1999).

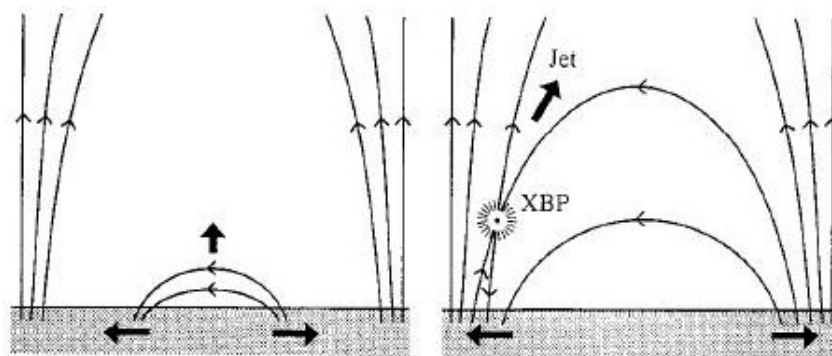


FIGURA 2.2 - Modelo de convergência de fluxo para pontos de brilho de raio-X.
FONTE: Adaptada de Priest (1999).

A coroa difusiva de grande escala, vista nas imagens do Yohkoh, consiste de grandes sistemas de “loops” magnéticos que dominam a coroa no período de máximo da atividade solar e estão presentes na superfície da região ativa e de buracos coronais, período em que a intensidade global de raio-X é uma ordem de magnitude maior (ACTON, 1996).

Indícios da estrutura da coroa solar também têm sido dados pelo SOHO, que mostrou a superfície do Sol calma coberta com um tapete magnético (*magnetic carpet*), consistindo de fragmentos magnéticos positivos e negativos, e que ficam ao longo dos contornos das células super-granuladas. Esses fragmentos continuamente emergem e atravessam para células vizinhas, onde elas ou se cancelam com os fluxos de polaridades opostas, ou fundem-se ou se fragmentam (PRIEST, 1999). A Figura (2.3) mostra resultados de um modelo dos campos magnéticos na superfície do Sol desenvolvido a partir de dados do Michelson Doppler Imager (MDI) a bordo do SOHO. Entre os pares de polaridades opostas, existem conexões do campo magnético, representado aqui pelas linhas em forma de ferradura, e que se estendem acima da superfície solar. Embora pequenas em relação ao Sol, essas linhas têm desde mil a dezenas de milhares de milhas de comprimento, carregando com elas energia hidromagnética.

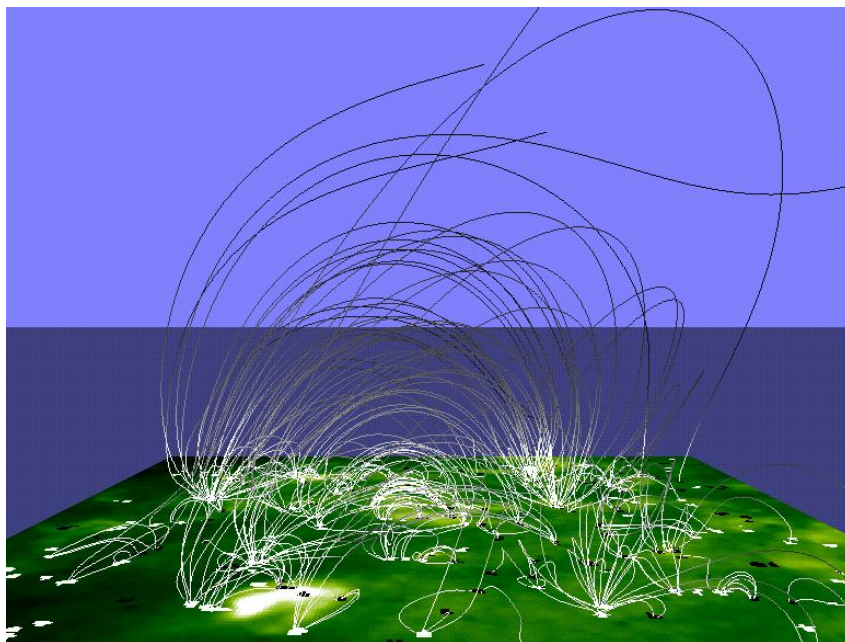


FIGURA 2.3 - Visão do tapete magnético a partir dos dados do MDI.
FONTE: Adaptada de Priest (1999).

Além das mencionadas até aqui, imagens feitas com o satélite TRACE (Transition Region and Coronal Explorer) têm contribuído com um diagnóstico do comportamento magnético na superfície solar. Por exemplo, no dia 28 de Outubro de 2003, o TRACE observou sua primeira mega-explosão solar. A Figura (2.4.a) mostra a imagem principal feita na última fase da explosão, em que um arco magnético colimado é visível em rápida expansão, com matéria saindo da região abaixo da superfície fotosférica. Os arcos incandescentes têm aproximadamente quatro vezes o tamanho da Terra.

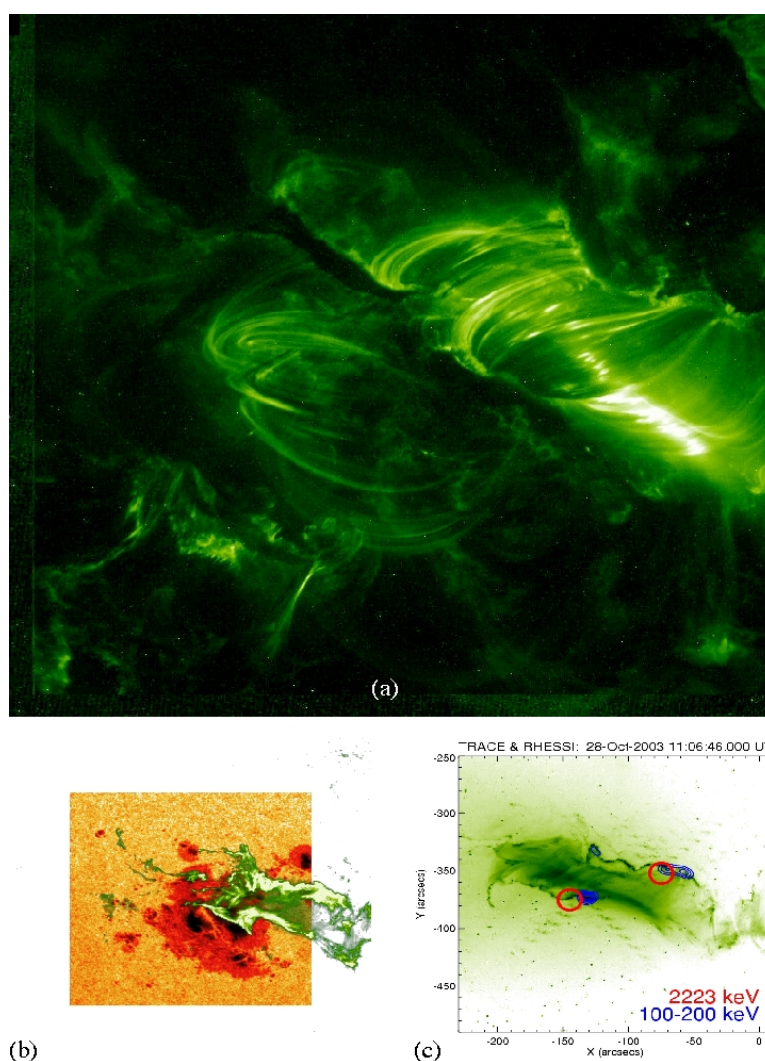


FIGURA 2.4 - Conjunto de imagens obtidas pelo satélite TRACE em 28 de Outubro de 2003 para uma explosão solar, no canal 195 Å às 12:31 UT.

FONTE: Imagens obtidas de <http://vestige.lmsal.com/TRACE/Public/>

A Figura (2.4.b) mostra uma imagem em falsa cor que compara a posição brilhante alargando-se (em verde, como visto na imagem original) com relação ao grupo de manchas solares. Os arcos das explosões (em verde) conectam as polaridades opostas do campo magnético. A Figura (2.4.c) mostra o posicionamento médio da emissão de neutrons capturados de 2.2 MeV (círculos vermelhos), mostrando que os íons energéticos vêm da região abaixo das explosões coronais, perdendo sua energia próximo à superfície solar. Também são mostrados os contornos energéticos entre 100 e 200 keV dos raios-X duros que têm origem no efeito bremsstrahlung, gerado pelo impacto dos elétrons na atmosfera mais baixa (contorno azul). Ambas as emissões estão relacionadas às posições mais brilhantes vistas nas explosões.

Em resumo, possíveis configurações de plasma em não-equilíbrio ainda não estão bem compreendidas. Entretanto, um entendimento detalhado dos vários possíveis equilíbrios das equações de Vlasov-Maxwell, além da análise de dados observacionais, são presentemente importantes tanto para as pesquisas de laboratórios quanto para a geofísica espacial.

2.2 Alfvenicidade e Caos no Vento Volar

As relações Sol-Terra são um assunto intrigante e atual, altamente afetadas pela dinâmica de plasma do vento solar (REMPEL; CHIAN, 2004) cujas perturbações interplanetárias (GONZALEZ, 2004) são causadas por eventos solares (RAULIN; PACINI, 2005).

A variabilidade solar pode ser fortemente percebida pelos distúrbios observados no espaço próximo à Terra, afetando uma variedade de sistemas tecnológicos (tanto espaciais quanto de superfície), assim como o próprio clima em nosso planeta. Entre os fenômenos solares, uma das mais importantes estruturas oriundas das ejeções de massa coronais (CMEs) durante o máximo solar observadas em 1 UA são as nuvens magnéticas interplanetárias, também chamadas de ICME. Durante o mínimo solar as ondas de Alfvén interplanetárias associadas com regiões de interação corrotacionais (CIRs) têm origem a partir da interação dos feixes de alta velocidade emanados dos buracos coronais com os feixes de baixa velocidade (ver Figura 2.5). Estas ondas são as causas dominantes da intermitência na reconexão magnética entre as componentes sul do campo magnético B_z das ondas de Alfvén e os campos magnéticos da magnetopausa, além das intermitentes atividades aurorais, e de injeção intermitente de energia da lâmina de plasma em outras regiões da corrente de

anel, assinaturas dos eventos HILDCAAs (do inglês High Intensity Long Duration Continuous AE Activity) (GONZALEZ *et al.*, 1999). Geralmente existe uma interface entre os feixes rápidos e lentos, isto é, uma mudança descontínua nos parâmetros do meio interplanetário, separando o plasma de diferentes origens e propriedades.

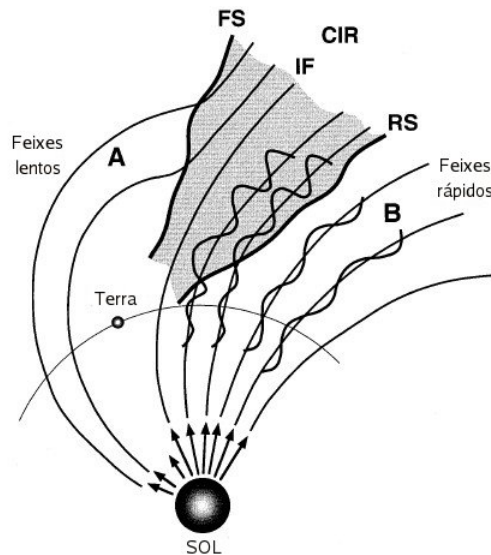


FIGURA 2.5 - Diagrama da interação entre feixes rápidos (B) com feixes lentos (A) e a região de compressão. O choque frontal (FS), interface (IF) e choque reverso (RS) são indicados. As ondas de Alfvén provenientes dos feixes rápidos são amplificadas na região RS-IF. FONTE: Adaptada de Tsurutani e Ho (1999).

Mesmo um exame superficial do vento solar revela a presença de quantidades contínuas de vários tipos de estruturas na expansão do fluxo do vento solar. Um dos testes mais usados de Alfvénicidade para flutuações magnéticas é a correlação entre \mathbf{v} e \mathbf{b} . Como claramente identificado por observações de espaçonaves, turbulência MHD no vento solar tem um forte caráter Alfvénico (BELCHER; DAVIS, 1971). Isto pode ser observado nos bons níveis de correlação entre as flutuações da velocidade e campo magnético especialmente encontrados dentro do vento solar rápido e mostrado na Figura (2.6). Neste caso, para um campo magnético apontando em direção ao Sol, a correlação positiva entre os campos magnético e de velocidade indicam propagação para fora. A Alfvénicidade do vento solar é devida ao fato de que os modos Alfvénicos têm um tempo de vida maior que outros modos MHD (BARNES, 1979).

Tsurutani *et al.* (1995b), usando dados fornecidos pela sonda Ulysses, estudou as flutuações de grande amplitude na região de compressão do meio interplanetário. A

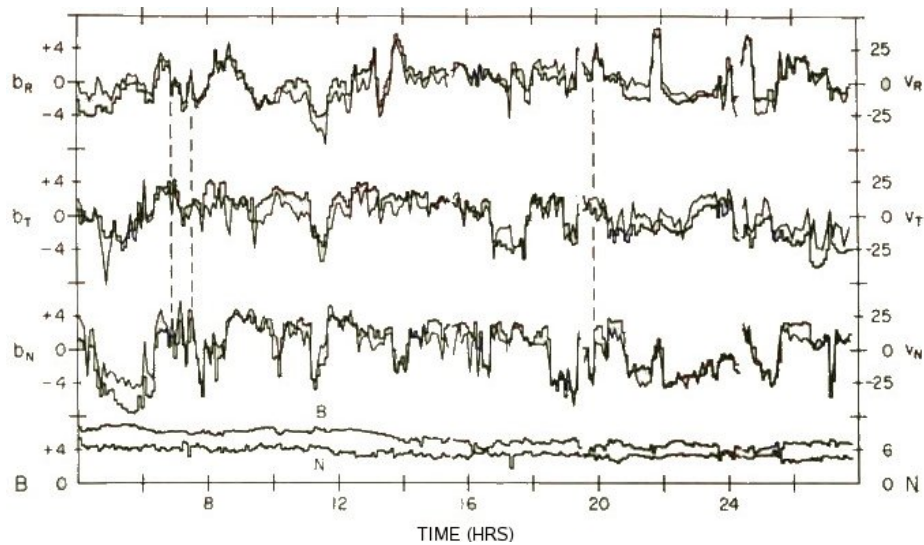


FIGURA 2.6 - Figura do trabalho clássico de Belcher e Davis (1971), mostrando dados do plasma e do campo magnético para um período de vinte e quatro horas, ressaltando a presença de onda de Alfvén. Observa-se a correlação da velocidade com o campo magnético, componente a componente.

Figura (2.7) mostra um evento para -36° de latitude heliográfica e 4.5 UA, apresentando a magnitude do campo magnético, a velocidade do vento solar, a densidade e a temperatura dos prótons. Esta figura mostra claramente que as maiores flutuações são encontradas na região escura, isto é, entre a interface (IF) e o final da região de compressão (RS). Note-se o alto nível de flutuações Alfvênicas depois de RS, isto é, quando estamos no vento rápido e fora da região de compressão. A Alfvénicidade na região IF e RS é maior, em contraste com a região da primeira descontinuidade até IF, onde estas flutuações quase não existem. A análise da variação das componentes do campo magnético entre a região de compressão (mais precisamente entre IF-RS) e fora da região de compressão indica que as flutuações magnéticas na região de compressão são ondas de Alfvén. Outros modos também são observados, provavelmente gerados pela instabilidade local do plasma, ou também por processos de interação entre ondas, por exemplo: interação destas ondas de Alfvén com ondas de choque e interação de três ondas. Assim, a presença destes modos é responsável por menor Alfvénicidade na região de compressão.

A primeira observação de evolução não-linear de ordem para caos na Heliosfera foi reportada por Burlaga (1988), que identificou a formação de grandes estruturas ordenadas a partir de pequenas estruturas irregulares, bem como, da duplicação de período nas regiões de interação corrotacionais na Heliosfera externa. Existe uma forte tendência de que regiões de interação magnética corrotacionais (CMIRs) quase-

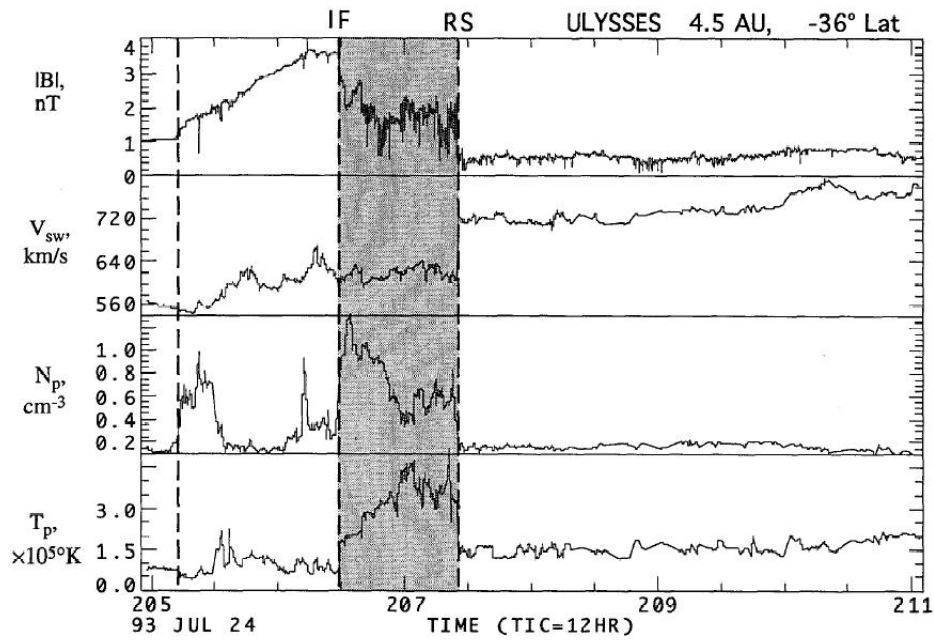


FIGURA 2.7 - As linhas verticais (tracejadas) indicam a região de compressão observada a latitude -36° e a 4.5 UA do Sol. A região escura entre a interface IF e o choque reverso mostra oscilações de grande amplitude do campo magnético interplanetário (TSURUTANI *et al.*, 1995b).

periódicas sejam formadas a partir de uma variedade de possíveis condições de feixes do vento solar a 1 UA. Essas CMIRs quase-periódicas representam um estado estável (um atrator) para o qual o sistema evolui a partir de diferentes condições iniciais. A formação de grandes estruturas ordenadas, originadas de estruturas irregulares menores, com o aumento da distância ao Sol é ilustrada na Figura (2.8). Dados simultâneos da ISEE-3 em 1 UA e da Voyager 1 mostrando o efeito da evolução radial foram analisados por Burlaga e Mish. Os espectros de potência mostram o surgimento de estruturas quase periódicas com curtos períodos, e portando, maior tamanho. Considere a evolução da densidade do espectro de potência das flutuações de intensidade do campo magnético. O painel da esquerda da Figura (2.8) mostra que em 1 UA haveria estruturas com períodos de 13 dias (equivalente a duas regiões de interação por rotação solar) e 6.5 dias (quatro estruturas por rotação solar). Entre 4.1 e 6.1 UA, os picos que dominam são de 26 e 13 dias, indicando a formação de sub-harmônicos das regiões de interação magnética (MIRs) com um período de 26 dias e a co-existência de regiões de interação com períodos de 13 dias.

O painel da direita na Figura (2.8) mostra um máximo da densidade do espectro de potência variando de 13 dias a uns poucos dias a 1 UA; os picos não são muito bem definidos, indicando talvez uma maior contribuição dos feixes sem co-rotação. As

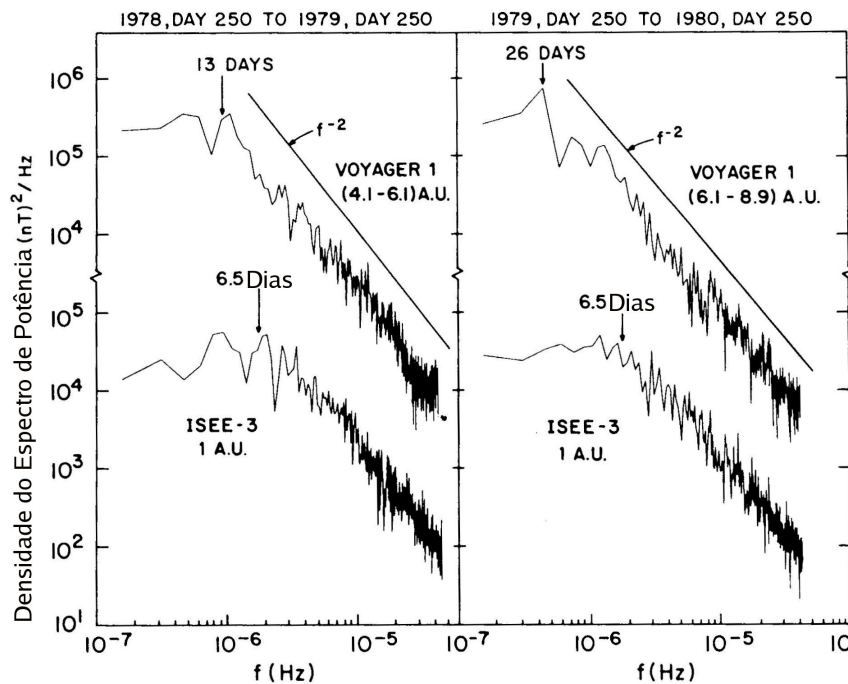


FIGURA 2.8 - Espectro de potência ilustrando duplicação de período.
 FONTE: Adaptada de Burlaga e Mish (1987).

observações entre 6.1 - 8.9 UA mostram o surgimento de um único pico dominante de 26 dias, representando a formação recorrente de MIRs quase-periódicas, com um período igual ao de rotação solar (BURLAGA; MISH, 1987).

As observações discutidas acima mostram a formação de algumas estruturas ordenadas de grande escala a partir de muitas estruturas irregulares de menor escala com o aumento da distância do Sol.

Em resumo, podemos concluir que as flutuações Alfvênicas são muito comuns em todo tipo de vento solar em períodos de mínima atividade solar, notavelmente nos ventos rápidos. Nestes, as flutuações de densidade são em geral baixas com relação à densidade média local. No entanto, a Alfvénicidade tende a diminuir com a distância Heliosférica e tende a aumentar com a velocidade do vento solar. Também a presença de regimes caóticos se destacam na análise dos dados.

2.3 Eventos de Intermitência no Vento Solar

Burlaga foi também o primeiro a reportar a presença de intermitência no vento solar, e seus artigos representam o ponto inicial de toda a literatura com relação a este tópico no contexto de plasma espacial. Burlaga (1991a) começou a investigar

flutuações na magnitude da velocidade a 8.5 UA utilizando dados do satélite Voyager 2.

Marsch e Liu (1993) investigaram o fenômeno de intermitência na Heliosfera interior usando observações da Helios 2. Fazendo uma análise similar àquela adotada por Burlaga, esses autores constataram a presença de uma lei de escala. Um estudo do comportamento radial da intermitência permitiu a esses autores sugerir que feixes de alta velocidade, que são caracterizados por turbulência Alfvênica, originalmente alto-similar (ou pouco intermitente) próximos ao Sol seriam mais multi-fractais (ou, mais intermitentes) conforme a distância Heliosférica aumentasse. Entretanto, um comportamento similar parece não ocorrer no vento solar lento.

Sorriso-Valvo *et al.* (1999) utilizando dados da Helios 2, fizeram um estudo da intermitência no vento solar turbulento através das funções de distribuição de probabilidade (PDFs). A partir da convolução da distribuição gaussiana típica P_G , com uma função $G_\tau(\sigma)$ que representa a influência da distribuição gaussiana caracterizada pela variância σ , eles mostraram que em larga escala a PDF é aproximadamente gaussiana, mas conforme a escala diminui, a curva da distribuição é levemente esticada, o que caracteriza o comportamento intermitente atribuído aos dados do vento solar. Gráficos das PDFs das flutuações de velocidade e campo magnético são mostrados na Figura (2.9). Estes resultados confirmaram a descoberta de Marsch e Tu

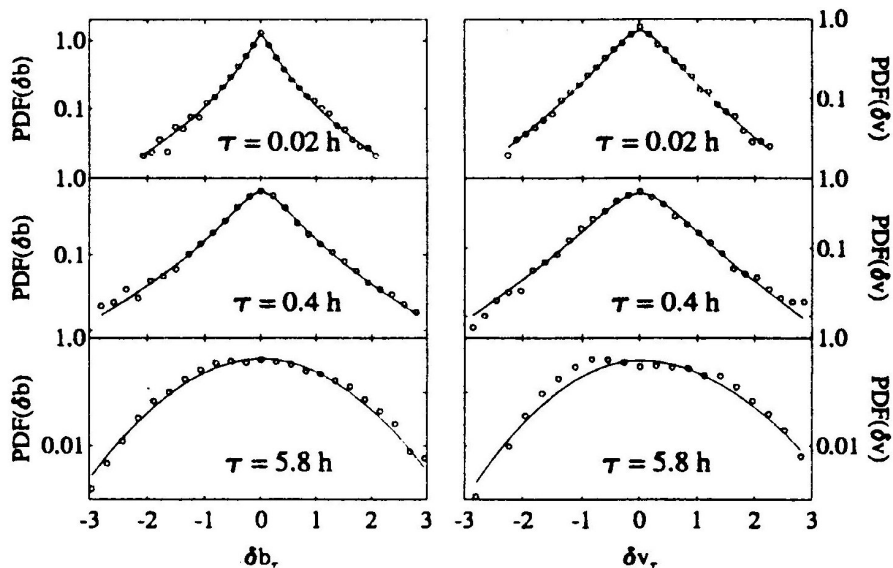


FIGURA 2.9 - PDFs das flutuações para a velocidade (painel da direita) e campo magnético (painel da esquerda) em diferentes escalas τ para dados do ventos solar.

FONTE: Carbone *et al.* (2003)

(1994) em que, tanto no vento rápido quanto no vento lento, o campo magnético é mais intermitente que a velocidade do fluido.

Na Figura (2.10) Carbone *et al.* (2003) reporta a evolução temporal da flutuação de velocidade δV_τ para quatro diferentes valores de τ dos dados do vento solar. Flutuações de grande escala parecem ser amortecidas. No entanto, conforme a escala diminui, as intensidades das flutuações ficam visíveis. De fato, essas flutuações de intensidade não estão distribuídas de forma contínua; ao contrário, elas são relativamente raras, e vemos que existem períodos onde a atividade turbulenta é muito maior. Este é precisamente o significado de intermitência - uma turbulência completamente desenvolvida. Partindo deste ponto, é natural se conjecturar que, mesmo que o fluido não possa ser globalmente alto-similar, alto-similaridade pode ser introduzida como uma propriedade local. Esta é a base do modelo multi-fractal de intermitência (CARBONE *et al.*, 2003).

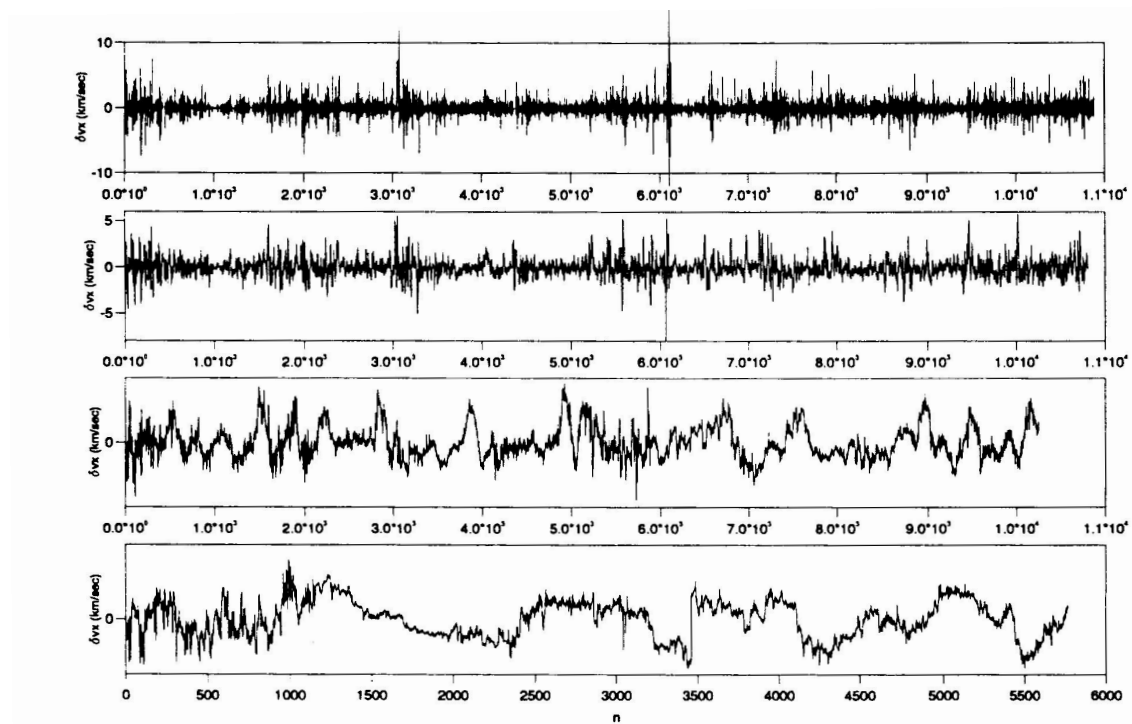


FIGURA 2.10 - Tempo de evolução das flutuações de velocidade $\delta V_\tau(t)$ para quatro diferentes escalas dos dados do vento solar. A escala aumenta do topo para a base.
FONTE: Carbone *et al.* (2003)

Como podemos ver, há um grande interesse na comunidade da física espacial em explorar a natureza caótica do ambiente espacial. Nessa dissertação será abordado

o estudo da intermitência Alfvênica no ambiente da Heliosfera, através dos processos que dão origem aos fenômenos caóticos que compõe as pesquisas em plasmas espaciais e astrofísicos.

CAPÍTULO 3

SISTEMAS DINÂMICOS: CONCEITOS BÁSICOS

Neste Capítulo veremos dois cenários de caos em sistemas dissipativos. Um envolvendo um tipo de comportamento chamado intermitência e outro chamado crise, durante o qual um atrator forte no espaço de fase subitamente muda de tamanho ou desaparece. A intermitência em caos foi primeiramente descrita por Pomeau e Manneville (1980) e é algumas vezes chamada de cenário Pomeau-Manneville. A noção de crise foi introduzida por Grebogi *et al.* (GREBOGI *et al.*, 1982; GREBOGI *et al.*, 1983).

3.1 Introdução

Caos determinístico é essencialmente devido à dependência sensível às condições iniciais. Essa dependência, quando existe, resulta das não-linearidades presentes no sistema, as quais amplificam exponencialmente pequenas diferenças entre as condições iniciais. Assim sendo, leis de evolução determinísticas podem levar a comportamento caótico, inclusive na ausência de ruído ou flutuações externas. Existe uma vasta literatura de conceitos básicos de caos determinístico (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1983; GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983; OTT, 1993; HILBORN, 1994; ALLIGOOD *et al.*, 1996). Um sistema dinâmico é constituído por um conjunto de *variáveis de estado*, uma relação determinística ou regra dinâmica e um conjunto de *parâmetros de controle*. O conjunto de variáveis de estado forma um espaço denominado espaço de fase, com a dimensão do espaço sendo definida pelo número de variáveis de estado. Um estado do sistema é definido pelo valor das variáveis de estado num dado instante de tempo. A regra dinâmica relaciona de forma única o estado atual com o estado no instante anterior. Os parâmetros de controle são responsáveis pela configuração da regra dinâmica. A evolução temporal do sistema representada no espaço de fase é definida como trajetória ou órbita (MANNEVILLE, 1990).

Em geral, o comportamento de uma órbita pode ser dividido em dois estágios: um *transiente inicial* e um *regime*. O regime consiste de um conjunto no espaço de fase para o qual a órbita de uma condição inicial \mathbf{x}_0 converge assintoticamente, após a fase transiente. As características deste conjunto dependem de propriedades intrínsecas ao sistema. Em *sistemas Hamiltonianos* (conservativos), volumes no espaço de fase são preservados pela evolução no tempo. Se forem calculadas as trajetórias de todos os pontos em um subvolume δV do espaço de fase, δV pode ser distorcido com o

tempo, mas seu volume permanece constante. Em *sistemas dissipativos*, sub-volumes diminuem com o tempo. Os sub-volumes δV tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$. Isto significa que os pontos convergem para conjuntos *atratores* com volume zero no espaço de fase. Nem todas as condições iniciais convergem, necessariamente, para o mesmo atrator. Se o sistema possui mais de um atrator, cada um deles possui uma *bacia de atração* própria. Uma bacia de atração de um atrator A corresponde a todas as condições iniciais que levam a este atrator (GREBOGI *et al.*, 1987a; CROSS; HOHENBERG, 1993).

Deve-se mencionar que em um sistema não-linear dinâmico determinístico o conhecimento do estado do sistema durante um tempo arbitrariamente longo não permite prever, de maneira imediata, sua evolução posterior. A razão dessa imprevisibilidade está relacionada à dependência sensível às condições iniciais.

3.2 Bifurcações

O termo *bifurcação* é usado para descrever qualquer súbita alteração na dinâmica do sistema (HILBORN, 1994). Quando há perda de estabilidade de um ponto fixo¹, o comportamento das trajetórias na vizinhança daquele ponto fixo irá variar. Ser capaz de classificar e entender as várias bifurcações possíveis é um importante passo no estudo da dinâmica não-linear.

Nessa dissertação iremos estudar o *diagrama de bifurcação*, em que graficamos a localização do ponto fixo (ou pontos) como função de um dado parâmetro de controle. Para vermos como este tipo de análise é feita, vamos começar com o caso do espaço de fase unidimensional.

Um sistema unidimensional, no sentido de dimensão que estamos usando aqui, tem somente uma variável de estado, que iremos chamar de x . Para este espaço de fase unidimensional, a Equação de evolução temporal é:

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.1}$$

Então o espaço de fase é apenas uma linha: o eixo x . Vamos considerar os pontos fixos para tal sistema, isto é, os valores de x tal que $\dot{x}|_{x_0} = f(x_0) = 0$. Os pontos

¹Ponto fixo, ponto crítico, ou ainda, ponto de equilíbrio está relacionado com a solução de uma equação que modela um determinado fenômeno, onde um equilíbrio é definido como o ponto onde a primeira derivada desta equação é nula.

fixos dividem o eixo x em um número de regiões de “não-interação”. Dizemos que as regiões não interagem porque uma trajetória que comece em algum valor inicial X localizada entre dois pontos fixos, nunca pode deixar aquela região.

Estendendo nossa discussão ao espaço de fase bi-dimensional, podemos definir os tipos de pontos fixos existentes. Seguindo o mesmo raciocínio que no caso unidimensional, supomos que há equações diferenciais de primeira ordem que descrevem a dinâmica do sistema. O comportamento desse sistema é investigado seguindo-se as trajetórias (soluções) no espaço de fase. Vamos considerar os pontos fixos para tal sistema, isto é, os valores de X_{10} e X_{20} , que satisfazem a seguinte relação:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(X_{10}, X_{20}) = 0 \\ \dot{x}_2 &= f_2(X_{10}, X_{20}) = 0\end{aligned}$$

Em ambos os casos, o próximo passo para caracterizar o ponto fixo e o comportamento da trajetória na vizinhança do ponto fixo é determinado pela derivada das funções $f(X)$ com relação a X , avaliadas no ponto fixo. O valor desta derivada no ponto fixo é chamado de valor característico ou auto-valor daquele ponto fixo. Chamaremos este valor característico de λ .

$$\lambda = \left. \frac{df(X)}{dX} \right|_{X=X_0}$$

A hipótese crucial na análise é que λ varia lentamente (continuamente) conforme variamos μ , um dado parâmetro de controle. Por exemplo, se $\lambda(\mu) < 0$ para algum valor de μ , então o ponto fixo é um nó. Alterando μ , λ poderia aumentar, passando por zero, e então ficaria positivo. O ponto fixo então se torna repulsor quando $\lambda > 0$.

Um nó é dito ser um ponto fixo estável ou assintoticamente estável no sentido de que trajetórias que se iniciem próximas a ele são atraídas. Um repulsor é um exemplo de ponto fixo instável. Uma definição mais formal é apresentada a seguir (ALLIGOOD *et al.*, 1996)².

Def. 1 O comprimento Euclidiano de um vetor de dimensão- n $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ é $|\mathbf{v}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Fazamos $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in R^n$, e ε ser um número positivo. A vizinhança- ε $N_\varepsilon(p)$ é o conjunto $\{\mathbf{v} \in R^n : |\mathbf{v} - \mathbf{p}| < \varepsilon\}$,

²Essas definições foram originalmente definidas para mapas, sistemas dinâmicos que evoluem no tempo de forma discreta.

o conjunto de pontos dentro da distância Euclidiana ε de \mathbf{p} . Algumas vezes, adotamos $N_\varepsilon(p)$ como um disco de raio ε centrado em \mathbf{p} .

Def. 2 Seja \mathbf{f} uma iteração do mapa de Poincaré³ e façamos \mathbf{p} em R^n um ponto fixo, isto é, $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. Se existe um $\varepsilon > 0$ tal que para todo \mathbf{v} na vizinhança- ε $N_\varepsilon(\mathbf{p})$, o $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}^k(\mathbf{v}) = \mathbf{p}$, então \mathbf{p} é um atrator. No entanto, se há uma vizinhança- ε de $N_\varepsilon(\mathbf{p})$, tal que cada \mathbf{v} em $N_\varepsilon(\mathbf{p})$, exceto o próprio \mathbf{p} , sai de $N_\varepsilon(\mathbf{p})$, então \mathbf{p} é um repulsor.

