



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

INPE – 5368 – TDI / 467

INICIAÇÃO DINÂMICA POR MODOS NORMAIS DE UM MODELO  
BAROTRÓPICO DE ÁREA LIMITADA NA PRESENÇA DE  
FORÇANTE.

Carlos Alberto Repelli

Dissertação de Mestrado em Meteorologia, orientada pelos Drs. José Paulo Bonatti e  
Pedro Leite da Silva dias, aprovada em dezembro de 1990.

INPE  
São José dos Campos  
1990

SECRETARIA DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-5368-TDI/467

INICIAÇÃO DINÂMICA POR MODOS NORMAIS DE UM MODELO  
BAROTRÓPICO DE ÁREA LIMITADA NA PRESENÇA DE FORÇANTE

Carlos Alberto Repelli

Dissertação de Mestrado em Meteorologia, orientada pelos  
Drs. José Paulo Bonatti e Pedro Leite da Silva Dias,  
aprovada em dezembro de 1990.

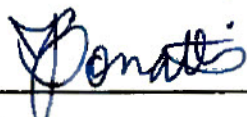
INPE  
São José dos Campos  
Dezembro de 1991

Aprovada pela Banca Examinadora  
em cumprimento a requisito exigido  
para a obtenção do Título de Mestre  
em Meteorologia

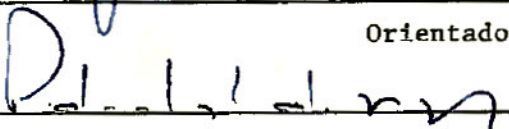
Dr. Antonio Divino Moura

  
\_\_\_\_\_  
Presidente

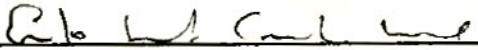
Dr. José Paulo Bonatti

  
\_\_\_\_\_  
Orientador

Dr. Pedro Leite da Silva Dias

  
\_\_\_\_\_  
Orientador


Dr. Ernesto Caetano Neto

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca  
-convidado-

Dr. Valdir Innocentini

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca

Dr. Prakki Satyamurty

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca

Candidato: Carlos Alberto Repelli

São José dos Campos, 17 de dezembro de 1990

Não mais permitas que o teu respirar apenas atue em harmonia com o ar que te rodeia, porém deixa que a tua inteligência neste momento também esteja em harmonia com a inteligência que envolve todas as coisas.

À  
Virgínia Guarizzo Milan (*in memorian*),  
Geny V. Repelli, Alberto Repelli e  
Maria Aparecida da Silva, com  
gratidão.

## AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Dr. Pedro Leite da Silva Dias e ao Dr. José Paulo Bonatti pela valiosa orientação, sugestões e discussões, sem as quais este trabalho não poderia ser realizado.

Aos membros da banca examinadora os agradecimentos pelas sugestões.

Ao INPE e à CAPES por fornecerem as condições necessárias durante a execução deste trabalho.

O autor também é muito grato para com o Dr. José Paulo Bonatti pelo desenvolvimento e fornecimento dos seus "softwares" os quais muito auxiliaram neste trabalho e ao MSc. Dirceu Luís Herdies pela ajuda na colocação do trabalho dentro das normas técnicas de publicação.

Os agradecimentos são extensivos a todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para que este trabalho chegasse ao seu final.

## RESUMO

Um modelo de equações de água rasa de área limitada no plano beta equatorial é usado para se implementar o método de iniciação dinâmica por modos normais. Tal método é equivalente à iniciação não-linear por modos normais de Machenhauer. Para se obter o equilíbrio dinâmico entre os campos, o modelo é integrado em torno do tempo inicial com um esquema avançado-atrasado, mantendo-se os termos não-lineares e o forçante físico constantes durante cada etapa e efetuando-se uma média ponderada no final de cada iteração. Para isso o termo dissipativo deve ser tratado como não-linear, a fim de não se comprometer a estabilidade numérica do esquema. O modelo é integrado até um dia utilizando dados simulados e reais decompostos para o modo vertical de altura equivalente próximo de 250 m. São estudados os efeitos da discretização do modelo em uma grade justaposta e a fonte de calor é decomposta em modos verticais, mostrando ser esta equivalente a uma fonte de massa para as equações da estrutura horizontal. Dois tipos de forçantes são descritos: pré-fixado e o parametrizado ("wave-CISK"), que é proporcional à divergência. Os resultados obtidos representam bem as características da circulação de altos níveis para o verão do hemisfério sul, onde são filtradas as ondas de gravidade e os ruídos.

DINAMIC NORMAL MODE INITIALIZATION ON A LIMITED AREA  
BAROTROPIC MODEL INCLUDING FORCING

ABSTRACT

An equatorial beta plane, limited area, shallow water equations model is used to implement a dynamic normal mode initialization, equivalent to that of Machenhauer. The balance between the fields is obtained by integrating the equations of the model around the initial time with a forward-backward scheme. The forcing and the non-linear terms of the equations are kept constant, as well as the dissipation which is non-linear. The model is integrated up to one day with simulated and decomposed real data sets for the equivalent depth of about 250 m. The staggered-grid influences on the model discretization are analyzed and the heat source is decomposed to in the vertical modes which shows an equivalence with a mass source for the horizontal structure equations. The forcings are pre-fixed and parameterized (wave-CISK), as being proportional to the divergence. The main features of the high level circulation for the Southern Hemisphere Summer are simulated well by the model, with the noise and gravity waves being suppressed.



## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS.....	xvii
LISTA DE TABELAS.....	xxi
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xxiii
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....</u>	<u>1</u>
<u>CAPÍTULO 2 - A INICIAÇÃO DINÂMICA POR MODOS NORMAIS... ..</u>	<u>9</u>
2.1 - A iniciação dinâmica por modos normais em modelos de área limitada.....	9
2.2 - Equivalência entre iniciação por modos normais não-linear e iniciação dinâmica por modos normais	11
2.2.1 - Equações básicas.....	12
2.2.2 - Decomposição em modos normais.....	14
2.2.3 - Solução da iniciação por modos normais não-li- near de Machenhauer.....	20
2.2.4 - Solução da iniciação dinâmica por modos nor- mais.....	24
2.2.5 - Equivalência entre iniciação dinâmica por modos normais e iniciação por modos normais não- linear.....	30
<u>CAPÍTULO 3 - ASPECTOS IMPLEMENTARES.....</u>	<u>37</u>
3.1 - Forçante físico e condições iniciais.....	37
3.2 - Esquema de integração no espaço.....	44
3.3 - Esquema de integração no tempo.....	46
3.4 - Critério de estabilidade linear do esquema de in- tegração no tempo.....	47
3.5 - Condições de fronteira.....	50
3.5.1 - Condição de fronteira radiacional.....	51
3.5.2 - Condição de fronteira de Neumann e Dirichlet..	52

<u>CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E DISCUSSÕES</u> .....	55
4.1 - Dados simulados.....	55
4.2 - Dados reais.....	68
<u>CAPÍTULO 5 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES</u> .....	83
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	87
APÊNDICE A - DECOMPOSIÇÃO EM MODOS VERTICAIS.....	93
APÊNDICE B - SOLUÇÕES ANALÍTICAS DE UM MODELO DE ÁGUA RASA.....	113

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Parâmetro de Coriolis efetivo (Equação 2.19), normalizado por $f_0$ , em função dos números de onda zonal ( $k_u$ ) e meridional ( $l_v$ ).....	16
2.2 - Equivalência entre IDMN e IMNN .....	33
3.1 - Campo de desvio de altura e vento de entrada, para dados simulados.....	40
3.2 - Campo de divergência de entrada para dados si- mulados.....	41
3.3 - Campo de vorticidade relativa de entrada para dados simulados.....	41
3.4 - Campo do forçante parametrizado de entrada pa- ra dados simulados.....	42
3.5 - Campo de desvio de altura e vento de entrada, para dados reais.....	42
3.6 - Campo de divergência de entrada para dados re- ais.....	43
3.7 - Campo de vorticidade relativa de entrada para dados reais.....	43
3.8 - Campo do forçante parametrizado de entrada pa- ra dados reais.....	44
3.9 - Representação esquemática da grade C de Arakawa bidimensional.....	45
4.1 - Campo do desvio de altura (m) e do vento ( $ms^{-1}$ ) para dados simulados após IDMN.....	58
4.2 - Campo da diferença entre a entrada e a iniciação para o desvio de altura (m) e o vento ( $ms^{-1}$ ).....	58
4.3 - Campo de vorticidade relativa ( $s^{-1}$ ) após IDMN pa- ra dados simulados.....	59
4.4 - Campo de divergência ( $s^{-1}$ ) para dados simulados após IDMN.....	59
4.5 - Campo do forçante parametrizado para dados si- mulados após IDMN.....	60

4.6 - Campo do desvio de altura (m) e do vento ( $ms^{-1}$ ) para dados simulados após 1 dia de integração com IDMN.....	60
4.7 - Campo do desvio de altura (m) e do vento ( $ms^{-1}$ ) para dados simulados após 1 dia de integração sem iniciação.....	61
4.8 - Campo da diferença entre a integração com e sem iniciação após 1 dia para o desvio de altura (m) e o vento ( $ms^{-1}$ ), para dados simulados.....	61
4.9 - Campo de vorticidade relativa ( $s^{-1}$ ), após 1 dia com IDMN para dados simulados.....	63
4.10 - Campo de vorticidade relativa ( $s^{-1}$ ), após 1 dia sem IDMN para dados simulados.....	63
4.11 - Campo de divergência ( $s^{-1}$ ) para dados simulados após 1 dia com iniciação.....	64
4.12 - Campo de divergência ( $s^{-1}$ ) para dados simulados após 1 dia sem iniciação.....	64
4.13 - Campo do forçante parametrizado para dados simulados após 1 dia de integração com IDMN.....	65
4.14 - Campo do forçante parametrizado para dados simulados após 1 dia de integração sem IDMN.....	65
4.15 - Variação temporal da divergência ( $\times 10^6 s^{-1}$ ) sobre os pontos (a) A, (b) B, (c) C, (d) D, (e) E, (f) F e (g) G para o modelo usando dados simulados.....	67
4.16 - Variação temporal da (a) Energia cinética ( $m^2 s^{-2}$ ), (b) Energia potencial ( $m^2 s^{-2}$ ), (c) Energia total ( $m^2 s^{-2}$ ) e (d) 'massa' (m) para o modelo usando dados simulados.....	68
4.17 - Campo do desvio de altura (m) e do vento ( $ms^{-1}$ ) para dados reais após IDMN.....	70
4.18 - Campo da diferença entre a entrada e a iniciação para o desvio de altura (m) e o vento ( $ms^{-1}$ ) dos dados reais.....	70
4.19 - Campo de vorticidade relativa ( $s^{-1}$ ) após IDMN para dados reais.....	73