A Figura 3.1 mostra a visão esquemática do atrator e do repulsor em um sistema bi-dimensional, com um disco representando a vizinhança e a imagem do sistema iterado. Além do atrator e do repulsor, um outro tipo de ponto fixo é mostrado na Figura 3.1.c, que não pode ocorrer em espaço de fase unidimensional. Este tipo de ponto fixo, chamado de sela, tem uma direção atratora e outra repulsora.

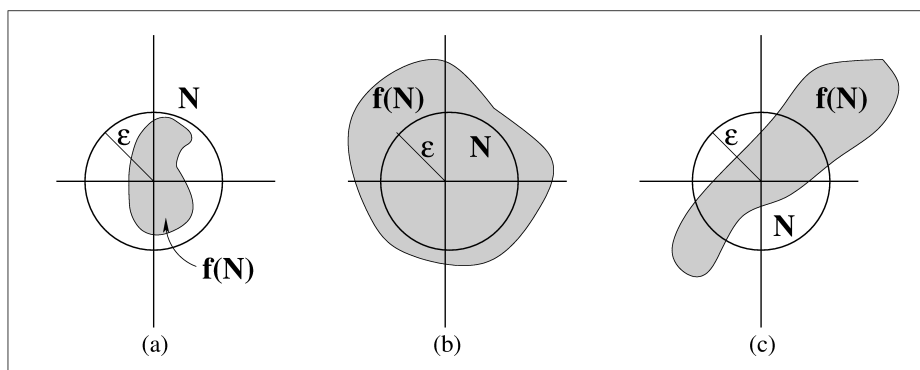


FIGURA 3.1 - A origem é (a) um atrator, (b) um repulsor, e (c) uma sela. As figuras também mostram um disco N da vizinhança dos pontos fixos, e o sistema iterado.
 FONTE: Figura modificada de Alligood *et al.* (1996)

A discussão formal da natureza dos pontos fixos pode ser concluída utilizando a notação matemática de uma expansão em série de Taylor da função $f(X)$ para valores de X na vizinhança do ponto fixo X_0 :

$$f(X) = f(X_0) + (X - X_0) \frac{df}{dX} + \frac{1}{2} (X - X_0)^2 \frac{d^2 f}{dX^2} + \frac{1}{6} (X - X_0)^3 \frac{d^3 f}{dX^3} + \dots \quad (3.2)$$

onde todas as derivadas são avaliadas em $X = X_0$. Em um ponto fixo do sistema dinâmico, o primeiro termo no lado direito da Equação (3.2) é zero, por definição. A

³Definimos seção ou mapa de Poincaré o plano transversal ao fluxo das soluções do sistema que relaciona um ponto do fluxo ao seu primeiro ponto de cruzamento com essa mesma superfície.

expansão em série de Taylor nos diz que a função $f(X)$ próximo a X_0 é determinada pelos valores das derivadas de f avaliadas em X_0 e da diferença entre X e X_0 . Esta informação, juntamente com a Equação dinâmica (3.1), é suficiente para prever o comportamento do sistema próximo ao ponto fixo.

Vamos introduzir uma nova variável $x = X - X_0$ que mede a distância da trajetória a partir do ponto fixo. Se negligenciarmos todas as derivadas de ordem superior a primeira, então x satisfaz a seguinte Equação:

$$\dot{x} = x \left. \frac{df}{dX} \right|_{X_0} \quad (3.3)$$

cuja solução é dada por:

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t} \quad (3.4)$$

Como antes, λ é o valor característico do ponto fixo, também chamado de *expoente de Lyapunov* para a região ao redor do ponto fixo, e que permite estudar sua trajetória. No caso desta Equação, temos uma medida local para o expoente de Lyapunov.

Para finalizar, ressaltamos que a teoria de bifurcação tenta proporcionar uma classificação sistemática das súbitas mudanças no comportamento qualitativo dos sistemas dinâmicos. Esse esforço é dividido em duas partes. A primeira parte da teoria dá atenção às bifurcações que podem estar ligadas à mudança na estabilidade dos pontos fixos (ou ciclos limites⁴ que podem ser tratados como pontos fixos nas seções de Poincaré). Chamamos essa bifurcação de **local** porque ela pode ser analisada em termos do comportamento local do sistema próximo ao ponto fixo relevante. A outra parte da teoria, relacionada com eventos de bifurcações que envolvem comportamento de maior escala no espaço de fase, são chamadas de bifurcações **globais**. Esses eventos globais envolvem estruturas de maiores escalas, como bacias de atração e órbitas homoclínicas e heteroclínicas dos pontos de sela.

3.3 Expoentes de Lyapunov

Uma outra visão sobre os expoentes de Lyapunov é que eles quantificam a taxa de separação ou aproximação entre órbitas vizinhas, o que pode ser visto da Equação (3.4). Esta quantificação é obtida monitorando-se a evolução de um hiper-volume

⁴Ciclos limites são soluções periódicas (movimentos regulares) típicas, por exemplo, a osciladores forçados não-lineares.

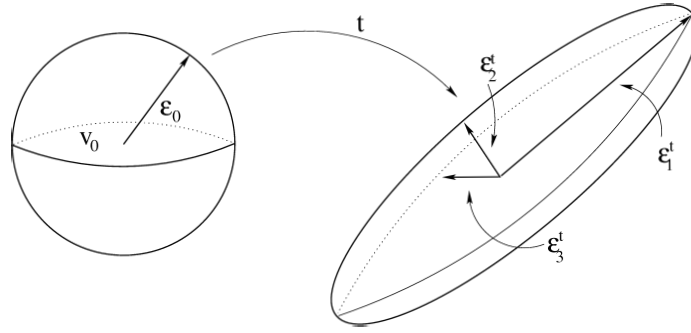


FIGURA 3.2 - Evolução de uma hiper-esfera com eixo ε_0 em uma hiper-elipse com eixos $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ e $\varepsilon_3(t)$.

FONTE: Adaptada de Alligood *et al.* (1996).

esférico de condições iniciais \mathbf{y}_0 distribuídas a uma distância ε_0 em torno de uma condição inicial \mathbf{x}_0 , de forma que $|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0| \leq \varepsilon_0$. Com o passar do tempo, o fluxo deforma a hiper-esfera, transformando-a em um objeto hiper-elipsoidal com eixos principais $\varepsilon_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, onde n é a dimensão do espaço de fase. A Figura 3.2 ilustra o crescimento exponencial dos eixos principais $\varepsilon_i(t)$ medidos pelos expoentes de Lyapunov, a partir de uma esfera de pequeno raio centrado no ponto \mathbf{v}_0 da órbita. Cada um desses expoentes representa a taxa de separação das órbitas ao longo de cada direção ortogonal. O primeiro expoente mede a taxa de separação na direção onde a separação é máxima (ou que a contração seja mínima, no caso de atratores). O segundo expoente mede a taxa na direção onde a separação seja a segunda maior, perpendicular à primeira direção, e assim por diante.

Os expoentes de Lyapunov são definidos como (WOLF *et al.*, 1985; FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994):

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.5)$$

Da Equação (3.5), obtém-se:

$$\varepsilon_i(t) \sim \varepsilon_0 e^{\lambda_i t} \quad (3.6)$$

semelhante à Equação (3.4), mas aqui temos uma medida global do expoente de Lyapunov. O volume da hiper-elipse num instante t é dado por:

$$\delta V(t) = \prod_{i=1}^m \varepsilon_i(t) \quad (3.7)$$

Substituindo (3.6) em (3.7), obtemos:

$$\delta V(t) = \delta V(0) \exp \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i t \right) \quad (3.8)$$

Quando $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$, o volume não se altera com o tempo, e o sistema é conservativo. Quando $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$, o volume diminui com o tempo e o sistema é dissipativo. Na prática, geralmente se obtém numericamente as taxas de contração e expansão $\varepsilon_i(t)/\varepsilon_0$ dos eixos das hiper-elipses, encontrando-se os autovalores das matrizes que representam a linearização do fluxo na vizinhança da órbita de \mathbf{x}_0 , o que leva às seguintes definições para o caso de sistemas contínuos e discretos no tempo (PARKER; CHUA, 1989):

- **Sistemas contínuos no tempo**

Sejam $m_1(t), \dots, m_n(t)$ os autovalores da matriz Jacobiana do fluxo do sistema $\Phi_t(x_0)$ para uma condição inicial x_0 qualquer. Os expoentes de Lyapunov da órbita de x_0 são:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)|, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

quando o limite existir.

- **Sistemas discretos no tempo**

Seja $\{x_k\}$, $k = 0, 1, \dots, \infty$ a órbita de uma condição inicial x_0 em um sistema p -dimensional P de tempo discreto. Sejam $m_1(k), \dots, m_p(k)$ os autovalores da matriz Jacobiana do sistema p -dimensional $\mathbf{D}P^k(\mathbf{x}_0)$. Os números de Lyapunov de x_0 são:

$$m_i = \lim_{k \rightarrow \infty} |m_i(k)|^{1/k}, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.10)$$

quando o limite existir. Os expoentes de Lyapunov correspondentes são dados pelo logaritmo dos números de Lyapunov:

$$\lambda_i = \ln(m_i) \quad (3.11)$$

Em resumo, a caracterização dos atratores por meio de expoentes de Lyapunov é feita conforme a relação a seguir:

- Ponto fixo assintoticamente estável: $\lambda_i < 0$ para $i = 1, \dots, p$;
- Ciclo limite assintoticamente estável: $\lambda_1 = 0$, e $\lambda_i < 0$ para $i = 2, \dots, p$;
- Caótico: $\lambda_1 > 0$ e $\sum \lambda_i < 0$

Note que para sistemas contínuos um dos expoentes de Lyapunov é sempre nulo, representando a taxa de variação na direção do fluxo. Assim, a presença de um atrator caótico só é possível em sistemas com, pelo menos, três variáveis de estado. Isto porque como um dos expoentes deve ser necessariamente positivo, e o expoente associado à direção do fluxo é sempre nulo, é necessário que haja pelo menos mais um $\lambda_i < 0$ para garantir a condição de dissipação $\sum \lambda_i < 0$ (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994).

3.4 Intermitência

Nesta dissertação veremos dois tipos de intermitência: a intermitência *intrínseca* e a intermitência *extrínseca*. Intermitência extrínseca é o “salto” entre diferentes estados induzido pelo ruído. Ocorre quando um sistema com mais de um atrator está acoplado a uma fonte externa de ruído estocástico⁵. Intermitência intrínseca ocorre na ausência de ruído, e está associada com bifurcações de sistemas não-lineares, conforme os valores dos parâmetros de controle são variados (GWINN; WESTERVELT, 1986a). Deste último tipo de intermitência daremos atenção a dois tipos que ocorrerão em nosso sistema e que serão mostrados no Capítulo posterior: intermitência Pomeau-Manneville, que ocorre próximo à perda de estabilidade ou destruição dos atratores periódicos, e intermitência induzida por crise, que ocorre próxima à crise em que o atrator caótico perde estabilidade.

3.4.1 Intermitência Pomeau-Manneville

Pomeau e Manneville (1980) propuseram um mecanismo relacionado com intermitência para o aparecimento de caos. O comportamento característico das intermitências é o de um sinal regular durante um certo intervalo de tempo e que evolui para produzir um estouro caótico durante um breve tempo; o sistema retorna a seu estado regular e o processo recomeça. O comportamento é caracterizado pelos estouros e sobretudo pela distribuição aleatória do comprimento dos períodos regulares.

⁵Oposto de determinístico. Significa que ao invés de seus dados assumirem um determinado valor, se estabelece que eles possuem uma determinada distribuição probabilística.

Esta intermitência resulta da perda de estabilidade de um atrator periódico para caos intermitente através de uma bifurcação, em que a natureza do fluxo varia qualitativamente conforme um parâmetro de controle é variado. Tais bifurcações produzem trajetórias que consistem de longas seqüências de comportamento aproximadamente periódicos, associadas com movimentos próximos a um atrator desestabilizado, interrompido por “estouros” (bursts) caóticos. A Figura (3.3) mostra dois tipos de intermitência de Pomeau-Manneville.

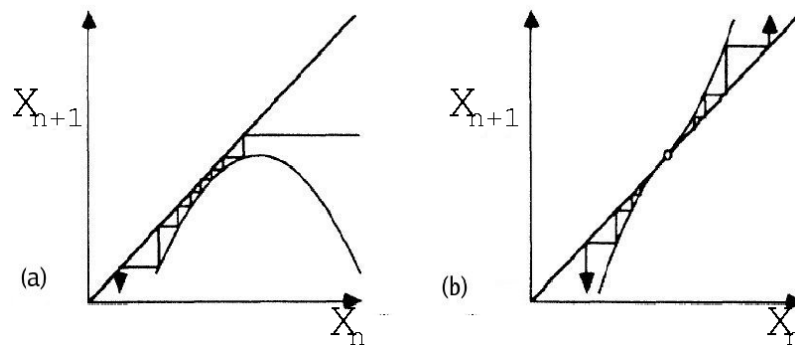


FIGURA 3.3 - Ilustração de intermitência intrínseca de Pomeau-Manneville (a) do tipo-1 e (b) tipo-3. FONTE: Gwinn e Westervelt (1986a)

Na Figura (3.3.a), intermitência Pomeau-Manneville tipo-1 ocorre próximo a uma bifurcação sela-nó, em que um atrator periódico instável e uma órbita periódica instável coexistem e se aniquilam. Longos intervalos de comportamento aproximadamente periódico ocorrem quando a trajetória passa através da região estreita próxima à posição do par estável-instável de órbitas na bifurcação. Esta figura mostra um segmento de uma trajetória típica passando através da estreita região; após ela atravessar esta região, ela irá se mover caoticamente até que em outro ponto do mapa seja reinjetada dentro da zona estreita.

Trajетórias que divergem lentamente de uma órbita periódica instável geram a intermitência Pomeau-Manneville tipo-3, como mostra a Figuras (3.3.b). Trajetórias iniciadas próximas ao ponto fixo instável, movem-se a partir dele lentamente se o mapa é tangente à diagonal do ponto fixo, como mostrado, produzindo longos intervalos de comportamento aproximadamente periódico. Neste trabalho nós iremos analisar apenas a intermitência Pomeau-Manneville do tipo-1.

Existe ainda a intermitência Pomeau-Manneville tipo-2, relacionadas às bifurcações de Hopf. Na intermitência Hopf, uma bifurcação que liga equilíbrio a movimento

periódico ocorre. A matriz Jacobiana calculada no ponto de bifurcação (ponto de Hopf) tem um par de autovalores puramente imaginários, que indica a presença de uma segunda frequência no comportamento do sistema. No evento da bifurcação, o ciclo limite associado com a segunda frequência seria instável, e observaríamos estouros na série temporal, com intervalos de comportamentos caóticos. (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994; HILBORN, 1994).

3.4.2 Intermitência Induzida por Crise

Em sistemas dinâmicos tanto experimentais quanto teóricos é comum encontrar repentinas mudanças no comportamento do sistema, que não são causadas por bifurcações locais. Este tipo de bifurcação é conhecida como “global” e em sistemas dissipativos são tipicamente causadas por colisões das *variedades invariantes*⁶ de certas órbitas periódicas. As variedades são um conceito extremamente importante na caracterização da dinâmica de sistemas de dimensão superior a 1. Entre outras coisas, elas desempenham papel importante no aparecimento ou destruição de atratores caóticos⁷, ou na delimitação de fronteiras entre bacias de atração. Na próxima seção falaremos com mais detalhes sobre as variedades.

As mudanças ocorridas após uma crise podem ser de três tipos (GREBOGI *et al.*, 1987a; OTT, 1993):

- *Destruição do atrator* (crise de fronteira): seja a um parâmetro de controle do sistema, e a_c o valor crítico de a no momento da crise. Suponha que para $a < a_c$ o sistema possua um atrator caótico. Quando a é aumentado de forma que $a > a_c$, o atrator e sua bacia de atração são subitamente destruídos. Este tipo de crise ocorre quando o atrator caótico colide com uma órbita periódica instável (UPO) que encontra-se sobre a fronteira entre a bacia de atração do atrator caótico e a bacia de outro conjunto.
- *Expansão do atrator* (crise interior): para $a < a_c$, existe um atrator caótico no espaço de fase. Quando a ultrapassa o valor crítico a_c , o atrator colide com uma órbita periódica instável e subitamente se expande, ocupando uma região maior no espaço de fase. Neste tipo de crise a órbita periódica,

⁶As variedades são objetos invariantes no sentido que ao interar qualquer ponto sobre a variedade ele permanece nela.

⁷Atratores caóticos, ou atratores estranhos, são aqueles que apresentam comportamento irregular ou caótico, existindo divergências entre as trajetórias próximas no espaço de fase.

com a qual o atrator colide, encontra-se no interior da bacia de atração do atrator caótico e pertence a uma sela caótica que coexiste com o atrator para $a \leq a_c$. Logo, uma crise interior é marcada pela colisão de um atrator caótico com uma sela caótica no interior de sua bacia de atração (SZABÓ; TEL, 1994; SZABÓ *et al.*, 1996; SZABÓ *et al.*, 2000; ROBERT *et al.*, 2000).

- *União de atratores*: para $a < a_c$ existem dois atratores caóticos, cada um com uma bacia de atração própria. À medida em que a aumenta, os dois atratores aumentam de tamanho e no ponto de crise ($a = a_c$) eles simultaneamente tocam a fronteira que separa as duas bacias (em $a = a_c$ os atratores colidem também com órbitas periódicas instáveis que se encontram sobre a fronteira entre as bacias).

Em particular, em uma crise interior, para a suavemente maior que a_c , a órbita no atrator passa longos intervalos de tempo na região em que o atrator foi confinado antes da crise. No fim de um desses longos intervalos a órbita estoura fora da região e salta caoticamente ao redor da nova região criada pela crise. Ela então retorna à região anterior para outro intervalo de tempo, seguido por outro estouro, e assim continuamente. Definimos o tempo médio τ entre os estouros, chamado de *tempo característico*, que marca o período entre os transientes caóticos, e que parece ser aleatório (i.e., intermitente), possuindo uma distribuição exponencial, com valor médio que denotamos por $\langle \tau \rangle$. Este tempo característico médio tem a propriedade de $\langle \tau \rangle \rightarrow \infty$, conforme a se aproxime de a_c e pode ser aplicado a todos os regimes intermitentes (OTT, 1993).

Assim, vemos que a intermitência é significativa para diferenciar o comportamento de um sistema. Podemos esquematicamente comparar intermitência induzida por crise com intermitência Pomeau-Manneville como segue:

- Intermitência Pomeau-Manneville:
(caos) \rightarrow (aproximadamente periódico) \rightarrow (caos) \rightarrow (aproximadamente periódico) $\rightarrow \dots$
- Intermitência induzida por crise:
(caos)₁ \rightarrow (caos)₂ \rightarrow (caos)₁ \rightarrow (caos)₂ $\rightarrow \dots$

Para o caso de estouros intermitentes da crise interior, (caos)₁ poderia denotar seg-

mentos de órbitas durante os estouros, e $(\text{caos})_2$ poderia denotar segmento de órbitas entre os estouros. Para o caso de intermitência devido a crise de união de atratores $(\text{caos})_1$ e $(\text{caos})_2$ denotam comportamento caótico nas regiões para cada um dos dois atratores que existiam antes da crise (HILBORN, 1994).

3.4.3 Intermitência Extrínseca

Na ausência de ruído, supomos que estamos lidando com um sistema perfeitamente determinístico. Se o ruído está presente, então um sistema que esteja próximo, mas não ainda em uma região de crise, pode apresentar comportamento intermitente induzido pelo ruído. Nesta dissertação, estuda-se a influência de um ruído, adicionando-se um termo σ à Equação DNLS.

Crises são comumente vistas em sistemas dinâmicos não lineares dissipativos. Em uma crise vemos que quando um parâmetro a do sistema passa através de um valor crítico a_c no qual a crise ocorre o atrator caótico pode ser destruído, pode aumentar em tamanho, ou ainda pode se unir com outro atrator caótico, como discutido anteriormente. Trajetórias típicas de um sistema pós-crise (por convenção $a > a_c$), comportam-se como aquelas do sistema pré-crise por um tempo T que é sensivelmente dependente das condições iniciais. Para $a > a_c$ e escolhendo-se aleatoriamente condições iniciais na bacia do atrator pré-crise, a extensão deste tempo T é distribuída exponencialmente, com valor médio τ que depende de a (SOMMERER *et al.*, 1991).

A definição do tempo característico τ difere para os três tipos de crise mencionados acima. No caso da destruição de atratores, a trajetória inicialmente se move caoticamente como se ainda estivesse confinada ao atrator pré-crise, e então as soluções convergem para algum outro atrator, ou ainda para o infinito. O período de tempo que o sistema pós-crise se comporta como o sistema pré-crise é referido como um *transiente caótico*. Para este caso, τ é o tamanho médio do transiente, avaliado sobre diferentes condições iniciais. No caso da expansão do atrator, a trajetória pós-crise permanece na região do espaço de fase do atrator caótico pré-crise por algum tempo, e então estoura em movimentos caóticos sobre uma grande região do espaço de fase, sendo depois reinjetada dentro da região do atrator pré-crise; o processo então se repete. Para este caso, τ é o tempo médio entre tais estouros. No caso de união de atratores, que pode ocorrer em sistemas com simetria, o movimento pós-crise salta repentinamente entre regiões do espaço de fase ocupadas pelos atratores caóticos que

se fundem na crise. O tempo característico é agora o tempo médio entre esses saltos. Para uma grande classe de sistemas de baixa-dimensão, o tempo característico τ é dado por (SOMMERER *et al.*, 1991):

$$\tau \sim |a - a_c|^{-\gamma} \quad (3.12)$$

A crise com esse comportamento escalonado resulta da colisão do atrator caótico com a variedade estável de uma UPO.

Em um sistema determinístico para $a < a_c$, o tempo característico é infinito porque a órbita permanece sempre no atrator pré-crise. Entretanto, se algum ruído randômico é adicionado ao sistema, existe a possibilidade de que uma trajetória iniciando na bacia de atração do atrator caótico do sistema determinístico se comporte como uma órbita do sistema pós-crise ainda em $a < a_c$, produzindo desse modo uma resposta transiente. Para esclarecer melhor esse comportamento, imaginemos um sistema sem ruído com um atrator caótico e sua bacia de atração. O atrator, por ser caótico, possui naturalmente uma infinita quantidade de órbitas periódicas instáveis. Um sub-conjunto dessas órbitas, ainda não acessíveis à dinâmica do sistema sem ruído, poderiam ser disponibilizadas devido a influência de uma fonte estocástica. Então, as trajetórias passando próximas às conexões homoclínicas e heteroclínicas⁸ induzidas pelo ruído seriam sucessivamente atraídas e repelidas pelos pontos de sela no contorno das bacias de atração, até que eventualmente escaparem dessa região. Tal comportamento que a princípio parece caótico, é na verdade um transiente caótico. Esta situação é referida como uma *crise induzida por ruído*, situação em que o sistema determinístico ainda não é caótico, mas está próximo à crise (HILBORN, 1994). Como todos os sistemas físicos estão sempre acompanhados de ruído, nós acreditamos que crise induzida pelo ruído pode ser importante na investigação de caos transiente e intermitência. É a proposta deste trabalho proporcionar uma interpretação para o efeito do ruído na crise.

3.5 Variedades Invariantes em Sistemas Contínuos no Tempo

Considere um sistema autônomo de ordem n com fluxo ϕ_t . Seja γ um conjunto limite⁹ ϕ_t . A variedade estável de γ , denotada por $W^s(\gamma)$, é o conjunto de pontos \mathbf{x}

⁸Os conceitos de tangências homoclínicas e heteroclínicas serão vistas na próxima seção.

⁹Um ponto \mathbf{y} é chamado ω -limite de uma condição inicial \mathbf{x}_0 se, para qualquer vizinhança U de \mathbf{y} , a trajetória de \mathbf{x}_0 entra em U repetidamente quando $t \rightarrow \infty$. O conjunto de todos os pontos ω -limite de \mathbf{x}_0 é chamado conjunto limite (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

tais que $\phi_t(\mathbf{x})$ tende a γ quando $t \rightarrow \infty$. A variedade instável $W^u(\gamma)$ é o conjunto de pontos cuja trajetória tende a γ em tempo reverso (quando $t \rightarrow -\infty$) (PARKER; CHUA, 1989).

Considere um ponto de equilíbrio hiperbólico $\bar{\mathbf{x}}$ de um sistema não-linear. Façamos \mathbf{v}_s ser o conjunto dos correspondentes autovetores da matriz Jacobiana da função vetorial $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$, cujos autovalores possuem parte real negativa, é chamada de subespaço estável, sendo denotado por E^s . O subespaço definido pelos \mathbf{v}_u autovetores de $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$, cujos autovalores possuem parte real positiva, é chamado de subespaço instável, e é denotado por E^u . Em uma vizinhança suficientemente pequena de $\bar{\mathbf{x}}$, a variedade estável (instável) de $\bar{\mathbf{x}}$ é tangente ao subespaço E^s (E^u) de $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$ em $\bar{\mathbf{x}}$ - teorema da variedade estável (GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983).

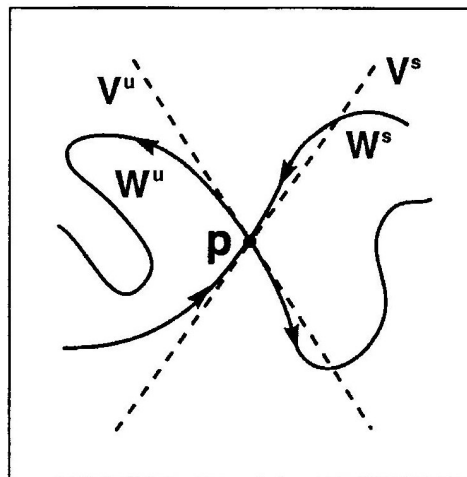


FIGURA 3.4 - Ilustração do teorema da variedade estável. No ponto fixo \mathbf{p} a variedade estável W^s é tangente ao autovetor \mathbf{v}^s e a variedade instável W^u é tangente ao autovetor \mathbf{v}^u de $\mathbf{Df}(\mathbf{p})$.

FONTE: Alligood *et al.* (1996)

A Figura (3.4) ilustra as variedades estável e instável de um ponto fixo \mathbf{p} em um espaço de fase bidimensional. As linhas tracejadas representam os autovetores estável (\mathbf{v}^s) e instável (\mathbf{v}^u) de $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})$. No ponto \mathbf{p} as variedades são tangentes aos autovetores. Note-se que partindo do ponto \mathbf{p} pode-se considerar que cada variedade possui dois ramos, um na direção $\mathbf{v}^{s,u}$ e outro na direção $-\mathbf{v}^{s,u}$.

3.6 Cruzamentos Homoclínicos e Heteroclínicos

Para sistemas com espaço de fase com mais de uma dimensão, além de colisões de atratores com uma órbita periódica instável, crises podem ser estudadas do ponto de vista de tangência entre variedades. Pelo menos para mapas em duas dimensões estritamente dissipativos (i.e., o módulo do determinante da Jacobiana do mapa é menor do que 1 em qualquer ponto), crises podem ocorrer somente de duas maneiras (GREBOGI *et al.*, 1987b; GREBOGI *et al.*, 1987a; OTT, 1993):

- Tangência Homoclínica: neste caso, as variedades estável e instável de uma órbita periódica instável (B) são tangentes, como mostra a Figura (3.5.a).
- Tangência Heteroclínica: neste caso, a variedade estável de uma órbita periódica instável (B) é tangente á variedade instável de uma órbita periódica instável (A) que encontra-se sobre o atrator, como mostra a Figura (3.5.b).

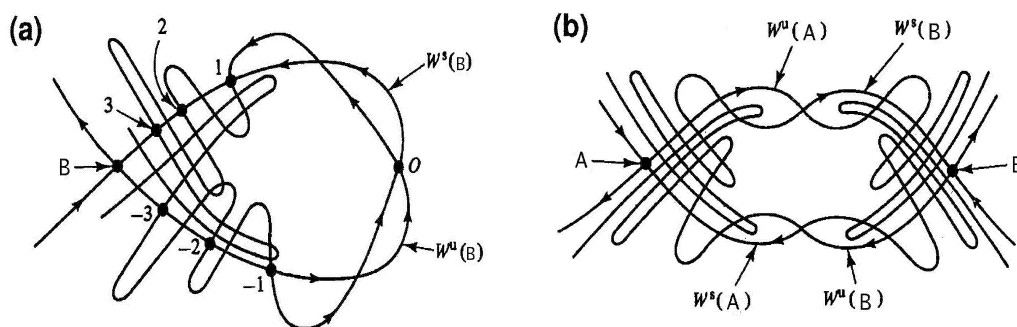


FIGURA 3.5 - (a) Órbita homoclínica sobre os cruzamentos entre as variedades estável $W^s(B)$ e instável $W^u(B)$ de um ponto fixo B ; (b) Cruzamento heteroclínico entre variedades estável e instável de dois pontos de sela diferentes (A e B).

FONTE: Ott (1993).

Em ambos os casos, quando $a = a_c$ o atrator caótico é o fechamento¹⁰ de um dos ramos da variedade instável de B . No caso de crise interior, quando $a > a_c$ o outro ramo da variedade instável de B é incorporado ao atrator, resultando em um aumento abrupto do seu tamanho. No caso heteroclínico, para $a = a_c$ e também para $a < a_c$, o atrator é também o fechamento da variedade instável de A . Em ambos os casos B está sobre o atrator para $a = a_c$, mas não para $a < a_c$ (GREBOGI *et al.*, 1987b; GREBOGI *et al.*, 1987a; OTT, 1993).

¹⁰O fechamento de um conjunto B é definido como o conjunto de todos os pontos x tais que toda vizinhança aberta de x contém pelo menos um ponto de B . Segue-se que B está contido no fechamento de B .

3.7 Selas Caóticas

Um conjunto invariante pode ser caótico e não-atrativo. Um conjunto invariante que não é atrator nem repulsor é chamado de sela caótica. O fato de ser não-atrativo implica que quase todas as trajetórias eventualmente abandonam a região ocupada pelo conjunto caótico (NUSSE; YORKE, 1989). Não obstante, uma sela caótica possui uma bacia de atração de medida zero. Esta bacia de atração é chamada de variedade estável da sela caótica. A variedade estável de uma sela caótica A é o conjunto de pontos que convergem para A quando o tempo $T \rightarrow \infty$. A variedade instável de A é o conjunto de pontos que convergem para A em tempo reverso ($T \rightarrow -\infty$). A sela caótica é formada pelas intersecções de suas variedades estável e instável (NUSSE; YORKE, 1989; SWEET; OTT, 2000), onde estas variedades estão em conjuntos de Cantor¹¹, como ilustrado na Figura (3.6), onde os círculos pretos representam pontos da sela caótica.

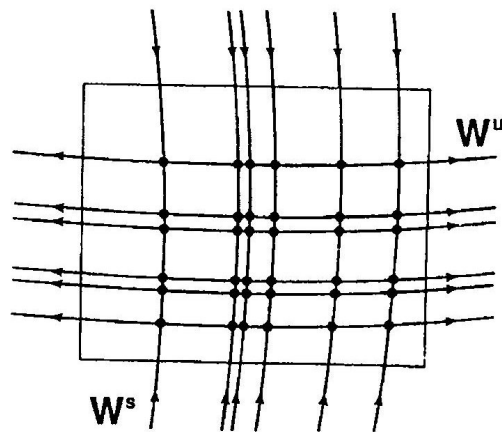


FIGURA 3.6 - Representação de uma sela caótica como a intersecção de suas variedades estável W^s e instável W^u .
FONTE: Hsu *et al.* (1988)

3.7.1 Diferença entre Atrator Caótico e Sela Caótica

Um atrator caótico contém um número infinito de órbitas periódicas instáveis (OTT, 1993; SZABÓ *et al.*, 2000), com suas respectivas variedades instáveis e estáveis. O atrator caótico pode ser considerado como sendo o fechamento das variedades instáveis destas órbitas periódicas instáveis (OTT, 1993). As variedades instáveis nunca

¹¹Conjunto que possui dimensão fractal (não-inteira), devido à estrutura de seus inúmeros intervalos, de tal modo que, conforme ampliamos estruturas cada vez menores deste conjunto, vemos uma repetição deste conjunto em diferentes escalas.

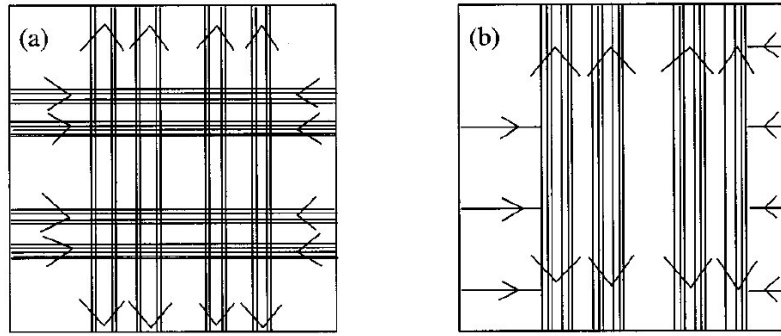


FIGURA 3.7 - Representação esquemática de uma região contendo uma sela caótica (a) e de um atrator caótico (b) para um mapa de duas dimensões. Em ambas as figuras a direção horizontal é a de contração e a vertical é a direção de expansão. A sela caótica em (a) é a intersecção entre um conjunto fractal de linhas horizontais (variedade estável) com um conjunto fractal de linhas verticais (variedade instável), algumas das quais são mostradas na figura. O atrator em (b) é um conjunto fractal de linhas verticais. As linhas horizontais que contêm pontos que convergem para pontos sobre o atrator cobrem toda a região mostrada em (b).

FONTE: Moresco e Dawson (1997)

se cruzam, e a direção em que elas se estendem determina a direção de expansão do atrator. De forma similar, as variedades estáveis determinam a direção de contração.

Semelhante ao que ocorre com um atrator caótico, as variedades de uma sela caótica indicam as suas direções de expansão (direção instável) e contração (direção estável). Entretanto, os atratores caóticos possuem estrutura fractal ao longo das direções estáveis, mas são suaves ao longo das direções instáveis. Esta suavidade ao longo das direções instáveis é a diferença básica entre um atrator caótico e uma sela caótica em um espaço de fase bi-dimensional (DAWSON, 1996; MORESCO; DAWSON, 1997). A Figura (3.7) ilustra a diferença entre os dois tipos de conjuntos caóticos, onde a direção vertical é a direção de expansão e a direção horizontal é a de contração. Na Figura (3.7.a), as linhas horizontais e verticais representam, respectivamente, as variedades estável e instável de uma sela caótica, que se encontra na intersecção entre as linhas. As variedades possuem uma estrutura fractal semelhante a um conjunto de Cantor (OTT, 1993; ALLIGOOD *et al.*, 1996). A Figura (3.7.b) representa um atrator formado por um conjunto fractal (no caso, um conjunto de Cantor) de linhas verticais. Toda a região na Figura (3.7.b) é preenchida pelas variedades estáveis de pontos sobre o atrator, ou seja, por pontos que convergem para o atrator à medida em que o mapa é iterado. Assim, existe uma probabilidade não-nula de que uma condição inicial aleatória convirja para o atrator na Figura (3.7.b). No caso da sela caótica da Figura (3.7.a), essa probabilidade é zero, uma vez que a variedade estável, ou equivalentemente, a bacia de atração da sela caótica possui medida zero

e uma condição inicial precisaria estar exatamente sobre uma das linhas horizontais para que pudesse convergir para a sela caótica. Por essa razão, a sela caótica é não-atrativa. Este mesmo argumento se estende para mapas de dimensão arbitrária, desde que as variedades instáveis sejam unidimensionais (DAWSON, 1996; MORESCO; DAWSON, 1997).

3.8 O Ruído

Nessa dissertação faremos um estudo numérico do efeito do ruído num sistema em que coexistem múltiplos atratores. Em particular nos concentraremos no transiente caótico e na intermitência induzidos pelo ruído. Os efeitos causados pela adição de ruído em sistemas determinísticos têm sido observados em diversos trabalhos (ARECCHI *et al.*, 1985; GWINN; WESTERVELT, 1986a; CHEN, 1990; I; LIU, 1995; ASTUMIAN; MOSS, 1998; GAO *et al.*, 1999; LAI *et al.*, 2003), sendo fator importante na verificação de complexidade em sistemas dinâmicos.

O ruído será introduzido na Equação DNLS por meio de uma fonte estocástica Gaussiana, com média zero e desvio padrão σ . Segundo Gwinn e Westervelt (1986b), essa é uma boa aproximação já que em muitas situações reais esta é a distribuição de amplitude de ruído. Este tipo de ruído é algumas vezes chamado de ruído branco, por não possuir correlação com o sistema. A distribuição Gaussiana, também conhecida como distribuição normal, é uma distribuição probabilística de grande importância em muitos campos. A Figura (3.8) ilustra algumas curvas desta distribuição, onde μ denota a média e σ^2 é a variância.

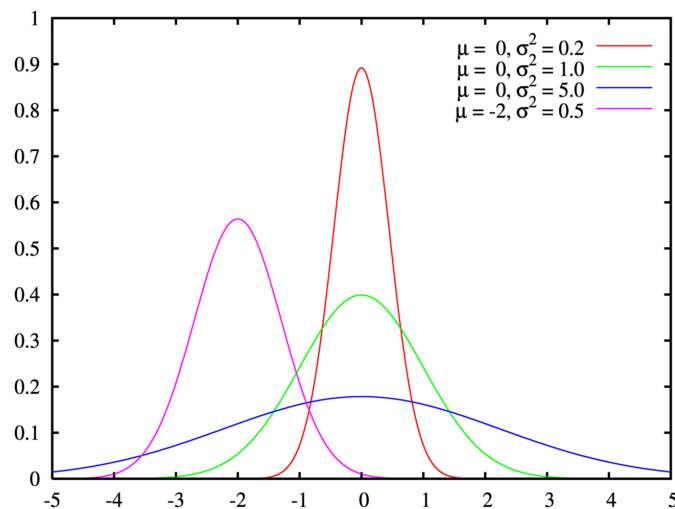


FIGURA 3.8 - Função de densidade de probabilidade da distribuição Gaussiana para quatro diferentes conjuntos de parâmetros.

CAPÍTULO 4

NATUREZA CAÓTICA DO AMBIENTE SOL-TERRA: INTERMITÊNCIA ALFVÊNICA INTERPLANETÁRIA

Neste Capítulo é apresentada uma análise numérica de um sistema dinâmico de baixa dimensão para ondas de Alfvén através da Equação de Schrödinger não-linear derivativa (DNLS). Seguindo Hada *et al.* (1990), Buti (1992), Chian *et al.* (1998), Chian *et al.* (2002a) e Rempel *et al.* (2004b), é adotado um modelo para soluções estacionárias em um referencial se movendo na direção de propagação da onda. Uma janela periódica do diagrama de bifurcação é construída para identificar dois tipos de intermitência em ondas de Alfvén, intermitência tipo-I e intermitência induzida por crise. Mostra-se que um atrator caótico de Alfvén é composto de selas caóticas e órbitas periódicas instáveis, tentando-se explicar as relações entre essas estruturas instáveis e intermitência de Alfvén. O papel da intermitência Alfvênica interplanetária na dinâmica das intensas atividades magnéticas é discutida.

4.1 Introdução

O sistema Sol-Terra é um sistema complexo, eletrodinamicamente acoplado, dominado por interações não-lineares. Seu comportamento complexo, i.e., os fenômenos de explosões solares e sub-tempestades geomagnéticas, é uma indicação de que o sistema está em um estado fora do equilíbrio onde instabilidade, ondas não-lineares e turbulência têm uma importância crucial na dinâmica. Um dos aspectos presentes no complexo ambiente espacial é a ocorrência de intermitência e caos no dínamo solar, coroa solar, vento solar e magnetosfera-ionosfera-atmosfera terrestre.

Experimentos em laboratório têm mostrado que grande parte dos fenômenos de plasma podem ser explicados tratando-se o plasma como um fluido, i. e., estudando a conservação de massa, momento e energia (CHEN, 1984). Como claramente indicado pelas observações de espaçonaves, a turbulência MHD na Heliosfera tem um forte caráter Alfvênico, conforme apresentado no trabalho clássico de Belcher e Davis (1971), em que um alto nível de correlação entre as flutuações de campo magnético e de velocidade foi identificado.

A atividade solar, incluindo a dinâmica e estrutura da atmosfera solar, é controlada por campos magnéticos gerados pela ação combinada da convecção e rotação diferenciada de um dínamo no interior solar (veja, por exemplo, Weiss e Tobias (2000),

Gómes e Mininni (2004)). As séries temporais observadas do ciclo solar são intermitentes, mostrando períodos de flutuações cíclicas de grande amplitude que são irregularmente interrompidas por períodos quiescentes de reduzida atividade magnética, chamada de grande mínimo, tais como o Maunder Minimum e o Minimum Spoerer (KREMLIOVSKY, 1995; MOUSSAS *et al.*, 2005). Simulações de um modelo do campo principal do dínamo solar mostraram muitas características vistas no ciclo solar, tais como quase-periodicidade, intermitência e longos períodos de baixa atividade (HOYNG, 1993). Kurths *et al.* (1993) achou caos em simulações MHD 3-D. Um modelo simples de terceira ordem do dínamo solar sugeriu que a modulação do ciclo solar é caótica, descrita por um diagrama de bifurcação, que pode explicar as recorrentes características do grande mínimo (TOBIAS *et al.*, 1995). Ossendrijver e Covas (2003) reportaram a evidência de intermitência induzida por crise devido ao alargamento do atrator em 2-D para o modelo forçado do dínamo solar pelas flutuações de instabilidade dos tubos de fluxo magnético, e mostraram que a duração média do grande mínimo segue uma escala predita teoricamente. Charbonneau *et al.* (2004) mostrou que um modelo de ciclo solar baseado no mecanismo Babcock-Leighton do campo poloidal, ao se regenerar, poderia exibir intermitência na presença de ruído de baixa amplitude. Simulações numéricas do ciclo de atividades magnéticas solar têm mostrado uma transição bem definida para caos via bifurcações de duplicação de período (CHARBONNEAU *et al.*, 2005).

Chian *et al.* (1998) e Borotto *et al.* (2001) demonstraram que a intermitência Alfvênica interplanetária pode ter natureza caótica. Bruno *et al.* (2001) aplicou a técnica de *wavelet* para determinar a medida de intermitência local nos dados do vento solar e identificar as estruturas intermitentes que contribuem em um único evento; seus resultados mostram que este evento está localizado na fronteira entre duas regiões interplanetárias adjacentes caracterizadas pela velocidade do fluido e pressão total diferentes, possivelmente os contornos entre dois tubos de fluxos; essas observações sustentam a idéia de que as flutuações do vento solar são uma superposição de ondas de Alfvén e tubos de fluxos se propagando em estruturas convertidas pelo balanço de pressão originado na base da atmosfera solar. Gulamali e Cargill (2001) discutiram o caráter da turbulência MHD na região de interação corrotacional em latitudes médias da Heliosfera baseado nos dados da Ulysses; eles acharam que a variação do ciclo solar tem um claro efeito sobre o caráter turbulento do vento solar, proporcionando ainda evidência para a origem da maior parte da turbulência interplanetária observada. Padhye *et al.* (2001) usou as observações da Ulysses para examinar as

funções de distribuição de probabilidade das flutuações do campo magnético para o vento solar rápido e lento em diferentes fases do ciclo solar e determinar o grau de não-Gaussianidade da turbulência interplanetária intermitente por comparação de momento. Pagel e Balogh (2003) estudaram a dependência radial da intermitência do campo magnético para o vento solar polar rápido usando dados da Ulysses. Bruno *et al.* (2005) discutiu as observações *in situ* de turbulência intermitente MHD na Heliosfera 3-D, tanto na eclíptica quanto em altas latitudes. Hnat *et al.* (2005) usou auto-similaridade estendida para revelar escalas nas funções estruturais das flutuações de densidade no vento solar.

As discussões acima vêm demonstrar claramente que o estudo da intermitência e caos é essencial para o entendimento dos processos físicos complexos, fundamentais na relação Sol-Terra. O objetivo deste Capítulo é aplicar a teoria de caos para investigar a natureza intermitente do ambiente Heliosférico, baseado em simulações numéricas de um modelo não-linear de ondas Alfvén. Seguindo os trabalhos de Chian *et al.* (1998) e Borotto *et al.* (2001), dois tipos de intermitência serão estudados: intermitência tipo-I e intermitência induzida por crise. Em comparação com o trabalho de Chian *et al.* (1998) e Borotto *et al.* (2001) no qual o papel dinâmico da amplitude da onda de Alfvén não-linear foi estudada, aqui investiga-se o papel dinâmico da dissipação das ondas de Alfvén não-lineares no plasma. Em particular, mostra-se que órbitas periódicas instáveis e selas caóticas são as estruturas instáveis fundamentais, responsáveis pela intermitência e caos na Heliosfera. Em resumo, mostra-se que a duração média das fases quiescentes para ambas as intermitências Alfvênicas seguem uma lei de escala prevista teoricamente. O papel da intermitência Alfvênica interplanetária nos eventos geomagnéticos devido ao vento solar, conhecidos como HILDCAAs será discutido.

4.2 Modelo Não-Linear das Ondas de Alfvén

A evolução espaço-temporal não-linear das ondas de Alfvén pode ser modelada pela Equação de Schrödinger não-linear derivativa (DNLS) (HADA *et al.*, 1990; CHIAN *et al.*, 1998):

$$\partial_t b + \alpha \partial_x (|b|^2 b) - i(\mu + i\eta) \partial_x^2 b = S(b, x, t), \quad (4.1)$$

onde a onda está se propagando ao longo do campo magnético ambiental B_0 na direção- x , $b = b_y + ib_z$ é o campo magnético transversal, escrito em forma complexa

e normalizado pelo campo magnético ambiental, o tempo t está normalizado pelo inverso da frequência íon-ciclotrônica $w_{ci} = eB_0/m$, o espaço x está normalizado por c_A/w_{ci} , $c_A = B_0/(\mu_0\rho_0)^{1/2}$ é a velocidade de Alfvén, $\alpha = 1/[4(1 - \beta)]$, $\beta = c_s^2/c_A^2$, $c_s = (\gamma P_0/\rho_0)^{1/2}$ é a velocidade acústica, μ é o parâmetro dispersivo e η o parâmetro dissipativo. A fonte externa $S(b, x, t) = A \exp(ik\phi)$ é uma onda monocromática polarizada circularmente à esquerda e com uma velocidade de fase $\phi = x - Vt$, onde V é a velocidade da onda, considerada constante. Definimos A e k como constantes reais, e consideramos uma fonte que não sofre qualquer tipo de amortecimento ou crescimento.

A Equação 4.1 tem sido extensivamente usada para estudar a evolução não-linear das ondas de Alfvén e fenômenos MHD. Mjølhus (1976) usou a Equação DNLS para examinar a instabilidade modulacional de ondas MHD polarizadas circularmente de amplitude finita, propagando-se paralelamente ao campo magnético ambiental. Spangler e Sheerin (1982) deduziram a Equação DNLS a partir de Equações de dois-fluidos usando o método reduzido de perturbação e analisaram as propriedades de um envelope sóliton de Alfvén baseado no formalismo pseudo-potencial. Machida *et al.* (1987) comparou o comportamento temporal da simulação eletromagnética híbrida com a solução numérica DNLS, mostrando que um modo de Alfvén circularmente polarizado à esquerda evolui numa estrutura do tipo choque devido à instabilidade modulacional; para o modo circularmente polarizado à direita, a formação do choque não ocorre. Kennel *et al.* (1988) derivou a Equação DNLS por meio de variáveis Lagrangianas e obteve soluções periódicas das ondas de Alfvén quase-paralelas polarizadas elipticamente. Hada *et al.* (1989) usou um método pseudo-potencial para classificar as soluções estacionárias da DNLS, que consiste de uma família rica de ondas de Alfvén não-lineares e soluções com propagações paralelas e oblíquas. Dawson e Fontan (1990) compararam dois modelos estatísticos de sólitons de Alfvén descritos pela Equação DNLS e aplicou o espectro de potência resultante para observações do vento solar. Buti (1991) mostrou que ondas de Alfvén não-lineares em um plasma não-homogêneo são governadas por uma DNLS modificada; a não-homogeneidade conduz à aceleração/desaceleração de sólitons de Alfvén. Verheest e Buti (1992) usaram a análise de perturbação reduzida para deduzir a Equação DNLS para ondas de Alfvén paralelas em um plasma morno de multi-espécies. Laveder *et al.* (2001) estudou o colapso transversal de trens de ondas de Alfvén dispersivas pela solução numérica da Equação DNLS tri-dimensional. Ruderman (2002) mostrou que a propagação oblíqua de sólitons MHD de grande amplitude em um plasma Hall de beta

alto é descrito pela Equação DNLS. Verheest *et al.* (2004) fez um estudo comparativo das soluções de envelopes fracamente não-lineares de sólitons da Equação DNLS e oscilações whistler estacionárias de grande amplitude, considerando o papel da neutralidade de carga. Chen e Lam (2004) e Lashkin (2005) aplicaram a transformada inversa dispersiva à Equação DNLS para estudar a geração de sólitons de Alfvén.

Neste Capítulo são investigadas as soluções de ondas estacionárias para a Equação 4.1 com $b = b(\phi)$, cuja primeira integral se reduz a um conjunto de três Equações diferenciais ordinárias acopladas descrevendo ondas transversais para o campo magnético e a fase das ondas de Alfvén não-lineares, dadas por:

$$\dot{b}_y - \nu \dot{b}_z = \frac{\partial H}{\partial b_z} + a \cos \theta \quad (4.2)$$

$$\dot{b}_z + \nu \dot{b}_y = -\frac{\partial H}{\partial b_y} + a \sin \theta \quad (4.3)$$

$$\dot{\theta} = \Omega \quad (4.4)$$

onde

$$H = \frac{(\mathbf{b}^2 - 1)^2}{4} - \frac{\lambda}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{e}_y)^2 \quad (4.5)$$

e que numericamente irão possuir a seguinte forma:

$$\dot{b}_y = \frac{(b_y^2 + b_z^2 - 1.25)(b_z - \nu b_y) - 0.25\nu + a(\cos \theta + \nu \sin \theta)}{1 + \nu^2} \quad (4.6)$$

$$\dot{b}_z = -\frac{(b_y^2 + b_z^2 - 1.25)(\nu b_z + b_y) - 0.25 + a(\sin \theta - \nu \cos \theta)}{1 + \nu^2} \quad (4.7)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (4.8)$$

Os pontos denotam derivadas com relação à fase da onda $\tau = \alpha b_0^2 \phi / \mu$ (também chamada de variável temporal), $b \rightarrow b/b_0$ (onde b_0 é uma constante de integração), $\theta = \Omega \phi$, $\Omega = \mu k / (\alpha b_0^2)$, $a = A / (\alpha b_0^2 k)$, $\nu = \eta / \mu$, $\lambda = -1 + V / (\alpha b_0^2)$ e $\alpha > 0$ (i.e., $\beta < 1$). Na Equação (4.5) foi utilizada a notação vetorial $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_y, \mathbf{b}_z)$, e \mathbf{e}_y representa um vetor unitário na direção do eixo y .

4.3 Caos de Alfvén

Um modelo de baixa dimensão de caos de Alfvén foi formulado por Hada *et al.* (1990) baseado em soluções numéricas das Equações (4.6)-(4.8); para o caso não-dispersivo

(Hamiltoniano), as soluções próximas à separatriz do espaço de fase (sólitons) no mapa de Poincaré seriam caóticas conforme o termo da amplitude aumentasse; para o caso dispersivo, o sistema mostra rotas para caos via duplicação de período e bifurcação tangente. Uma série de trabalhos têm sido publicados seguindo o modelo pioneiro de Hada *et al.* (1990). Buti (1992) mostrou que ondas de Alfvén não-lineares em um plasma de múltiplas espécies podem ser caóticas se o termo da amplitude excede um certo limiar; íons pesados, como Hélio no vento solar e Oxigênio em cometas, tendem a reduzir o caos. Buti (1997) demonstrou ainda que uma pequena fração de grãos de poeira carregados eletricamente podem suprimir o caos em sistemas de Alfvén, que são caóticos na ausência de partículas de poeira. Chian *et al.* (1998) e Borotto *et al.* (2001) identificaram dois tipos de intermitência produzidas pelo caos. Chian *et al.* (2002a) reportou um mecanismo de transição para caos de Alfvén via uma crise de fronteira pelo qual um atrator caótico subitamente aparece/desaparece; uma mesma órbita periódica de período-3 é responsável pela mediação de duas crises sucessivas. Borotto *et al.* (2004b) estudou uma crise interior de Alfvén associada com um abrupto aumento/diminuição do tamanho do atrator caótico. Borotto *et al.* (2004a) demonstrou que em uma janela periódica de período-3 estudada por Chian *et al.* (1998) e Borotto *et al.* (2001) a mesma órbita periódica de período-9 é responsável pela mediação de uma crise de fronteira seguida por uma crise interior. Rempel e Chian (2004) e Rempel *et al.* (2004b) examinaram o papel representado pelos conjuntos caóticos não-atrativos conhecidos como selas caóticas, responsáveis pelo transiente caótico em caos de Alfvén.

Uma análise de alta dimensão do caos espaço-temporal de Alfvén baseado na Equação DNLS foi conduzida por Ghosh e Papadopoulos (1987), que indicou a transição de oscilações MHD de um estado coerente para turbulento. Um estudo numérico de aceleração de sólitons de Alfvén feito por Nocera e Buti (1996), baseado na Equação DNLS mostrou que, sob a ação de um dispositivo harmônico externo, interações de ondas não-lineares se desenvolvem e evoluem para caos espaço-temporal. DE OLIVEIRA *et al.* (1997) estudou caos espaço-temporal de Alfvén em um regime modulacional dispersivo pela solução de um conjunto de Equações de onda acopladas. Buti *et al.* (1999) discutiram caos espaço-temporal em ondas de Alfvén não-lineares descritas pela Equação DNLS. Buti (1999) estudou a evolução espaço-temporal de ondas de Alfvén não-lineares em um plasma não-homogêneo, governado pela Equação DNLS. Krishan e Nocera (2003) usaram a Equação DNLS para estudar o relaxamento de uma turbulência de Alfvén evoluida da interação de quatro ondas e

a cascata inversa de energia para um estado com estruturas tipo sólitons. Uma série de artigos têm tratado a dinâmica da fase de ondas de alta dimensão para ondas de Alfvén não-lineares baseadas na Equação Kuramoto-Sivashinsky (CHIAN *et al.*, 2002a; REMPEL; CHIAN, 2003; REMPEL *et al.*, 2004a; REMPEL *et al.*, 2004c; REMPEL; CHIAN, 2005).

Neste Capítulo, estuda-se o papel representado pelas órbitas periódicas instáveis e selas caóticas na intermitência de Alfvén do tipo-I e na intermitência induzida por crise, baseado no modelo de baixa-dimensão de caos de Alfvén descrito pelas Equações (4.6)-(4.8). Um diagrama de bifurcação, que proporciona uma visão da dinâmica do sistema e sua sensível dependência a pequenas variações em um parâmetro de controle, pode ser construído a partir das soluções numéricas das Equações (4.6)-(4.8) pela variação do parâmetro dispersivo ν enquanto mantemos os outros parâmetros do sistema fixos ($a = 0.3$, $\Omega = -1$, $\lambda = 1/4$). Definimos um plano de Poincaré como:

$$P : [b_y(\tau), b_z(\tau)] \rightarrow [b_y(\tau + T), b_z(\tau + T)],$$

onde $T = 2\pi/\Omega$ é o período da fonte externa S . Este mapa de Poincaré representa o valor de \mathbf{b} a cada período $2\pi/\Omega$, conforme ilustrado na Figura (4.1). Este tipo de projeção definida em intervalos fixos de tempo é conhecida como projeção estroboscópica ou mapa de tempo T . Nos resultados apresentados neste Capítulo, foi usado o valor $\tau = 0$ para a fase inicial. A Figura (4.2.a) mostra uma visão global do diagrama de bifurcação de ondas de Alfvén não-lineares. Para um dado ν , a Figura (4.2.a) apresenta os valores assintóticos dos pontos de Poincaré de b_z , onde os transientes iniciais foram omitidos.

O espaço de fase das Equações (4.6)-(4.8) tem três dimensões, por isso o sistema tem três expoentes de Lyapunov, um dos quais é sempre zero (na direção tangente ao fluxo). Para os dois expoentes remanescentes, o expoente de Lyapunov máximo é menor que zero para uma órbita periódica estável, zero para uma órbita quase periódica, e maior que zero para uma órbita caótica. A Figura (4.2.b) mostra o expoente de Lyapunov máximo como uma função de ν , para o diagrama de bifurcação da Figura (4.2.a), calculado pelo algoritmo de Wolf *et al.* (1985). Segue da Figura (4.2.a) que o comportamento dinâmico global das ondas de Alfvén não-lineares contém uma mistura de regimes caóticos e ordenados, no qual existem janelas periódicas dentro de uma região caótica e regiões caóticas dentro de uma janela periódica.

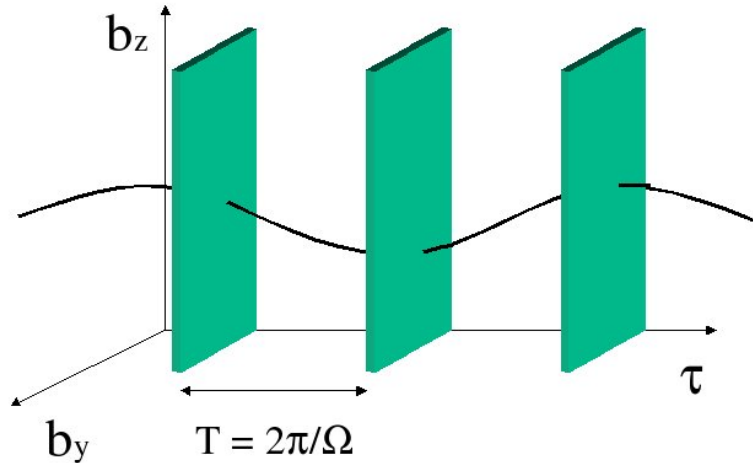


FIGURA 4.1 - Mapa de tempo $T = 2\pi/\Omega$ gerado pela interseção da órbita com um conjunto de planos transversos ao fluxo.

Uma ampliação de uma pequena região do diagrama de bifurcação indicada por uma seta na Figura (4.2.a) é apresentada na Figura (4.3.a), mostrando tanto o atrator (em preto) como a sela caótica (em cinza) para uma janela periódica de período-2. Esta janela periódica começa com uma bifurcação sela-nó (SNB) em $\nu_{SNB} = 0.07738$, onde um par de órbitas periódicas estáveis e instáveis de período-2 são criadas. A órbita periódica instável (linhas tracejadas) é encontrada pelo método de Newton (CURRY, 1979). A órbita periódica estável de período-2 sofre uma cascata de bifurcações de duplicação de período conforme ν diminui, transformando-se eventualmente em um atrator caótico de banda com duas bandas. Esta janela periódica termina com uma crise interior (IC) em $\nu_{IC} = 0.06212$, frente à colisão do atrator caótico de banda com a órbita periódica instável mediadora (M) criada pela bifurcação sela-nó SNB, que causa a expansão do atrator (BOROTTO *et al.*, 2004b). Para plotar a sela caótica, a cada valor de ν , graficamos uma trajetória próxima à sela caótica usando o algoritmo PIM triple (NUSSE; YORKE, 1989; REMPEL; CHIAN, 2004; REMPEL *et al.*, 2004b). A região cinza dentro da janela periódica na Figura (4.3.a) denota a sela caótica envolvente (SCS) que atua como o transiente anterior à convergência das soluções para um atrator periódico ou caótico; a sela caótica envolvente se estende para as regiões caóticas além da janela periódica, a esquerda de IC e a direita de SNB, onde ela seria um sub-conjunto do atrator caótico. Após a crise, o atrator caótico de banda é convertido em uma sela caótica de banda, como mostra a Figura (4.3.b). Na Figura (4.3.c), mostramos a variação do expoente de Lyapunov máximo do conjunto atrator como função de ν . Note que o valor do expoente de Lyapunov máximo salta subitamente em IC e SNB, implicando em um aumento abrupto no

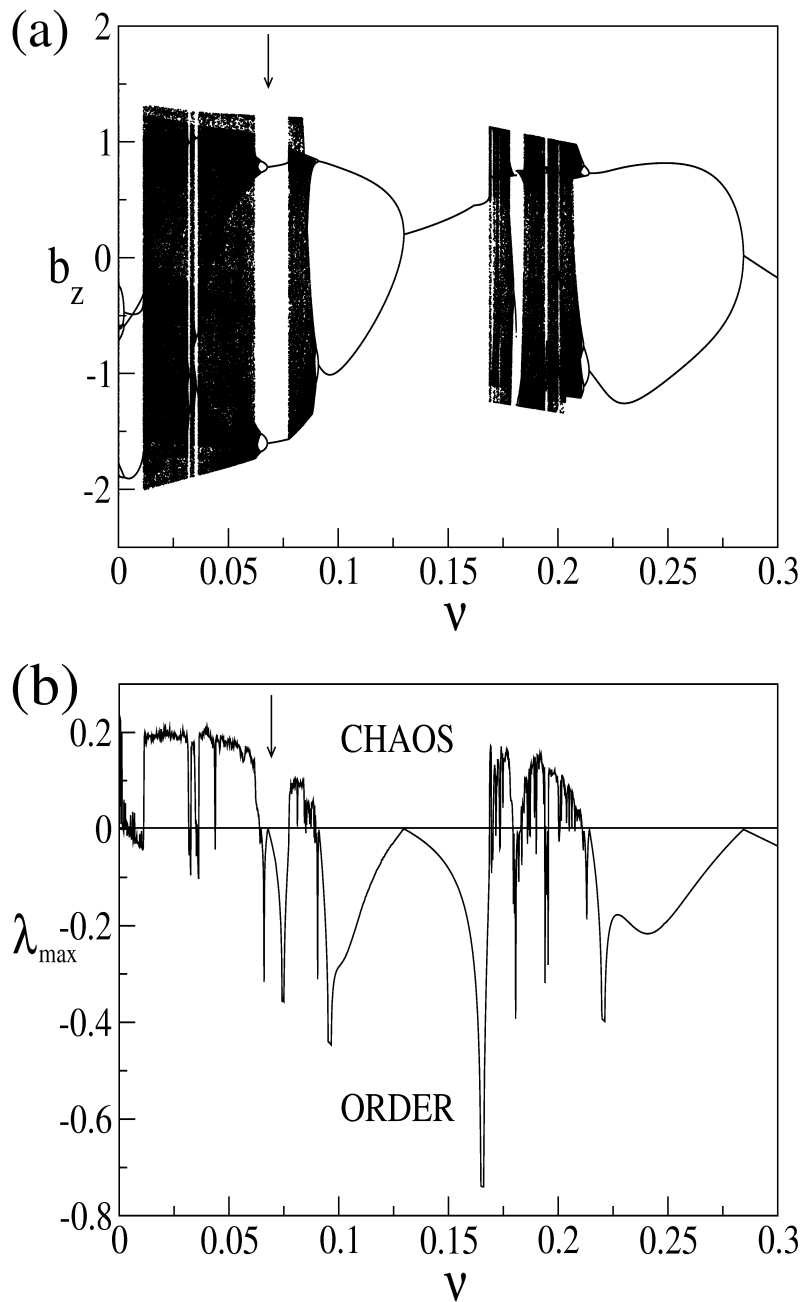


FIGURA 4.2 - Diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov máximo: visão global. (a) Diagrama de bifurcação, b_z como função de ν , (b) expoente de Lyapunov máximo λ_{max} como função de ν . Valores positivos de λ_{max} indicam um comportamento caótico e λ_{max} negativo indica ordem. As setas indicam uma janela periódica de período-2. Adotamos $a = 0.3$, $\Omega = -1$, $\lambda = 1/4$ e $\mu = 1/2$.

grau de caoticidade do sistema de Alfvén não-linear.

Órbitas periódicas instáveis são o esqueleto de um atrator caótico porque as trajetórias caóticas são fechamentos do conjunto infinito de órbitas periódicas instáveis

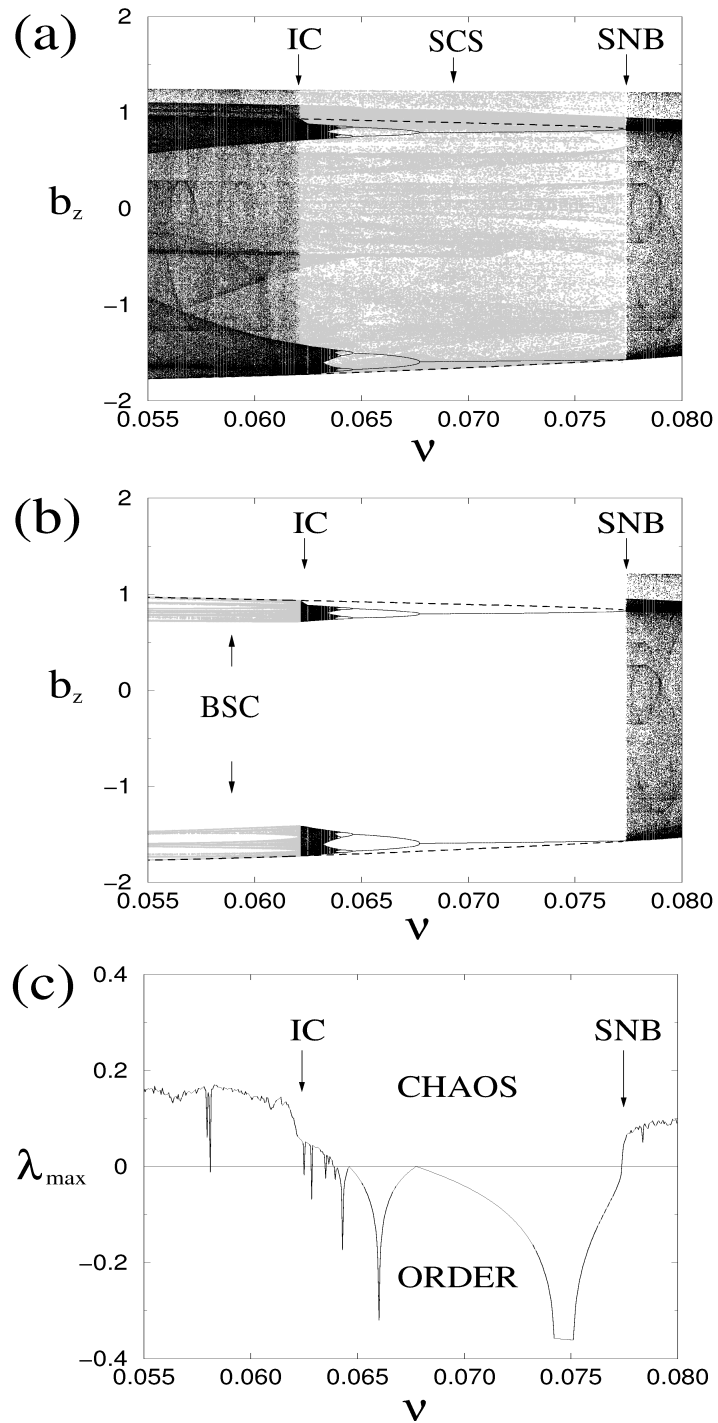


FIGURA 4.3 - Diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov máximo: janela periódica de período-2. (a) Diagrama de bifurcação, b_z como função de ν , superposto pela sela caótica envolvente (cinza); (b) mesmo que (a), mostrando a conversão depois da crise do atrator caótico de banda (preto) na sela caótica de banda após a crise (cinza); (c) expoente de Lyapunov máximo, λ_{max} em função de ν . IC denota a crise interior, SNB denota a bifurcação sela-nó, SCS denota a sela caótica envolvente e BCS denota a sela caótica de banda

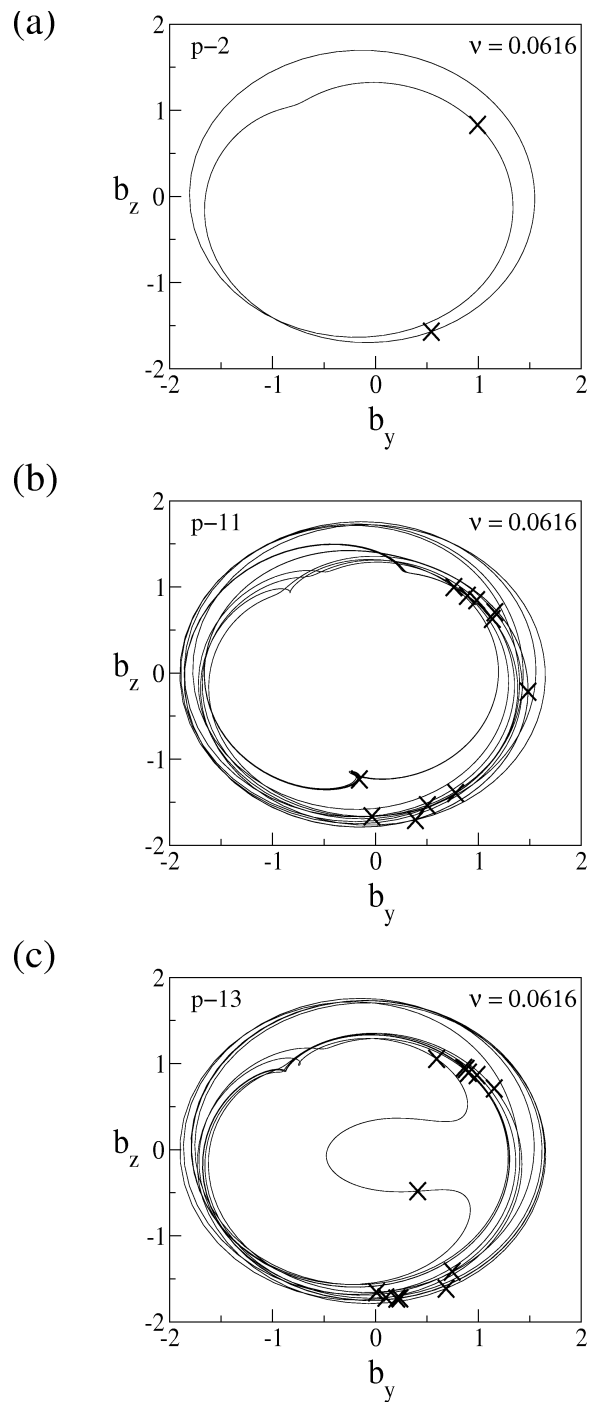


FIGURA 4.4 - Órbitas periódicas instáveis no espaço de fase e plano de Poincaré para $\nu = 0.0616$. (a) Órbita periódica instável mediadora de período-2 gerada via uma bifurcação sela-nó em $\nu = 0.07738$, (b) uma órbita periódica instável acopladora de período-11 gerada via explosão em $\nu = 0.0616$, (c) uma órbita periódica instável de período-13 gerada via explosão em $\nu = 0.0621$. As cruces denotam os pontos de Poincaré das órbitas periódicas instáveis.

(OTT, 1993). Em comparação com um atrator periódico, em que as trajetórias iniciadas em qualquer ponto do espaço de fase são atraídas para uma órbita periódica estável, em um atrator caótico todas as órbitas periódicas são instáveis. Conjuntos caóticos não são necessariamente conjuntos atratores. Um conjunto de órbitas periódicas instáveis podem ser caótico e não-atrator tal que as órbitas na vizinhança desse conjunto eventualmente são repelidas dele; este conjunto pode conter uma órbita caótica com ao menos um expoente de Lyapunov positivo (NUSSE; YORKE, 1989). Se a órbita caótica tem também um expoente de Lyapunov negativo o conjunto não-atrator é conhecido como sela caótica. Tanto a sela caótica quanto o atrator caótico são compostos de órbitas periódicas instáveis. As órbitas periódicas instáveis em um sistema caótico tem funções específicas. Por exemplo, iremos estudar a órbita periódica instável de período-2 (M) criada na SNB, que é responsável por mediar o início de uma crise interior em IC, conduzindo à intermitência Alfvênica induzida pela crise, bem como a fase laminar da intermitência de Alfvén tipo-I. Ainda, identificamos um conjunto de órbitas periódicas instáveis acopladoras (C), localizadas nas regiões vazias da sela caótica embebida em um atrator caótico, que são responsáveis por acoplar as selas caóticas, resultando na intermitência de Alfvén induzida por crise. Exemplos de órbitas periódicas mediadoras e acopladoras são mostradas na Figura (4.4.a) e Figuras (4.4.b)-(4.4.c), respectivamente, para $\nu = 0.0616$.

4.4 Intermitência de Alfvén Tipo-I

O comportamento característico da intermitência é o de um sinal que é regular durante um certo intervalo de tempo e que evolui para produzir um estouro geralmente caótico durante um breve tempo: o sistema retorna a seu estado regular e o processo recomeça novamente. O comportamento é caracterizado pelas fases laminares e pelos estouros, e sobretudo pela distribuição aleatória da duração dos períodos regulares.

Como mencionado anteriormente, uma bifurcação local conhecida como bifurcação sela-nó ocorre em $\nu_{SNB} = 0.07738$ na Figura (4.3.a), onde um par de órbitas periódicas estáveis e instáveis de período-2 são criadas. A Figura (4.5.a) mostra uma série temporal de período-2, para um trem de ondas de Alfvén não-lineares em $\nu = 0.07738$; a mesma série temporal do mapa de Poincaré é mostrada na Figura (4.5.b); o correspondente espectro de potência como função da frequência das ondas é dado na Figura (4.5.c), que apresenta picos discretos típicos de um sinal periódico. À direita de ν_{SNB} , o sistema é caótico. A Figura (4.5.d) mostra uma série temporal caótica da intermitência de Alfvén tipo-I para $\nu = 0.07739$; a mesma série tem-

poral dos pontos de Poincaré é apresentada na Figura (4.5.e); seu correspondente espectro de potência pode ser visto na Figura (4.5.f). As séries temporais da intermitência de Alfvén do tipo-I nas Figuras (4.5.d)-(4.5.e) demonstram que as flutuações na amplitude de b_z envolvem regimes que permutam entre períodos de flutuações laminares e períodos de flutuações explosivas. Em comparação com o espectro de potência discreto do regime periódico visto na Figura (4.5.c), o espectro de potência do regime caótico antes da bifurcação sela-nó é mais denso, refletindo a excitação de novas frequências de ondas no surgimento do caos, com um comportamento da lei de potência em altas frequências, similar ao espectro de potência de intermitência Alfvênica observada no vento solar.