4.20 - Campo de divergência ( $s^{-1}$ ) para dados reais após IDMN.....	73
4.21 - Campo do forçante parametrizado para dados reais após IDMN.....	74
4.22 - Campo do desvio de altura (m) e do vento ( $ms^{-1}$ ) para dados reais após 1 dia de integração com IDMN.....	74
4.23 - Campo do desvio de altura (m) e do vento ( $ms^{-1}$ ) para dados reais após 1 dia de integração sem iniciação.....	75
4.24 - Campo da diferença entre a integração com e sem iniciação após 1 dia para o desvio de altura (m) e o vento ( $ms^{-1}$ ) para dados reais.....	75
4.25 - Campo de vorticidade relativa ( $s^{-1}$ ), após 1 dia com IDMN para dados reais.....	76
4.26 - Campo de vorticidade relativa ( $s^{-1}$ ), após 1 dia sem IDMN para dados reais.....	76
4.27 - Campo de divergência ( $s^{-1}$ ) para dados reais após 1 dia com iniciação.....	78
4.28 - Campo de divergência ( $s^{-1}$ ) para dados reais após 1 dia sem iniciação.....	78
4.29 - Campo do forçante parametrizado para dados reais após 1 dia de integração com IDMN.....	79
4.30 - Campo do forçante parametrizado para dados reais após 1 dia de integração sem IDMN.....	79
4.31 - Variação temporal da divergência ( $s^{-1}$ ) sobre os pontos (a) A, (b) B, (c) C, (d) D, (e) E, (f) F e s(g) G para o modelo usando dados reais.....	80
4.32 - Variação temporal da (a) Energia cinética ( $m^2s$ $^{-2}$ ), (b) Energia potencial ( $m^2s^{-2}$ ), (c) Energia total ( $m^2s^{-2}$ ) e (d) 'massa' (m) para o modelo usando dados reais.....	81
A.1 - Perfis Verticais da Fonte de Calor.....	106
A.2 - Perfis verticais das autofunções $\psi_n$ correspon- dentes a cada altura equivalente $D_n$ .....	108



LISTA DE TABELAS

	Pág.
2.1 - $\Delta t$ em função dos números de onda zonal ( $k_u$ ) e meridional ( $l_v$ ) para altura equivalente $H=9800,0$ m em $45,0^\circ$ de latitude, $\Delta X= \Delta Y=3,5^\circ$ .....	34
2.2 - $\Delta t$ em função dos números de onda zonal ( $k_u$ ) e meridional ( $l_v$ ) para altura equivalente $H= 250,0$ m em $45,0^\circ$ de latitude $\Delta X= \Delta Y= 3,5^\circ$ .....	35
A.1 - Perfil vertical de temperatura para o estado básico usado na resolução da equação da estrutura vertical.....	105
A.2 - Modo vertical associado com altura equivalente e forçantes decompostos.....	107





## LISTA DE SÍMBOLOS

a	- Raio médio da Terra ( $6,37 \times 10^6$ m)
A	- $= (L + I \nu)$
A, B, D, E, G, S	- Matrizes usadas durante os passos intermediários do esquema de Okamura
A, B, C, D, A', B', C'	- Constantes arbitrárias das soluções analíticas das equações de água rasa
$A_t$	- Amplitude da topografia (m)
Cp	- Calor específico do ar seco à pressão constante ( $1005 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ )
c	- Velocidade de fase da onda ( $\text{ms}^{-1}$ )
$\tilde{c}$	- $= c \Delta t / \Delta x$ - Velocidade de fase adimensional
$D_n$	- Autovalor correspondente à altura equivalente
e	- Base natural de logaritmos = 2,718...
f	- Parâmetro de Coriolis ( $\text{s}^{-1}$ )
$f_o$	- $= 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
$f_u$	- Parâmetro de Coriolis efetivo em função dos números harmônicos sobre uma grade C
F	- Forçante físico correspondente à fonte de massa
$\underline{F}$	- Vetor coluna que contém $F_u, F_v, F_h$
$F_o, F_1$	- Amplitudes do forçante físico e/ou da fonte de massa
$F_{u,v,h}$	- Termos não-lineares das componente zonal, meridional e desvio de altura, respectivamente.
$F_\theta$	- Forçante do momentum na direção zonal em coordenadas esféricas (atrito) ( $\text{ms}^{-2}$ )
$F_\phi$	- Forçante do momentum na direção meridional em coordenadas esféricas (atrito) ( $\text{ms}^{-2}$ )
$F_n$	- $= F_n - \nu a_n$
g	- Aceleração da gravidade da terra ( $9,81 \text{ ms}^{-2}$ )

$h$	- Desvio de altura (m)
$h_b$	- Altura da topografia (m)
$H$	- Altura equivalente (m)
$H_{1,2,3 \ k1}$	- Vetor que representa os modos normais do modelo de água rasa linear
$i$	- $= \sqrt{-1}$ (número complexo)
$I$	- Matriz identidade
$j$	- Índice do ponto de grade para discretização meridional
$J$	- Índice do ponto de grade máximo para discretização meridional
$J1$	- $= J-1$
$J2$	- $= J-2$
$\underline{k}$	- Vetor unitário vertical
$k$	- Índice do harmônico zonal
$k_u$	- Número de onda zonal efetivo para grade C
$K$	- Coeficiente de viscosidade turbulenta ( $m^2 s^{-1}$ )
$l$	- Índice do harmônico meridional
$l_v$	- Número de onda meridional efetivo para grade C
$L$	- Matriz que contém os termos lineares das equações da água rasa
$L_2$	- $= (L)^2 - \alpha^2 I$ (Operador de projeção dos dados sobre os modos de Rossby)
$[L]$	- Escala para adimensionalização das distâncias ( $m^{-1}$ )
$m$	- Índice de ponto de grade para discretização zonal
$M$	- Índice do ponto de grade máximo para discretização zonal
$M1$	- $= M-1$
$M2$	- $= M-2$
$n$	- Número do passo de iteração do esquema de integração tempo

N	- Número máximo de iterações do esquema de integração no tempo
p	- Pressão local (hPa)
P, W	- Variáveis auxiliares na separação das estruturas vertical e horizontal
q	- $= \ln(p_s)$
$Q_t$	- Taxa de aquecimento diabático ( $^{\circ}\text{Cs}^{-1}$ )
$\tilde{Q}'$	$= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\dot{Q}_t}{\Gamma_0} \right)$
R	- Constante do gás para o ar seco 287,05 ( $\text{JKg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )
s	$= \pi \cotan(\pi \sigma_0)$ - Coeficiente para controle do nível vertical de máximo aquecimento
t	- Tempo (s)
$t_{kl}$	- Passo de tempo crítico para estabilidade linear do esquema de Okamura
T(t)	- Parte transiente do campo do forçante
$T_m$	- Valor de tempo mínimo
$T_0(\sigma)$	- Temperatura da atmosfera básica (K)
[T]	- Escala de adimensionalização do tempo $\text{s}^{-1}$
u	- Velocidade zonal do vento ( $\text{ms}^{-1}$ )
$u_0, \tilde{u}, v_0, \tilde{v}, h_0, \tilde{h}$	- Constantes de integração das equações da água rasa
v	- Velocidade meridional do vento ( $\text{ms}^{-1}$ )
$\underline{V}$	- Velocidade horizontal ( $\text{ms}^{-1}$ )
$\tilde{V}$	- Média vertical da velocidade horizontal ( $\text{ms}^{-1}$ )
$\underline{V}_g$	- Vento geostrófico
$\underline{W}$	- Vetor que contém u, v e h
x, $x_0$	- Distância zonal (m)
y, $y_0$	- Distância meridional (m)
z	- Altura vertical (m)
f( )	- Função qualquer de uma ou mais variáveis
$\alpha$	- $= (f^2 + v^2)^{1/2}$

$\beta$	- = $2 \Omega \cos(y_0/a)$ - Variação do parâmetro de Coriolis
$\gamma$	- = $1 - 2(\Delta t)^2$
$\Gamma_0$	- Medida da estabilidade estática da atmosfera
$\delta$	- Amplitude da divergência
$\delta_{nn'}$	- Delta de Kronecker
$\Delta( )$	- Variação de uma grandeza
$\eta(\sigma)$	- Perfil vertical da fonte de calor
$\kappa$	- = $R/C_p$
$\lambda$	- Autovalores de uma matriz
$\Lambda(\sigma)$	- = $\sigma_B Q_0 \frac{d \left( \frac{\eta(\sigma)}{\Gamma_0(\sigma)} \right)}{d\sigma}$
$\tau, K_m, \beta_n$	- Variáveis introduzidas para simplificação
$\mu$	- = $(k^2 + l^2)^{1/2}$
$\nu$	- = $k \mu^2$ - Coeficiente de difusividade de Rayleigh
$\xi$	- Amplitude da vorticidade
$\pi$	- = 3,14159
$\rho$	- Decaimento exponencial no tempo da amplitude do forçante
$\sigma$	- = $p/p_s$ - Coordenada vertical
$\sigma_B$	- Nível em que se encontra a base da nuvem
$\dot{\sigma}_B$	- Velocidade vertical na base da nuvem
$\theta$	- Latitude
$\phi$	- Longitude
$\psi$	- Função de corrente
$\psi_n$	- Função estrutura vertical
$\Omega$	- Velocidade angular da Terra ( $7,292 \times 10^{-5} s^{-1}$ )
$\omega, \omega'$	- Frequência de oscilação ( $s^{-1}$ )
$\nabla$	- Operador Nabla
$\nabla_H^2$	- = $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (Laplaciano horizontal)

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

As equações da mecânica dos fluidos que descrevem os movimentos atmosféricos permitem a existência de vários tipos de oscilações (ondas) em suas soluções. A escala de tempo característica dessas ondas pode variar de acordo com o tipo de onda. As ondas de Rossby possuem frequências menores, comparado com as frequências das ondas de gravidade e sonoras.