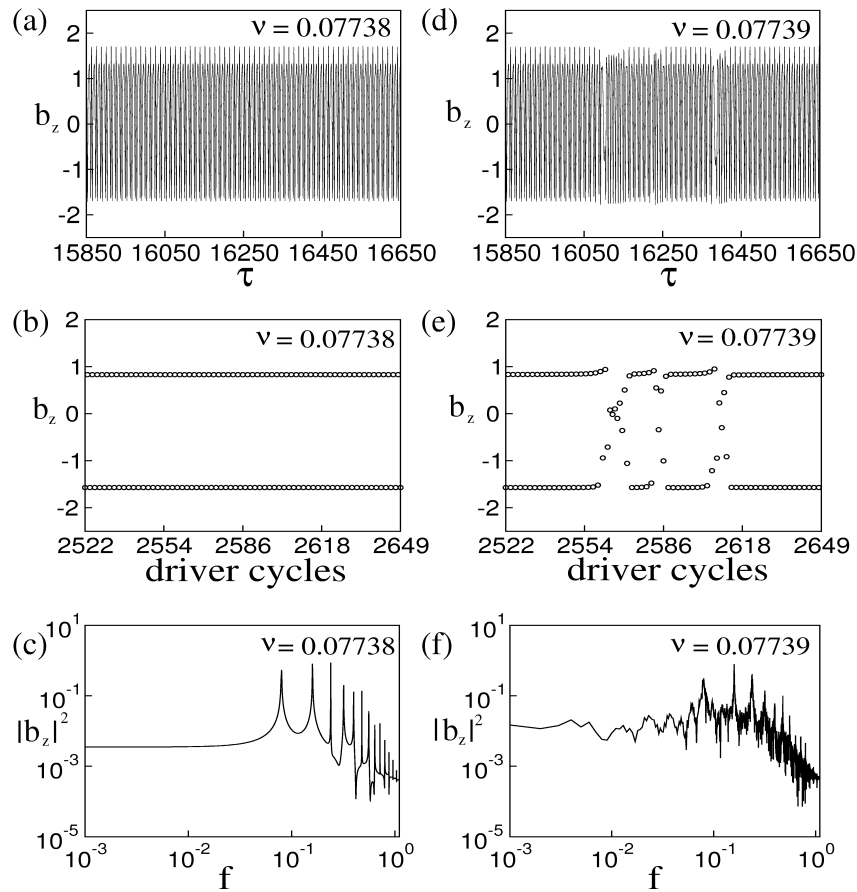


FIGURA 4.5 - Intermittência de Alfvén tipo-I. (a) e (d): Série temporal de b_z em função de τ para $\nu = 0.07738$ e $\nu = 0.07739$, respectivamente; (b) e (e): mesmas séries temporais que (a) e (d), mas com b_z em função dos pontos de Poincaré; (e) e (f): espectros de potência de (a) e (d), respectivamente.

Conforme o sistema de Alfvén sofre uma transição de ordem para caos via uma bifurcação sela-nó, a sela caótica envolvente é convertida em um atrator caótico,

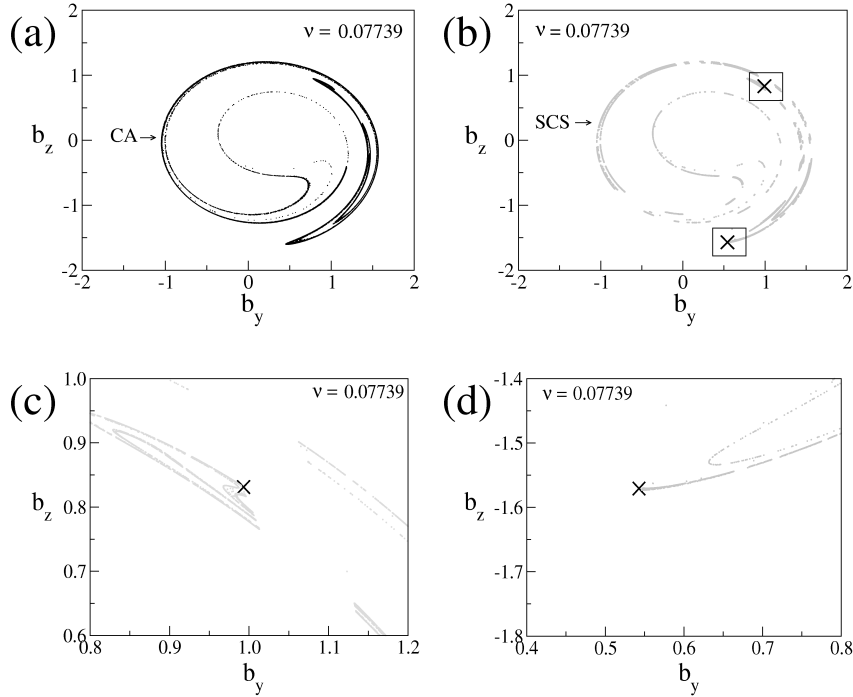


FIGURA 4.6 - Atrator caótico e sela caótica na intermitência de Alfvén tipo-I para $\nu = 0.07739$. (a) Mapa de Poincaré do atrator caótico (CA); (b) sela caótica envolvente (SCS, em cinza) do atrator caótico de (a); (c) e (d): ampliações das duas regiões retangulares de (b). As cruzes denotam o local dos pontos de Poincaré da órbita periódica instável mediadora de período-2 criada via uma bifurcação sela-nó em $\nu_{SNB} = 0.07738$.

como mostrado na Figura (4.3.a). A Figura (4.6.a) mostra o atrator caótico (CA) no plano de Poincaré para $\nu = 0.07739$. A sela caótica envolvente presente no atrator caótico da Figura (4.6.a) é mostrada na Figura (4.6.b), onde nós também graficamos as coordenadas dos pontos fixos (cruzes) das órbitas periódicas instáveis de período-2 (M), antes da transição para caos, em $\nu_{SNB} = 0.07738$. Diferente de M, todas as outras órbitas periódicas instáveis contidas na sela caótica envolvente à direita da bifurcação sela-nó continuam a existir na região caótica além da bifurcação sela-nó ($\nu > \nu_{SNB}$). Note da Figura (4.6.b) que existem intervalos (ou buracos) na sela caótica envolvente. A conversão de uma sela caótica para um atrator caótico, à direita de ν_{SNB} , é devido a criação de novas órbitas periódicas instáveis nas regiões dos buracos via o fenômeno de explosão (ROBERT *et al.*, 2000; SZABÓ *et al.*, 2000). Uma ampliação das duas regiões da Figura (4.6.b) é dada nas Figuras (4.6.c) e (4.6.d), respectivamente. Quando uma órbita periódica instável, tanto da sela caótica envolvente quanto das regiões vazias da Figura (4.6.b), aproxima-se da vizinhança de M, ela é desacelerada e permanece mais tempo nestas regiões, indicadas pelas Figuras (4.6.c)-(4.6.d). Isto se deve à sincronização das órbitas periódicas instáveis do atrator

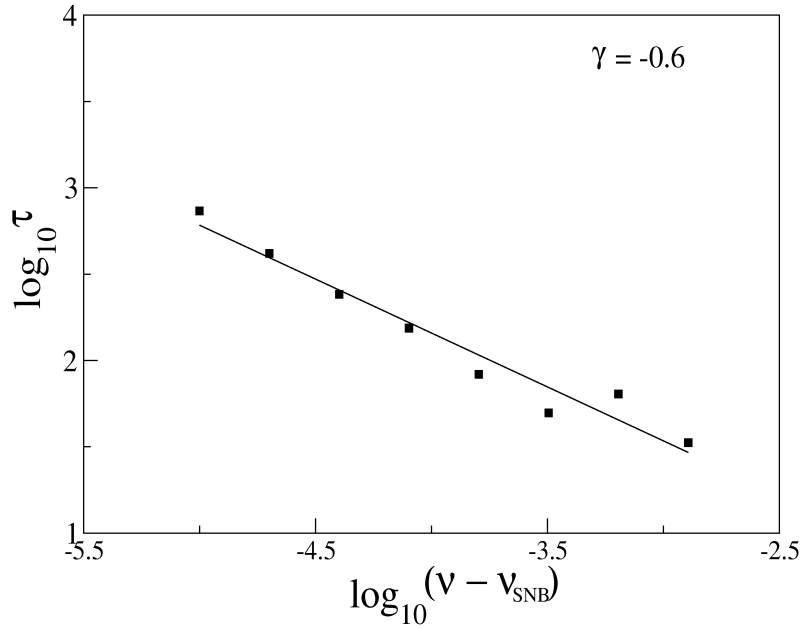


FIGURA 4.7 - Tempo de intermitência característico para a intermitência de Alfvén tipo-I. $\log_{10} \tau$ como função de $\log_{10}(\nu - \nu_{SNB})$.

caótico com M , que dá origem aos períodos laminares da intermitência de Alfvén tipo-I vistas nas Figuras (4.5.d)-(4.5.e). Quando uma órbita caótica se move sobre as regiões mostradas nas Figura (4.6.c)-(4.6.d), a órbita não estaria sincronizada com relação a M e se moveria livremente ao longo da sela caótica envolvente, dando então origem aos períodos de flutuações vistas nas Figuras (4.5.d)-(4.5.e).

A duração média dos períodos laminares (quiescentes) nas séries temporais da intermitência de Alfvén tipo-I vistas nas Figuras (4.5.d) e (4.5.e), conhecida como tempo de intermitência característico, depende do desvio do parâmetro de controle ν com relação a ν_{SNB} . O tempo característico da intermitência τ pode ser determinado tomando-se a média sobre uma longa série temporal dos intervalos de tempo da permutação dos regimes laminares e explosivos. A Figura (4.7) mostra um gráfico de $\log_{10} \tau$ em função de $\log_{10}(\nu - \nu_{SNB})$, onde a linha sólida com uma inclinação $\gamma = -0.6$ é um ajuste linear dos valores do tempo característico da intermitência τ , diminuindo com a distância do parâmetro crítico do sistema ν_{SNB} , seguindo um decaimento do tipo lei de potência, $\tau \sim (\nu - \nu_{SNB})^\gamma$.

4.5 Intermitência de Alfvén Induzida por Crise

Uma bifurcação global conhecida como crise interior (IC) ocorre em $\nu = 0.06212$, como visto na Figura (4.3.a), que conduz a uma expansão do atrator caótico. A

ocorrência de crise interior se deve à colisão do atrator caótico de banda com a órbita periódica instável mediadora de período-2 (M) criada via bifurcação sela-nó em ν_{SNB} . A Figura (4.8.a) mostra a sela caótica envolvente SCS (em cinza), e o atrator caótico de banda CA (em preto) localizado em duas regiões separadas do espaço de fase, para $\nu = 0.06212$. As Figuras (4.8.b)-(4.8.c) são ampliações das duas regiões retangulares da Figura (4.8.a), respectivamente, mostrando os pontos de Poincaré (cruzes) e suas variedades estáveis SM (linha clara). A variedade estável das órbitas periódicas instáveis mediadoras forma o contorno entre as regiões de banda e as regiões envolventes. As Figuras (4.8.b) e (4.8.c) revelam que no início da crise o atrator caótico colide com a órbita periódica mediadora e sua variedade estável, bem como com a sela caótica envolvente.

Um exemplo de série temporal fracamente caótica, pré-crise, é dada nas Figuras (4.9.a)-(4.9.b), e seu correspondente espectro de potência é dado na Figura (4.9.c), para $\nu = 0.06212$. Antes da crise, as Figuras (4.9.a) e (4.9.b) mostram que as flutuações temporais da amplitude das ondas de Alfvén são aparentemente laminares. A crise interior leva o sistema para um regime de caos forte, para ν menor que ν_{IC} , o que induz uma série temporal intermitente, exemplificada nas Figuras (4.9.d)-(4.9.e) para $\nu = 0.0616$; o correspondente espectro de potência é apresentado na Figura (4.9.f). A intermitência de Alfvén induzida por crise das Figuras (4.9.d)-(4.9.e) apresentam uma permutação aleatória entre períodos laminares e explosivos para as flutuações da amplitude. Uma comparação entre os espectros de potência pré- e pós-crise mostrados nas Figuras (4.9.c) e (4.9.f) revela que a presença de picos discretos é menos evidente na Figura (4.9.f) que na Figura (4.9.c), o que implica que as interações não-lineares são mais fortes após a crise.

Como consequência da colisão do atrator com a sela caótica, após o início da crise interior o atrator caótico de banda pré-crise se transforma em um atrator caótico forte pós-crise, como mostra a Figura (4.10.a) para $\nu = 0.0616$. Presente no atrator caótico forte estão duas selas caóticas (envolvente e de banda) e órbitas periódicas acopladoras criadas após a crise. A Figura (4.10.b) apresenta a sela caótica envolvente encontrada numericamente (SCS, em cinza), a sela caótica de banda (BSC, em preto) e os pontos fixos da órbita periódica instável mediadora de período-2 (cruzes). Ampliações das duas regiões retangulares da Figura (4.10.b) são graficadas nas Figuras (4.10.c) e (4.10.d), respectivamente, juntamente com as órbitas mediadoras (cruzes) e suas variedades estáveis (SM, linhas finas), que divide o espaço de fase

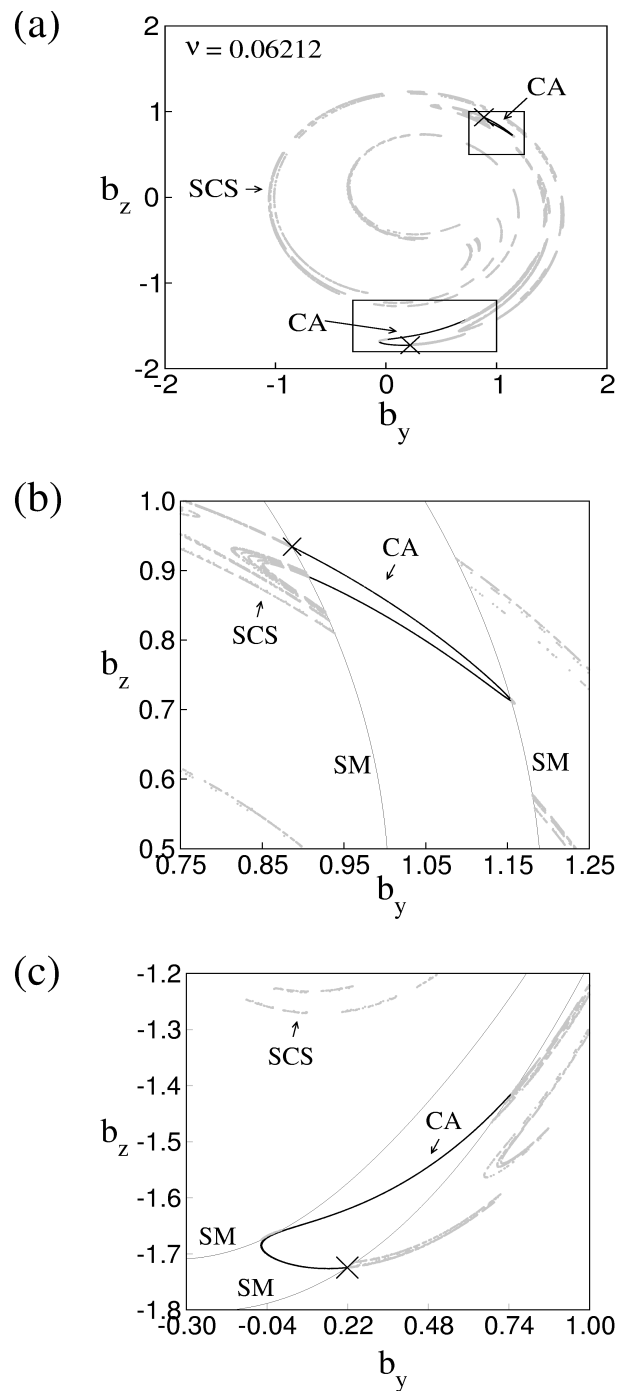


FIGURA 4.8 - Crise interior de Alfvén em $\nu = 0.06212$. (a) Mapa de Poincaré do atrator caótico de banda (CA, em preto) e sela caótica envolvente (SCS, em cinza); (b) e (c): ampliações das duas regiões retangulares de (a). As cruzes denotam os pontos de Poincaré das órbitas periódicas instáveis mediadoras de período-2 e SM (linha fina) denota sua variedade estável.

em uma região de banda e uma região envolvente.

Note-se das Figuras (4.10.b)-(4.10.d) que existem vazios nas selas caóticas envol-

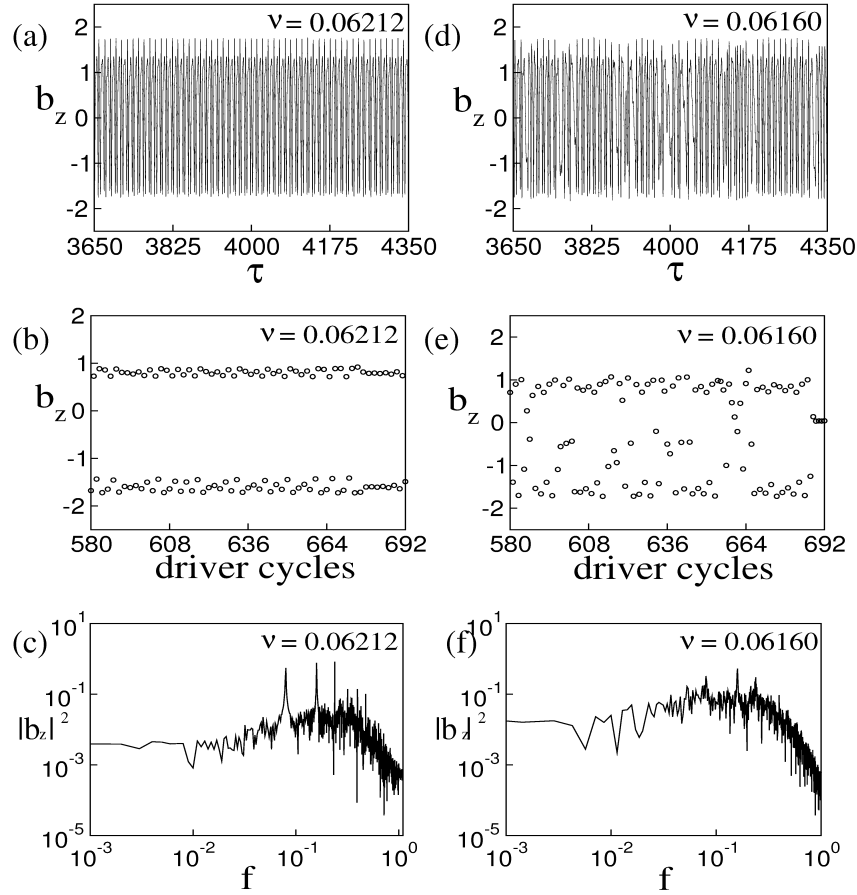


FIGURA 4.9 - Intermitência de Alfvén induzida pela crise. (a) e (d): Séries temporais b_z em função de τ para $\nu = 0.06212$ e $\nu = 0.06160$, respectivamente; (b) e (e): mesmas séries temporais que em (a) e (d), com b_z em função dos pontos de Poincaré; (c) e (f) mostram os respectivos espectros de potência de (a) e (d).

ventes e de banda. Esses vazios são densamente preenchidos por inúmeras órbitas periódicas acopladoras (C), criadas por explosão após o início da crise interior (ROBERT *et al.*, 2000; SZABÓ *et al.*, 2000), que têm componentes tanto na região de banda quanto na região envolvente, e que são responsáveis pelo acoplamento entre as duas regiões. Nós encontramos numericamente dois exemplos de órbitas periódicas instáveis acopladoras. A Figuras (4.11.a) apresenta uma órbita periódica de período-11 em $\nu = 0.0616$, que é criada via explosão neste valor de ν . Ampliações das duas regiões retangulares da Figura (4.11.a) são dadas nas Figuras (4.11.b) e (4.11.c), respectivamente. A Figura (4.12.a) mostra uma órbita periódica instável acopladora de período-13 em $\nu = 0.0621$, que é criada via explosão em $\nu = 0.0621$. Ampliações das regiões retangulares da Figura (4.12.a) são dadas nas Figuras (4.12.b) e (4.12.c), respectivamente. As Figuras (4.11) e (4.12) mostram que os pontos fixos das órbitas periódicas instáveis acopladoras estão localizadas nos vazios das regiões das selas

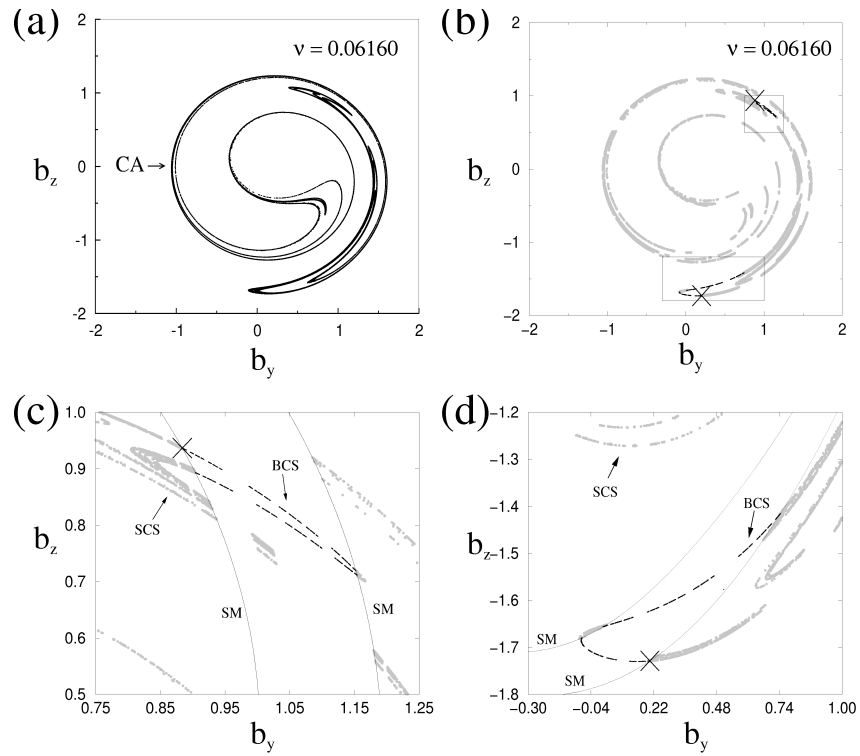


FIGURA 4.10 - Atrator caótico e sela caótica na intermitência de Alfvén induzida pela crise para $\nu = 0.0616$. (a) Mapa de Poincaré do atrator caótico (CA); (b) sela caótica envolvente (SCS, em cinza) e a sela caótica de banda (BCS, em preto) embebendo o atrator caótico de (a); (c) e (d): ampliações das duas regiões retangulares de (b). As cruzes denotam os pontos de Poincaré das órbitas periódicas instáveis mediadoras de período-2 e SM (linha fina) denota sua variedade estável.

caóticas envolventes e de banda. Suas trajetórias no espaço de fase são apresentadas nas Figuras (4.4.b) e (4.4.c), respectivamente.

A duração média dos períodos laminares (quiescentes) nas séries temporais da intermitência de Alfvén induzida pela crise vistas nas Figuras (4.9.d) e (4.9.e), isto é, o tempo característico da intermitência, depende do desvio do parâmetro de controle ν a partir de ν_{IC} , diminuindo conforme ν se afasta de ν_{IC} . O tempo característico τ pode ser determinado tomando-se a média sobre uma série temporal longa, e calculando-se o intervalo de tempo entre as permutações dos períodos laminares e os estouros. A Figura (4.13) apresenta um gráfico de $\log_{10} \tau$ em função de $\log_{10}(\nu_{IC} - \nu)$, onde a linha sólida com uma inclinação $\gamma = -0.78$ é um ajuste linear dos valores do tempo característico intermitente. A Figura (4.13) revela que o tempo característico de intermitência τ diminui com a distância do valor crítico do parâmetro do sistema ν_{IC} , seguindo um decaimento do tipo lei de potência, $\tau \sim (\nu_{IC} - \nu)^\gamma$. Uma comparação entre as Figuras (4.7) e (4.13) indica que a diminuição de τ com o desvio a

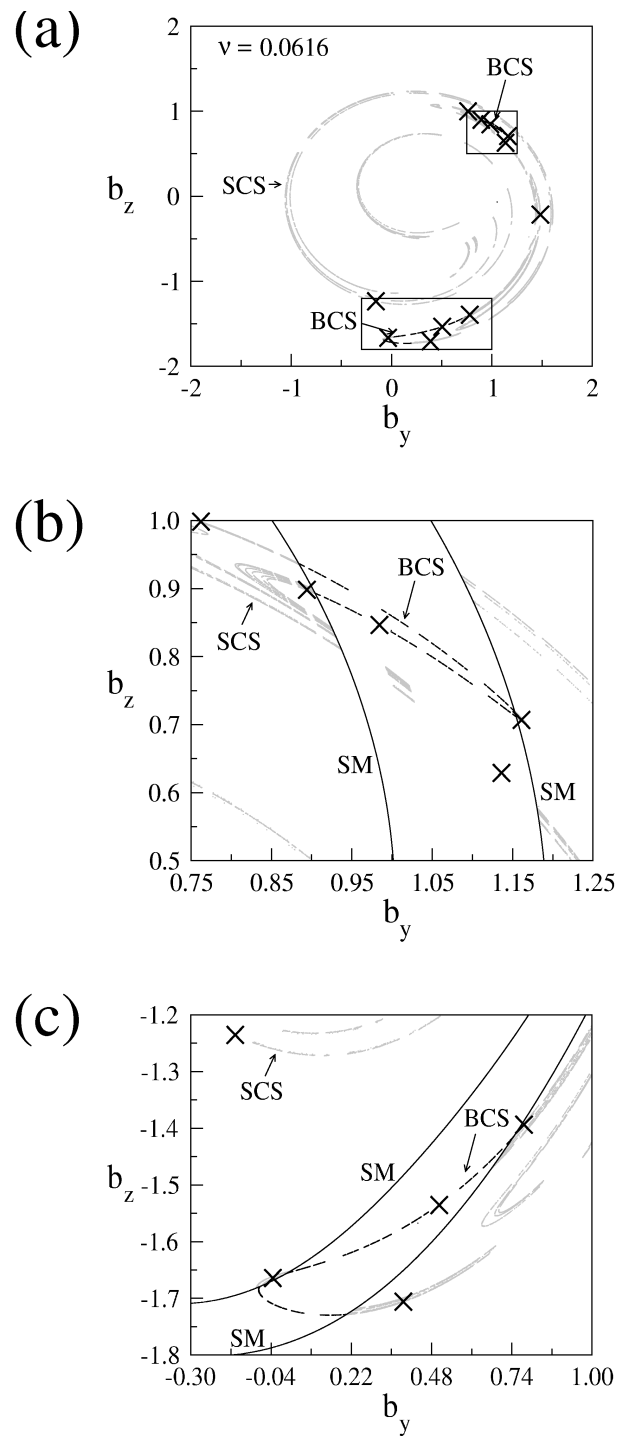


FIGURA 4.11 - Órbita periódica instável acopladora para a intermitência de Alfvén induzida pela crise em $\nu = 0.0616$. (a) Uma órbita periódica instável acopladora de período-11 (cruzes) criada via explosão em $\nu = 0.0616$, (b) e (c): ampliações das duas regiões retangulares de (a). A sela caótica envolvente (SCS) está em cinza, a sela caótica de banda em preto e SM (linha fina) denota a variedade estável da órbita periódica instável mediadora de período-2.

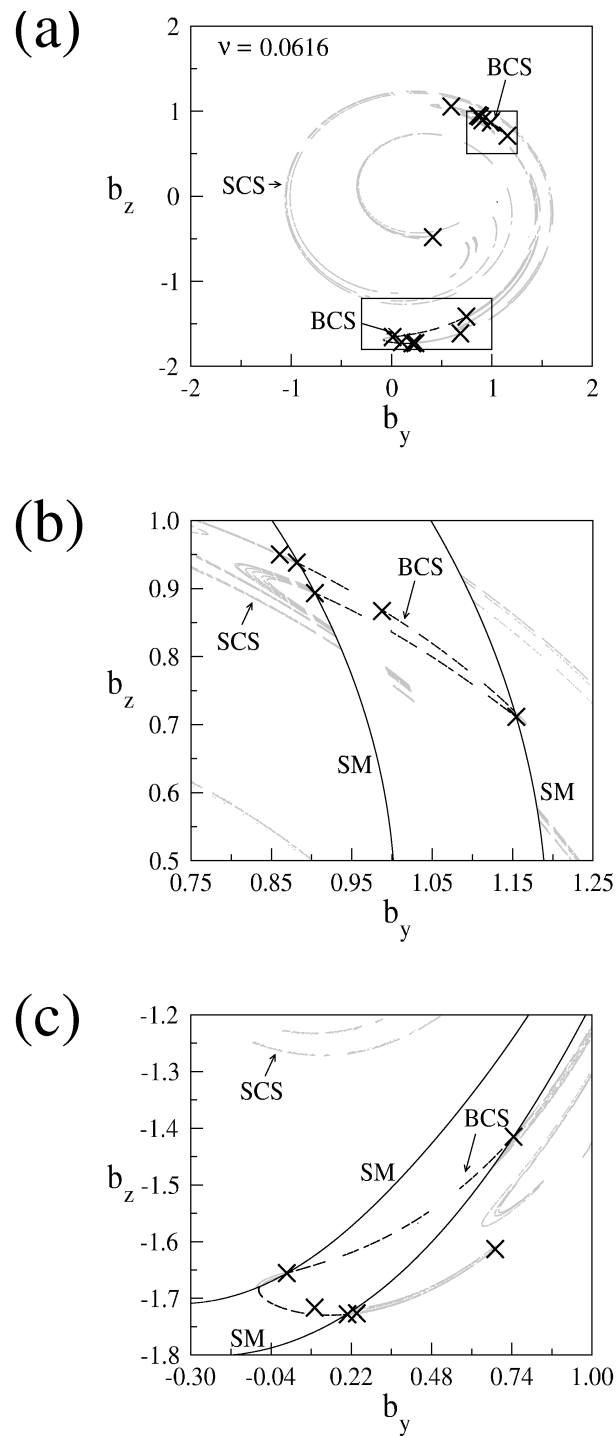


FIGURA 4.12 - Órbita periódica instável acopladora para a intermitência de Alfvén induzida pela crize em $\nu = 0.0616$. (a) Uma órbita periódica instável acopladora de período-13 criada via explosão em $\nu = 0.0621$, (b) e (c): ampliações das duas regiões retangulares de (a). A sela caótica envolvente (SCS) está em cinza, a sela caótica de banda em preto e SM (linha fina) denota a variedade estável da órbita periódica instável mediadora de período-2.

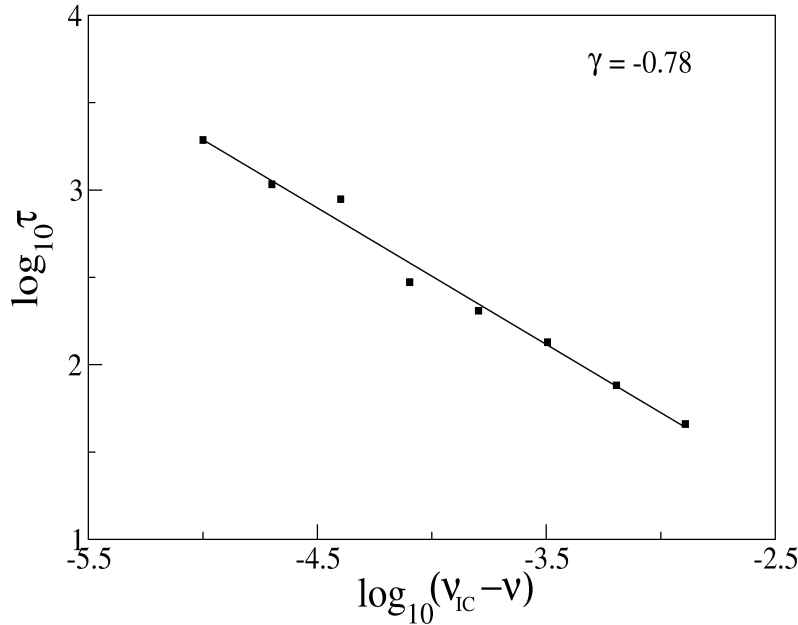


FIGURA 4.13 - Tempo de intermitência característico da intermitência de Alfvén induzida pela crise. $\log_{10} \tau$ em função de $\log_{10}(\nu_{IC} - \nu)$.

partir do ponto de bifurcação (ν_{IC}/ν_{SNB}) é mais rápida na intermitência de Alfvén induzida pela crise que na intermitência de Alfvén do tipo-I.

4.6 Discussão

Ondas de Alfvén interplanetária de grande amplitude podem causar intensas atividades aurorais conhecidas como HILDCAAs, como um resultado da reconexão magnética entre as componentes sul do campo magnético B_z para ondas de Alfvén interplanetárias e o campo magnético da magnetopausa, que é responsável pela transferência de energia do vento solar para a magnetosfera. Durante os intervalos da HILDCAA, existe uma correlação próxima entre o mínimo de B_z e o máximo do índice do eletrojato auroral (AE) (TSURUTANI; GONZALEZ, 1987). Em comparação com o máximo solar, cujo fenômeno interplanetário dominante que causa intensas tempestades geomagnéticas são as manifestações interplanetárias de ejeção de massa coronal (ICME), durante o mínimo solar as ondas de Alfvén interplanetárias associadas com regiões de interação corrotacionais (CIRs), originadas a partir da interação dos feixes de alta velocidade emanados dos buracos coronais com os feixes de baixa velocidade, são as causas dominantes da intermitência na reconexão do campo magnético, das intermitentes atividades aurorais, e da injeção intermitente de energia da lâmina de plasma em outras regiões da corrente de anel, assinaturas dos eventos HILDCAA (GONZALEZ *et al.*, 1999). Tsurutani *et al.* (2004) notou que intervalos da

HILDCAA mais curtos podem ocorrer seguindo uma tempestade geomagnética relacionada a ICME; em particular, eles apontaram que embora sub-tempestades fossem detectadas durante os intervalos da HILDCAA, há pouca ou nenhuma relação entre a ocorrência de sub-tempestades e aumento do índice AE, podendo assim os mecanismos que causam HILDCAA e as subtempestades serem diferentes. Diego *et al.* (2005) apresentou evidências das flutuações de AE diretamente devido às ondas de Alfvén interplanetárias, examinando a variabilidade do índice AE durante 12 passagens dos feixes de vento rápido corrotacionais na Terra durante a fase ascendente do ciclo solar 23; ele aplicou a técnica da Transformada de Fourier Discreta para demonstrar que tanto as flutuações Alfvênicas do campo magnético interplanetário medidas pela espaçonave ACE quanto o índice AE têm periodicidades que variam de 1 a 10 horas; em particular, suas análises mostram que em todos os eventos das flutuações do campo magnético das ondas de Alfvén interplanetárias e do índice AE estão bem correlacionadas. Tsurutani *et al.* (2005) mostraram que ondas de Alfvén não-lineares, descontinuidades, aceleração perpendicular de prótons, e buracos magnéticos no espaço interplanetário estão correlacionados; além disso, ondas de Alfvén interplanetárias são tanto dispersivas quanto dissipativas, indicando que elas poderiam intermediar choques (WU, 2003); a turbulência criada pela dissipação das ondas de Alfvén é relativamente complexa, contendo tanto produtos propagantes (ondas) quanto não-propagantes (diminuição magnética).

A Equação de Schrödinger não-linear derivativa (4.1) que é a base desta dissertação contém os efeitos de dispersão (μ) e dissipação (η), observados nas ondas de Alfvén interplanetárias por Tsurutani *et al.* (2005). Conseqüentemente, a Equação DNLS é um bom modelo para estudar a evolução não-linear das ondas de Alfvén de grande amplitude no vento solar. O presente Capítulo confirmou as análises anteriores de Chian *et al.* (1998) e Borotto *et al.* (2001) de que a Equação DNLS fornece entendimento sobre a intermitência de Alfvén devido ao caos, mostrando como comportamento intermitente, tal como intermitência de Alfvén tipo-I e intermitência de Alfvén induzida pela crise, podem surgir no plasma. Como apontado na Seção 1, inúmeros artigos têm caracterizado intermitência de Alfvén interplanetária usando a aproximação estática (MARSCH; LIU, 1993; MARSCH; TU, 1994; SORRISO-VALVO *et al.*, 1999; BRUNO *et al.*, 2001; BRUNO *et al.*, 2004). A aproximação de sistemas dinâmicos adotada neste Capítulo complementa a descrição estatística de intermitência de Alfvén interplanetária. Em particular, tivemos êxito na caracterização de aspectos fundamentais da intermitência Alfvênica pela decomposição de um atrator caótico

em estruturas instáveis fundamentais, consistindo das selas caóticas e órbitas periódicas instáveis. Esta aproximação nos possibilitou calcular a duração média dos períodos quiescentes na intermitência Alfvênica, que está relacionada às propriedades dinâmicas das selas caóticas embebidas no atrator caótico de Alfvén (REMPEL; CHIAN, 2005). Desde que as ondas de Alfvén interplanetárias possam dar origem às intensas atividades geomagnéticas tais como HILDCAAs, além do fato das ondas de Alfvén interplanetárias possuírem uma natureza intermitente, o método introduzido neste Capítulo nos permite prever a duração média dos períodos quiescentes da intermitência Alfvênica interplanetária via simulações numéricas, podendo ainda ser aproveitado como prognóstico dos saltos abruptos no índice do Eletrojato Auroral, e conseqüentemente, para previsões espaço temporais da atividade geomagnética.

Na Capítulo 2, brevemente foram apresentados alguns trabalhos em caos no vento solar, coroa solar, dando ênfase à intermitência no plasma espacial. Discutimos agora em detalhes as evidências observacionais e teóricas da natureza caótica na Heliosfera. Primeiro, foquemos no Sol e no vento solar. Uma análise das séries temporais das pulsações de rádio solar feitas por Kurths e Herzog (1987) sugere que poderia haver um atrator caótico de baixa-dimensão. Mundt *et al.* (1991) aplicou a técnica de reconstrução do atrator para mostrar que o ciclo de manchas solares é caótico e de baixa dimensão. Kurths e Schwarz (1994) aplicaram a técnica de *wavelet* para identificar diferenças estruturais do processo de energização que causa impulsivos estouros de micro-ondas solares que são um típico fenômeno transiente. Macek e Radaelli (2001) obtiveram evidências de caos nas flutuações Alfvênicas interplanetárias usando dados da Helios. Radaelli e Macek (2001) mostraram que a influência de ruído nos dados da Helios pode ser reduzida por um filtro não-linear, permitindo então determinar valores positivos do maior expoente de Lyapunov e a entropia Kolmogorov, o que indicaria caos no fluxo do vento solar. Lei e Meng (2004) mostraram que o ciclo de manchas solares é de baixa dimensão e caótico.