Existe uma necessidade prática em remover as oscilações de alta frequência, provenientes da integração numérica das equações básicas de um modelo de previsão de tempo. Nesses modelos, tais oscilações podem ser excitadas pelos desequilíbrios existentes entre os campos de movimento e de massa nos dados iniciais, por vários motivos. As medidas dos parâmetros meteorológicos da atmosfera podem conter ruídos devido a erros observacionais, ou por pequenas escalas de flutuações associadas com os movimentos turbulentos transientes, bem como gradientes locais. Ainda assim, este conjunto de dados está incompleto, devendo ser aplicado sobre si algum método de interpolação temporal ou espacial. Se estas oscilações de alta frequência não forem removidas poderão surgir ruídos nos campos prognósticos que irão interagir com os processos físicos do modelo. Remover as oscilações rápidas e encontrar uma forma ajustada entre os campos de movimento e de massa é o processo chamado de "iniciação". Um problema que vem desafiando meteorologistas e matemáticos é encontrar um método de iniciação que seja eficiente na remoção dessas ondas, e ao mesmo tempo que seja de baixo custo computacional.

A iniciação, em geral, pode ser implementada se forem conhecidas as condições de balanço explícitas, referentes aos campos de movimento e de massa. O balanço geostrófico é uma expressão diagnóstica que pode servir para relacionar o campo de pressão com a velocidade horizontal em sistemas de escalas sinóticas. Em latitudes médias esta aproximação pode ser tomada para se colocar os dados iniciais em balanço. Conhecendo-se a distribuição do campo de pressão, pode-se facilmente estimar o campo de vento balanceado, com base no vento geostrófico:

$$\underline{V}_g = \underline{k} \wedge \frac{g}{f} \nabla z, \quad (1.1)$$

onde  $f$  é o parâmetro de Coriolis,  $g$  a aceleração da gravidade e  $z$  a altura geopotencial. Sabe-se, porém que em regiões próximas ao equador o valor do vento geostrófico superestima o valor do vento real, e nos pólos este último é subestimado pelo vento geostrófico. Além disso, esta relação de balanço não ajusta o conjunto de dados iniciais com outros processos físicos (por exemplo, atrito, liberação de calor latente). Sendo assim, é um método um tanto limitado para se recorrer na iniciação.

Em latitudes médias, a equação de balanço poderia ser tomada como referência para ajuste dos dados iniciais (Phillips, 1973), dada por

$$\nabla^2 [gz + 1/2 (\nabla \psi)^2] = \nabla \cdot [(f + \nabla^2 \psi^2) \nabla \psi] , \quad (1.2)$$

onde  $z$  representa a altura geopotencial e  $\psi$  a função de corrente. A Equação 1.2 é uma equação filtrada, pois não apresenta ondas de gravidade em sua solução (Moura, 1976, Lynch, 1985). Ao se aplicá-la no conjunto de dados

iniciais, obtêm-se os campos livres das ondas espúrias, nas mesmas condições dinâmicas que se obteria usando previamente um modelo de equações filtradas. Uma vantagem de se usar uma equação de balanço em iniciação, em latitudes médias está no fato de que ela permite que a velocidade do vento (não divergente) seja calculada a partir do geopotencial; o que é muito conveniente, quando os dados de vento são esparsos e não confiáveis. Entretanto, a equação de balanço (Equação 1.2) expressa uma relação não-linear complicada entre  $z$  e  $\psi$ , o que torna difícil sua solução. Devido a isso e à sua limitação no uso em modelos de previsão global ou situados na região tropical, esta não é muito usada. Além disso, na região tropical, onde a presença do modo de Kelvin é importante, a equação de balanço filtra em excesso e distorce os modos de Rossby. O conjunto de equações, energeticamente consistente, válido até primeira ordem no número de Rossby (pequeno) é conhecido como equações de balanço (Charney, 1955). Os métodos de iniciação descritos até agora, que se baseiam numa condição de balanço explícita são chamados de iniciação estática.

Miyakoda e Moyer (1968) e Nitta e Hovermale (1969) propuseram um método de iniciação onde o próprio modelo de previsão é utilizado para remover os desequilíbrios existentes nos dados iniciais. Este método consiste em se integrar o modelo no tempo usando um passo avançado, seguido de outro atrasado em torno do tempo inicial, usando-se um esquema de integração que possua característica de amortecimento seletivo para altas frequências (por exemplo, Matsuno). Este método de iniciação dos dados é chamado de iniciação dinâmica clássica (ID). Sua aplicação em modelos numéricos de previsão de tempo que possuem parametrização de processos físicos complexos se torna difícil, pois a natureza inerente desses processos (por exemplo, precipitação), não

permite uma integração temporal do passo avançado seguindo diretamente para o passo atrasado (Kumar, 1990).

Chamam-se modos normais os movimentos livres de um sistema físico que são soluções das equações de Laplace. Os modos normais do sistema de equações primitivas linearizadas, podem ser divididos em duas classes distintas: modos de Rossby e modos de gravidade (Thompson, 1961; Longuet-Higgins, 1968). Cada modo normal possui uma única estrutura espacial referente aos campos de vento e de massa, e está associado com uma frequência de oscilação. Tais modos livres também possuem a propriedade de formarem um sistema completo de uma base de funções ortonormais. Pode-se fazer uso da completeza dos modos normais (com respeito ao produto interno) para se projetar os dados, inicialmente em desequilíbrio, sobre os modos de Rossby e de gravidade (Kasahara and Puri, 1981). As amplitudes projetadas sobre os modos de gravidade, associados com as oscilações de alta frequência, podem ser modificadas de maneira a suprimir a excitação subsequente durante a previsão. Williamson (1976) desenvolveu um método de iniciação onde os dados iniciais eram modificados de forma que as amplitudes correspondentes às projeções nos modos de gravidade se anulavam. Este processo de se amortecer as ondas de alta frequência é chamado de iniciação por modos normais (IMN).

Alguns avanços no método de iniciação por modos normais foram conseguidos por Machenhauer (1977) e por Baer e Tribbia (1977). No esquema de iniciação por modos normais de Machenhauer, as tendências temporais das oscilações dos modos de alta frequência são eliminadas. O esquema de Machenhauer também é conhecido como iniciação por modos normais não-linear (IMNN). A IMNN tem sido implementada em muitos modelos de previsão global com muito



êxito na eliminação das oscilações de alta frequência (Daley, 1979 e Puri, 1983).

Ao se aplicar o esquema de MACHENHAUER para se fazer a iniciação de um modelo de previsão de tempo, é necessário considerar os termos forçantes e não lineares constantes durante o intervalo de tempo usado na integração. O sucesso da IMNN em suprimir as oscilações de alta frequência está relacionado com a validade desta aproximação. A mesma aproximação também poderia ser estendida e aplicada no processo de ID clássico. Isto contornaria o problema com o método clássico, de se ter que avaliar os termos não lineares em cada passo de integração avançado-atrasado no tempo. Seguindo esta idéia, os termos não-lineares e forçantes permaneceriam fixos durante cada passo da integração. BRATSETH (1982) sugeriu tal modificação no esquema de ID clássico, que mais tarde foi estendida por SUGI (1986) e generalizada por KUMAR (1990). No método de ID modificado, somente uma parte das equações do modelo é integrada no tempo com esquema avançado-atrasado (parte linear), mantendo-se constantes os termos forçantes e não lineares. Este método é chamado de iniciação dinâmica por modos normais (IDMN), porque utiliza o conceito de modos normais, sem a necessidade de calculá-los explicitamente.

Um modelo de equações da água rasa pode ser usado a fim de se estudar o método de IDMN. Neste modelo podem ser incluídos os termos não lineares e forçantes físicos relevantes, bem como o termo que representa a topografia. Geralmente, este modelo de equações é melhor aplicado em hidrodinâmica e oceanografia, em casos em que a escala vertical do fluido é muito pequena, comparada com a horizontal (conceito de água rasa, PEDLOSKY, 1979). Por isso, e além de não levar em conta a estratificação

vertical, seu uso em previsão de tempo se torna muito limitado.

Pode-se demonstrar que a estrutura horizontal de um sistema de equações primitivas é equivalente a um conjunto de equações de água rasa para cada modo vertical. Neste caso, os autovalores estão relacionados com as alturas equivalentes permitidas, como é mostrado no apêndice A (Kasahara and Puri, 1981; Bonatti et al, 1983, Longuet-Higgins, 1968). Dessa maneira, para um modelo de equações primitivas decomposto em diversos modos de vibração aplicado, por exemplo, em estudos sobre a região equatorial, tem-se que integrar n conjuntos de equações de água rasa separadamente e depois refazer a composição.

Silva Dias e Bonatti (1985) trabalharam com a decomposição em modos verticais dos dados do FGGE-nível IIIb na região tropical sobre a América do Sul, durante o período de verão de 29 de janeiro a 16 de fevereiro de 1979. Neste estudo foi computada a energética como função do índice do modo vertical. É mostrado que o modo externo (barotrópico) de altura equivalente em torno de 9800 m é dominante nas latitudes médias, e à medida que se aproxima do equador, um modo interno com altura equivalente próximo a 250 m passa a ser dominante.

As características básicas da circulação tropical em altos níveis sobre a América do Sul, como a Alta da Bolívia e o cavado da costa nordeste do Brasil, são claramente descritas pelo modo interno de 250 m; assim como os ventos alíseos sobre o Oceano Pacífico.

Silva Dias e Bonatti (1985), também verificaram que as estruturas verticais dos modos internos se tornam mais complexas e confinadas nos níveis mais baixos da atmosfera, para altos valores de índice dos modos

normais. É visto também que o 4o. modo (altura equivalente igual a 213 m) atinge seu máximo de amplitude em aproximadamente 200 hPa, possuindo convergência/divergência fora do nível de aproximadamente 500 hPa.

Com base nos argumentos acima descritos, pode-se justificar o emprego do modelo de água rasa na implementação da IDMN e futuros estudos de escoamentos sobre a região tropical.

Convém ressaltar que no modelo não linear, os termos não lineares dos modos internos e externo irão interagir com os demais modos. A mais importante interação provavelmente esteja entre o modo externo e um interno de altura equivalente em torno de 250 m, já que a fonte de calor está localizada na região equatorial, e ainda assim existe grande quantidade de energia concentrada no modo externo nas regiões de latitudes médias (Kasahara and Silva Dias, 1986).

Nesse estudo, um modelo barotrópico é usado para simular o escoamento na região tropical incluindo-se os efeitos da liberação de calor latente nesta região. Este modelo é de área limitada com aproximação do plano beta equatorial, incluindo termos não-lineares, dissipação do tipo Laplaciano e um forçante físico no campo de altura com parametrização do tipo "wave-CISK". Os campos resultantes da integração no tempo deste modelo, usando-se dados de entrada não-iniciados, são comparados com os campos de entrada após aplicação do esquema de IDMN. Como dados de entrada usam-se dados reais do FGGE-IIIb de 8 de fevereiro de 1979, 12:00 UTC, e também dados simulados gerados a partir da integração do modelo por 12 horas quando o forçante pré-fixado atinge seu máximo valor. Os objetivos principais deste estudo são os seguintes:

- a) estudar os casos de estabilidade numérica linear na aplicação do esquema de Okamura (Haltiner and Williams, 1980) para iniciação do modelo barotrópico com inclusão de um termo dissipativo;
- b) mostrar a equivalência, em termos do amortecimento das ondas curtas, existente entre a IDMN e IMNN de Machenhauer para o modelo barotrópico sobre uma grade C;
- c) implementar o método de IDMN no modelo citado, para se iniciar os campos na presença de um forçante parametrizado em função das variáveis do modelo, usando-se dados de entrada simulados e reais.

O Capítulo 2 contém um estudo sobre a IDMN com a análise das condições de estabilidade linear do modelo para usar o esquema de Okamura, mostrando ainda a equivalência existente entre a IMNN e IDMN em termos da capacidade de amortecimento das ondas curtas.

No Capítulo 3 estão descritos os aspectos de implementação do modelo em computador, como as condições de estabilidade, definição da grade, condições de fronteira, e descrições do forçante e das condições iniciais utilizadas. Os resultados e discussões estão contidos no Capítulo 4.

## CAPÍTULO 2

### A INICIAÇÃO DINÂMICA POR MODOS NORMAIS

#### 2.1 - A IDMN EM MODELOS DE ÁREA LIMITADA

Como no esquema de Machenhauer (1977) da IMNN os dados iniciais são projetados no espaço dos modos normais, torna-se necessário conhecer as estruturas espaciais desses modos e as frequências associadas, que num modelo global de equações da água rasa podem ser obtidos analiticamente (Longuet-Higgins, 1968; Kasahara, 1978). Encontrar os modos normais das equações dos modelos de área limitada pode ser difícil, devido às condições de fronteira. Neste caso a IMNN torna-se difícil, e o esquema de IDMN pode ser uma eficiente alternativa, já que esta não requer o conhecimento explícito das estruturas dos modos normais.

Recentemente, alguns pesquisadores abordaram o problema da iniciação de modelos de área limitada, a maioria baseada na IMNN de Machenhauer. Briere (1982) desenvolveu um método onde as equações de momentum são transformadas na forma de divergência e vorticidade. As condições de contorno da função corrente e da velocidade potencial são supostas homogêneas e o parâmetro, juntamente com o fator de mapa, são tratados como termos não lineares. Com isso, Briere (1982) conseguiu escrever a expansão dos modos normais na forma de funções trigonométricas, podendo dessa forma fazer a iniciação por modos normais e suprimir as oscilações de alta frequência durante a previsão.

Bourke e McGregor (1983) desenvolveram um método diferente, onde a iniciação é feita no espaço físico. Tal método interpreta a IMNN de Machenhauer, que se encontra no espaço de fase, como sendo equivalente a uma

filtragem das equações no espaço físico. No modelo de água rasa, pode ser mostrado que as oscilações de alta frequência são originadas pela tendência temporal da divergência. Se esta tendência for imposta como sendo nula nos dados iniciais, tem-se a filtragem das oscilações indesejadas, pelo menos no início da integração. Lynch (1985) desenvolveu um esquema de iniciação baseado na técnica da transformada de Laplace, para um modelo barotrópico em coordenadas esféricas transformadas. Os resultados obtidos são comparáveis em termos qualitativos com o método de IMN.

Os processos de iniciação anteriormente descritos podem ser chamados de iniciação por modos normais implícitos, desde que possuam as mesmas propriedades da IMN sem a computação explícita dos modos normais do modelo. Uma desvantagem em usar esses métodos de iniciação implícitos, está na necessidade de se transformar continuamente os campos de velocidade do modelo em função corrente e na representação da velocidade potencial, depois tendo que voltar à forma original. Como geralmente as equações prognósticas de um modelo de água rasa estão na forma de momentum, e os procedimentos da IMN implícita são também feitos na forma de divergência e vorticidade, esta última pode não ser muito conveniente.

Assim, dentre os vários procedimentos de iniciação possíveis, as vantagens em se usar a IDMN em modelos de área limitada podem ser resumidas em:

- a) pode-se usar as equações prognósticas na forma de momentum, como no caso das outras técnicas de modos normais implícitos de iniciação; sem a necessidade de se transformar as equações para a forma de divergência e vorticidade;

- b) a IDM é aplicada no modelo contendo todos os processos físicos, com o mesmo esquema de diferenciação espacial usado para integrá-lo; com isto, o estado de balanço dos dados alcançado se dá de forma dinâmica, diferente das outras condições de filtragem;
- c) não se requer nenhuma consideração especial ao se incluir no modelo a variação norte-sul do parâmetro de Coriolis, bem como o fator de mapa;
- d) o tempo computacional gasto é menor que o usado para fazer a iniciação dinâmica clássica, pois não há necessidade do cálculo dos termos forçantes e não lineares em todos os passos de integração;
- e) possui equivalência ao esquema de IMNN de MACHENHAUER, sem ser preciso calcular os modos normais do modelo.

## 2.2 - EQUIVALÊNCIA ENTRE IMNN E IDMN

Sugi (1986), baseado em argumentos heurísticos, supôs que a solução obtida com a aplicação da IMNN de MACHENHAUER seria equivalente a IDMN. Kumar (1990) demonstrou em detalhes esta equivalência e fez uma análise mais profunda do método, chegando a mostrar que a IDMN equivale a uma filtragem das equações no espaço físico.

Nesta seção será aplicada a IDMN ao modelo de equações de água rasa para estudos de escoamentos na região tropical, e também será mostrada a equivalência com a IMNN de MACHENHAUER. Além disso é feita a análise de estabilidade com termo dissipativo incluído nas equações.

### 2.2.1 - EQUAÇÕES BÁSICAS

As equações de movimento e da continuidade, em projeção cartesiana no plano  $f$ , escritas com os termos lineares do lado esquerdo, e os termos não lineares e forçantes à direita são:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} - f_0 v = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} + f_0 u = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} + K \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) (h-h_b) - \\ &- (h-h_b) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + F'(x,y,t) + K \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde  $u$  e  $v$  representam o vento zonal e meridional, respectivamente,  $h$  é o desvio de altura,  $h_b$  a topografia e  $K$  é o coeficiente de viscosidade turbulenta.

Fazendo-se a substituição dos termos não lineares e forçantes do sistema de Equações 2.1 a 2.3 por

$$F_u = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.4)$$



$$F_v = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.5)$$

$$F_h = -u \left( \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} \right) (h-h_b) - (h-h_b) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + F', \quad (2.6)$$

o sistema se torna:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} - f_o v = K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_u, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} + f_o u = K \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_v, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = K \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + F_h. \quad (2.9)$$

O conjunto de Equações 2.7 a 2.9 será discretizado no espaço sobre uma grade justaposta (descrita na Seção 3.2), para a análise do comportamento dos modos normais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{m,j}}{\partial t} - \frac{f_o}{4} (v_{m,j} + v_{m+1,j} + v_{m,j-1} + v_{m+1,j-1}) + \\ \frac{g}{\Delta x} (h_{m+1,j} - h_{m,j}) = F_{um,j} + K \left[ \frac{(u_{m+1,j} + u_{m-1,j} - 2u_{m,j})}{\Delta x^2} + \right. \\ \left. + \frac{(u_{m,j+1} + u_{m,j-1} - 2u_{m,j})}{\Delta y^2} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_{m,j}}{\partial t} + \frac{f_0}{4} (u_{m,j} + u_{m,j+1} + u_{m-1,j+1} + u_{m-1,j}) + \\
& \frac{g}{\Delta y} (h_{m,j+1} - h_{m,j}) = F_{v_{m,j}} + K \left[ \frac{(v_{m+1,j} + v_{m-1,j} - 2v_{m,j})}{\Delta x^2} + \right. \\
& \left. \frac{(v_{m,j+1} + v_{m,j-1} - 2v_{m,j})}{\Delta y^2} \right] \quad (2.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial h}{\partial t} + H \left[ \frac{(u_{m,j} - u_{m-1,j})}{\Delta x} + \frac{(v_{m,j} - v_{m,j-1})}{\Delta y} \right] = F_{h_{m,j}} + \\
& K \left[ \frac{(h_{m+1,j} + h_{m-1,j} - 2h_{m,j})}{\Delta x^2} + \frac{(h_{m,j+1} + h_{m,j-1} - 2h_{m,j})}{\Delta y^2} \right]. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