Agora vamos à magnetosfera. Baker *et al.* (1990) interpretou a evolução da atividade geomagnética de fraca para forte em termos de caos determinístico. Uma análise de dimensão de correlação do índice AE realizada por Vassiliadis *et al.* (1991) mostrou que a magnetosfera se comporta como um sistema caótico de baixa dimensão; seus cálculos do expoente de Lyapunov para o índice AL mostraram que ele é maior que zero, indicando um comportamento caótico do sistema magnetosférico. Klimas *et al.* (1992) desenvolveu um modelo análogo de dinâmica não linear da atividade geomag-

nética da cauda magnética, que é capaz de exibir uma transição de comportamento regular para caótico. Pavlos *et al.* (1992) utilizou a estimativa da dimensão de correlação e maior expoente de Lyapunov para obter evidência de atratores caóticos tanto nos dados da magnetosfera quanto para os do vento solar. Sharma (1995) avaliou o comportamento não-linear da magnetosfera e analisou sua baixa dimensionalidade e predictabilidade. Klimas *et al.* (1996) discutiu como combinar um modelamento análogo de baixa dimensão e reconstrução do espaço de fase a partir de uma base de dados para estudar a dinâmica não-linear no acoplamento da magnetosfera com o vento solar. Pavlos *et al.* (1999) manteve uma análise não-linear do índice AE, obtendo uma base da dinâmica magnetosférica caótica. Horton *et al.* (2001) derivou um modelo de dinâmica não-linear de baixa dimensão para o vento solar conduzido pela magnetosfera-ionosfera, que exhibe propriedades básicas de um sistema dinâmico complexo, tal como caos, e pode ser usado para prever subtempestades. Chian *et al.* (2000) e Chian *et al.* (2002) mostraram que caos pode aparecer em um modelo de três ondas para a emissão de rádio magnetosférico envolvendo interações não-lineares de ondas de Langmuir, whistler e Alfvén na região de aceleração auroral, podendo gerar intermitência tipo-I e intermitência induzida pela crise no plasma auroral. Athanasiu *et al.* (2003) obteve evidências de caos nas séries temporais de íons magnetosféricos energéticos baseado nos modelos do espectro de Lyapunov, informação mútua e predição. Kuo *et al.* (2004) estudou o comportamento caótico das trajetórias dos elétrons relativísticos aprisionados interagindo com ondas whistler na magnetosfera; uma técnica de seção de superfície foi usada para examinar a caoticidade do sistema graficamente.

Agora, vamos para a ionosfera e atmosfera superior. Huba *et al.* (1985) mostrou que as Equações de plasma descrevendo a turbulência ionosférica devido a instabilidades alternantes podem ser reduzidas para o mesmo conjunto de Equações que o atrator de Lorenz (LORENZ, 1963). Bhattacharyya (1990) apresentou evidência observacional do comportamento caótico da turbulência ionosférica a partir de medidas de cintilação. Hall *et al.* (1992) identificou um atrator caótico com uma dimensão fractal em torno de 5 em medidas *in situ* feitas com foguetes para as flutuações de densidade relativa de íons na turbulência mesosférica, entre 63 e 72 km de altura. Kumar *et al.* (2004) reportou evidências de caos de baixa-dimensão no comportamento dinâmico das séries temporais das flutuações do conteúdo total de elétrons (TEC) medido em uma estação de alta latitude, usando os recursos gráficos das ferramentas não-lineares, entropia espaço-temporal e expoente de Lyapunov.

Embora este Capítulo tenha concentrado na análise da intermitência de Alfvén produzida pelo caos, sobre o ponto de vista da natureza matemática dos sistemas caóticos, os resultados obtidos do modelo de baixa dimensão do sistema de Alfvén podem, de fato, ser aplicados a outros processos não-lineares da física da Heliosfera. As técnicas vistas aqui para decompor uma intermitência Alfvênica em termos da sela caótica e órbitas periódicas instáveis podem ser facilmente aplicadas a outros tipos de intermitência de plasma espacial devido ao caos.

CAPÍTULO 5

COMPLEXIDADE ALFVÊNICA

Neste Capítulo nós investigamos o efeito do ruído na dinâmica das ondas de Alfvén não-lineares descritas pela Equação de Schrödinger não-linear derivativa (DNLS). Em uma região complexa do espaço de fase, onde uma competição entre regimes multi-estáveis é observada, uma fonte estocástica pode efetivamente tanto destruir atratores presentes no sistema livre de ruído, bem como induzir intermitência extrínseca. No regime intermitente as ondas de Alfvén exibem uma variação qualitativa aleatória em seu comportamento como um resultado da competição entre três atratores e uma sela caótica presente no contorno fractal das suas bacias de atração.

5.1 Introdução

Apresentamos aqui uma análise das ondas de Alfvén sob a influência do ruído em um sistema que apresenta multi-estabilidade. Multi-estabilidade refere-se à presença simultânea de mais de um atrator para uma dada configuração dos parâmetros de controle. Atratores são estados assintóticos em sistemas dissipativos, e multi-estabilidade pode ser um obstáculo à predição do comportamento do sistema, já que este estado assintótico dependeria criticamente das condições iniciais tomadas, caracterizando fielmente um sistema caótico, ou seja, sua sensibilidade a condições iniciais.

Na ausência de ruído, dizemos que estamos lidando com um sistema perfeitamente determinístico. Se o ruído está presente, então um sistema que esteja próximo, mas não ainda em uma região de crise, pode apresentar comportamento intermitente induzido pelo ruído. Em qualquer sistema físico real, ruído externo está sempre presente, e eventualmente, irá causar transição entre atratores previamente estáveis. Conforme o nível de ruído aumenta, o transiente entre os atratores irá diminuir.

A transição entre os atratores induzida pelo ruído é irregular no tempo e semelhante ao que ocorre em sistemas determinísticos devido à variação de um dado parâmetro de controle. Se o ruído for muito fraco, sua influência na dinâmica do sistema pode estar limitada a escalas muito pequenas, fazendo com que ele se comporte ainda de forma determinística. No entanto, à medida que a intensidade do ruído aumenta, vemos que movimentos que antes eram claramente periódicos tornam-se aparentemente caóticos, podendo ocorrer então intermitência induzida pelo ruído.

A intermitência induzida pelo ruído é de grande interesse em sistemas experimentais com múltiplos estados estacionários. Ela ocorre sempre que um sistema está permutando entre diferentes atratores devido a presença de uma fonte estocástica externa (GWINN; WESTERVELT, 1986a).

5.2 Multi-Estabilidade na Equação DNLS

O sistema não linear descrito pelas Equações (4.6)-(4.8) pode apresentar uma riqueza de fenômenos dinâmicos a depender da escolha dos parâmetros de controle envolvidos e das condições iniciais adotadas. Chian *et al.* (2002a) identificou um intervalo de ν para o qual há co-existência de atratores na Equação DNLS. Quatro diferentes atratores são plotados no diagrama de bifurcação da Figura (5.1.a) onde adotamos $a = 0.1$, $\Omega = -1$, $\lambda = 1/4$ e $\mu = 1/2$, para b_z como função de ν no plano de Poincaré. O atrator identificado como A_1 na Figura (5.1.a) corresponde a uma órbita periódica estável de período-1 para a componente b_z da onda de Alfvén que estamos simulando. O atrator A_2 de período-3 tem origem numa bifurcação sela-nó (SNB) em $\nu \sim 0.0227$. Este atrator sofre uma cascata de duplicação de períodos conforme o parâmetro de controle diminui, numa rota para o regime caótico. Em $\nu \sim 0.01514$ o atrator A_2 abruptamente desaparece numa bifurcação global conhecida como crise de fronteira (BC¹). De forma similar, o atrator A_3 de período-9 surge numa bifurcação sela-nó em $\nu \sim 0.0178162$, também desaparecendo abruptamente devido a uma crise de fronteira em $\nu \sim 0.0174771$. Chian *et al.* (2002a) mostrou que as órbitas periódicas instáveis mediadoras de período-9 (M) do atrator A_3 criadas na bifurcação sela-nó são responsáveis pelas crises de fronteira tanto do atrator A_3 quanto do atrator A_2 , devido a colisão de M com os atratores caóticos de banda. Por fim, o atrator A_4 tem origem como uma onda estável de período-3 que surge em $\nu \sim 0.019$, desaparecendo também devido a uma crise de fronteira em $\nu \sim 0.016853$. Existe ainda um quinto atrator que não é apresentado no diagrama de bifurcação da Figura (5.1.a). Podemos ver então que, no pequeno intervalo de valores de ν , entre 0.014 e 0.024, cinco diferentes conjuntos atratores co-existem e determinam a dinâmica final do sistema a depender das condições iniciais assumidas e do valor do parâmetro de controle.

Os mecanismos de criação e destruição dos atratores apresentados na Figura (5.1.a) são ilustrados na Figura (5.1.b), que é uma ampliação de três dos nove ramos do atrator A_3 mostrado na Figura (5.1.a). As linhas tracejadas denotam os pontos de Poincaré da órbita periódica instável de período-9 criada simultaneamente com a

¹Aqui, preferimos manter a sigla na notação inglesa de *Boundary Crisis*

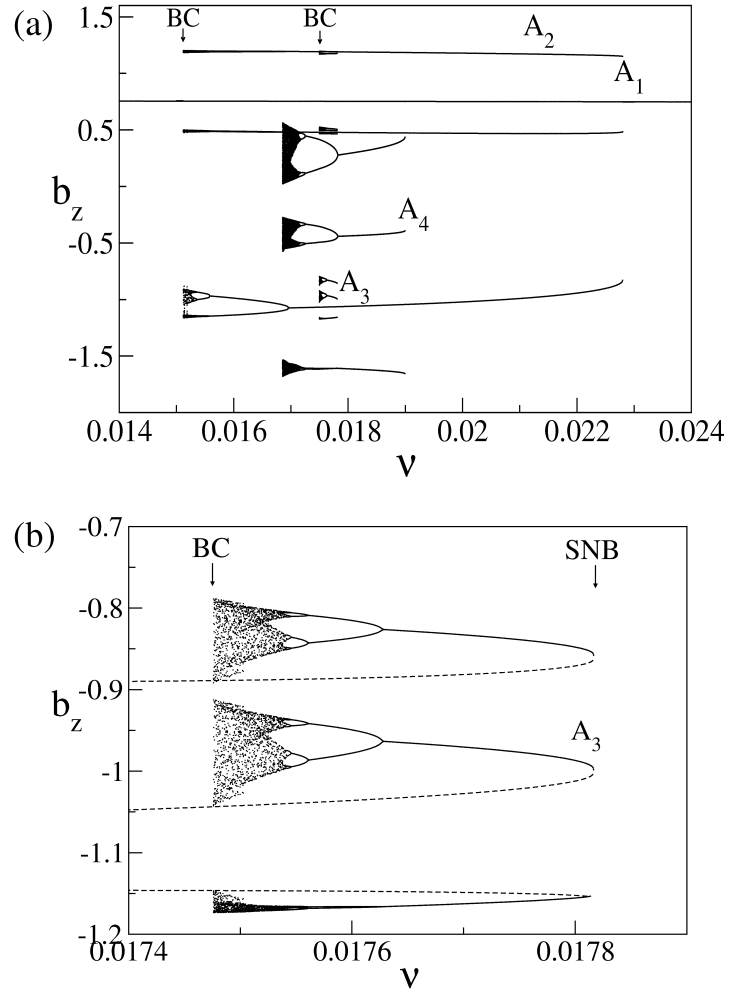


FIGURA 5.1 - (a) Diagrama de Bifurcação, $b_z \times \nu$, para as Equações (4.6)-(4.8) mostrando a evolução de quatro atratores distintos (A_1 , A_2 , A_3 e A_4); (b) Ampliação de uma porção de (a) mostrando o atrator A_3 . BC denota a crise de fronteira e as linhas tracejadas representam as órbitas periódicas instáveis responsáveis pela crise.

órbita periódica estável em SNB que originou este atrator. Como dissemos anteriormente, diminuindo ν vemos que as soluções periódicas para a onda de Alfvén que estamos simulando sofrem o fenômeno de cascata de duplicação de período, fazendo com que o sistema adquira um regime caótico, até que em $\nu \sim 0.0174771$ os dois conjuntos caóticos (atrator caótico de banda e órbita periódica instável mediadora) colidem, causando a crise de fronteira que é responsável pela destruição do atrator A_3 . Esta crise foi estudada em detalhes por Chian *et al.* (2002a).

Agora iremos focar nossa atenção em $\nu = 0.01746$, onde três atratores periódicos coexistem. No mapa de Poincaré uma onda periódica de período- n atrai um conjunto infinito de condições iniciais que pertencem a sua *bacia de atração*. A Figura (5.2) re-

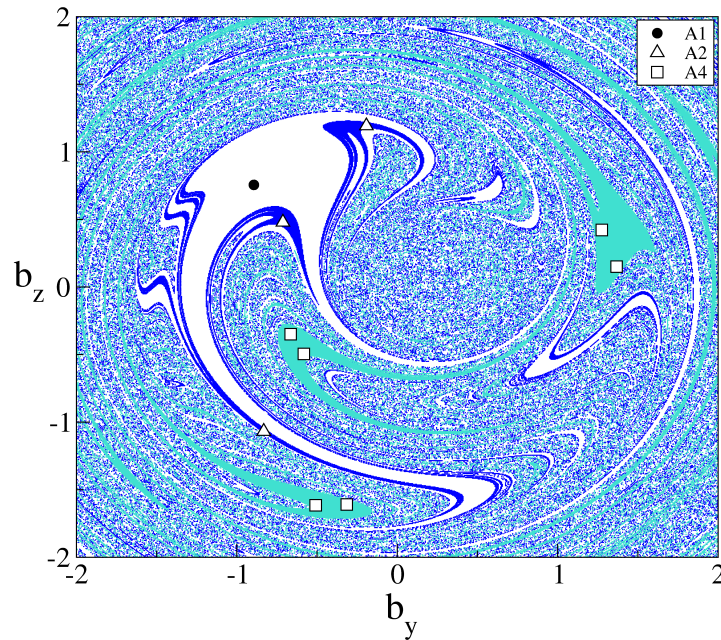


FIGURA 5.2 - Atratores periódicos A_1 (círculo), A_2 (triângulos), e A_4 (quadrados) e suas respectivas bacias de atração. Em branco temos a bacia do atrator A_1 , em azul a bacia do atrator A_2 e em verde a bacia do atrator A_4 , em $\nu = 0.01746$.

presenta o mapa de Poincaré dos atratores A_1 (círculo de período-1), A_2 (triângulos de período-3) e A_4 (quadrados de período-6) em suas bacias de atração. A bacia de atração representa o conjunto de condições iniciais no plano de fase $b_y \times b_z$ que convergem para um dado atrator. Para fazer a Figura (5.2) tomamos um grade de 800×800 pontos no espaço de fase, perfazendo um total de 640.000 condições iniciais. Cada uma dessas condições iniciais é iterada até que convirja para um dos três atratores periódicos conhecidos. Assim, temos que a região em branco na Figura (5.2) denota a bacia de atração do atrator A_1 , a região em azul representa as condições iniciais que convergiram para o atrator A_2 e os pontos em verde a bacia de atração do atrator A_4 . Os contornos das bacias de atração mostram uma estrutura complexa em parte do espaço de fase para as três bacias apresentadas. Presente nos contornos da bacia encontramos numericamente um conjunto caótico não-atrator, conhecido como sela caótica, Figura (5.3) em vermelho. Como já afirmamos anteriormente, selas caóticas são estruturas presentes em sistemas dinâmicos não-lineares, responsáveis pelo movimento caótico transiente (NUSSE; YORKE, 1989; GREBOGI *et al.*, 1983), e seu papel no salto entre os atratores e intermitência Alfvênica induzida pelo ruído será discutido a seguir.

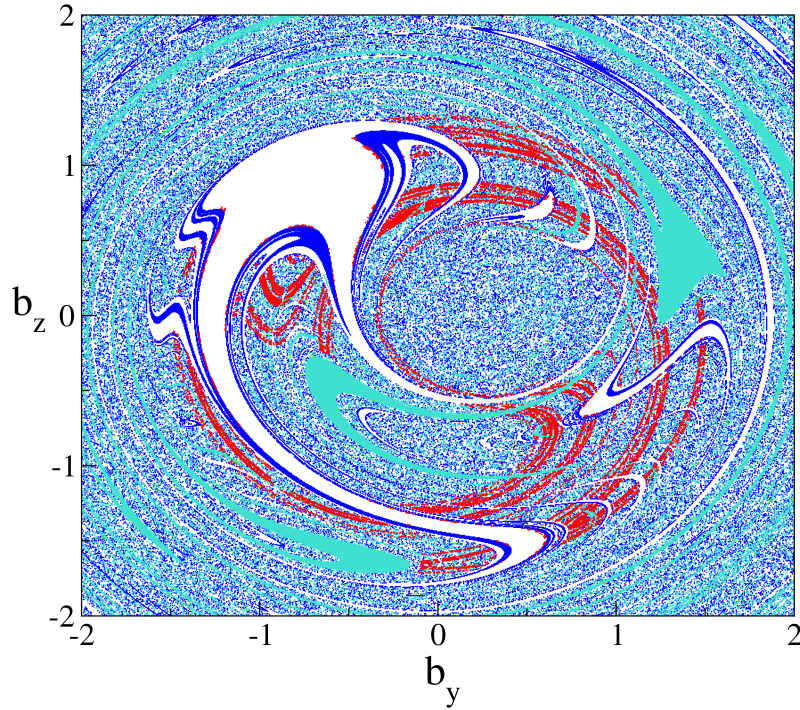


FIGURA 5.3 - Sela caótica na fronteira entre as bacias de atração de A_1 e A_4 , em $\nu = 0.01746$.

5.3 Transientes Induzidos pelo Ruído e Destruição dos Atratores

Introduziremos agora uma fonte estocástica externa no sistema de Alfvén pela adição de ruído através dos termos $g_y(t)$ e $g_z(t)$ nas Equações (4.6) e (4.7), respectivamente, onde $g_y(t)$ e $g_z(t)$ são fornecidos por um gerador de números aleatórios com uma distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão σ , conforme mostrado abaixo.

$$\dot{b}_y = \frac{(b_y^2 + b_z^2 - 1.25)(b_z - \nu b_y) - 0.25\nu + a(\cos \theta + \nu \sin \theta)}{1 + \nu^2} + g_y(t) \quad (5.1)$$

$$\dot{b}_z = -\frac{(b_y^2 + b_z^2 - 1.25)(\nu b_z + b_y) - 0.25 + a(\sin \theta - \nu \cos \theta)}{1 + \nu^2} + g_z(t) \quad (5.2)$$

O efeito do ruído no diagrama de bifurcação do atrator A_4 , por exemplo, pode ser observado na Figura (5.4). A Figura (5.4.a) mostra o diagrama de bifurcação sem ruído ($\sigma = 0$), enquanto que a Figura (5.4.b) apresenta o mesmo diagrama sob a influência de um ruído com $\sigma = 0.0025$, onde a cascata de duplicação de período é obscurecida pela presença do ruído, isto é, os movimentos periódicos com altos períodos de um sistema sem ruído foram substituídos por um movimento aparentemente caótico, e a transição para caos não pode mais ser precisamente determinada. A Figura (5.4.b) é muito mais realística que a Figura (5.4.a), uma vez que em qualquer sistema físico

real ruído sempre estará presente, conforme observado em diagramas de bifurcação de experimentos em plasma, por exemplo (CHEUNG; WONG, 1987; GREINER *et al.*, 1993).

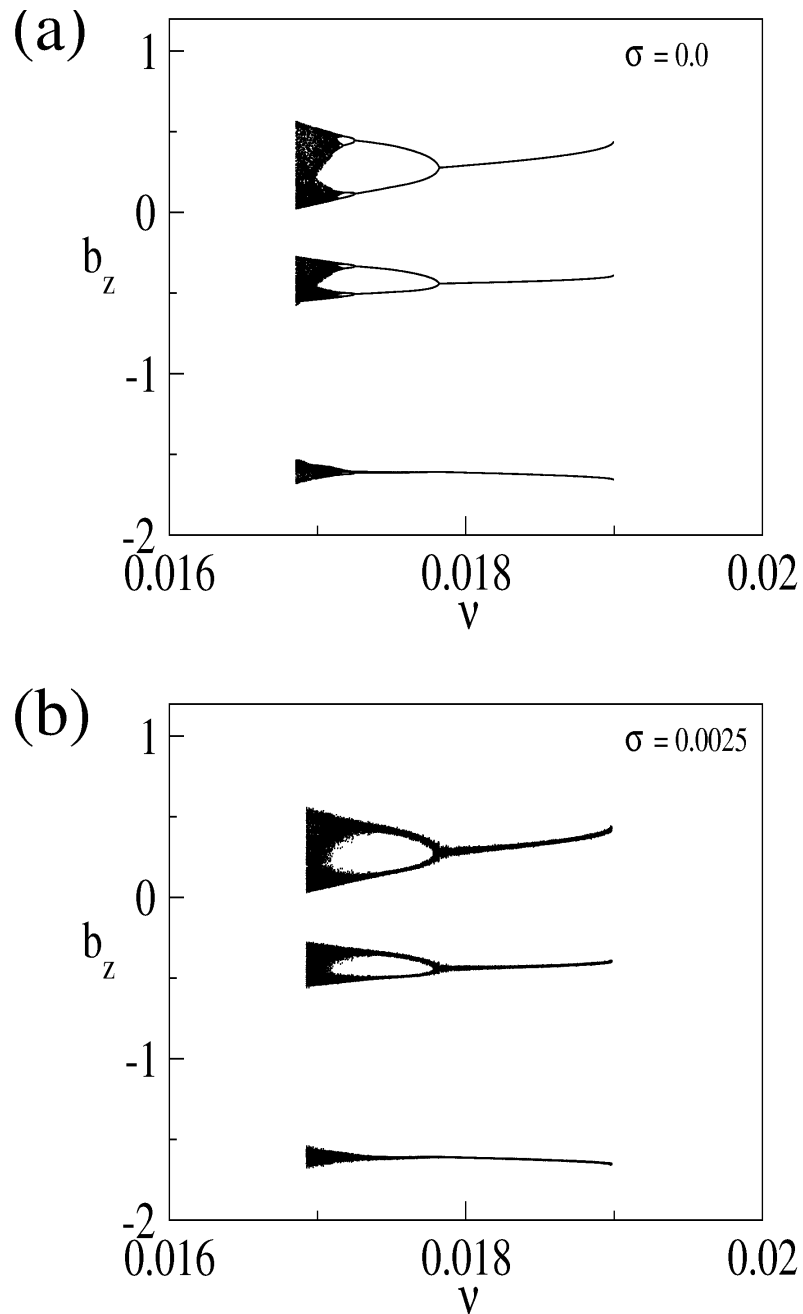


FIGURA 5.4 - (a) Diagrama de bifurcação do atrator A_4 sem ruído . (b) Diagrama de bifurcação de A_4 com ruído ($\sigma = 0.0025$).

A Figura (5.5) ilustra o efeito do ruído na série estroboscópica de b_z para o atrator

A_4 , de período-6 em $\nu = 0.01746$. O fato de apenas 5 períodos serem vistos nesta Figura se deve a estarmos vendo a projeção das soluções em uma dimensão. A Figura (5.5.a) mostra a série temporal em termos dos pontos de Poincaré livre de ruído, enquanto a Figura (5.5.b) apresenta a mesma série temporal para $\sigma = 0.0032$. Os correspondentes espectros de potência são mostrados nas Figuras (5.5.c) e (5.5.d), respectivamente. O espectro da onda de Alfvén ruidosa mostrado na Figura (5.5.d) tem uma natureza contínua, mais denso que o espectro livre do ruído, típico de ondas de Alfvén caóticas (CHIAN *et al.*, 1998), e de flutuações Alfvênicas turbulentas observadas no vento solar (BRUNO *et al.*, 2005). No entanto, podemos ver que o espectro apresentado na Figura (5.5.d) ainda possui alguns picos vistos no regime sem ruído, indicando que relações não-lineares devem se tornar mais evidentes conforme o nível de ruído seja mais forte. Para a intensidade de ruído injetado nas Equações até aqui, frequências predominantes ainda estão presentes nas soluções.

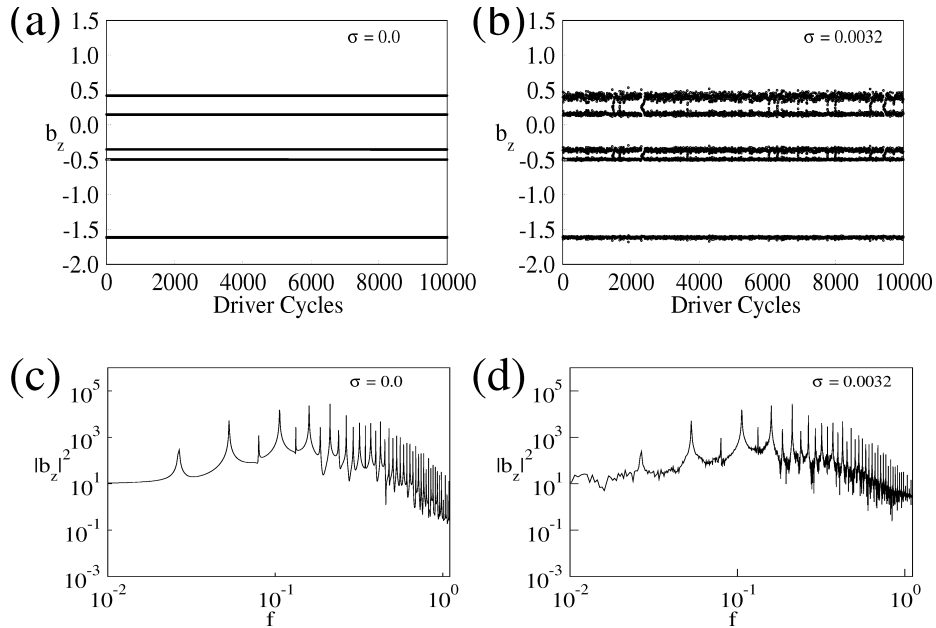


FIGURA 5.5 - Série estroboscópica de b_z para o atrator A_4 de período-6 em $\nu = 0.01746$; (a) sem ruído; (b) com ruído gaussiano usando média zero e desvio padrão $\sigma = 0.0032$; (c) e (d) mostram os correspondentes espectros de potência.

As bacias de atração para os atratores A_1 , A_2 e A_4 sob a influência do ruído, juntamente com os pontos de Poincaré do atrator A_4 no plano $b_y \times b_z$ são graficadas na Figura (5.6). Note que na presença do ruído o atrator A_4 assemelha-se a um atrator caótico, esticando-se ao longo das direções para o qual a compressão é mais fraca, ou seja, ao longo da sua variedade instável, como previamente foi notado por Gwinn e

Westervelt (1986a) e Gwinn e Westervelt (1986b). Quanto mais ruído inserirmos no sistema, mais o atrator é esticado, tal que condições iniciais para a onda de Alfvén antes confinadas na região em verde (bacia do atrator A_4) na Figura (5.6) têm agora possibilidade de “escapar” desta bacia. Antes de escapar, no entanto, as soluções permanecem por um curto período de tempo na região de contorno entre as bacias até convergirem para um atrator diferente, quando ocorre então um salto entre os atratores (GWINN; WESTERVELT, 1986a; KRAUT *et al.*, 1999), o que provoca uma variação descontínua nas componentes do campo magnético de Alfvén. O ruído torna acessíveis órbitas periódicas instáveis que existem ao longo das variedades do atrator. Com o alongamento do atrator dentro da sua bacia, a órbita periódica instável que separa as bacias é alcançada, e então o atrator tem a possibilidade de, seguindo o ramo instável desta órbita, saltar para a outra bacia de atração, como pode ser visto na Figura (5.7). A Figura (5.7.a) através da série estroboscópica mostra o salto entre os atratores; primeiro do atrator A_4 para o atrator A_2 ; em seguida para o atrator A_1 , quando o ruído é $\sigma = 0.0054$. Na Figura (5.7.b) apresentamos o mapa de Poincaré da correspondente série estroboscópica mostrada em (a) sobre a bacia de atração ruidosa. Sendo a bacia do atrator A_1 a maior bacia presente no sistema, o nível de ruído ainda não é grande o suficiente para estimular as ondas de Alfvén simuladas a abandonarem esta região. Assim, para o nível de ruído adotado até aqui, a região em branco da Figura (5.7.b) ainda representa um estado assintótico à dinâmica do sistema, independente das condições iniciais adotadas; enquanto que os saltos entre os atratores A_4 e A_2 induzidos pelo ruído representam uma dinâmica transiente, ou extrínseca, às ondas de Alfvén simuladas.

A geração de um transiente induzido pelo ruído é semelhante àquele observado quando da destruição de um atrator devido a uma crise de fronteira. Conforme discutimos anteriormente, o atrator A_2 presente na Figura (5.1.a) é destruído devido a uma crise de fronteira em $\nu = \nu_{BC} \sim 0.01514$. Assim, para $\nu < 0.01514$ condições iniciais tomadas na região do espaço de fase previamente ocupadas pelo atrator A_2 irão eventualmente permanecer nesta região por um determinado período de tempo, antes de convergirem para outro atrator. Este regime transiente entre os atratores, apesar de depender das condições iniciais, será tão curto quanto mais distantes estivermos do ponto crítico em que ocorreu a crise de contorno (ν_{BC}) (GREBOGI *et al.*, 1987a). Assim, para ν muito próximo de ν_{BC} o campo magnético irá oscilar por um longo período transiente na região do atrator A_2 antes de escapar dele. Conforme ν se afasta de ν_{BC} , o tempo médio diminui proporcionalmente. Este efeito é ilustrado

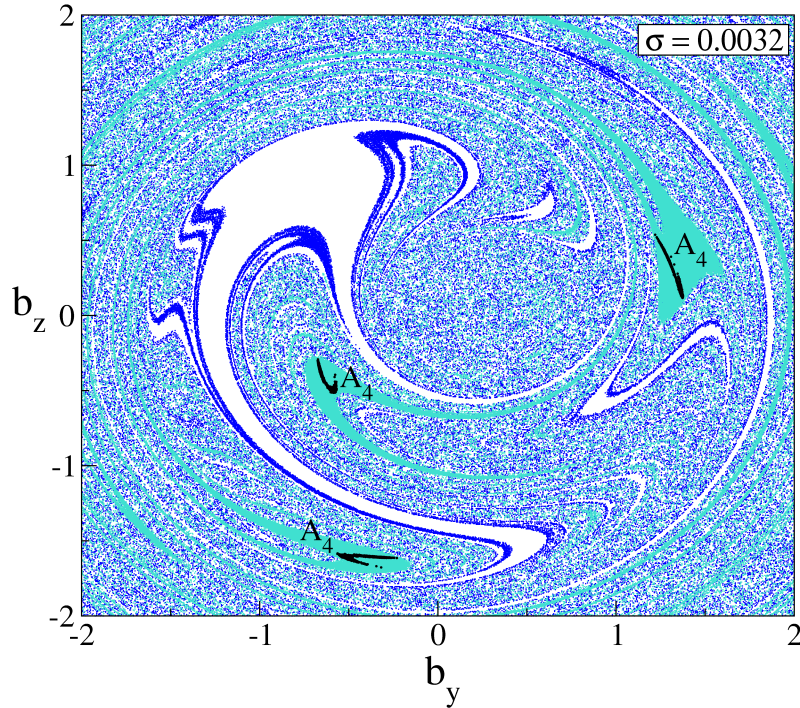


FIGURA 5.6 - Bacias de atração e atrator A_4 em $\nu = 0.01746$ na presença de ruído ($\sigma = 0.0032$). O atrator A_4 , alargado devido a influência do ruído, ainda não ultrapassa os contornos de sua bacia.

nas Figuras (5.8.a)-(5.8.c) para três diferentes valores de ν : (5.8.a) mostra a série no momento da crise de fronteira; os dois gráficos seguintes são para valores logo depois da crise.

Adicionando ruído ao sistema, somos capazes de observar o mesmo comportamento na dinâmica da componente b_z do campo magnético de Alfvén simulado, sem alterarmos o valor do parâmetro de controle ν , ou seja, vemos uma descontinuidade nas soluções. Nas Figuras (5.8.d)-(5.8.f) as séries estroboscópicas são graficadas para $\nu = 0.01746$, bem antes da crise de contorno ocorrer, onde A_2 ainda apresenta um regime periódico, como pode ser visto na Figura (5.1.a). Para $\sigma = 0.0027$, a dinâmica do campo magnético ainda permanece confinada na bacia de atração do atrator A_2 (Figura 5.8.d), semelhante ao que é observado no sistema em que o ruído está ausente (Figura 5.8.a). Aumentando o nível do ruído para $\sigma = 0.0028$ vemos que o atrator salta de A_2 para A_1 após um longo transiente (Figura 5.8.e). Com um ruído ainda maior, $\sigma = 0.0030$, o transiente é mais curto (Figura 5.8.f). Evidentemente, a duração do transiente está também relacionada às condições iniciais adotadas. Porém, uma precisa determinação do nível crítico de ruído necessário para que ocorra o salto entre os atratores revela que em média o regime de transiente terá aproximadamente

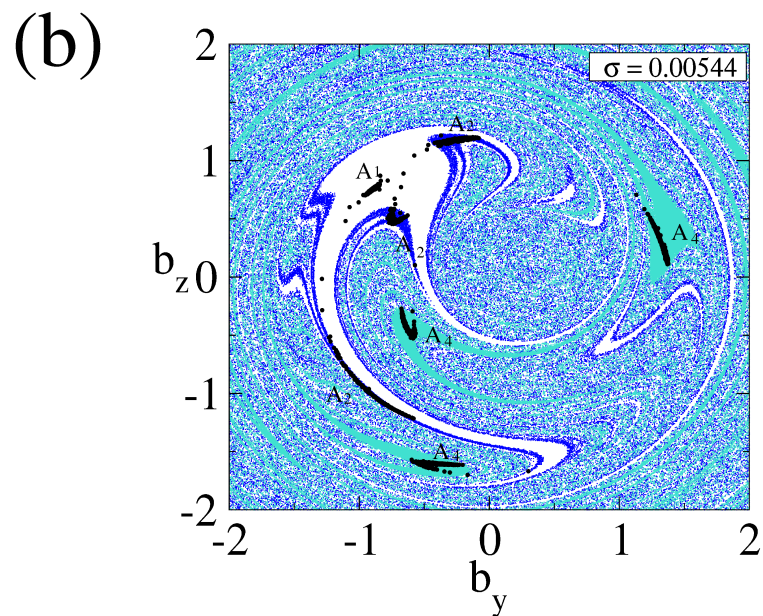
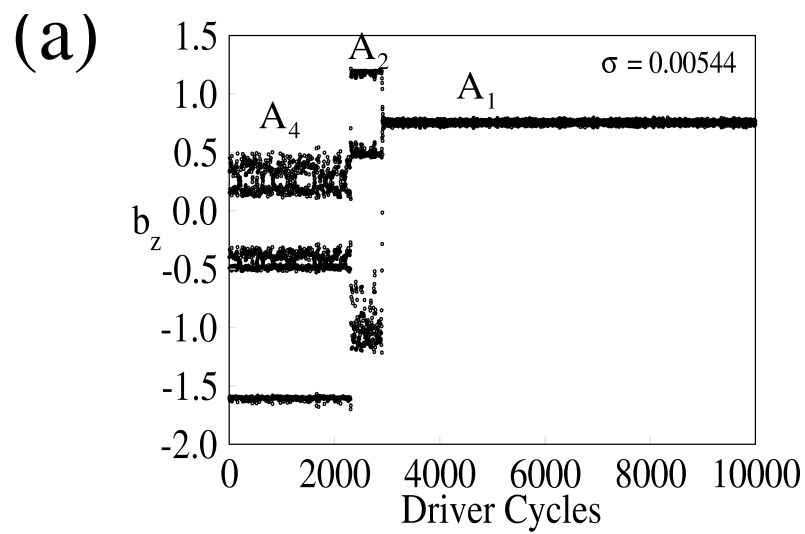


FIGURA 5.7 - (a) Transiente induzido pelo ruído para $\sigma = 0.017$ em $\nu = 0.01746$, mostrando o salto das soluções do atrator A_4 para o atrator A_2 , e em seguida para o atrator A_1 ; (b) Mapa de Poincaré das séries temporais mostradas em (a), em suas bacias de atração.

a mesma duração. A conclusão importante aqui é que a presença de ruído em um sistema Alfvênico pode causar a destruição dos atratores, com a dinâmica em suas bacias apresentando um comportamento transiente, até que os saltos entre as bacias de atração possam ocorrer.

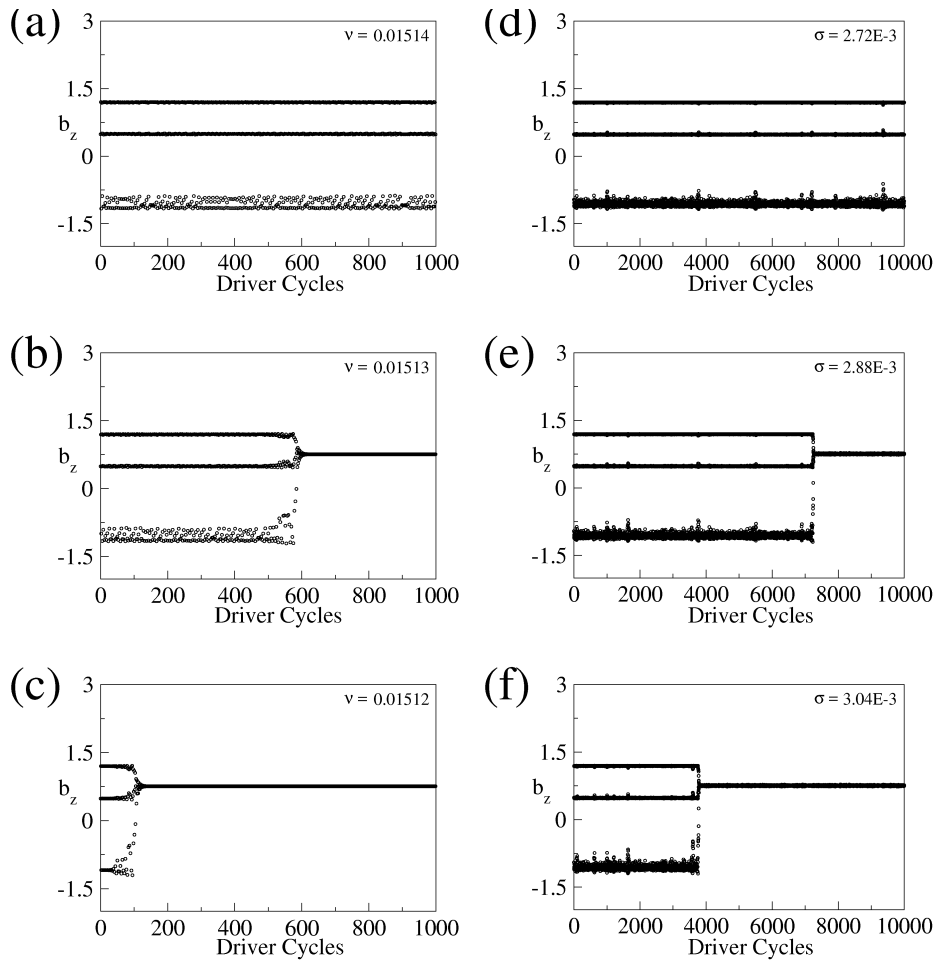


FIGURA 5.8 - Transientes caóticos intrínsecos (a)-(c) e extrínsecos (d)-(f). (a) Série temporal caótica de A_2 no momento da crise de contorno em $\nu = 0.01514$; (b) transiente caótico logo após o ponto da crise de contorno, em $\nu = 0.01513$; (c) redução do tempo de transiente para um ponto da crise ainda mais distante, em $\nu = 0.01512$; (d) caos induzido pelo ruído para A_2 em $\nu = 0.01746$, com $\sigma = 0.00272$; (e) transiente caótico em $\nu = 0.01746$ devido ao aumento na intensidade do ruído, $\sigma = 0.00288$; (f) redução do tempo transiente devido a um ruído ainda maior que o anterior, $\sigma = 0.00304$.

5.4 Intermitência Induzida pelo Ruído e Expansão do Atrator

Na última seção mostramos que uma pequena quantidade de ruído nas Equações (4.2)-(4.4) induz as soluções do campo magnético de Alfvén, antes confinadas em suas bacias de atração, a saltarem dos atratores A_4 e A_2 para a bacia do atrator A_1 , a maior bacia do sistema. De modo a permitir que as soluções também escapem do atrator A_1 , devemos considerar um nível de ruído bem maior do que o utilizado até aqui. Para um ruído σ intenso o suficiente, trajetórias do atrator A_1 podem cruzar os limites de sua bacia, movendo-se para um outro atrator. O ruído irá provocar, então, o salto entre os diferentes atratores (e diferentes regimes de solução para o

campo magnético simulado) até que eventualmente as trajetórias sejam re-injetadas na bacia do atrator A_1 . Este processo se repetirá intermitentemente, gerando a intermitência induzida pelo ruído, também chamada de intermitência extrínseca (GWINN; WESTERVELT, 1986a).

A Figura (5.9) apresenta a série estroboscópica em $\nu = 0.01746$ para $\sigma = 0.064$. Como podemos observar, na maior parte do tempo as soluções da componente b_z para o campo magnético de Alfvén oscilam em torno de $b_z \approx 0.78$, ou seja, na vizinhança do atrator A_1 . Existem alguns estouros intermitentes fazendo com que b_z tenha valores menores, uma indicação de que as trajetórias percorrem outras regiões do espaço de fase $b_y \times b_z$. Os triângulos e quadrados indicam quando as trajetórias estiveram na vizinhança dos atratores A_2 e A_4 , respectivamente. Definimos uma vizinhança como um disco de raio igual a σ em torno dos pontos fixos dos atratores periódicos no mapa de Poincaré. A Figura (5.9.b) é uma ampliação da barra indicada em (5.9.a), mostrando os saltos entre os atratores. Note que, em muitos estouros existem alguns pontos que não estão na vizinhança nem de A_2 nem de A_4 . Esses pontos representam o tempo que as trajetórias percorrem ao redor dos contornos das bacias, antes de convergirem para a vizinhança de um atrator. Esta dinâmica é mostrada no mapa de Poincaré da Figura (5.10), onde graficamos as bacias de atração ruidosas e os correspondentes pontos de Poincaré da série estroboscópica da Figura (5.9). Muitos pontos se concentram ao longo de uma região esticada em torno do atrator A_1 . Os pontos espalhados representam os estouros intermitentes. Da Figura (5.10) podemos ver também que o ruído é responsável pela expansão dos três atratores, dando origem a um atrator muito maior.

Uma comparação entre as Figuras (5.9) e (5.10) revela que em cada estouro a trajetória visita a vizinhança da sela caótica. Isto ocorre porque, embora a sela caótica seja um conjunto não-atrator, ela possui uma *variedade estável*, que é um conjunto fractal no espaço de fase cujos pontos apresentam trajetórias que convergem para a sela caótica (NUSSE; YORKE, 1989). Imprecisões numéricas e/ou ruído extrínseco irão eventualmente conduzir as trajetórias para fora da variedade estável. Assim, órbitas que se aproximem da variedade estável irão primeiro seguir a sela caótica, apresentando então um movimento caótico durante um tempo finito, antes de retornar a algum atrator. No presente caso, a variedade estável é o contorno entre as bacias de atração mostradas na Figura (5.10). Quando o ruído conduz uma trajetória em direção ao contorno da bacia, o contorno leva as órbitas para a vizinhança da sela

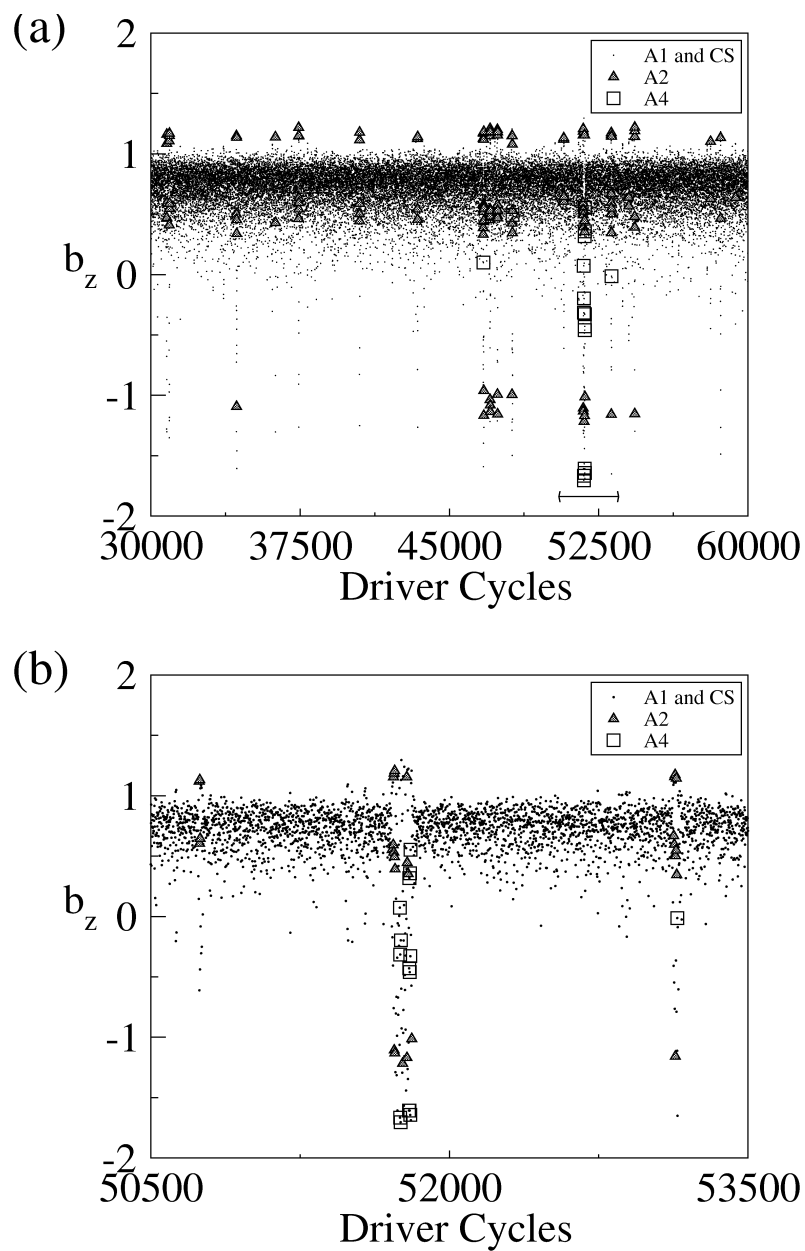


FIGURA 5.9 - (a) Intermitência induzida pelo ruído em $\nu = 0.01746$, com $\sigma = 0.064$. Os triângulos foram marcados sempre que as órbitas se aproximam da vizinhança do atrator A_2 , enquanto que os quadrados denotam a aproximação das órbitas à vizinhança do atrator A_4 . Os círculos representam pontos na vizinhança de A_1 ou da sela caótica envolvente. (b) Ampliação do intervalo indicado pela barra em (a).

caótica. Esta é a razão por que os pontos pretos da Figura (5.10) não se espalham por toda a região de contorno das bacias.

A intermitência Alfvênica induzida pelo ruído apresenta a seguinte seqüência de

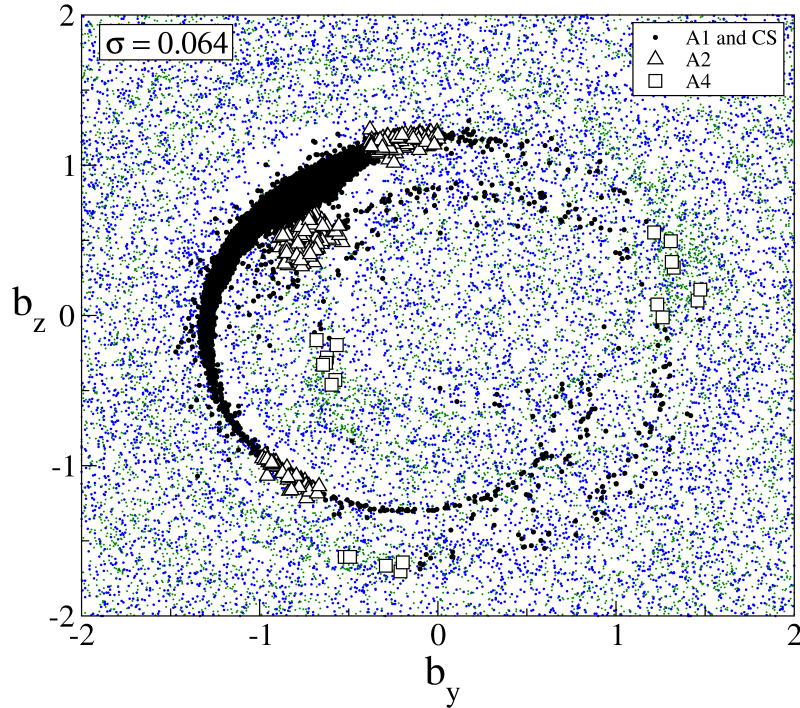


FIGURA 5.10 - Bacia de atração e pontos de Poincaré da trajetória ruidosa intermitente da Figura (5.9) em $\nu = 0.01746$. As trajetórias passam a maior parte do tempo na bacia do atrator A_1 , mas saltam intermitentemente entre as bacias dos atratores A_2 e A_4 , percorrendo a sela caótica no contorno da bacia. O nível de ruído é $\sigma = 0.064$.

estados:

$$A_i \rightarrow \text{sela caotica} \rightarrow A_i \rightarrow \text{sela caotica} \rightarrow \dots$$

onde i refere-se a um dos atratores (1, 2 ou 4) e representa o tempo em que as trajetórias estão na imediata bacia de atração do atrator periódico ruidoso.

5.5 Discussão

O interior da Heliosfera é permeado pelo vento solar, um plasma supersônico e intensamente Alfvênico. Este meio oferece a melhor oportunidade para se estudar diretamente fenômenos de plasma não-colisional. Embora a Heliosfera seja um meio altamente variável, é possível identificar alguns fenômenos característicos que denunciam seu comportamento estocástico. As flutuações do campo magnético e de parâmetros do plasma em todas as escalas espaço-temporal relevantes são as primeiras pistas para investigarmos sua dinâmica intermitente.

Uma das micro-estruturas fundamentais presentes no plasma do vento solar são as

chamadas descontinuidades direcionais: uma nítida variação angular na direção do campo magnético Heliosférico. Nesse sentido, uma enorme contribuição tem sido dada pela missão Ulysses. As observações dessa espaçonave revelaram que as descontinuidades direcionais parecem ser dependentes do tipo de feixe do vento solar em que estão envolvidas. A taxa de ocorrência é de 5 a 10 vezes maior nos feixes de alta velocidade que nos feixes lentos. A explicação para isso é que ondas de Alfvén não-lineares dominam os feixes rápidos, e as descontinuidades rotacionais seriam causadas pela saturação das fases das ondas de Alfvén (TSURUTANI; HO, 1999). Quando as ondas de Alfvén presentes nos feixes rápidos se impõe sobre a magnetosfera da Terra, tempestades aproximadamente contínuas ocorrem (eventos HILDCAAs), bombardeando uma extraordinária quantidade de energia no lado noturno da ionosfera². Neste caso, registros de descontinuidades nas componentes do campo magnético podem ser observadas através do índice Dst.

Neste Capítulo estudamos a dinâmica das ondas de Alfvén em um regime de multi-estabilidade da Equação de Schrödinger não-linear derivativa na presença de ruído. Vimos que para um nível de ruído baixo, o salto entre os atratores ocorre de forma descontínua, até que o sistema se acomode em uma determinada bacia de atração de onde então não consegue escapar. Neste caso, o efeito do ruído é similar à destruição de um atrator, com a presença de um movimento transiente na vizinhança do atrator destruído (transiente extrínseco). Aumentando-se a intensidade do ruído, os saltos entre as bacias de atração tornam-se intermitentes (intermitência extrínseca), e as trajetórias têm acesso a uma região maior do espaço de fase. Devido ao intenso ruído inserido no sistema, as trajetórias têm maior probabilidade de percorrer a sela caótica presente nos contornos das bacias, e assim visitar os três atratores existentes no espaço de fase. Em cada caso (transiente extrínseco e intermitência extrínseca), o ruído é responsável pelo comportamento caótico apresentado pelos atratores.

Assim, desde que fontes de ruído estejam sempre presentes na natureza, é possível que transiente e fenômenos de intermitência e descontinuidade observados em dados reais do vento solar sejam, de fato, uma assinatura de regimes multi-estáveis convertidos pelo ruído.

²Ionosfera é a denominação dada à camada, em função dos constituintes ionizados, situada entre 60 e 1000 km de altura, aproximadamente, onde a densidade de íons e elétrons é suficientemente alta para afetar a propagação de ondas eletromagnéticas.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

Os plasmas magnetizados de estrelas, vento solar, magnetosfera planetária, tokamaks, e outros plasmas confinados em laboratório têm todos extensão finita. Embora suas escalas de comprimento sejam vastamente diferentes, esta natureza finita dita os gradientes perpendiculares ao campo magnético de fundo. Dentro desses plasmas, pequenas variações na topologia magnética, causando mudanças de temperatura e densidade, são mediadas por ondas eletromagnéticas de baixa frequência, como ondas de Alfvén por exemplo. Apesar de não serem as únicas flutuações permitidas pelas equações MHD, as ondas de Alfvén são frequentemente observadas devido a sua natureza não-compressível.

Trabalhos baseados na análise de dados observacionais têm procurado confirmar os resultados teóricos, que sugerem a possibilidade de existência de caos determinístico por trás dos processos que ocorrem na conexão Sol-Terra. Medidas de caoticidade e dimensão de atratores obtidas a partir de séries temporais das variações do campo magnético na magnetosfera terrestre e no vento solar, sugerem a existência de atratores caóticos de baixa dimensão. Athanasiu *et al.* (2003) analisou dados magnetosféricos, comparando-os com o comportamento do modelo de Lorentz com ruído, concluindo que os dados magnetosféricos apresentam comportamento similar a um sistema caótico com atrator de baixa dimensão fortemente perturbado pelo ruído. Sorriso-Valvo *et al.* (2001) usaram um modelo caótico com um termo estocástico para o estudo de intermitência em plasmas, mostrando que, da mesma forma como em dados do vento solar, o comportamento intermitente se manifesta nas funções de distribuição de probabilidade para flutuações de velocidade, na forma de um comportamento não-Gaussiano em escalas pequenas.

Nessa dissertação, a dinâmica no acoplamento Sol-Terra foi estudada através das simulações de ondas de Alfvén, presentes no vento solar, por meio da equação de Schrödinger não-linear derivativa (DNLS). Estas simulações seguiram os trabalhos de Chian *et al.* (1998) e Chian *et al.* (2002a). A primeira parte do trabalho consistiu de uma revisão do modelo para soluções estacionárias em um referencial se movendo na direção de propagação da onda, onde identificamos dois tipos de intermitência nas ondas de Alfvén. Mostramos ainda que um atrator caótico de Alfvén é composto de selas caóticas e órbitas periódicas instáveis. Além disso, determinamos o tempo

característico entre as permutações dos períodos laminares (ou aparentemente laminares) e os estouros das séries temporais, demonstrando que a intermitência do regime Alfvênico segue um decaimento do tipo lei de potência.

A seguir, investigamos o efeito do ruído na dinâmica das ondas de Alfvén. Os efeitos causados pela adição de ruído têm sido observados em diversos trabalhos (ARECCHI *et al.*, 1985; CHEN, 1990), sendo fator importante na verificação de complexidade em sistemas dinâmicos. Nessa dissertação, vimos que as ondas de Alfvén exibiram uma variação qualitativa influenciada pela presença do ruído entre três atratores e uma sela caótica presente no contorno fractal das suas bacias de atração. A introdução de ruído na equação DNLS permite-nos discutir um outro conceito que tem sido abordado no estudo da dinâmica caótica em sistemas determinísticos: a ressonância estocástica.

O fenômeno de ressonância estocástica foi originalmente proposto no estudo da dinâmica geofísica realizada por Benzi *et al.* (BENZI *et al.*, 1981; BENZI *et al.*, 1982; BENZI *et al.*, 1983), que introduziu uma aproximação matemática para explicar qualitativamente o fenômeno dos ciclos glaciais. Os modernos métodos de aquisição e interpretação de registros climáticos indicam que as últimas sete maiores mudanças ocorreram nos últimos 700.000 anos, com uma periodicidade de 100.000 anos, aproximadamente. Estas mudanças estão caracterizadas por uma substancial variação na temperatura média da Terra. Uma intrigante conclusão, uma vez que a única escala de tempo astronômica na dinâmica da Terra conhecida até agora e que se assemelha a tal periodicidade é a modulação da excentricidade da sua órbita causada pelas perturbações gravitacionais planetárias. Assim, no modelo de Benzi *et al.* o clima global é representado por um duplo potencial, onde um mínimo representa uma baixa temperatura correspondente a um longo período de resfriamento da Terra. A pequena modulação da excentricidade da órbita da Terra é representada por um fraco forçante periódico. Flutuações climáticas de curto período, tais como as flutuações anuais na radiação solar, seriam modeladas por um ruído Gaussiano.

A ressonância estocástica tem sido extensamente adotado para descrever processos por meio dos quais a adição de uma função randômica, também chamada ruído, pode realçar a detecção dos sinais principais que se quer medir em algum sistema não-linear, ou ainda, intensificar a informação contida na saída do sistema (ASTUMIAN; MOSS, 1998). Em geral, existem três ingredientes básicos necessários para que um sistema apresente ressonância estocástica, que incluem um limite ou uma barreira de

energia, uma fraca coerência das soluções do sistema (tal como um sinal periódico), e uma fonte estocástica que tanto pode ser inerente ao sistema bem como um fraco sinal adicionado externamente. A ressonância estocástica nos possibilita estabelecer um limiar entre a pequena intensidade do ruído, em que a alteração do sinal principal pode ser não detectável ou mesmo desprezível, e um ruído mais intenso em que seu efeito pode alterar sensivelmente a dinâmica do sistema, nos informando que deve haver uma intensidade de ruído ótima que maximiza a informação desejada.

O controle sobre o ruído envolvido em sistemas não-lineares pode ser usado para estabilizar estados periódicos ou induzir caos. A característica comum de todos esses sistemas é o aumento da sensibilidade a pequenas perturbações. Por exemplo, Zhou e Lai (1999) apresentaram um mecanismo para realizar ressonância estocástica em uma classe geral de sistemas dinâmicos em que há simetria e quebra de simetria de reflexão. Nesse estudo eles apresentam eventos de intermitência e restauração da simetria do sistema devido a presença de um pequeno ruído. Klinger *et al.* (2001) estudando diodos plasmas não-colisionais onde oscilações caóticas da corrente e do potencial do plasma podem ser controladas por perturbações discretas de um parâmetro de controle, demonstrou que o fenômeno de ressonância estocástica ocorre em descargas termo-iônicas de diodos uma vez que nesse dispositivo ruído intrínseco está presente. O fenômeno de ressonância estocástico tem também sido observado em magnetoplasmas (I; LIU, 1995).

Nessa dissertação demonstramos que a influência do ruído no modelo DNLS pode levar as ondas de Alfvén presentes na Heliosfera a um transiente caótico, onde as flutuações das componentes do campo magnético seriam salientadas devido às contribuições de fontes estocásticas. Embora não fosse esse o objetivo deste trabalho, a teoria de ressonância estocástica poderia ter sido usada como uma ferramenta de medida para se quantificar o efeito do ruído no modelo, uma vez que os pré-requisitos necessários estão presentes. Além disso, embora não seja possível afirmar que as flutuações erráticas observadas no mundo real sejam simplesmente uma manifestação de caos de baixa dimensão, em todos os casos mencionados ao longo deste trabalho o comportamento observado na natureza parece ser resultado de um processo determinístico em conjunto com componentes estocásticos. Sendo assim, esperamos que o estudo de sistemas dinâmicos incluindo ruído possa levar a uma melhor compreensão dos mecanismos responsáveis pela transição de ordem para caos na Heliosfera, e que o fenômeno de ressonância estocástica nesse ambiente possa vir a ser confirmado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACTON, L. W. Comparison of Yohkoh x-ray and other solar activity parameters for November 1991 to November 1995. In: PATTAVICINI, R.; DUPREE, A. K. (Ed.). **Cool stars, stellar systems and the sun**. [S.l.], 1996. v. 109, p. 45–54. ASP Conference Series, 9th, 1996. 29
- ALFVÉN, H. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. **Nature**, v. 150, n. 405A, p. 5, 1942. 120, 123
- ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos**, an introduction to dynamical systems. New York: Springer-Verlag, 1996. 39, 41, 42, 44, 51, 52, 55
- ARECCHI, F. T.; BADI, R.; POLITI, A. Generalized multistability and noise-induced jumps in a nonlinear dynamical system. **Physical Review A**, v. 23, n. 1, p. 402–408, 1985. 56, 100
- ASTUMIAN, R. D.; MOSS, F. The constructive role of noise in fluctuation driven transport and stochastic resonance. **American Institute of Physics**, v. 8, n. 3, p. 533–538, 1998. 56, 100
- ATHANASIU, M. A.; PAVLOS, G. P.; SARAFPOULOS, D. V.; SARRIS, E. T. Dynamical characteristics of magnetospheric energetic ion time series: evidence for low dimensional chaos. **Annales Geophysicae**, v. 21, n. 9, p. 1995–2010, 2003. 81, 99
- BAKER, D. N.; KLIMAS, A. J.; MCPHERRON, R. L.; BUCHNER, J. The evolution from weak to strong geomagnetic activity: an interpretation in terms of deterministic chaos. **Geophysical Research Letters**, v. 17, n. 41B, p. 41–44, 1990. 80
- BARNES, A. **Solar system plasma physics**. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1979. 32
- BELCHER, J. W.; DAVIS, L. J. Large-amplitude alfvén waves in the interplanetary medium, 2. **Journal Geophysics Research**, v. 76, n. 16, p. 3534–3563, 1971. 17, 32, 33, 57
- BENZI, R.; PARISI, G.; SUTERA, A.; VULPIANI, A. Stochastic resonance in climatic-change. **Tellus**, v. 34, n. 1, p. 10–16, 1982. 100

BENZI, R.; PARISI, G.; SUTERA, A.; VULPIANI, A. A theory of stochastic resonance in climatic-change. **Siam Journal on Applied Mathematics**, v. 43, n. 3, p. 565–578, 1983. 100

BENZI, R.; SUTERA, A.; VULPIANI, A. The mechanism of stochastic resonance. **Journal of Physics A - Mathematical and General**, v. 14, n. 11, p. L453–L457, 1981. 100

BHATTACHARYYA, A. Chaotic behavior of ionospheric turbulence from scintillation measurements. **Geophysical Research Letters**, v. 17, n. 733B, p. 733–736, 1990. 81

BITTENCOURT, J. A. **Fundamentals of plasma physics**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1995. 676 p. 119

BOROTTO, F. A.; CHIAN, A. C.-L.; GONZALEZ, A. L. C.; GONZALEZ, W. D.; T, T. B. Chaotic dynamics of large-amplitude alfvén-wave trains in the solar wind. **Advances in Space Research**, v. 28, n. 3-4, p. 771–774, 2001. 58, 59, 62, 79

BOROTTO, F. A.; CHIAN, A. C.-L.; HADA, T.; REMPEL, E. L. Chaos in driven alvén systems: boundary and interior crises. **Physica D**, v. 194, p. 275–282, 2004. 62

BOROTTO, F. A.; CHIAN, A. C.-L.; REMPEL, E. L. Alfvén interior crisis. **International of Journal Bifurcation and Chaos**, v. 14, n. 7, p. 2375–2380, 2004. 62, 64

BRUNO, R.; CARBONE, V.; BAVASSANO, B.; SORRISO-VALVO, L. Observations of magnetohydrodynamic turbulence in the 3d heliosphere. **Advances in Space Research**, v. 35, n. 5, p. 939–950, 2005. 59, 89

BRUNO, R.; CARBONE, V.; VELTRI, P.; PIETROPAOLO, E.; BAVASSANO, B. Identifying intermittency events in the solar wind. **Planetary and Space Science**, v. 49, n. 12, p. 1201–1210, 2001. 58, 79

BRUNO, R.; SORRISO-VALVO, L.; CARBONE, V.; BAVASSANO, B. A possible truncated-levy-flight statistics recovered from interplanetary solar-wind velocity and magnetic-field fluctuations. **Europhysics Letters**, v. 66, n. 1, p. 146–152, 2004. 79

- BURLAGA, L. F. Period doubling in the outer heliosphere. **Journal of Geophysical Research**, v. 93, n. A5, p. 4103–4106, 1988. 33
- _____. Intermittency turbulence in the solar wind. **Journal Geophysical Research**, v. 96, n. 5847B, p. 5847–5851, 1991a. 35, 36
- BURLAGA, L. F.; MISH, W. H. Large-scale fluctuations in the interplanetary medium. **Journal Geophysical Research**, v. 92, n. 13647B, p. 1261–1266, 1987. 34, 35
- BUTI, B. Nonlinear Alfvén waves in inhomogeneous plasmas. **Geophysical Research Letters**, v. 18, n. 809B, p. 809–812, 1991. 60
- _____. Chaotic alfvén waves in multispecies plasmas. **Journal Geophysical Research**, v. 97, n. 4229B, p. 4229–4233, 1992. 24, 57, 62
- _____. Control of chaos in dusty plasmas. **Physics Letters A**, v. 235, n. 241B, p. 241–247, 1997. 62
- _____. Chaos in magnetoplasmas. **Nonlinear Processes in Geophysics**, v. 6, n. 3-4, p. 129–143, 1999. 62
- BUTI, B.; GALINSKI, V. L.; I, S. V.; LAKHINA, G. S.; TUSURUTANI, B. T.; GOLDSTEIN, B. E.; DIAMOND, P.; MEDVEDEV, M. V. Evolution of nonlinear alfvén waves in streaming inhomogeneous plasmas. **The Astrophysical Journal**, v. 523, n. 2, p. 849–854, 1999. 62
- C., D. A. L.; GONZALEZ, W. D.; DUTRA, L. G.; T., T. B. Periodic variation in the geomagnetic activity: a study based on the ap index. **Journal Geophysics Research**, v. 98, n. A6, p. 9215–9231, 1993. 23
- CARBONE, V.; SORRISO-VALVO, L.; LEPRETI, F.; BRUNO, R. Intermittency of turbulence in the solar wind. In: Velli, M.; Bruno, R.; Malara, F. (Ed.). **Proceeding solar wind ten**. Melville: American Institute of Physics, 2003. v. 679, p. 439–444. International Solar Wind Conference, 10, 2003, Firenze - Italy. 36, 37
- CHARBONNEAU, P.; BLAIS-LAURIER, G.; ST-JEAN, C. Intermittency and phase persistence in a babcock-leighton model of the solar cycle. **Astrophysical Journal**, v. 616, n. 2, p. L183–L186, 2004. 58

CHARBONNEAU, P.; ST-JEAN, C.; ZACHARIAS, P. Fluctuations in babcock-leighton dynamos. I. period doubling and transition to chaos. **Astrophysics Journal**, v. 619, n. 2, p. 613–622, 2005. 58

CHEN, F. F. **Introduction to plasma and controlled fusion**. 2a. ed. New York: Plenum Press, 1984. 57, 117

CHEN, X. J.; LAM, W. K. Inverse scattering transform for the derivative nonlinear schrodinger equation with nonvanishing boundary conditions. **Physical Review E**, v. 69, n. 6, p. 066604: 1–8, 2004. 61

CHEN, Z.-Y. Noise-induced instability. **Physical Review A**, v. 42, n. 10, p. 5837–5843, 1990. 56, 100

CHEUNG, P. Y.; WONG, A. Y. Chaotic behavior and period doubling in plasmas. **Physical Review Letters**, v. 59, n. 5, p. 551–554, 1987. 88

CHIAN, A. C. L.; BOROTTO, F. A.; GONZALEZ, W. D. Alfvén intermittent turbulence driven by temporal chaos. **The Astrophysical Journal**, v. 505, n. 2, p. 993–998, 1998. 57, 58, 59, 62, 79, 89, 99

CHIAN, A. C.-L.; BOROTTO, F. A.; LOPES, S. R.; ABALDE, J. R. Chaotic dynamics of nonthermal planetary radio emission. **Planetary and Space Science**, v. 48, n. 1, p. 9–21, 2000. 81

CHIAN, A. C.-L.; BOROTTO, F. A.; REMPEL, E. L. Alfvén boundary crisis. **Journal Bifurcation Chaos**, v. 12, n. 7, p. 1653–1658, 2002a. 24, 57, 62, 63, 84, 85, 99

CHIAN, A. C.-L.; REMPEL, E. L.; BOROTTO, F. A. Chaos in magnetospheric radio emissions. **Nonlinear Processes in Geophysics**, v. 9, n. 5-6, p. 435–441, 2002. 81

CROSS, M. C.; HOHENBERG, P. C. Pattern formation outside of equilibrium. **Reviews of Modern Physics**, v. 65, n. 3, p. 851–1112, 1993. 40

CURRY, J. H. **An algorithm for finding closed orbits**. Berlin: Springer-Verlag, 1979. 64

DAVID, P. S. A brief history of magnetospheric physics before the spaceflight era. **Reviews of Geophysics**, v. 27, n. 1, p. 103–114, 1989. 25

DAWSON, S. P. Strange nonattracting chaotic sets, crises, and fluctuating lyapunov exponents. **Physical Review Letter**, v. 76, n. 23, p. 4348–4351, 1996. 55, 56

DAWSON, S. P.; FONTAN, C. F. An analysis of unidimensional soliton gas models of magnetohydrodynamic turbulence in the solar wind. **Astrophysical Journal**, v. 348, n. 2, p. 761–777, 1990. 60

DE OLIVEIRA, L. P. L.; RIZZATO, F. B.; CHIAN, A. C.-L. Intrinsic modulational alfvênic turbulence. **Journal of Plasma Physics**, v. 58, n. 3, p. 441–453, 1997. 62

DIEGO, P.; STORINI, M.; PARISI, M.; CORDARO, E. G. AE index variability during corotating fast solar wind streams. **Journal of Geophysical Research**, v. 110, n. A6, p. A06105, 2005. 79

FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. **Caos**, uma introdução. [S.l.]: Edgard Blücher, 1994. 44, 46, 48

GAO, J. B.; HWANG, S. K.; LIU, J. M. When can noise induce chaos? **Physical Review Letters**, v. 82, n. 6, p. 1132–1135, 1999. 56

GEISEL, T. **Chaos and noise**. D. reidel publishing company. [S.l.]: Chaos in Astrophysics, 1985. (C). 24

GHOSH, S.; PAPADOPOULOS, K. The onset of Alfvênic turbulence. **Physics of Fluids**, v. 30, n. 5, p. 1371–1387, 1987. 62

GÓMES, D. O.; MININNI, P. D. Direct numerical simulations of helical dynamo action: Mhd and beyond. **Nonlinear Processes in Geophysics**, v. 11, n. 5-6, p. 619–629, 2004. 57, 58

GONZALEZ, W. D.; TSURUTANI, B. T.; DE GONZALEZ, A. L. C. Interplanetary origin of geomagnetic storms. **Space Science Review**, v. 88, n. 3-4, p. 529–562, 1999. 32, 78

GONZALEZ, W. G. Geomagnetic storms and space weather. **Advances in Space Research**, v. 34, n. 10, p. 2186–2189, 2004. 23, 31

GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Chaotic attractors in crisis. **Physical Review Letters**, v. 48, n. 22, p. 1507–1510, 1982. 39

_____. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. **Physica D: nonlinear phenomena**, v. 7, n. 1-3, p. 181–200, 1983. 39, 86

_____. Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics. **Science**, v. 238, n. 4827, p. 632–368, 1987. 40, 48, 53, 90

_____. Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems. **Physical Review Letters**, v. 57, n. 11, p. 1284–1287, 1987. 53

GREINER, F.; KLINGER, T.; KLOSTERMANN, H.; PIEL, A. Experimental and particle-in-cell simulation on self-oscillations and period doubling in thermionic discharges at low pressure. **Physical Review Letters**, v. 70, n. 20, p. 3071–3074, 1993. 88

GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. **Nonlinear oscillations, dynamical system, and bifurcation of vector fields**. New York: Springer-Verlag, 1983. 39, 52

GULAMALI, M. Y.; CARGILL, P. J. Ulysses observations of magnetohydrodynamic turbulence in corotating interaction regions. **Journal of Geophysical Research**, v. 106, n. A8, p. 15687–15699, 2001. 58

GWINN, E. G.; WESTERVELT, R. M. Fractal basin boundaries and intermittency in the driven damped pendulum. **Physical Review A**, v. 33, n. 6, p. 4143–4155, 1986. 46, 47, 56, 84, 90, 94

_____. _____. **Physical Review A**, v. 33, n. 6, p. 4143–4155, 1986. 56, 90

HADA, T.; DENNEL, C. F.; BUTI, B.; MJØLHUS, E. Chaos in driven Alfvén systems. **Physics of Fluids B**, v. 2, n. 11, p. 2581–2590, 1990. 24, 57, 59, 61, 62

HADA, T.; KENNEL, C. F.; BUTI, B. Stationary nonlinear Alfvén waves and solitons. **Journal of Geophysics Research**, v. 94, n. A1, p. 65–77, 1989. 60

HALL, C.; BLIX, T. A.; THRANE, E. V. Attractor dimensionality for mesospheric turbulence. **Journal of Geophysics Research**, v. 97, n. A1, p. 153–158, 1992. 81

HILBORN, R. C. **Chaos and nonlinear dynamics**. Oxford: Oxford University Press, 1994. 39, 40, 48, 50, 51

HNAT, B.; CHAPMAN, S. C.; ROWLANDS, G. Compressibility in solar wind plasma turbulence. **Physical Review Letters**, v. 94, n. 20, p. A558+, 2005. 59

HORTON, W.; WEIGEL, R. S.; SPROTT, J. C. Chaos and the limits of predictability for the solar-wind-driven magnetosphere-ionosphere system. **Physics of Plasmas**, v. 8, n. 6, p. 2946–2952, 2001. 81

HOYNG, P. Helicity fluctuations in mean-field theory: an explanation for the variability of the solar-cycle. **Astronomy Astrophysics**, v. 272-339, n. 1, p. 321, 1993. 58

HSU, G. H.; OTT, E.; GREBOGI, C. Strange saddles and the dimensions of their invariant manifolds. **Physics Letters A**, v. 127, n. 4, p. 199–204, 1988. 54

HUBA, J. D.; HASSAM, A. B.; SCHWARTZ, I. B.; KESKINEN, M. J. Ionospheric turbulence: interchange instabilities and chaotic fluid behavior. **Geophysical Research Letters**, v. 12, n. 1, p. 65–68, 1985. 81

I, L.; LIU, J.-M. Experimental observation of stochastic resonancelike behavior of autonomous motion in weakly ionized rf magnetoplasmas. **Physical Review Letters**, v. 74, n. 16, p. 3161–3164, 1995. 56, 101