### 2.2.2 - DECOMPOSIÇÃO EM MODOS NORMAIS

Assumindo que o sistema seja cíclico com L pontos de grade na direção leste-oeste e P pontos de grade na direção norte-sul, a expansão de Fourier para qualquer variável u, v ou h pode ser escrita como:

$$A_{m,j}(t) = \sum_k \sum_l A_{k,l}(t) \exp i \left[ \frac{2\pi k}{M} (m-1) + \frac{2\pi l}{J} (j-1) \right], \quad (2.13)$$

onde  $m=1,2,\dots,M$  e  $j=1,2,\dots,J$  são os índices de grade nas direções leste-oeste e norte sul, respectivamente. Os harmônicos zonal e meridional são dados por:

$$k = 0, \bar{+}1, \bar{+}2, \dots, \bar{+}M/2, \quad (2.14)$$

$$l = 0, \bar{+}1, \bar{+}2, \dots, \bar{+}J/2. \quad (2.15)$$

As expansões de Fourier de  $u$ ,  $v$ ,  $h$ ,  $F_u$ ,  $F_v$  e  $F_h$ , podem ser obtidas através da Equação 2.13 e do conjunto de Equações 2.10 a 2.12:

$$\frac{\partial u_{kl}}{\partial t} - f_u v_{kl} + k_u h_{kl} = F_{ukl} - \nu u_{kl}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial v_{kl}}{\partial t} + f_u^* u_{kl} + l_v h_{kl} = F_{vkl} - \nu v_{kl}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial h_{kl}}{\partial t} - (k_u^* u_{kl} + l_v^* v_{kl}) = F_{hkl} - \nu h_{kl}, \quad (2.18)$$

onde

$$f_u = \frac{f_0}{4} (\exp(2i\pi k/M) + 1)(\exp(-2i\pi l/J) + 1); \quad (2.19)$$

é o parâmetro de Coriolis efetivo em função dos harmônicos,

$$k_u = \frac{gH}{\Delta x} (\exp(2i\pi k/M) - 1); \quad (2.20)$$

$$l_v = \frac{gH}{\Delta y} (\exp(2i\pi l/J) - 1); \quad (2.21)$$

o asterisco representa o complexo conjugado e  $i = \sqrt{-1}$  e  $H$  representa a altura equivalente. O termo que representa a dissipação foi definido como  $\nu = K \mu^2 / gh$ , com  $\mu^2 = |k_u^2| + |l_v^2|$ . Por conveniência, foram usadas as seguintes transformações:

$$h_{kl} = h_{kl} \sqrt{gH} / g; \quad F_{ukl} = F_{ukl} \sqrt{gH} / g; \quad (2.22)$$

$$F_{vkl} = F_{vkl} \sqrt{gH} / g \quad F_{hkl} = F_{hkl} \sqrt{gH} / g.$$

Note-se que devido ao uso deste tipo de grade espacial, o parâmetro de Coriolis possui efeito diferente para cada número de onda do modelo, conforme mostra a Figura 2.1. É verificado que para números de onda zonal e meridional pequenos, o efeito é mais atuante no sistema e vice-versa, sendo que para ambos números de onda nulos, tem-se 100% efetivo.

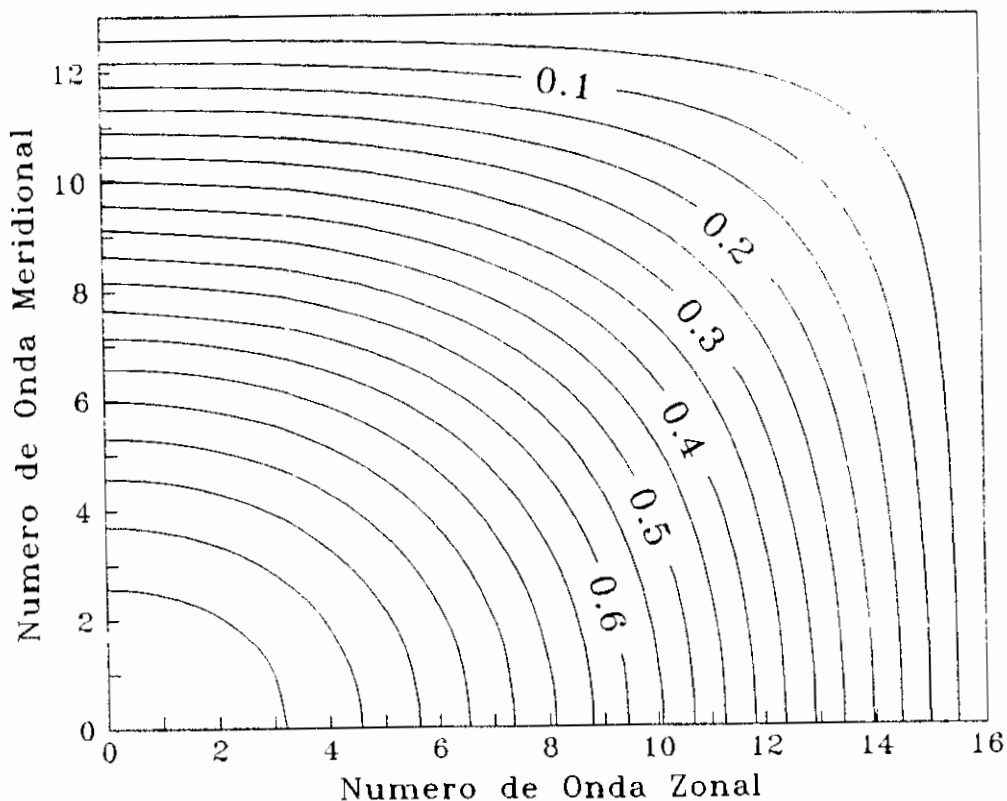


Fig. 2.1 - Parâmetro de Coriolis efetivo (Equação 2.19), normalizado por  $f_0$ , em função dos números de onda zonal ( $k_u$ ) e meridional ( $l_v$ ), onde os contornos vão de 0,05 a 1,00 com intervalos de 0,05.

Deve-se ressaltar também, que para um dado valor de  $k$  ou  $l$  em particular,  $F_{ukl}$ ,  $F_{vkl}$  e  $F_{hkl}$ , são as amplitudes dos termos forçantes e não lineares; que também dependem de números de onda diferentes desses  $k$  e  $l$ .

O sistema de Equações 2.16 a 2.18 pode ser escrito em forma matricial como:

$$\frac{\partial \underline{W}_{kl}}{\partial t} + \underline{L}_{kl} \underline{W}_{kl} = \underline{F}_{kl} - \nu \underline{W}_{kl}, \quad (2.23)$$

onde  $\underline{W}_{kl}$  é o vetor

$$\underline{W}_{kl} = ( u_{kl} \quad v_{kl} \quad h_{kl} )^T; \quad (2.24)$$

$\underline{L}_{kl}$  a matriz

$$\underline{L}_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & -f_u & k_u \\ f_u^* & 0 & l_v \\ -k_u^* & -l_v^* & 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

e

$$\underline{F}_{kl} = ( F_{ukl} \quad F_{vkl} \quad F_{hkl} )^T. \quad (2.26)$$

Os modos normais do sistema linear podem ser obtidos desprezando-se o termo não linear da Equação 2.23 e admitindo que o sistema possui solução do tipo:

$$\underline{W}_{kl} = \underline{W}_{okl} \exp( \omega_{kl} t ), \quad (2.27)$$

ou, suprimindo os índices  $k$  e  $l$ , pode-se escrever:

$$\omega \underline{W}_o + \underline{L} \underline{W}_o = 0; \quad (2.28)$$

que é um problema de autovalor-autovetor. Os autovalores são dados por

$$\omega_1 = 0, \quad (2.29a)$$

$$\omega_2 = i [ |f_u|^2 + \mu^2 ]^{1/2}, \quad (2.29b)$$

$$\omega_3 = -i [ |f_u|^2 + \mu^2 ]^{1/2}. \quad (2.29c)$$

Logo, para cada  $k$  e  $l$  existem 3 autofrequências. A frequência nula corresponde ao modo geostrófico (modo lento). A estacionariedade deste modo é devido ao fato do parâmetro de Coriolis  $f_0$  ser constante no presente caso. As outras duas frequências correspondem aos modos de gravidade leste e oeste (modos rápidos). Para cada autofrequência, as auto-funções correspondentes são:

$$\underline{H}_1 = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} |f_u| & |f_u| & \\ -l_v \frac{|f_u|}{f_u^*} & k_u \frac{|f_u|}{f_u} & |f_u| \end{pmatrix}^T, \quad (2.30)$$

$$\underline{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2} \alpha \mu} \begin{pmatrix} (l_v f_u - i \alpha k_u) & -(k_u f_u^* + i \alpha l_v) \mu^2 \end{pmatrix}^T, \quad (2.31)$$

$$\underline{H}_3 = \frac{1}{\sqrt{2} \alpha \mu} \begin{pmatrix} (i \alpha k_u + l_v f_u) & (i \alpha l_v - k_u f_u^*) \mu^2 \end{pmatrix}^T, \quad (2.32)$$

onde  $\alpha = (|f_u|^2 + \mu^2)^{1/2}$ .

Pode ser facilmente verificado que as autofunções obtidas formam um conjunto ortonormal completo, com:

$$\langle \underline{H}_n, \underline{H}_{n'} \rangle = \delta_{nn'}, \quad \text{para } n, n' = 1, 2, 3, \quad (2.33)$$

onde  $\langle , \rangle$  denota o produto interno usual entre funções vetoriais:

$$\langle \underline{H}_n, \underline{H}_{n'} \rangle = \underline{H}_n^{T*} \cdot \underline{H}_{n'}, \quad \text{para } n, n' = 1, 2, 3. \quad (2.34)$$

A ortogonalidade e completeza das auto-funções (para um dado  $k$  e  $l$ ) permite que  $\underline{W}$  seja expandido em termos de um modo de Rossby ( $\underline{H}_1$ ) e dois modos de gravidade ( $\underline{H}_2$  e  $\underline{H}_3$ ). Esta expansão pode ser escrita como:

$$\underline{W} = a_1 \underline{H}_1 + a_2 \underline{H}_2 + a_3 \underline{H}_3, \quad (2.35)$$

onde  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são os coeficientes de expansão dados por:

$$a_n = \langle \underline{H}_n, \underline{W} \rangle = \underline{H}_n^{T*} \underline{W} \quad \text{para } n=1, 2, 3. \quad (2.36)$$

Para um dado campo de  $u$ ,  $v$  e  $h$ , de acordo com a expansão em série de Fourier definida pela Equação 2.13, tem-se primeiramente

$$\begin{pmatrix} u_{m_j}(t) \\ v_{m_j}(t) \\ h_{m_j}(t) \end{pmatrix} = \sum_k \sum_l \underline{W}_{kl}(t) \exp i \left( \frac{2\pi k}{M} (m-1) + \frac{2\pi l}{J} (j-1) \right), \quad (2.37)$$

onde  $\underline{W}_{kl} = (u_{kl} \quad v_{kl} \quad h_{kl})^T$ . De acordo com a Equação 2.35  $\underline{W}_{kl}$  pode ser expandido como:

$$\begin{pmatrix} u_{kl} \\ v_{kl} \\ h_{kl} \end{pmatrix} = \frac{a_{1kl}}{\alpha} \begin{pmatrix} |f_u| \\ -l_v \frac{|f_u|}{f_u^*} \\ |f_u| \end{pmatrix} + \frac{a_{2kl}}{\sqrt{2}\alpha\mu} \begin{pmatrix} (l_v f_u - i\alpha k_u) \\ -(i\alpha l_v + f_u^* k_u) \\ \mu^2 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{a_{3kl}}{\sqrt{2}\alpha\mu} \begin{pmatrix} (i\alpha k_u + l_v f_u) \\ -(k_u f_u^* - i\alpha l_v) \\ \mu^2 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Para os campos  $u$ ,  $v$  e  $h$ , dados  $M \cdot J$  pontos de grade, existem  $3 \cdot M \cdot J$  modos normais, dos quais  $M \cdot J$  são modos de Rossby e  $2 \cdot M \cdot J$  são modos de gravidade.

Uma propriedade interessante da estrutura das autofunções, é que a divergência horizontal correspondente aos modos de Rossby é nula, sendo que está contida integralmente na estrutura dos modos de gravidade. Isto pode ser confirmado substituindo-se  $u_{kl}$  e  $v_{kl}$  na equação

$$\delta_{kl} = k_u^* u_{kl} + l_v^* v_{kl}. \quad (2.39)$$

### 2.2.3 - SOLUÇÃO DA IMNN DE MACHENHAUER

Para o esquema de MACHENHAUER ser implementado, em primeiro lugar é necessário encontrar uma equação que governe a evolução temporal das amplitudes dos modos normais. Para se conseguir isto, os termos forçantes e não lineares dados pela Equação 2.26 devem ser expandidos de maneira que:

$$\underline{F} = F_1 \underline{H}_1 + F_2 \underline{H}_2 + F_3 \underline{H}_3, \quad (2.40)$$

onde mais uma vez,  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  são os coeficientes de expansão dados por:

$$F_n = \langle \underline{H}_n, \underline{F} \rangle = \underline{H}_n^T \cdot \underline{F} \quad \text{para } n=1,2,3. \quad (2.41)$$



As expansões de  $\underline{W}$  e  $\underline{F}$  podem ser substituídas na Equação 2.23, resultando em:

$$\begin{aligned} \underline{H}_1 \frac{\partial \underline{H}_1}{\partial t} + \underline{H}_2 \frac{\partial a_2}{\partial t} + \underline{H}_3 \frac{\partial a_3}{\partial t} + L(a_1 \underline{H}_1 + a_2 \underline{H}_2 + a_3 \underline{H}_3) = \\ = F_1 \underline{H}_1 + F_2 \underline{H}_2 + F_3 \underline{H}_3 - (a_1 \underline{H}_1 + a_2 \underline{H}_2 + a_3 \underline{H}_3); \quad (2.42) \end{aligned}$$

usando

$$L \underline{H}_n = -\omega_n \underline{H}_n \quad (2.43)$$

e as propriedades de ortonormalidade dos  $\underline{H}_n$ , a Expressão 2.42 pode ser escrita como:

$$\frac{\partial a_n}{\partial t} - \omega_n a_n = F_n, \quad (2.44)$$

onde  $F_n$  foi transformado por  $F_n = F_n - \nu a_n$ . Na ausência da dissipação e dos termos forçantes e não lineares, ( $F_n = \nu = 0$ ), a equação acima corresponde ao sistema linear representado pela Equação 2.28. Caso contrário, a Equação 2.44 governa a evolução temporal da amplitude da projeção sobre os modos normais  $a_n$ ; como era desejado.

Dada uma distribuição inicial de  $u$ ,  $v$  e  $h$ , as correspondentes tendências iniciais não lineares  $F_u$ ,  $F_v$ ,  $F_h$  e  $\underline{W}$  podem ser obtidas. Os dados iniciais e essas tendências podem ser projetados sobre os modos normais, sendo que a evolução temporal das amplitudes da projeção sobre os modos normais ( $a_n$ ) no tempo inicial estarão contidas na Equação 2.44.

Para os números de onda desejados, o esquema de Machenhauer de IMNN modifica tal amplitude para os modos rápidos (isto é,  $a_2$  e  $a_3$ ), impondo-lhes que sejam nulos. As amplitudes correspondentes aos modos lentos ( $a_1$ ) não são modificadas. O processo não necessariamente inclui todos os modos rápidos. Suponha que para  $k$  e  $l$  quaisquer, deseja-se iniciar os correspondentes modos rápidos. Obedecendo-se a condição de balanço

$$a_n = - \frac{F_n}{\omega_n}, \text{ para } a_2 \text{ e } a_3 \text{ tem-se:}$$

$$a_2 = - \frac{F_2}{\omega_2}, \quad (2.45)$$

$$a_3 = - \frac{F_3}{\omega_3}. \quad (2.46)$$

Os campos modificados  $u^{(1)}$ ,  $v^{(1)}$  e  $h^{(1)}$ , no espaço físico podem ser reconstituídos usando as definições da expansão em modos normais dada nas Equações 2.37 e 2.38. A partir da equação 2.38, pode-se encontrar o  $\underline{W}$  modificado:

$$\underline{W}^{(1)} = a_1 \underline{H}_1 + a_2^{(1)} \underline{H}_2 + a_3^{(1)} \underline{H}_3, \quad (2.47)$$

que após substituir os  $a_2$  e  $a_3$  das Equações 2.45 e 2.46 se transforma em

$$\underline{W}^{(1)} = a_1 \underline{H}_1 - \frac{F_2 \underline{H}_2}{\omega_2} - \frac{F_3 \underline{H}_3}{\omega_3}. \quad (2.48)$$

A Equação 2.48, após manipulações algébricas é equivalente à:

$$\underline{W}^{(1)} = \frac{1}{\alpha} (L_2 \underline{W} - L \underline{F}), \quad (2.49)$$

onde  $L$  está relacionado com a matriz  $L$  da seguinte forma:

$$L_2 = (L)^2 + \alpha^2 I \quad (2.50)$$

e  $I$  é a matriz identidade. Pode-se mostrar que as matrizes  $L_2$  e  $(L)^2$  correspondem aos operadores de projeção, os quais projetam os dados nos modos de Rossby e gravidade respectivamente.

A Equação 2.49 para  $\underline{W}$  modificado representa o resultado da aplicação do esquema de IMNN de Machenhauer para os números de onda  $k$  e  $l$  em particular. Para um dado  $\underline{F}_{kl}$ , os coeficientes modificados  $a_2^{(1)}$  e  $a_3^{(1)}$  garantem inicialmente que  $\dot{a}_2^{(1)}$  e  $\dot{a}_3^{(1)} = 0$ . Mas o termo que representa os processos não lineares, por sua vez, não depende somente dos modos  $k$  e  $l$  correspondentes, mas também dependem das amplitudes dos outros números de onda, que podem ser igualmente iniciados. Dessa maneira, a integração de  $\underline{W}^{(1)}$  não assegura que  $\dot{a}_2^{(1)} = \dot{a}_3^{(1)} = 0$ .

A integração, devido aos termos forçantes e não lineares, re-excita as oscilações de altas frequências. Com isso, o processo de IMNN de Machenhauer se torna um método iterativo.

Após serem obtidas as amplitudes modificadas, os novos termos forçantes e não lineares são calculados, e as amplitudes correspondentes às oscilações de altas frequências são modificadas novamente para satisfazerem as condições de balanço 2.45 e 2.46. Na prática, verifica-se que são suficientes de 3 a 5 iterações para deixar as

amplitudes das ondas de altas frequências, durante a previsão, dentro de um nível aceitável (Daley, 1981). A Equação 2.49 pode ser generalizada para a N-ésima iteração,

$$\underline{W}^{(N)} = \frac{1}{\alpha} ( L_2 \underline{W}^{(N-1)} - L \underline{F}^{(N-1)} ). \quad (2.51)$$

#### 2.2.4 - SOLUÇÃO DA IDMN

Na IDMN, somente a parte linear das equações governantes é integrada com um esquema avançado-atrasado em torno do tempo inicial. O esquema utilizado neste trabalho é descrito pelas equações:

$$\underline{W}'^{n+1} = \underline{W}^n + \Delta t \left( \frac{\partial \underline{W}}{\partial t} \right)^n, \quad (2.52)$$

$$\underline{W}''^n = \underline{W}'^{n+1} - \Delta t \left( \frac{\partial \underline{W}}{\partial t} \right)'^{n+1}, \quad (2.53)$$

$$\underline{W}^{n+1} = 3 \underline{W}^n - 2 \underline{W}''^n, \quad (2.54)$$

onde  $\underline{W}$  é o mesmo vetor definido anteriormante, (') e (')' são cálculos intermediários e n é o ciclo de integração.