IRELAND, J.; WALSH, R. W.; HARRISON, R.; PRIEST, E. R. Periodicities in active regions. In: Wilson, A. (Ed.). **Proceeding the corona and solar wind near minimum activity**. Oslo:ADS, 1998. p. 433–438. In: Fifth SOHO Workshop, 1997. 28

KANE, R. P. Comparison of the variations of solar indices, interplanetary plasma parameters, and cosmic ray neutron monitor intensities during 1991-2001. **Journal of Geophysical Research**, v. 108, n. A1 1046, 2003. 23

KENNEL, C. F.; BUTI, B.; HADA, T.; PELLAT, R. Nonlinear dispersive, elliptically polarized Alfvén waves. **Physics of Fluids**, v. 31, n. 7, p. 1949–1961, 1988. 60

KLIMAS, A. J.; BAKER, D. N.; ROBERTS, D. A.; M, F. D.; BUCHNER, J. A nonlinear dynamic analog model of geomagnetic activity. **Journal of Geophysical Research**, v. 97, n. A8, p. 12253–12266, 1992. 80

KLIMAS, A. J.; VASSILIADIS, D.; BAKER, D. N.; ROBERTS, D. A. The organized nonlinear dynamics of the magnetosphere. **Journal of Geophysical Research**, v. 101, n. A6, p. 13089–13113, 1996. 81

- KLINGER, T.; SCHRÖDER, C.; BLOCK, D.; GREINER, F.; BONHOMME, A. P. and G.; NAULIN, V. Chaos control and taming of turbulence in plasma devices. **Physics of Plasmas**, v. 8, n. 5, p. 1961–1968, 2001. 101
- KRAUT, S.; FEUDEL, U.; GREBOGI, C. Preference of attractors in noisy multistable systems. **Physical Review E**, v. 59, n. 5, p. 5253–5260, 1999. 90
- KREMLIOVSKY, M. N. Limits of predictability of solar-activity. **Solar Physics**, v. 159, n. 2, p. 371–380, 1995. 58
- KRISHAN, V.; NOCERA, L. Relaxed states of Alfvénic turbulence. **Physics Letters A**, v. 315, n. 5, p. 389–394, 2003. 62
- KUMAR, K. S.; KUMAR, C. V. A.; GEORGE, B.; RENUKA, G.; VENUGOPAL, V. Analysis of the fluctuations of the total electron content (tec) measured at goose bay using tools of nonlinear methods. **Journal of Geophysics Research**, v. 109, n. A02308, 2004. 81
- KUO, S. P.; KOSSEY, P.; HUYNH, J. T.; KUO, S. S. Amplification of whistler waves for the precipitation of trapped relativistic electrons in the magnetosphere. **IEEE Transactions of Plasma Science**, v. 32, n. 2, p. 362–369, 2004. 81
- KURTHS, J.; BRANDENBURG, A.; FEUDEL, U.; JENSEN, W. Chaos in nonlinear dynamo models. **IAU Symposia**, v. 157, n. 83K, p. 83, 1993. 58
- KURTHS, J.; HERZEL, H. An attractor in a solar time-series. **Physica D**, v. 25, n. 1-3, p. 165–172, 1987. 80
- KURTHS, J.; SCHWARZ, U. Chaos theory and radio-emission. **Space Science Reviews**, v. 68, n. 1-4, p. 171–184, 1994. 80
- LAI, Y.-C.; LIU, Z.; BILLINGS, L.; SCHWARTZ, I. B. Noise-induced unstable dimension variability and transition to chaos in random dynamical systems. **Physical Review E**, v. 67, n. 026210, p. 026210–1, 2003. 56
- LASHKIN, V. M. Generation of solitons by a boxlike pulse in the derivative nonlinear schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions. **Physical Review E**, v. 71, n. 6, 2005. 61
- LAVEDER, D.; PASSOT, T.; SULEM, P. L. Transverse collapse of low-frequency Alfvén waves. **Physica D**, v. 152, p. 694–704, 2001. 60

- LEI, M.; MENG, G. Detecting nonlinearity of sunspot number. **International Journal Nonlinear Sciences and Numerical Simulation**, v. 5, n. 4, p. 321, 2004. 80
- LICHTENBERG, A.; LIEBERMAN, M. **Regular and chaotic dynamics**. New York: Springer, 1983. 39
- LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963. 81
- MACEK, W. M.; RADAELLI, S. Testing for chaos in the solar wind and Alfvénic fluctuations. **Advances in Space Research**, v. 28, n. 5, p. 775–780, 2001. 80
- MACHIDA, S.; SPANGLER, S. R.; GOERTZ, C. K. Simulation of amplitude-modulated circularly polarized Alfvén waves for beta less than one. **Journal of Geophysics Research**, v. 92, n. A7, p. 7413–7422, 1987. 60
- MANNEVILLE, P. **Dissipative structures and weak turbulence**. San Diego: Academic Press, 1990. 39
- MARSCH, E.; LIU, S. Structure functions and intermittency of velocity fluctuations in the inner solar wind. **Annales Geophysicae - Atmospheres Hydrospheres and Space Sciences**, v. 11, n. 4, p. 227–238, 1993. 36, 79
- MARSCH, E.; TU, C. Y. Non-gaussian probability-distribution of solar-wind fluctuations. **Annales Geophysicae - Atmospheres Hydrospheres and Space Sciences**, v. 12, n. 12, p. 1127–1138, 1994. 37, 79
- MIO, K.; OGINO, T.; MINAMI, K.; TAKEDA, S. A perturbation method and its application to obliquely propagating nonlinear Alfvén wave. **Journal of the Physical Society of Japan**, v. 41, n. 265, p. 2114–2120, 1976. 126
- MJØLHUS, E. Modulational instability of hydromagnetic waves parallel to magnetic-field. **Journal of Plasma Physics**, v. 16, n. 321M, p. 321–334, 1976. 60, 126, 144
- MORESCO, P.; DAWSON, S. P. Chaos and crises in more than two dimensions. **Physical Review E**, v. 55, n. 5, p. 5350–5360, 1997. 55, 56
- MOUSSAS, X.; POLYGIANNAKIS, J. M.; PREKA-PAPADEMA, P.; EXARHOS, G. Solar cycles: a tutorial. **Advances in Space Research**, v. 35, n. 5, p. 725–738, 2005. 58

MUNDT, M. D.; MAGUIRE, W. B.; CHASE, R. R. P. Chaos in the sunspot cycle - analysis and prediction. **Journal of Geophysical Research**, v. 96, n. A2, p. 1705–1716, 1991. 80

NOCERA, L.; BUTI, B. Acceleration of Alfvén solitons. **Physica Scripta**, n. T63, p. 186–189, 1996. 62

NUSSE, H. E.; YORKE, J. A. A procedure for finding numerical trajectories on chaotic saddles. **Physica D**, v. 36, n. 1-3, p. 137–156, 1989. 54, 64, 68, 86, 94

OSSENDRIJVER, M.; COVAS, E. Crisis-induced intermittency due to attractor-widening in a buoyancy-driven solar dynamo. **International Journal Bifurcation and Chaos**, v. 13, n. 8, p. 2327–2333, 2003. 58

OTT, E. **Chaos in Dynamical Systems**. United Kingdom: Cambridge University, 1993. 39, 48, 49, 53, 54, 55, 68

PADHYE, N. S.; SMITH, S. W.; MATTHAEUS, W. M. Distribution of magnetic field components in the solar wind plasma. **Journal of Geophysical Research**, v. 106, n. A9, p. 18635–18650, 2001. 58

PAGEL, C.; BALOGH, A. Radial dependence of intermittency in the fast polar solar wind magnetic field using ulysses. **Journal of Geophysical Research**, v. 108, n. A1, p. 1012–1028, 2003. 59

PARKER, E. N.; CHARLES, F. K.; LANZEROTTI, L. J. **Solar system plasma physics**. New York: Clarendon Press, 1979. 25, 27

PARKER, T. S.; CHUA, L. O. **Practical numerical algorithms for chaotic systems**. New York: Springer-Verlag, 1989. 45, 52

PAVLOS, G. P.; KUGIUMTYIS, D.; HATZIGEORGIU, M. A. A. and N.; DIAMANTIDIS, D.; SARRIS, E. T. Nonlinear analysis of magnetospheric data. Part II. dynamical characteristics of the AE index time series and comparison with nonlinear surrogate data. **Nonlinear Processes in Geophysics**, v. 6, n. 2, p. 79–98, 1999. 81

PAVLOS, G. P.; KYRIAKOU, G. A.; RIGAS, A. G.; LIATSI, P. I.; TROCHOUTSOS, P. C.; TSONIS, A. A. Evidence for strange attractor structures in space plasmas. **Annales Geophysicae - Atmospheres and Space Sciences**, v. 10, n. 5, p. 309–322, 1992. 81

- POMEAU, Y.; MANNEVILLE, P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical-systems. **Communications in Mathematical Physics**, v. 74, n. 2, p. 189–197, 1980. 39, 46
- PRIEST, E. R. Heating the solar coronal by magnetic reconnection. **Astrophysics and Space Science**, v. 264, n. 1-4, p. 77–100, 1999. 28, 29
- RAULIN, J. P.; PACINI, A. A. Solar radio emissions. **Advance in Space Science**, v. 35, n. 5, p. 739–754, 2005. 31
- REDAELLI, S.; MACEK, W. M. Lyapunov exponent and entropy of the solar wind flow. **Planetary and Space Science**, v. 49, n. 12, p. 1211–1218, 2001. 80
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L. High-dimensional chaotic saddles in the kuramoto-sivashinsky equation. **Physics Letters A**, v. 319, n. 1-2, p. 104–109, 2003. 63
- _____. Alfvén chaotic saddles. **International of Journal Bifurcation and Chaos**, v. 14, n. 11, p. 4009–4017, 2004. 24, 31, 62, 64
- _____. Intermittency induced by attractor-merging crisis in kuramoto-sivashinsky equation. **Physical Review E**, v. 71, n. 1, p. 061203, 2005. 63, 80
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L.; MACAU, E. E.; ROSA, R. R. Analysis of chaotic saddles in higt-dimensional dynamical systems: the kuramoto-sivashinsky equation. **Chaos**, v. 14, n. 3, p. 545–556, 2004. 63
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L.; MACAU, E. E. N.; REINALDO, R. R. Analysis of chaotic saddles in low-dimensional dynamical systems: the derivative nonlinear schrödinger equation. **Physica D**, v. 199, n. 3-4, p. 407–424, 2004. 57, 62, 64
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L.; PRETO, A. J.; STEPHANY, S. Intermittent chaos driven by nonlinear alfvén waves. **Nonlinear Processes in Geophysics**, v. 11, n. 5-6, p. 691–700, 2004. 63
- RIGOZO, N. R.; NORDEMANN, D. J. R.; ECHER, E.; ZANANDREA, A.; GONZALEZ, W. D. Solar variability effects studied by tree-ring data wavelet analysis. **Advances in Space Research**, v. 29, n. 12, p. 1985–1988, 2002. 23

- ROBERT, C.; ALLIGOOD, K. T.; OTT, E.; YORKE, J. A. Explosions of chaotic sets. **Physica D**, v. 144, n. 1-2, p. 44–61, 2000. 49, 70, 74
- ROGISTER, A. Parallel propagation of nonlinear low-frequency waves in high-beta plasma. **Physics of Fluids**, v. 14, n. 12, p. 2733, 1971. 144
- RUDERMAN, M. S. DNLS equation for large-amplitude solitons propagating in an arbitrary direction in a high-beta Hall plasma. **Journal of Plasma Physics**, v. 67, n. 4, p. 271–276, 2002. 60
- SHARMA, A. S. Assessing the magnetospheres nonlinear behavior - its dimension is low, its predictability. **Reviews of Geophysics**, v. 33, n. 1, p. 645–650, 1995. 81
- SOMMERER, J. C.; OTT, E.; GREBOGI, C. Scaling law for characteristic times of noise-induced crises. **Physical Review A**, v. 43, n. 4, p. 1754–1769, 1991. 50, 51
- SORRISO-VALVO, L.; CARBONE, V.; GIULIANI, P.; VELTRI, P.; BRUNO, R.; ANTONI, V.; MARTINES, E. Intermittency in plasma turbulence. **Planetary and Space Science**, v. 49, n. 12, p. 1193–1200, 2001. 99
- SORRISO-VALVO, L.; CARBONE, V.; VELTRI, P. Intermittency in the solar wind turbulence through probability distribution functions of fluctuations. **Geophysical Research Letters**, v. 26, n. 13, p. 1801–1804, 1999. 36, 79
- SPANGLER, S. R. Nonlinear astrophysical Alfvén waves: onset and outcome of the modulational instability. **Astrophysical Journal**, v. 299, n. 1, p. 122–137, 1985. 126
- _____. Evolution of nonlinear alfvén waves subject to growth and damping. **Physical of Fluids**, v. 29, n. 8, p. 2535–2547, 1986. 126
- SPANGLER, S. R.; SHEERIN, J. P. Properties of Alfvén solitons in a finite-beta plasma. **Journal of Plasma Physics**, v. 27, n. 193S, p. 193–198, 1982. 60, 144
- SWEET, D.; OTT, E. Fractal dimension of higher-dimensional chaotic repellors. **Physica D**, v. 139, n. 1-2, p. 1–27, 2000. 54
- SZABÓ, K.; LAI, Y.-C.; GREBOGI, C. Topological gap filling at crisis. **Physical Review E**, v. 61, n. 5, p. 5019–5032, 2000. 49, 54, 70, 74

- SZABÓ, K. G.; LAI, Y.-C.; GREBOGI, C. Critical exponent for gap filling at crisis. **Physical Review Letters**, v. 77, n. 15, p. 3102–3105, 1996. 49
- SZABÓ, K. G.; TEL, T. Transient chaos as the backbone of dynamics on strange attractors beyond crisis. **Physics Letters A**, v. 196, n. 3-4, p. 173–180, 1994. 49
- TOBIAS, S. M.; WEISS, N. O.; KIRK, V. Chaotically modulated stellar dynamos. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 273, n. 4, p. 1150–1166, 1995. 58
- TSURUTANI, B.; HO, C. M.; ARBALLO, J.; GOLDSTEINS, B. E. Large amplitude imf fluctuations in corotating interection regions: Ulysses at midlatitudes. **Geophysical Research Letters**, v. 22, n. 23, p. 3397–3400, 1995b. 17, 32, 34
- TSURUTANI, B. T.; GONZALEZ, W. D. The cause of high-intensity long-duration continous ae activity (HILDCAAA): interplanetary alfvén wave trains. **Planetary in Space Science**, v. 35, n. 4, p. 405, 1987. 78
- TSURUTANI, B. T.; GONZALEZ, W. D.; GUARNIERI, F.; KAMIDE, Y.; ZHOU, X. Y.; ARBOLLO, J. K. Are high-intensity long-duration continous AE activity (HILDCAA) events substorm expansion events? **Journal of Atmospheric Solar-Terrestrial Physics**, v. 66, n. 2, p. 167, 2004. 78
- TSURUTANI, B. T.; HO, C. M. A review of discontinuities and Alfvén waves in interplanetary space: Ulysses results. **Reviews of Geophysics**, v. 37, n. 4, p. 517–541, 1999. 26, 32, 97
- TSURUTANI, B. T.; LAHKINA, G. S.; PICKETT, J. S.; GARNIERI, F. L.; LIN, N.; GOLDSTEIN, B. E. Nonlinear Alfvén waves, discontinuities, proton perpendicular acceleration, and magnetic holes/decreases in interplanetary space and the magnetosphere: intermediate shocks? **Nonlinear Processes in Geophysics**, v. 12, n. 5, p. 321–336, 2005. 79
- VALDIVIA, J. A.; ROGAN, J.; MUNOZ, V.; GOMBEROFF, L.; KLIMAS, A.; VASSILIADIS, D.; URITSKY, V.; SHARMA, S.; TOLEDO, B. The magnetosphere as a complex system. **Advances in Space Research**, v. 35, n. 5, p. 961–971, 2005. 23

VASSILIADIS, D.; SHARMA, A. S.; PAPADOPOULOS, K. Lyapunov exponent of magnetospheric activity from al time-series. **Geophysical Research Letters**, v. 18, n. 8, p. 1643–1646, 1991. 80

VERHEEST, F. Nonlinear parallel Alfvén waves in cometary plasmas. **Icarus**, v. 86, n. 1, p. 273–282, 1990. 125, 126, 127

VERHEEST, F.; BUTI, B. Parallel solitary Alfvén waves in warm multispecies beam-plasma systems. 1. **Journal of Plasma Physics**, v. 47, n. 1, p. 15–24, 1992. 60

VERHEEST, F.; CATTART, T.; DUBININ, E.; SAUER, K.; MCKENZIE, J. F. Whistler oscillations revisited: the role of charge neutrality? **Nonlinear Processes in Geophysics**, v. 11, n. 4, p. 447–452, 2004. 61

WEISS, N. O.; TOBIAS, S. M. Physical causes of solar activity. **Space Science Reviews**, v. 94, n. 1-2, p. 99–112, 2000. 57, 58

WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; J., A. V. Determining lyapunov exponents from a time series. **Physica D**, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985. 44, 63

WU, C. C. MKDVB and CKB chock waves. **Space Science Reviews**, v. 107, n. 1-2, p. 403–421, 2003. 79

ZHOU, C.; LAI, C.-H. Amplification of weak signals and stochastic resonance via on-off intermittency with symmetry breaking. **Physical Review E**, v. 60, n. 4, p. 3928–3935, 1999. 101

APÊNDICE A

ONDAS DE ALFVÉN

Vamos discutir aqui uma das mais fundamentais descobertas da física moderna de plasma que fez surgir uma nova física de campo, a *magnetohidrodinâmica*, incluindo ainda um novo tipo de onda, a onda de Alfvén.

A.1 Introdução

Ondas de Alfvén são tensões magnéticas transversais que cruzam as linhas de campo magnéticas e podem ser excitadas em qualquer fluido eletricamente condutor permeado por um campo magnético. Hannes Alfvén deduziu sua existência a partir das equações eletromagnéticas e hidrodinâmicas. As ondas de Alfvén são agora conhecidas por desempenhar um importante papel no transporte de energia em muitos sistemas hidromagnéticos geofísicos e astrofísicos.

O caso de um campo magnético normal ao campo magnético original \vec{B}_0 , cuja pequena componente \vec{B}_1 , quando adicionada a \vec{B}_0 , dá às linhas de força uma forma senoidal é mostrada na Fig. (A.1).

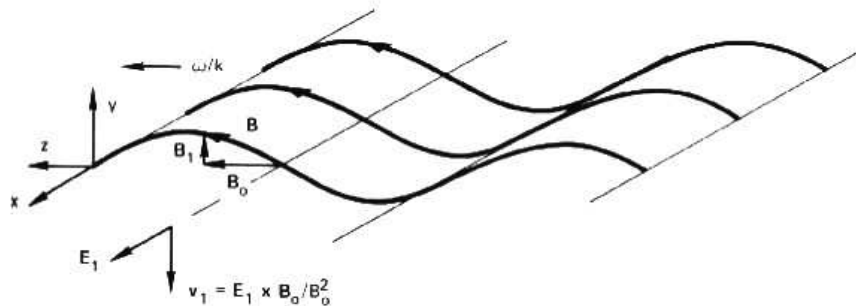


FIGURA A.1 - Relação entre as grandezas oscilantes, durante a propagação da onda de Alfvén. Note as linhas de campo magnético externo B distorcidas pelo plasma.
FONTE: Adaptada de Chen (1984).

A força restauradora responsável pelas ondas de Alfvén seguem de dois princípios físicos simples:

- **Lei de Lenz para um fluido condutor:** corrente elétrica induzida pelo movimento de um fluido condutor através de um campo magnético gera uma força eletromagnética que age no sentido de se opor ao movimento do

fluido;

- **Segunda lei de Newton para fluidos:** uma força aplicada a um fluido irá resultar em uma variação no momentum deste, proporcional à magnitude da força e na mesma direção.

Podemos visualizar estas duas leis num fluido então da seguinte forma. Imagine um campo magnético homogêneo permeando um fluido perfeitamente condutor, com um fluxo inicialmente uniforme, normal às linhas de campo magnético. O fluxo do fluido irá distorcer as linhas de campo magnético, ficando estas curvadas. A curvatura das linhas de campo magnético iria produzir uma força magnética (lei de Lorentz) no fluido de forma a se opor a curvatura. Pela segunda lei de Newton, a força de Lorentz faria variar o momentum do fluido, empurrando-o (e conseqüentemente as linhas de campo magnético) de forma a querer minimizar a distorção das linhas de campo e restaurar o sistema para o seu estado de equilíbrio. Esta força restauradora seria a base para as oscilações transversais do campo magnético em um fluido condutor.

Neste apêndice será apresentado uma derivação formal da onda de Alfvén.

A.2 Oscilações e Ondas

Se a posição de uma partícula varia periodicamente em torno do ponto de equilíbrio, chamamos este movimento de **oscilação**. Se tal processo oscilatório se propaga num meio, chamamos este de **onda**. Ambos processos são caracterizados por três quantidades básicas:

- **Amplitude:** mede o quanto a posição se afasta daquela de equilíbrio;
- **Frequência:** mede o número de oscilações, ciclos por minuto;
- **Fase:** tempo que a oscilação passa por amplitude zero.

As ondas podem ser classificadas de acordo com a magnetização do plasma. As ondas são ditas **eletrostáticas** se $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Se o campo magnético da onda, \vec{B}_1 , é diferente de zero, a onda é dita **eletromagnética**.

As ondas eletromagnéticas são sempre descritas pelas equações de Maxwell, e os campos destas ondas aparecem também nas equações que regem o movimento das

partículas num plasma. Assim, as equações que regem o movimento da partículas no plasma e as equações de Maxwell formam um sistema a ser resolvido.

Quando se trata de um plasma, três tipos de aproximações clássicas podem ser feitas: considerar o plasma frio, morno ou quente (BITTENCOURT, 1995).

A.2.1 Plasma Frio

Num plasma frio a energia térmica das partículas é ignorada e a função de distribuição da velocidade correspondente é uma função Delta de Dirac. O termo de pressão é também negligenciado. O modelo de plasma frio dá uma descrição satisfatória para ondas que não tenham velocidade de fase muito pequena. Se considerarmos apenas o movimento dos elétrons, só seremos capazes de observar ondas de alta frequência, $\Omega > \Omega_{ci}$. Num tratamento baseado na teoria de perturbação linear, só tratamos de ondas de pequena amplitude. As equações utilizadas para este modelo são:

- Equação de Continuidade:

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [n(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)] = 0 \quad (\text{A.1})$$

- Equação do Movimento:

$$n \frac{D\vec{v}(\vec{r}, t)}{Dt} = q[\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] - m\nu\vec{v}(\vec{r}, t) \quad (\text{A.2})$$

Estas duas equações são complementadas com as equações de Maxwell. Neste tipo de tratamento, obtêm-se não a equação de onda, mas uma **relação de dispersão**, que relaciona o vetor de onda ω e o número de onda \vec{k} . Toda a informação sobre um dado modo do plasma está contido na relação de dispersão apropriada.

A.2.2 Plasma Morno

Quando estamos utilizando a aproximação de plasma morno, a energia térmica e, conseqüentemente, o gradiente de pressão são considerados. Novamente, as equações (A.1) e (A.2), complementadas com as equações de Maxwell descrevem o comportamento das partículas no plasma.

A.2.3 Plasma Quente

Na aproximação de plasma quente devemos trabalhar diretamente com a função de distribuição no espaço de fase, ao invés de usarmos as equações de transporte macroscópico.

Independente do modelo utilizado, podemos separar os modos de plasma em dois grandes grupos: **ondas de plasma longitudinais** ($\vec{k} \parallel \vec{E}_1$), e **ondas de plasma transversais eletromagnéticas** ($\vec{k} \perp \vec{E}_1$). Também podemos classificá-las de acordo com a direção de propagação em relação ao campo magnético ambiente. Se $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ esta onda é dita **paralela**, se $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ a onda é dita **perpendicular**. Note que os termos paralelo e perpendicular estão relacionados com o ângulo que o número de onda faz com o campo magnético externo, enquanto que os termos longitudinal e transversal estão relacionados com o ângulo entre o número de onda e o campo elétrico.

A.3 Existência de Ondas MHD - Ondas de Alfvén

Se um fluido condutor é colocado em um campo magnético constante, seu movimento dá origem a uma força eletromagnética que produz corrente elétrica. Devido ao campo magnético, essas correntes dão mecanismos de força que variam o estado de movimento do fluido (ALFVÉN, 1942). Assim, uma forma de onda combinada do eletromagnetismo-hidrodinâmica é produzida.

O fenômeno pode ser descrito pelas equações eletrodinâmicas, dadas por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (\text{A.6})$$

juntamente com a equação hidromagnética:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \vec{\nabla} p \quad (\text{A.7})$$

onde σ é a condutividade elétrica, μ_0 é a permeabilidade no vácuo, ρ é a densidade do fluido, \vec{J} é a densidade de corrente, \vec{u} sua velocidade e p a pressão.

No caso particular em que o circuito é formado por um condutor perfeito, a condutividade σ tende a infinito ($\sigma \rightarrow \infty$), mas a densidade de corrente \vec{J} deve ser finita. Assim, é preciso que o termo entre parênteses na Eq. (A.6) se anule, ou seja:

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = 0$$

de modo que, para um material perfeitamente condutor,

$$\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B}$$

A lei de Faraday, Eq. (A.4), estabelece então que:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times (-\vec{u} \times \vec{B})$$

ou

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) \quad (\text{A.8})$$

que é muitas vezes chamada de equação de indução modificada. Considerando a hipótese de que o fluido é um excepcional condutor, vamos considerar uma perturbação da densidade do meio ρ , definida como:

$$\rho(z, t) = \rho_0 + \rho'(z, t)$$

onde ρ' é o termo de perturbação e $|\rho'| \ll |\rho_0|$. Supondo ainda que todas as variáveis envolvidas dependem de z e de t , que a velocidade do fluido \vec{u} é paralela ao eixo x , e que a corrente no plasma produz uma perturbação do campo magnético $b' \hat{x}$, tal que:

$$\vec{B}(z, t) = B_0 \hat{z} + b' \hat{x}$$

e, fazendo uso da propriedade vetorial:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{V}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\vec{U} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{U})\vec{V} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} - (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \quad (\text{A.9})$$

na equação de indução, obtemos:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{u}$$

ou, aplicando a equação para B total e fazendo algumas considerações:

$$\frac{d}{dt}(B_0\hat{z} + b'\hat{x}) = (B_0\hat{z} + b'\hat{x}) \cdot (\partial/\partial z\hat{e}_z)\vec{u}$$

ou ainda,

$$\frac{db'}{dt} = B_0 \frac{du_x}{dz} \quad (\text{A.10})$$

onde estamos supondo que todas as variações das ondas encontram-se ao longo de z .

Agora, diferenciando a equação acima com relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d^2b'}{dt^2} = B_0 \frac{d^2u_x}{dt dz} \quad (\text{A.11})$$

e vamos guardar este resultado.

Tomando agora a equação de movimento, Eq. (A.7) que pode ser reescrita como¹:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (\text{A.12})$$

e se desprezarmos os termos de pressão, pois desejamos apenas as componentes na direção x , temos simplesmente:

$$(\rho_0 + \rho') \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{d\vec{b}'}{dz}$$

Derivando este último resultado com relação a z :

$$\rho_0 \frac{d^2\vec{u}}{dt dz} + \frac{d}{dz} \left(\rho' \frac{d\vec{u}}{dt} \right) = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{d^2\vec{b}'}{dz^2}$$

e, desprezando os termos de 2ª ordem:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt dz} = \frac{B_0}{\mu_0 \rho_0} \frac{d^2\vec{u}}{dz^2} \quad (\text{A.13})$$

¹Utilizamos a propriedade vetorial (A.9) na equação (A.7) no primeiro termo do lado direito daquela expressão para obtermos esta forma.

Substituindo (A.13) em (A.11):

$$\frac{d^2\vec{b}'}{dt^2} = B_0 \left[\frac{B_0}{\mu_0\rho_0} \frac{d^2\vec{b}'}{dz^2} \right]$$
$$\frac{d^2\vec{b}'}{dt^2} = \frac{B_0^2}{\mu_0\rho_0} \frac{d^2\vec{b}'}{dz^2}$$

que é uma equação de onda, cuja velocidade é definida como sendo:

$$c_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0\rho_0} \tag{A.14}$$

e é chamada de velocidade de Alfvén. Ondas deste tipo podem ser de grande importância na física solar. Como o Sol tem um campo magnético presente, e sendo a matéria solar um bom condutor, as condições de existência dessas ondas eletromagnéticas-hidrodinâmicas são satisfeitas (ALFVÉN, 1942).

Quando da publicação deste trabalho em 1942, Hannes Alfvén não recebeu crédito por sua descobertas. Os cientistas da época achavam que se tal onda existisse, certamente Maxwell a teria descoberto. Mas de fato, hoje se sabe que além das ondas de Alfvén ocorrerem abundantemente no Sol, também se constata sua existência na atmosfera solar, espaço interplanetário, na magnetosfera terrestre e de outros planetas.

APÊNDICE B

DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DNLS

Nosso ponto de partida é um plasma infinito, homogêneo, contendo s espécies de partículas¹, imersas em um campo magnético externo ($\mathbf{B} = B_0 \hat{x}$). Restringiremos nossa análise ao caso unidimensional, onde todas as ondas envolvidas se propagam ao longo do campo magnético ambiental. Desde que as frequências características das ondas sejam menores que a frequência ciclotrônica, vamos supor a aproximação de neutralidade de carga elétrica e desprezar a corrente de deslocamento. Assim, o plasma pode ser descrito pelo seguinte conjunto de Equações:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_s u_{s\parallel}) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial u_{s\parallel}}{\partial t} + u_{s\parallel} \frac{\partial u_{s\parallel}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial x} = Z_s [E_{\parallel} + \hat{x} \cdot (\mathbf{u}_{s\perp} \times \mathbf{B}_{\perp})] \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}}{\partial t} + u_{s\parallel} \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}}{\partial x} = Z_s [\mathbf{E}_{\perp} + u_{s\parallel} \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{u}_{s\perp} \times \hat{x}] \quad (\text{B.3})$$

com a Equação de estado:

$$p_s n_s^{-\gamma_s} = cte = k_s \quad (\text{B.4})$$

e conjuntamente com as Equações de Maxwell:

$$\hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$0 = \sum_s Z_s \rho_s u_{s\parallel} \quad (\text{B.6})$$

$$\hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial x} = \sum_s Z_s \rho_s \mathbf{u}_{s\perp} \quad (\text{B.7})$$

$$0 = \sum_s Z_s \rho_s \quad (\text{B.8})$$

O somatório sobre s é aplicado a diferentes espécies do plasma (incluindo íons e elétrons). Para a pressão politrópica, as Equações de estado têm sido adotadas, e qualquer vetor \mathbf{u}_s tem suas componentes paralelas e perpendiculares ao campo magnético externo denotado por $u_{s\parallel}$ e $u_{s\perp}$.

¹Apesar de só considerarmos íons e elétrons, vamos manter a forma original da dedução proposta por Verheest (1990)

As Equações acima estão escritas em forma adimensional, apropriada para ondas de Alfvén (VERHEEST, 1990), com as quantidades como velocidade, pressão, campo magnético, campo elétrico, coordenada x e o tempo normalizadas por: c_A , B_0^2/μ_0 , $c_A B_0$, c_A/ω_{ci} e ω_{ci}^2 , respectivamente, sendo $\omega_{ci} = eB_0/m_i$ a frequência íon-ciclotrônica, $c_A = B_0/(\mu_0\rho_0)^{1/2}$ a velocidade de Alfvén e γ na Equação de estado representa o calor específico.

Para um plasma de múltiplas espécies, onde os diferentes constituintes podem ter diferentes sentidos, vamos supor que suas velocidades ao longo do campo ambiental sejam dados por: $U_s = u_{s\parallel 0}$. Em sistemas fracamente não-lineares, podemos usar as seguintes mudanças de variáveis (MIO *et al.*, 1976; MJØLHUS, 1976; VERHEEST, 1990):

$$\xi = \varepsilon(x - Vt) \quad \tau = \varepsilon^2 t \quad (\text{B.9})$$

com V sendo a velocidade da onda e ε um pequeno parâmetro que mede o efeito da fraca dispersão e da fraca não-linearidade. Devemos notar que as expressões (B.9) implicam numa mudança no sistema de referências, o qual é chamado de sistema de referências da onda e que viaja com a velocidade de Alfvén na direção positiva da coordenada x . Isto nos impõe uma restrição adicional ao nosso modelo, já que dessa forma só a propagação no sentido positivo (*forward*) é possível de ser descrito. Portanto, a Equação de Schrödinger não-linear derivativa (DNLS) não pode modelar a instabilidade de decaimento das ondas de Alfvén, já que não é aplicável para o caso onde estão presentes ondas com sentido de propagação $-x$ (*backward*). A variável τ serve para descrever a parte lenta da variação temporal das variáveis envolvidas no sistema de referência da onda. Isto implica, qualitativamente, que o modelo descreve processos com uma escala de tempo muito maior que o tempo de propagação da onda acústica (SPANGLER, 1985; SPANGLER, 1986), o que é conhecido como aproximação acústica.

As variáveis relacionadas com os efeitos paralelos têm as seguintes expansões em

série de potências em torno do equilíbrio:

$$\rho_s = \rho_{s0} + \varepsilon \rho_s^{(1)} + \varepsilon^2 \rho_s^{(2)} + \dots \quad (\text{B.10})$$

$$u_{s\parallel} = U_s + \varepsilon u_{s\parallel}^{(1)} + \varepsilon^2 u_{s\parallel}^{(2)} + \dots \quad (\text{B.11})$$

$$p_s = P_s + \varepsilon p_s^{(1)} + \varepsilon^2 p_s^{(2)} + \dots \quad (\text{B.12})$$

$$E_{\parallel} = \varepsilon E_{\parallel}^{(1)} + \varepsilon^2 E_{\parallel}^{(2)} + \dots \quad (\text{B.13})$$

enquanto que as variáveis relacionadas com os campos transversais são descritas por:

$$\mathbf{u}_{s\perp} = \varepsilon^{1/2}(\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} + \varepsilon \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} + \varepsilon^2 \mathbf{u}_{s\perp}^{(3)} + \dots) \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{B}_{\perp} = \varepsilon^{1/2}(\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \varepsilon \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + \varepsilon^2 \mathbf{B}_{\perp}^{(3)} + \dots) \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = \varepsilon^{1/2}(\mathbf{E}_{\perp}^{(1)} + \varepsilon \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} + \varepsilon^2 \mathbf{E}_{\perp}^{(3)} + \dots) \quad (\text{B.16})$$

Tais perturbações estão inspiradas na imagem linear das ondas de Alfvén paralelas onde, para as ordens menores na perturbação, existem somente efeitos perpendiculares, além das mudanças nas densidades ou velocidades paralelas do fluido. Esse fato será verificado quando da expansão da Equação de movimento. Efeitos não-lineares e dissipativos então entram na mesma condição.

Aplicando as mudanças de variáveis (B.9) às Equações (B.1)-(B.3), e usando as quantidades perturbadas (B.10)-(B.16) obteremos uma seqüência de Equações relacionando os coeficientes das potências de ε em ambos os lados das Equações. Na ordem mais baixa em ε , os resultados são remanescentes da aproximação de um plasma frio (VERHEEST, 1990).