Este esquema segue o método proposto por Okamura (Haltiner e Williams, 1980) e uma de suas características importantes é o decaimento seletivo, principalmente sobre os modos rápidos. O mesmo tem sido utilizado por alguns autores, como Temperton (1976), Bratseth (1982), Sugi (1986) e Kumar (1990). Serão discutidas nesta seção a eficiência e a estabilidade do esquema utilizado na iniciação e serão analisados dois

casos distintos. No primeiro, o termo que contém a dissipação por atrito se encontra junto com os termos lineares da Equação 2.23. No segundo caso analisado, o esquema de integração dado nas Equações 2.52 a 2.54 é aplicado diretamente sobre a Equação 2.23.

1o. caso:

Toma-se o conjunto de Equações 2.16 a 2.18 na forma de operador;

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} = \underline{A} \underline{W} + \underline{F}, \quad (2.55)$$

onde  $\underline{F}$  é o mesmo da Equação 2.26 e,

$$\underline{A} = -(\underline{L} + \underline{I}) = \begin{pmatrix} -\nu & f_u & -k_u \\ -f_u^* & -\nu & -l_v \\ k_u^* & l_v^* & -\nu \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

O primeiro passo do esquema de Okamura é a integração avançada, com passo  $\Delta t$  da Equação 2.55, dada por

$$\underline{W}'^1 = \underline{W}^0 + \Delta t (\underline{A} \underline{W}^0 + \underline{F}^0), \quad (2.57)$$

onde  $\underline{W}^0$  e  $\underline{F}^0$  são calculados em função da condição inicial não inicializada. Partindo-se de  $\underline{W}'^1$ , o próximo passo é a integração atrasada com passo de tempo  $-\Delta t$ .

$$\underline{W}''^0 = \underline{W}^0 - (\Delta t \underline{A})^2 (\underline{A} \underline{W}^0 + \underline{F}^0). \quad (2.58)$$

Note-se que na integração atrasada, os termos forçantes e não-lineares são mantidos inalterados.

O último passo do esquema de Okamura é a média ponderada entre  $\underline{W}^0$  inicial e  $\underline{W}''^0$ , obtida após um

ciclo de integração avançada-atrasada. Esta média é o valor  $\underline{W}^1$  atual, donde será iniciado o próximo ciclo:

$$\underline{W}^1 = \mathbf{B} \underline{W}^0 + \mathbf{D} \underline{F}^0, \quad (2.59)$$

onde  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  são matrizes definidas por

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} + 2 (\Delta t \mathbf{A})^2, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{D} = 2(\Delta t)^2 \mathbf{A} \quad (2.61)$$

e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

O segundo ciclo de integração se inicia com os valores de  $\underline{W}^1$ . São apresentados  $\underline{W}^1$  e  $\underline{W}^2$  como na Equação 2.59, fazendo-se a substituição de  $\underline{W}^0$  por  $\underline{W}^1$  e  $\underline{W}^1$  por  $\underline{W}^2$ , resultando em:

$$\underline{W}^2 = \mathbf{B} \underline{W}^1 + \mathbf{D} \underline{F}^0, \quad (2.62)$$

e usando-se a Equação 2.59, tem-se:

$$\underline{W}^2 = (\mathbf{B})^2 \underline{W}^0 + (\mathbf{B} + \mathbf{I}) \mathbf{D} \underline{F}^0. \quad (2.63)$$

O ciclo avançado-atrasado pode ser repetido  $N$  vezes. Após completados os  $N$  ciclos, pode ser mostrado que a amplitude  $\underline{W}^N$  é igual a:

$$\underline{W}^N = (\mathbf{B})^N \underline{W}^0 + \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{B})^n \mathbf{D} \underline{F}^0, \quad (2.64)$$

Como sugerido por Sugi (1986), após  $N$  ciclos de integração avançada-atrasada, os termos forçantes e não-lineares são atualizados em função das variáveis de

estado dadas por  $\underline{W}^N$ . Analogamente à primeira etapa, constroi-se o próximo grupo de  $N$  ciclos, de maneira que

$$\underline{W}^{2N} = (\mathbf{B})^{2n} \underline{W}^0 + \mathbf{B} \mathbf{S} \mathbf{D} \underline{F}^0 - \mathbf{S} \mathbf{D} \underline{F}^N \quad (2.65)$$

onde

$$\mathbf{S} = \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{B})^n \quad (2.66)$$

No processo de iniciação dinâmica por modos normais, tem-se  $N$  ciclos de integração avançada-atrasada das equações do modelo, com  $N'$  atualizações dos termos forçantes e não lineares, com

$$\underline{W}^{N'N} = (\mathbf{E})^{N'} \underline{W}^0 + \mathbf{G} \sum_{n'=0}^{N'-1} (\mathbf{E})^{n'} \underline{F}^{(N'-n'-1)N}, \quad (2.67)$$

onde

$$\mathbf{E} = (\mathbf{B})^N = [ \mathbf{I} + 2 (\Delta t \mathbf{A})^2 ]^N, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{G} = \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{B})^n 2 (\Delta t)^2 \mathbf{A}. \quad (2.69)$$

A estabilidade linear pode ser analisada através dos autovalores da matriz  $\mathbf{E}$ , também chamada de matriz de amplificação. Como esta é uma expressão polinomial, seus autovalores estão relacionados com os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  (Nobble e Daniel, 1977) e os autovetores são os mesmos.

Os autovalores da matriz  $A$  são dados por:

$$\lambda_1 = -\nu \quad , \quad (2.70a)$$

$$\lambda_2 = -\nu + i\alpha, \quad (2.70b)$$

$$\lambda_3 = -\nu - i\alpha \quad . \quad (2.70c)$$

Logo, os autovalores da matriz de amplificação serão:

$$\lambda_1' = 1 + 2(\Delta t)^2 \nu^2 \quad , \quad (2.71a)$$

$$\lambda_2' = 1 + 2(\Delta t)^2 (-\nu + i\alpha)^2 \quad , \quad (2.71b)$$

$$\lambda_3' = 1 + 2(\Delta t)^2 (-\nu - i\alpha)^2 \quad . \quad (2.71c)$$

Para haver estabilidade numérica do esquema, é necessário que os módulos de  $\lambda_1'$ ,  $\lambda_2'$  e  $\lambda_3'$  sejam menores ou iguais a 1. No entanto, verifica-se que:

$$|\lambda_1'| = 1 + 2(\Delta t)^2 \nu^2 \quad , \quad (2.72)$$

$$|\lambda_2'| = |\lambda_3'| = |1 + 2(\Delta t)(\nu^2 - \alpha^2)|^2 + 16\alpha^2\nu^2(\Delta t)^4. \quad (2.73)$$

Pode-se notar através das Expressões 2.72 e 2.73, que os módulos dos autovalores da matriz de amplificação sempre serão maiores que 1; exceto para  $\Delta t$  igual a zero. Dessa forma, sempre ocorrerá instabilidade numérica durante a integração avançada-atrasada do sistema de equações representados pela Expressão 2.55. Isto sugere que o parâmetro, deva ser incluído junto com os termos não lineares e forçantes.



2o. caso:

Toma-se novamente o conjunto de Equações 2.16 a 2.18 na forma vetorial:

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} = -L \underline{W} - \underline{W} + \underline{F} \quad , \quad (2.74)$$

onde L é a matriz definida na Equação 2.25.

Aplicando-se o esquema de Okamura sobre a Equação 2.74, analogamente ao caso anterior, tem-se o primeiro ciclo:

$$\underline{W}^1 = \underline{W}^0 (I + 2(\Delta t L)^2 + 2(\Delta t)^2 (\nu \underline{W}^0 - \underline{F}^0) L) \quad (2.75)$$

e utilizando-se as definições  $L_2 = (L)^2 + I \alpha^2$  e  $\underline{F}^0 = -\nu \underline{W}^0 + \underline{F}^0$ , a Equação 2.75 pode ser escrita na forma:

$$\underline{W}^1 = \underline{W}^0 \gamma + 2(\Delta t)^2 (L_2 \underline{W}^0 - \underline{F}^0 L) \quad , \quad (2.76)$$

$$\text{onde } \gamma = 1 - 2(\Delta t \alpha)^2 \quad . \quad (2.77)$$

O segundo ciclo de integração avançada-atrasada com mesmo  $\Delta t$ , se inicia a partir da amplitude  $\underline{W}^1$  e no final obtém-se  $\underline{W}^2$  modificado. Após N ciclos, obtém-se a equação da amplitude modificada como sendo:

$$\begin{aligned} \underline{W}^N = \gamma^N \underline{W}^0 + 2(\Delta t)^2 (1 + \gamma + \gamma^2 + \dots \\ + \gamma^{n-1}) (L_2 \underline{W}^0 - L \underline{F}^0) \quad (2.78) \end{aligned}$$

e usando a propriedade

$$1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^{N-1} = \frac{\gamma^N - 1}{\gamma - 1}, \quad (2.79)$$

a Equação 2.78 se torna

$$\underline{W}^N = \gamma^N \underline{W}^0 + 2(\Delta t)^2 \frac{\gamma^N - 1}{\gamma - 1} (L_2 \underline{W}^0 - L \underline{F}^0). \quad (2.80)$$

A Equação 2.80 representa a amplitude modificada ao fim de N ciclos de integração avançada-atrasada, para cada k e l.

#### 2.2.5 - EQUIVALÊNCIA ENTRE IDMN E IMNN DE MACHENHAUER

Ao se implantar a IDMN no modelo de previsão, o processo de integração avançada-atrasada de Okamura é aplicado diretamente nas Equações 2.1 a 2.3, discretizadas no espaço físico. A Equação 2.80 está no espaço de fase e serve para se comparar a equivalência existente entre a IDMN e IMNN.