Portanto, as mudanças propostas pelas Equações (B.9) nos permite escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} = -\varepsilon V \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (\text{B.18})$$

Logo, as Equações (B.1)-(B.3) passam a ter a seguinte forma:

$$-\varepsilon V \frac{\partial \rho_s}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \rho_s}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_s u_{s\parallel}) = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$-\varepsilon V \frac{\partial u_{s\parallel}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_{s\parallel}}{\partial \tau} + u_{s\parallel} \varepsilon \frac{\partial u_{s\parallel}}{\partial \xi} + \frac{\varepsilon}{\rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial \xi} = Z_s [E_{\parallel} + \hat{x} \cdot (\mathbf{u}_{s\perp} \times \mathbf{B}_{\perp})] \quad (\text{B.20})$$

$$-\varepsilon V \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}}{\partial \tau} + u_{s\parallel} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}}{\partial \xi} = Z_s [\mathbf{E}_{\perp} + u_{s\parallel} \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{u}_{s\perp} \times \hat{x}] \quad (\text{B.21})$$

Vamos agora aplicar as Equações de perturbação à expressão (B.19), a Equação de continuidade no referencial da onda, buscando a ordem mais baixa em ε :

$$\begin{aligned} -\varepsilon V \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_{s0} + \varepsilon \rho_s^{(1)} + \dots) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_{s0} + \varepsilon \rho_s^{(1)} + \dots) + \\ + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} [(\rho_{s0} + \varepsilon \rho_s^{(1)} + \dots)(U_s + \varepsilon u_{s\parallel}^{(1)} + \dots)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Como ρ_{s0} e U_s são constantes, suas derivadas são nulas. Logo:

$$-\varepsilon^2 V \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} + \varepsilon^3 \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \rho_{s0} \frac{\partial u_{s\parallel}^{(1)}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 U_s \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} + \dots = 0$$

e vemos então, que os termos de menor ordem envolvendo ε são:

$$-\varepsilon^2 V \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \rho_{s0} \frac{\partial u_{s\parallel}^{(1)}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 U_s \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} = 0$$

ou

$$-V \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} + \rho_{s0} \frac{\partial u_{s\parallel}^{(1)}}{\partial \xi} + U_s \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} = 0$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[-(V - U_s) \rho_s^{(1)} + \rho_{s0} u_{s\parallel}^{(1)} \right] = 0$$

que, integrando, nos fornece:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-(V - U_s) \rho_s^{(1)} + \rho_{s0} u_{s\parallel}^{(1)} \right] d\xi = 0 \\ -(V - U_s) \rho_s^{(1)} + \rho_{s0} u_{s\parallel}^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$u_{s\parallel}^{(1)} = \frac{\rho_s^{(1)}}{\rho_{s0}}(V - U_s) \quad (\text{B.23})$$

Aplicando os termos de perturbação à expressão (B.20):

$$\begin{aligned} -\varepsilon V \frac{\partial}{\partial \xi}(U_s + \varepsilon u_{s\parallel}^{(1)} + \dots) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}(U_s + \varepsilon u_{s\parallel}^{(1)} + \dots) + \\ (U_s + \varepsilon u_{s\parallel}^{(1)} + \dots) \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}(U_s + \varepsilon u_{s\parallel}^{(1)} + \dots) + \\ \frac{\varepsilon}{\rho_{s0}} \frac{\partial}{\partial \xi}(P_s + \varepsilon p_s^{(1)} + \dots) = Z_s [E_{\parallel} + \hat{x} \cdot (\mathbf{u}_{s\perp} \times \mathbf{B}_{\perp})] \quad (\text{B.24}) \end{aligned}$$

O termo ρ_{s0}^{-1} foi colocado na expressão porque:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_s} &= \frac{1}{(\rho_{s0} + \varepsilon \rho_s^{(1)} + \dots)} = \frac{1}{\rho_{s0} \left(1 + \varepsilon \frac{\rho_s^{(1)}}{\rho_{s0}} + \dots\right)} \\ &= \rho_{s0}^{-1} \left(1 + \varepsilon \frac{\rho_s^{(1)}}{\rho_{s0}} + \dots\right)^{-1} = \rho_{s0}^{-1} \left(1 - \varepsilon \frac{\rho_s^{(1)}}{\rho_{s0}} + \dots\right) \approx \rho_{s0}^{-1} \end{aligned}$$

expandindo em série de Taylor. Agora, eliminando as derivadas dos termos constantes, obtemos:

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 V \frac{\partial u_{s\parallel}^{(1)}}{\partial \xi} + \varepsilon^3 \frac{\partial u_{s\parallel}^{(1)}}{\partial \tau} + U_s \varepsilon^2 \frac{\partial u_{s\parallel}^{(1)}}{\partial \xi} + \varepsilon^3 u_{s\parallel}^{(1)} \frac{\partial u_{s\parallel}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\varepsilon^2}{\rho_{s0}} \frac{\partial p_s^{(1)}}{\partial \xi} + \dots = \\ = Z_s \left[\varepsilon E_{\parallel}^{(1)} + \varepsilon^2 E_{\parallel}^{(2)} + \dots + \hat{x} \cdot (\varepsilon \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \varepsilon^3 \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + \dots) \right] \end{aligned}$$

e vemos que os termos de menor ordem envolvem ε , conforme mostra o lado direito da Equação acima. Portanto, ficamos apenas com:

$$0 = E_{\parallel}^{(1)} + \hat{x} \cdot (\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) \quad (\text{B.25})$$

Voltemos à relação (B.21), aplicando mais uma vez os termos de perturbação:

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^{3/2}V \frac{\partial}{\partial \xi}(\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} + \varepsilon \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} + \dots) + \varepsilon^{5/2} \frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} + \varepsilon \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} + \dots) + \\
& \varepsilon^{3/2}(U_s + \varepsilon u_{s\parallel}^{(1)} + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi}(\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} + \varepsilon \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} + \dots) = Z_s \left[\varepsilon^{1/2}(\mathbf{E}_{\perp}^{(1)} + \varepsilon \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} + \dots) + \right. \\
& \left. (U_s + \varepsilon u_{s\parallel}^{(1)} + \dots) \hat{x} \times \varepsilon^{1/2}(\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \varepsilon \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + \dots) + \varepsilon^{1/2}(\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} + \varepsilon \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} + \dots) \times \hat{x} \right] \\
& -\varepsilon^{3/2}V \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}}{\partial \xi} - \varepsilon^{5/2}V \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)}}{\partial \xi} + \varepsilon^{5/2} \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}}{\partial \tau} + \varepsilon^{7/2} \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)}}{\partial \tau} + \varepsilon^{3/2}U_s \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}}{\partial \xi} + \\
& \varepsilon^{5/2}u_{s\parallel}^{(1)} \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}}{\partial \xi} + \dots = Z_s [\varepsilon^{1/2} \mathbf{E}_{\perp}^{(1)} + \varepsilon^{3/2} \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} + U_s \varepsilon^{1/2} \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \\
& U_s \varepsilon^{3/2} \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + \varepsilon^{3/2} u_{s\parallel} \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \varepsilon^{5/2} u_{s\parallel}^{(1)} \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + \varepsilon^{1/2} \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} \times \hat{x} + \varepsilon^{7/2} \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \times \hat{x} + \dots]
\end{aligned}$$

e, podemos ver que os termos de menor ordem que aparecem nesta expressão envolvem $\varepsilon^{1/2}$. Portanto, temos:

$$0 = \mathbf{E}_{\perp}^{(1)} + U_s \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} \times \hat{x} \quad (\text{B.26})$$

Multiplicando a expressão acima vetorialmente à esquerda por \hat{x} , obtemos:

$$\hat{x} \times \mathbf{E}_{\perp}^{(1)} + U_s \hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) + \hat{x} \times (\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} \times \hat{x}) = 0 \quad (\text{B.27})$$

Utilizando a propriedade vetorial:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{B.28})$$

temos:

$$\hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) = \hat{x}(\hat{x} \cdot \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) - \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}(\hat{x} \cdot \hat{x})$$

O primeiro termo do lado direito desta expressão é nulo, pois estamos supondo que \hat{x} e \mathbf{B}_{\perp} sejam perpendiculares. Logo:

$$\hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) = -\mathbf{B}_{\perp}^{(1)}$$

O segundo produto vetorial fica:

$$\begin{aligned}\hat{x} \times (\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} \times \hat{x}) &= \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}(\hat{x} \cdot \hat{x}) - \hat{x}(\hat{x} \cdot \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}) \\ \hat{x} \times (\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} \times \hat{x}) &= \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}\end{aligned}$$

Portanto, a expressão (B.27) fica:

$$\hat{x} \times \mathbf{E}_{\perp}^{(1)} - U_s \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} = 0$$

ou

$$\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} = U_s \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} - \hat{x} \times \mathbf{E}_{\perp}^{(1)} \quad (\text{B.29})$$

O último termo da expressão (B.29) pode ser modificado utilizando a lei de indução com as mudanças de variáveis e as expressões de perturbação, ou seja:

$$\hat{x} \times \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial \xi} - \varepsilon V \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}}{\partial \tau} = 0$$

$$\begin{aligned}\hat{x} \times \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} [\varepsilon^{1/2}(\mathbf{E}_{\perp}^{(1)} + \varepsilon \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} + \dots)] - \varepsilon V \frac{\partial}{\partial \xi} [\varepsilon^{1/2}(\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \varepsilon \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + \dots)] + \\ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} [\varepsilon^{1/2}(\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \varepsilon \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + \dots)] = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{3/2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} + \varepsilon^{5/2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}^{(2)}}{\partial \xi} - \varepsilon^{3/2} V \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} - \\ \varepsilon^{5/2} V \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}}{\partial \xi} + \varepsilon^{5/2} \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \tau} + \varepsilon^{7/2} \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}}{\partial \tau} + \dots = 0\end{aligned}$$

e vemos que os termos de menor ordem envolvem $\varepsilon^{3/2}$. Assim:

$$\hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} - V \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} = 0$$

Integrando esta Equação:

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{x} \times \mathbf{E}_\perp^{(1)} - V \mathbf{B}_\perp^{(1)}] d\xi = 0$$

$$\hat{x} \times \mathbf{E}_\perp^{(1)} = V \mathbf{B}_\perp^{(1)} \quad (\text{B.30})$$

e, portanto, a Equação (B.29) fica:

$$\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} = -(V - U_s) \mathbf{B}_\perp^{(1)} \quad (\text{B.31})$$

Substituindo (B.31) em (B.25), podemos verificar que:

$$E_\parallel^{(1)} + \hat{x} \cdot (\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} \times \mathbf{B}_\perp^{(1)}) = 0$$

$$E_\parallel^{(1)} = \hat{x} \cdot [-(V - U_s) \mathbf{B}_\perp^{(1)} \times \mathbf{B}_\perp^{(1)}]$$

$$E_\parallel^{(1)} \equiv 0 \quad (\text{B.32})$$

A Equação (B.32) comprova o fato de que para perturbações de pequena ordem, somente os efeitos perpendiculares existem no plasma.

Portanto, como o primeiro momento do campo elétrico paralelo ao campo magnético ambiental é nulo, vamos voltar à relação (B.20) e obter os termos para a ordem ε^2 . Estes são:

$$-V \frac{\partial u_{s\parallel}^{(1)}}{\partial \xi} + U_s \frac{\partial u_{s\parallel}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho_{s0}} \frac{\partial p_s^{(1)}}{\partial \xi} = Z_s [E_\parallel^{(2)} + \hat{x} \cdot (\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} \times \mathbf{B}_\perp^{(2)}) + \hat{x} \cdot (\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \times \mathbf{B}_\perp^{(1)})]$$

Utilizando (B.23) e (B.31), obtemos:

$$-(V - U_s) \frac{\partial u_{s\parallel}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho_{s0}} \frac{\partial p_s^{(1)}}{\partial \xi} = Z_s [E_\parallel^{(2)} + \hat{x} \cdot (\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)} \times \mathbf{B}_\perp^{(2)}) + \hat{x} \cdot (\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \times \mathbf{B}_\perp^{(1)})]$$

$$-\frac{(V - U_s)^2}{\rho_{s0}} \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho_{s0}} \frac{\partial p_s^{(1)}}{\partial \xi} = Z_s [E_\parallel^{(2)} - (V - U_s) \hat{x} \cdot (\mathbf{B}_\perp^{(1)} \times \mathbf{B}_\perp^{(2)}) + \hat{x} \cdot (\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \times \mathbf{B}_\perp^{(1)})]$$

$$(\text{B.33})$$

Precisamos encontrar uma relação para o último termo no lado direito da Equação (B.33). Para isso, vamos voltar à expressão (B.21), e tomar os termos do 2º momento

em ε , ou seja, $\varepsilon^{3/2}$, que são:

$$\begin{aligned} -V \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}}{\partial \xi} + U_s \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}}{\partial \xi} &= Z_s [\mathbf{E}_{\perp}^{(2)} + U_s \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + u_{s\parallel}^{(1)} \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \times \hat{x}] \\ \frac{-(V - U_s)}{Z_s} \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}}{\partial \xi} &= \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} + U_s \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + u_{s\parallel}^{(1)} \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \times \hat{x} \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \times \hat{x} = -\mathbf{E}_{\perp}^{(2)} - U_s \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} - u_{s\parallel}^{(1)} \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} - \frac{(V - U_s)}{Z_s} \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}}{\partial \xi}$$

Multiplicando vetorialmente à esquerda por \hat{x} a expressão acima, temos:

$$\hat{x} \times (\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \times \hat{x}) = -\hat{x} \times \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} - U_s \hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}) - u_{s\parallel}^{(1)} \hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) - \frac{(V - U_s)}{Z_s} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}}{\partial \xi}$$

e usando novamente a propriedade vetorial (B.28), é fácil ver que:

$$\begin{aligned} \hat{x} \times (\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \times \hat{x}) &= \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \\ \hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}) &= -\mathbf{B}_{\perp}^{(2)} \\ \hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) &= -\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \end{aligned}$$

e assim:

$$\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} = -\hat{x} \times \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} + U_s \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + u_{s\parallel}^{(1)} \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} - \frac{(V - U_s)}{Z_s} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}}{\partial \xi}$$

Usando a relação (B.31):

$$\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} = -\hat{x} \times \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} + U_s \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + u_{s\parallel}^{(1)} \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \frac{(V - U_s)^2}{Z_s} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} \quad (\text{B.34})$$

Substituindo (B.34) no último termo da Equação (B.33):

$$\hat{x} \cdot (\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) = \hat{x} \cdot \left\{ \left[-\hat{x} \times \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} + U_s \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + u_{s\parallel}^{(1)} \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \frac{(V - U_s)^2}{Z_s} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} \right] \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \right\}$$

$$\begin{aligned}\hat{x} \cdot (\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}) &= -\hat{x} \cdot [(\hat{x} \times \mathbf{E}_{\perp}^{(2)}) \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}] + U_s \hat{x} \cdot (\mathbf{B}_{\perp}^{(2)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) + \\ &u_{s\parallel}^{(1)} \hat{x} \cdot (\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) + \frac{(V - U_s)^2}{Z_s} \hat{x} \cdot \left[\left(\hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} \right) \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \right]\end{aligned}$$

Utilizando mais uma vez a propriedade vetorial (B.28), temos:

$$\begin{aligned}(\hat{x} \times \mathbf{E}_{\perp}^{(2)}) \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} &= -\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \times (\hat{x} \times \mathbf{E}_{\perp}^{(2)}) = \\ &= -[\hat{x}(\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \cdot \mathbf{E}_{\perp}^{(2)}) - \mathbf{E}_{\perp}^{(2)}(\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \cdot \hat{x})] = -\hat{x}(\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \cdot \mathbf{E}_{\perp}^{(2)})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} \right) \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} &= -\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \times \left(\hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} \right) = \\ &= -\left[\hat{x} \left(\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} (\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \cdot \hat{x}) \right] = -\frac{\hat{x}}{2} \frac{\partial B_{\perp}^{(1)2}}{\partial \xi}\end{aligned}$$

Assim:

$$\hat{x} \cdot (\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) = -\hat{x} \cdot [-\hat{x}(\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \cdot \mathbf{E}_{\perp}^{(2)})] + U_s \hat{x} \cdot (\mathbf{B}_{\perp}^{(2)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) + \frac{(V - U_s)^2}{Z_s} \hat{x} \cdot \left[-\frac{\hat{x}}{2} \frac{\partial B_{\perp}^{(1)2}}{\partial \xi} \right]$$

ou

$$\hat{x} \cdot (\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) = (\mathbf{E}_{\perp}^{(2)} \cdot \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) + U_s \hat{x} \cdot (\mathbf{B}_{\perp}^{(2)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) - \frac{(V - U_s)^2}{2Z_s} \frac{\partial B_{\perp}^{(1)2}}{\partial \xi}$$

Substituindo este resultado em (B.33):

$$\begin{aligned}-\frac{(V - U_s)^2}{\rho_{s0}} \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho_{s0}} \frac{\partial p_s^{(1)}}{\partial \xi} &= Z_s \left[E_{\parallel}^{(2)} - (V - U_s) \hat{x} \cdot (\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) + \right. \\ &\left. (\mathbf{E}_{\perp}^{(2)} \cdot \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) + U_s \hat{x} \cdot (\mathbf{B}_{\perp}^{(2)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) - \frac{(V - U_s)^2}{2Z_s} \frac{\partial B_{\perp}^{(1)2}}{\partial \xi} \right]\end{aligned}$$

ou

$$E_{\parallel}^{(2)} = V \hat{x} \cdot (\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}) + \frac{(V - U_s)^2}{2Z_s} \frac{\partial B_{\perp}^{(1)2}}{\partial \xi} - \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} \cdot \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} - \frac{(V - U_s)^2}{Z_s \rho_{s0}} \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{Z_s \rho_s} \frac{\partial p_{s0}^{(1)}}{\partial \xi} \quad (\text{B.35})$$

Agora achamos uma componente para o campo elétrico que nos dá alguma informação a respeito do campo magnético. Na Equação de movimento para campo perturbado de segunda ordem, temos que o segundo termo do lado direito trata-se do fluxo da variação temporal da densidade de energia magnética; o terceiro termo é o trabalho realizado pelos campos perturbados sobre o plasma; o quarto termo é a variação temporal da densidade de carga e o último termo é a variação temporal da pressão do plasma. O primeiro termo não tem definição física.

Vamos usar a Equação de estado para reescrevermos (B.35):

$$p_s = k_s n_s^{\gamma_s}$$

onde $n_s = n_{s0} + n_s^{(1)}$. Logo:

$$p_s = k_s (n_{s0} + n_s^{(1)})^{\gamma_s} = k_s \left[n_{s0} \left(1 + \frac{n_s^{(1)}}{n_{s0}} \right) \right]^{\gamma_s}$$

$$p_s = k_s n_{s0}^{\gamma_s} \left(1 + \gamma_s \frac{n_s^{(1)}}{n_{s0}} + \dots \right)$$

expandindo em série de Taylor. Tomando apenas os termos lineares e lembrando também que $\rho_s = \rho_{s0} + \rho_s^{(1)} + \dots$, temos:

$$p_s^{(1)} = k_s n_{s0}^{\gamma_s} \frac{n_s^{(1)}}{n_{s0}} \gamma_s$$

$$p_s^{(1)} = p_{s0} \gamma_s \frac{n_s^{(1)}}{n_{s0}}$$

$$p_s^{(1)} = p_{s0} \gamma_s \frac{\rho_s^{(1)}}{\rho_{s0}}$$

Derivando esta expressão com relação a ξ , obtemos:

$$\frac{\partial p_s^{(1)}}{\partial \xi} = \gamma_s \frac{p_{s0}}{\rho_{s0}} \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} \quad (\text{B.36})$$

e então, reescrevemos a Equação (B.35) da seguinte forma:

$$E_{\parallel}^{(2)} = -\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \cdot \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} + V \hat{x} \cdot (\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}) + \frac{\delta}{2} \frac{\partial B_{\perp}^{(1)2}}{\partial \xi} \quad (\text{B.37})$$

e, a fim de determinar δ , vamos substituir (B.37) em (B.35):

$$-\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \cdot \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} + V \hat{x} \cdot (\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}) + \frac{\delta}{2} \frac{\partial B_{\perp}^{(1)2}}{\partial \xi} = V \hat{x} \cdot (\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}) - \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \cdot \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} + \frac{(V - U_s)^2}{2Z_s} \frac{\partial B_{\perp}^{(1)2}}{\partial \xi} - \frac{(V - U_s)^2}{\rho_{s0} Z_s} \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{Z_s \rho_{s0}} \frac{\partial p_s^{(1)}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\delta}{2} \frac{\partial B_{\perp}^{(1)2}}{\partial \xi} - \frac{(V - U_s)^2}{2Z_s} \frac{\partial B_{\perp}^{(1)2}}{\partial \xi} = -\frac{(V - U_s)^2}{\rho_{s0} Z_s} \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{Z_s \rho_s} \frac{\partial p_s^{(1)}}{\partial \xi}$$

Multiplicando a expressão acima por $\rho_{s0} Z_s$, obtemos:

$$-(V - U_s)^2 \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_s^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial B_{\perp}^{(1)2}}{\partial \xi} [Z_s \rho_{s0} \delta - \rho_{s0} (V - U_s)^2]$$

Utilizando a expressão (B.36):

$$\left[-(V - U_s)^2 + \gamma_s \frac{p_{s0}}{\rho_{s0}} \right] \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial B_{\perp}^{(1)2}}{\partial \xi} [Z_s \rho_{s0} \delta - \rho_{s0} (V - U_s)^2]$$

ou

$$\frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\rho_{s0} (V - U_s)^2 - Z_s \rho_{s0} \delta}{(V - U_s)^2 - \gamma_s p_{s0} / \rho_{s0}} \right] \frac{\partial B_{\perp}^{(1)2}}{\partial \xi}$$

e, integrando esta Equação, obtemos:

$$\rho_s^{(1)} = \frac{1}{2} \alpha_s \rho_{s0} B_{\perp}^{(1)2} \quad (\text{B.38})$$

onde

$$\alpha_s = \frac{\rho_{s0} (V - U_s)^2 - Z_s \rho_{s0} \delta}{\rho_{s0} (V - U_s)^2 - \gamma_s p_{s0}}$$

O termo α_s indica uma intensificação ou depressão da densidade que pode diferir de

uma espécie para outra. A Equação (B.38) indica que existe uma correlação direta entre a amplitude da onda e as flutuações na densidade. O termo δ foi determinado da necessidade das condições de neutralidade de corrente e carga, Equações (B.6) e (B.8), que devem ser nulas para os termos de ordem ε . Portanto, a partir destas expressões, definimos a função δ , a saber:

$$\sum_s Z_s \rho_{s0} = 0 \quad (\text{B.39})$$

$$\sum_s Z_s \rho_s^{(1)} = 0 \quad (\text{B.40})$$

Utilizando (B.38), obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_s Z_s \rho_s^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{\perp}^{(1)2} \sum_s Z_s \rho_{s0} \alpha_s = 0 \\ &\sum_s Z_s \rho_{s0} \alpha_s = 0 \end{aligned}$$

Igualando com (B.40):

$$\sum_s Z_s \rho_{s0} \alpha_s = \sum_s Z_s \rho_{s0}$$

e utilizando a expressão para α_s :

$$\begin{aligned} \sum_s Z_s \rho_{s0} (\alpha_s - 1) &= 0 \\ \sum_s Z_s \rho_{s0} \left[\left(\frac{\rho_{s0} (V - U_s)^2 - Z_s \rho_{s0} \delta}{\rho_{s0} (V - U_s)^2 - \gamma_s p_{s0}} \right) - 1 \right] &= 0 \\ \sum_s Z_s \rho_{s0} \left(\frac{\gamma_s p_{s0} - Z_s \rho_{s0} \delta}{\rho_{s0} (V - U_s)^2 - \gamma_s p_{s0}} \right) &= 0 \\ \sum_s \frac{Z_s \rho_{s0} \gamma_s p_{s0}}{\rho_{s0} (V - U_s)^2 - \gamma_s p_{s0}} &= \sum_s \frac{Z_s^2 \rho_{s0}^2 \delta}{\rho_{s0} (V - U_s)^2 - \gamma_s p_{s0}} \end{aligned}$$

e assim, definimos:

$$\delta = \sum_s \frac{Z_s \rho_{s0} \gamma_s p_{s0}}{\rho_{s0} (V - U_s)^2 - \gamma_s p_{s0}} \bigg/ \sum_s \frac{Z_s^2 \rho_{s0}^2}{\rho_{s0} (V - U_s)^2 - \gamma_s p_{s0}} \quad (\text{B.41})$$

Até aqui, vimos que o primeiro momento da expansão das Equações nos informa que o campo elétrico $E_{\parallel}^{(1)}$ é nulo, indicando que somente existem efeitos perpendiculares para as menores ordens na perturbação do sistema.

O segundo momento nos fornece a Equação de movimento (a lei de Lorentz) para os campos do plasma perturbados, nos possibilitando encontrar as condições de neutralidade de carga e de corrente desejadas.

Falta ainda encontrar a lei que descreve a evolução não-linear do campo magnético.

Vamos agora tomar os termos de ordem $\varepsilon^{5/2}$ na Equação transversal de movimento, Equação (B.21), para a lei de Faraday (B.5) e Ampère (B.7), e para a ordem ε^2 nas Equações de neutralidade de corrente e carga, (B.6) e (B.8), o que nos permitirá eliminar todas as quantidades, exceto $\mathbf{B}_{\perp}^{(1)}$.

Então, da Equação (B.21), os termos que procuramos são:

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^{5/2}V\frac{\partial\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)}}{\partial\xi} + \varepsilon^{5/2}\frac{\partial\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}}{\partial\tau} + U_s\varepsilon^{5/2}\frac{\partial\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)}}{\partial\xi} + \varepsilon^{5/2}u_{s\parallel}^{(1)}\frac{\partial\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}}{\partial\xi} = \\
& \varepsilon^{5/2}Z_s[\mathbf{E}_{\perp}^{(3)} + U_s\hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(3)} + u_{s\parallel}^{(1)}\hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + u_{s\parallel}^{(2)}\hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \mathbf{u}_{s\perp}^{(3)} \times \hat{x}] \quad (\text{B.42})
\end{aligned}$$

Manipulando só o lado esquerdo desta Equação, temos:

$$-(V - U_s)\frac{\partial\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}}{\partial\tau} + u_{s\parallel}^{(1)}\frac{\partial\mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}}{\partial\xi} \quad (\text{B.43})$$

Combinando as Equações (B.23) com (B.38), obtemos:

$$u_{s\parallel}^{(1)} = \frac{1}{2}\alpha_s(V - U_s)B_{\perp}^{(2)1} \quad (\text{B.44})$$

e substituindo (B.31) e (B.44) em (B.43), temos:

$$-(V - U_s)\frac{\partial\mathbf{u}_{s\perp}^{(2)}}{\partial\xi} - (V - U_s)\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial\tau} - \frac{1}{2}\alpha_s(V - U_s)^2B_{\perp}^{(1)2}\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial\xi}$$

Multiplicando vetorialmente à esquerda por \hat{x} , teremos:

$$-(V - U_s) \left(\hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)}}{\partial \xi} + \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \tau} \right) - \frac{1}{2} \alpha_s (V - U_s)^2 B_{\perp}^{(1)2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} \quad (\text{B.45})$$

Vamos voltar à Equação (B.34), multiplicando-a vetorialmente à esquerda por \hat{x} :

$$\hat{x} \times \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} = \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} + U_s \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + u_{s\parallel}^{(1)} \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} - \frac{(V - U_s)^2}{Z_s} \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} \quad (\text{B.46})$$

e agora, derivando com relação a ξ :

$$\hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}^{(2)}}{\partial \xi} + U_s \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} (u_{s\parallel}^{(1)} \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) - \frac{(V - U_s)^2}{Z_s} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi^2}$$

Substituindo em (B.45):

$$\begin{aligned} & -(V - U_s) \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}^{(2)}}{\partial \xi} - U_s (V - U_s) \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}}{\partial \xi} - (V - U_s) \frac{\partial}{\partial \xi} (u_{s\parallel}^{(1)} \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) \\ & + \frac{(V - U_s)^3}{Z_s} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi^2} - (V - U_s) \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \alpha_s (V - U_s)^2 B_{\perp}^{(1)2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Multiplicando por $\sum_s \rho_{s0}$:

$$\begin{aligned} & - \sum_s \rho_{s0} (V - U_s) \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}^{(2)}}{\partial \xi} - \sum_s \rho_{s0} U_s (V - U_s) \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}}{\partial \xi} - \sum_s \rho_{s0} (V - U_s) \frac{\partial}{\partial \xi} (u_{s\parallel}^{(1)} \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) \\ & + \sum_s \rho_{s0} \frac{(V - U_s)^3}{Z_s} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \sum_s \rho_{s0} (V - U_s) \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \tau} - \sum_s \rho_{s0} \frac{1}{2} \alpha_s (V - U_s)^2 B_{\perp}^{(1)2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} \end{aligned}$$

e vamos definir:

$$\begin{aligned} A &= \sum_s \rho_{s0} (V - U_s) \\ C &= \sum_s \rho_{s0} (V - U_s)^2 \alpha_s \\ D &= \sum_s \rho_{s0} \frac{(V - U_s)^3}{2Z_s} \\ \mathbf{1} &= \sum_s \rho_{s0} (V - U_s)^2 \end{aligned}$$

e assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
& -A \frac{\partial \mathbf{E}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} - AV \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} - A \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \tau} + \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} - \\
& \frac{C}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(B_\perp^{(1)2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \xi} \right) + B_\perp^{(1)2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \xi} \right] + 2D \frac{\partial^2 \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \xi^2} \quad (\text{B.47})
\end{aligned}$$

Agora, o lado direito de (B.45) que, obviamente, também foi multiplicado vetorialmente por \hat{x} . Logo, temos:

$$\begin{aligned}
Z_s [\hat{x} \times \mathbf{E}_\perp^{(3)} + U_s \hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{B}_\perp^{(3)}) + u_{s\parallel}^{(1)} \hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{B}_\perp^{(2)}) + \\
u_{s\parallel}^{(2)} \hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{B}_\perp^{(1)}) + \hat{x} \times (\mathbf{u}_{s\perp}^{(3)} \times \hat{x})]
\end{aligned}$$

e, mais uma vez, utilizando a propriedade vetorial (B.28), é fácil ver que:

$$\begin{aligned}
\hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{B}_\perp^{(3)}) &= -\mathbf{B}_\perp^{(3)} \\
\hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{B}_\perp^{(2)}) &= -\mathbf{B}_\perp^{(2)} \\
\hat{x} \times (\hat{x} \times \mathbf{B}_\perp^{(1)}) &= -\mathbf{B}_\perp^{(1)} \\
\hat{x} \times (\mathbf{u}_{s\perp}^{(3)} \times \hat{x}) &= \mathbf{u}_{s\perp}^{(3)}
\end{aligned}$$

Logo:

$$Z_s [\hat{x} \times \mathbf{E}_\perp^{(3)} - U_s \mathbf{B}_\perp^{(3)} - u_{s\parallel}^{(1)} \mathbf{B}_\perp^{(2)} - u_{s\parallel}^{(2)} \mathbf{B}_\perp^{(1)} + \mathbf{u}_{s\perp}^{(3)}]$$

que multiplicada por $\sum_s \rho_{s0}$ fica:

$$\begin{aligned}
\hat{x} \times \mathbf{E}_\perp^{(3)} \sum_s Z_s \rho_{s0} - \mathbf{B}_\perp^{(3)} \sum_s U_s Z_s \rho_{s0} - \mathbf{B}_\perp^{(2)} \sum_s Z_s \rho_{s0} u_{s\parallel}^{(1)} - \mathbf{B}_\perp^{(1)} \sum_s Z_s \rho_{s0} u_{s\parallel}^{(2)} + \sum_s Z_s \rho_{s0} \mathbf{u}_{s\perp}^{(3)} \\
(\text{B.48})
\end{aligned}$$

Devido à condição de neutralidade de carga, os dois primeiros termos são nulos. E

assim, juntando (B.47) e (B.48), obtemos:

$$\begin{aligned}
& -A \frac{\partial \mathbf{E}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} - AV \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} - A \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \tau} + \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} - \\
& \frac{C}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(B_\perp^{(1)2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \xi} \right) + B_\perp^{(1)2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \xi} \right] + 2D \frac{\partial^2 \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \xi^2} = \\
& - \mathbf{B}_\perp^{(2)} \sum_s Z_s \rho_{s0} u_{s\parallel}^{(1)} - \mathbf{B}_\perp^{(1)} \sum_s Z_s \rho_{s0} u_{s\parallel}^{(2)} + \sum_s Z_s \rho_{s0} \mathbf{u}_{s\perp}^{(3)}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\sum_s Z_s \rho_{s0} \mathbf{u}_{s\perp}^{(3)} = & -A \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{E}_\perp^{(2)} + V \hat{x} \times \mathbf{B}_\perp^{(2)}) - A \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \tau} + \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} - \\
& \frac{C}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(B_\perp^{(1)2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \xi} \right) + B_\perp^{(1)2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \xi} \right] + 2D \frac{\partial^2 \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \xi^2} + \\
& \mathbf{B}_\perp^{(2)} \sum_s Z_s \rho_{s0} u_{s\parallel}^{(1)} + \mathbf{B}_\perp^{(1)} \sum_s Z_s \rho_{s0} u_{s\parallel}^{(2)}
\end{aligned}$$

A Equação de Ampère (B.7) para a ordem $\varepsilon^{5/2}$ é:

$$\hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} = \sum_s Z_s [\rho_{s0} \mathbf{u}_{s\perp}^{(3)} + \rho_s^{(1)} \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} + \rho_s^{(2)} \mathbf{u}_{s\perp}^{(1)}]$$

Utilizando a Equação (B.31), a Equação acima fica:

$$\hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} = \sum_s Z_s \rho_{s0} \mathbf{u}_{s\perp}^{(3)} + \sum_s Z_s \rho_s^{(1)} \mathbf{u}_{s\perp}^{(2)} - \sum_s Z_s \rho_s^{(2)} (V - U_s) \mathbf{B}_\perp^{(1)} \quad (\text{B.49})$$

O lado direito de (B.49) pode ser modificado, utilizando-se (B.34), (B.38), a definição C e a condição de neutralidade de carga, ou seja, $\sum_s Z_s \rho_s^{(1)} = 0$. Logo:

$$\begin{aligned}
\hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} = & \sum_s Z_s \rho_{s0} \mathbf{u}_{s\perp}^{(3)} - \sum_s \rho_s^{(2)} (V - U_s) \mathbf{B}_\perp^{(1)} + \mathbf{B}_\perp^{(2)} \sum_s Z_s \rho_s^{(1)} U_s + \\
& \mathbf{B}_\perp^{(1)} \sum_s Z_s \rho_s^{(1)} u_{s\parallel} + \frac{C}{2} B_\perp^{(1)2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \xi} \quad (\text{B.50})
\end{aligned}$$

Devido à condição de neutralidade de carga para ε^2 , sabemos que:

$$\sum_s Z_s \rho_s^{(2)} \equiv 0$$

Logo, o termo:

$$V \mathbf{B}_\perp^{(1)} \sum_s Z_s \rho_s^{(2)} \equiv 0$$

e assim, (B.50) fica:

$$\begin{aligned} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} = & \sum_s Z_s \rho_{s0} \mathbf{u}_{s\perp}^{(3)} + \sum_s \rho_s^{(2)} U_s \mathbf{B}_\perp^{(1)} + \mathbf{B}_\perp^{(2)} \sum_s Z_s \rho_s^{(1)} U_s + \\ & \mathbf{B}_\perp^{(1)} \sum_s Z_s \rho_s^{(1)} u_{s\parallel}^{(1)} + \frac{C}{2} B_\perp^{(1)2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \xi} \quad (\text{B.51}) \end{aligned}$$

A Equação (B.5) para a ordem $\varepsilon^{5/2}$ fica:

$$\hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{E}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} - V \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \tau} = 0$$

ou, multiplicando \hat{x} vetorialmente à esquerda, obtemos:

$$-\frac{\partial \mathbf{E}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} - V \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(2)}}{\partial \xi} + \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \tau} = 0$$

ou ainda:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mathbf{E}_\perp^{(2)} + V \hat{x} \times \mathbf{B}_\perp^{(2)} \right) = \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^{(1)}}{\partial \tau} \quad (\text{B.52})$$

A partir da neutralidade de carga e corrente para ε^2 :

$$\begin{cases} \sum_s Z_s \rho_s^{(2)} = 0 \\ \sum_s Z_s \rho_s u_{s\parallel} = 0 \end{cases}$$

podemos ver que:

$$\sum_s Z_s [\rho_{s0} u_{s\parallel}^{(2)} + \rho_s^{(1)} u_{s\parallel}^{(1)} + \rho_s^{(2)} U_s] = 0$$

ou

$$\sum_s Z_s (\rho_{s0} u_{s\parallel}^{(2)} + \rho_s^{(2)} U_s) = - \sum_s Z_s \rho_{(1)} u_{s\parallel}^{(1)} \quad (\text{B.53})$$

Eliminando o termo $\sum_s \rho_{s0} \mathbf{u}_{s\perp}^{(3)}$ na Equação (B.51) e ainda, utilizando (B.52) e (B.53), obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}}{\partial \xi} &= -A \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{E}_{\perp}^{(2)} + V \hat{x} \times \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}) - A \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \tau} + \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}}{\partial \xi} - \\ &\frac{C}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(B_{\perp}^{(1)2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} \right) + B_{\perp}^{(1)2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} \right] + 2D \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \\ &\mathbf{B}_{\perp}^{(2)} \sum_s Z_s \rho_{s0} u_{s\parallel}^{(1)} + \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \sum_s Z_s \rho_{s0} u_{s\parallel}^{(2)} + \sum_s Z_s \rho_s^{(2)} U_s \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} + \\ &\sum_s Z_s \rho_s^{(1)} U_s \mathbf{B}_{\perp}^{(2)} + \mathbf{B}_{\perp}^{(1)} \sum_s Z_s \rho_s^{(1)} u_{s\parallel}^{(1)} + \frac{C}{2} B_{\perp}^{(1)2} \hat{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Multiplicando vetorialmente à esquerda por \hat{x} , obtemos:

$$\boxed{A \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{C}{4} \frac{\partial}{\partial \xi} (B_{\perp}^{(1)2} \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}) + D \hat{x} \times \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi^2} = 0} \quad (\text{B.54})$$

ou ainda,

$$\frac{\partial B_{\perp}^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{1}{4(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial \xi} (B_{\perp}^{(1)2} B_{\perp}^{(1)}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_{\perp}^{(1)}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\text{B.55})$$

Finalmente, a dinâmica espaço temporal das ondas de Alfvén não-lineares que se propagam ao longo do campo magnético ambiental na direção x , com termo fonte e dissipativo que leva em conta o efeito externo das ondas de Alfvén, é governada pela Equação (B.55), conhecida como Equação DNLS, tal que a Equação a ser resolvida

tenha a seguinte forma:

$$\partial_t b + \alpha \partial_x (|b|^2 b) - i(\mu + i\eta) \partial_x^2 b = S(b, x, t) \quad (\text{B.56})$$

onde $b = b_y + ib_z$ é o campo magnético transversal, escrito em forma complexa e normalizado pelo campo magnético ambiental B_0 , o tempo t está normalizado por w_{ci}^{-1} , $\alpha = 1/[4(1-\beta)]$, $\beta = c_s^2/c_A^2$ (onde $c_s = (P_0/\gamma\rho_0)^{1/2}$ é a velocidade acústica), $\mu = 1/2$, e η é um parâmetro de dissipação. A fonte externa $S(b, x, t) = A \exp(ik\phi)$ é uma onda monocromática polarizada circularmente e com uma velocidade de fase $\phi = x - Vt$, onde V é a velocidade da onda (constante). Definimos A e k como constantes reais, e consideramos uma fonte que não sofre qualquer tipo de amortecimento ou crescimento.

A Equação de Schrödinger não-linear derivativa, dada pela Equação (B.56), tem sido derivada por vários autores, utilizando tanto teoria de fluidos quanto teoria cinética (ROGISTER, 1971; MJØLHUS, 1976; SPANGLER; SHEERIN, 1982).