Analogamente ao primeiro caso da sub-seção anterior, para haver estabilidade numérica e decaimento de amplitude no segundo caso, é necessário que  $|\gamma| < 1$  (Equação 2.77); e para um número grande de ciclos de integração ( $N \rightarrow \infty$ ), verifica-se que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma^N = 0$ ; e consequentemente

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma^N - 1}{\gamma - 1} = \frac{1}{2(\Delta t \alpha)^2} \quad (2.81)$$

e a Equação 2.80 levada ao mesmo limite, se torna:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \underline{W}^N = \frac{1}{\alpha^2} ( L_2 \underline{W}^0 - L \underline{F}^0 ) , \quad (2.82)$$

que por sua vez, é idêntica à solução da primeira iteração do esquema de MACHENHAUER na IMNN, representada pela Equação 2.49.

Como relatado anteriormente, após N ciclos de integração avançada-atrasada completos, os termos forçantes e não lineares são atualizados, e depois repetem-se N ciclos, de maneira que a IDMN vai se aproximando cada vez mais da IMNN.

Como visto, a convergência da IDMN para IMN depende do fato de  $|\gamma| < 1$ , para cada k e l. Da Equação 2.77 segue que:

$$\Delta t \alpha_{kl} < 1 \quad (2.83)$$

para se ter estabilidade numérica linear.

Definindo-se

$$t_{kl} = \frac{1}{\alpha_{kl}} \quad (2.84)$$

como sendo o período de tempo associado com o modo de gravidade, a Equação 2.83 pode ser escrita como

$$\Delta t < t_{kl} \quad (2.85)$$

Então, se o passo de tempo de integração  $\Delta t$  satisfizer a condição acima, para k e l particulares, haverá a equivalência esperada. Para os outros modos, o

período de tempo  $\Delta t_{k1}$  associado será diferente. Arranjando-se os períodos de tempo  $t_{k1}$  de maneira que

$$T_m < \min (t_{k1}), \quad (2.86)$$

o passo de tempo de integração deverá ser sempre menor que  $T_m$ .

No entanto, através das Equações 2.76 e 2.77 fica fácil notar que no caso em que  $\gamma=0$ , obtém-se também a equivalência com a Expressão 2.49. Disso, decorre que:

$$t_{k1} = \frac{1}{\sqrt{2} \alpha_{k1}} \quad (2.87)$$

Em outras palavras, caso ( $\gamma = 0$ ) tem-se a exata equivalência entre os esquemas de IDMN e IMNN e deverá ser adotado como critério na escolha do  $\Delta t$ . Assim, para cada  $k$  e  $l$  do modelo, tem-se um  $\Delta t$  específico. Escolhida uma faixa de valores de  $\Delta t_{k1}$ , baseados na magnitude dos períodos das ondas que se deseja amortecer, pode-se fazer  $n$  ciclos de integração avançada-atrasada; cada ciclo com  $\Delta t$  diferente. No final dos  $N$  ciclos de integração avançada-atrasada com  $\Delta t$  variável, os termos não lineares e forçantes físicos são atualizados, e outra etapa de integração é iniciada.

A Figura 2.2 representa um diagrama de fluxos mostrando a equivalência entre os dois esquemas discutidos.

Os períodos de tempo em função dos números de onda zonal e meridional dado pela Equação 2.87 podem ser vistos nas Tabelas 2.1 e 2.2, para as alturas equivalentes de 9800 m e 250 m, respectivamente.

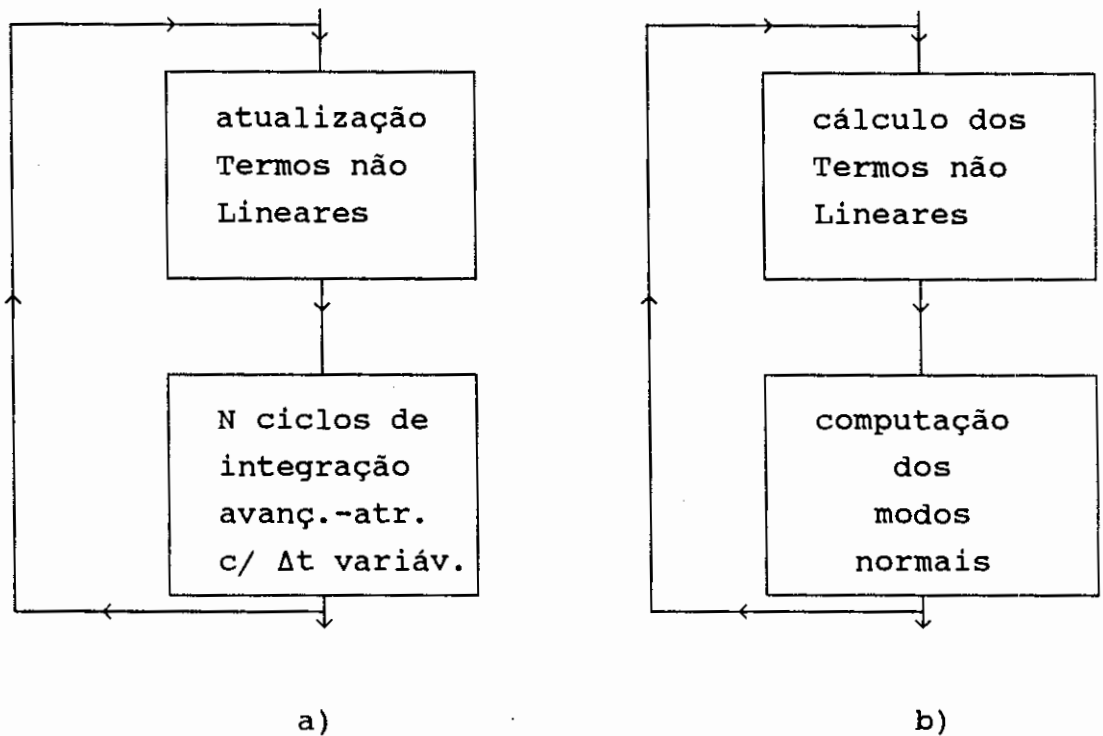


Fig. 2.2 - Equivalência entre a) IDMN e b) IMNN

Nota-se que no primeiro caso tem-se uma faixa de valores de  $\Delta t$  variando de 336,31 s a 6.856,83 s e no segundo caso os valores variam de 2.105,62 s a 6856,83s. Ao se aplicar o esquema de Okamura usando os valores de  $\Delta t$  das tabelas, em cada caso deverá haver a anulação da amplitude das ondas de comprimento correspondentes. No caso em que não é possível encontrar o período para cada modo, pode ser escolhida uma faixa de valores de  $\Delta t$  e aplicar o esquema de Okamura, variando-se o  $\Delta t$  em cada ciclo, do maior para o menor. Pode-se chamar este procedimento de "step-down". Como esta é uma análise linear, no modelo real são tomados valores próximos dos encontrados nas Tabelas 2.1 e 2.2, e ainda assim com base nas frequências e comprimentos de ondas que se deseja eliminar.

TABELA 2.1:  $\Delta t$  (s) PARA GAMA NULO EM FUNÇÃO DOS NÚMEROS DE ONDA ZONAL ( $k_u$ ) E MERIDIONAL ( $l_v$ ) PARA ALTURA EQUIVALENTE  $H=9800$  M EM  $45,0^\circ$  DE LATITUDE.  $\Delta X=\Delta Y= 3,5^\circ$ .

		$k_u \rightarrow$							
		0	1	2	3	4	5	6	7
$l_v$	0	6856.8	3967.2	2302.0	1597.2	1225.8	1000.6	851.5	747.0
	1	3426.2	2801.0	1989.5	1481.0	1170.8	970.0	832.4	734.0
	2	1913.1	1780.3	1506.3	1246.1	1043.9	894.0	782.9	699.4
	3	1319.4	1273.3	1160.9	1028.5	905.7	802.5	719.2	652.9
	4	1014.6	993.2	937.0	863.1	786.6	716.1	655.0	603.7
	5	833.1	821.1	788.4	742.8	692.3	642.8	597.5	557.8
	6	715.0	707.4	686.2	655.5	620.0	583.7	549.1	517.8
	7	634.2	628.9	613.8	591.5	565.0	537.1	509.8	484.4
	8	577.2	573.2	561.7	544.5	523.6	501.1	478.7	457.5
	9	536.8	533.5	524.2	510.1	492.8	473.9	454.8	436.5
	10	508.5	505.7	497.8	485.7	470.6	454.1	437.2	420.9
	11	489.8	487.3	480.2	469.3	455.7	440.6	425.1	410.0
	12	479.1	476.8	470.1	459.8	447.0	432.8	418.1	403.7
13	475 .	473.3	466.8	456.8	444.2	430.2	415.8	401.6	

8	9	10	11	12	13	14	15	16
671.0	614.3	571.4	538.9	514.6	496.9	484.9	477.9	475.6
661.5	607.0	565.5	534.0	510.3	493.0	481.3	474.4	472.2
635.8	586.9	549.2	520.2	498.2	482.1	471.1	464.7	462.6
600.2	558.6	525.7	500.1	480.5	466.0	456.0	450.2	448.3
561.4	526.8	499.0	476.9	459.8	447.0	438.2	433.0	431.3
523.8	495.4	472.1	453.2	438.4	427.3	419.6	415.0	413.5
490.3	466.7	447.0	430.9	418.2	408.5	401.7	397.7	396.4
461.7	441.8	425.0	411.1	400.0	391.5	385.5	381.9	380.8
438.2	421.1	406.5	394.2	384.4	376.8	371.5	368.3	367.2
419.6	404.6	391.5	380.5	371.6	364.8	359.9	357.0	356.1
405.7	392.0	380.1	370.0	361.8	355.5	351.0	348.3	347.4
395.9	383.2	372.1	362.6	354.9	348.9	344.6	342.1	341.2
390.2	378.0	367.3	358.2	350.7	344.9	340.8	338.4	337.5
388.3	376.3	365.7	356.7	349.3	343.6	339.6	337.1	336.3

TABELA 2.2:  $\Delta t$  (s) PARA GAMA NULO EM FUNÇÃO DOS NÚMEROS DE ONDA ZONAL ( $k_u$ ) E MERIDIONAL ( $l_v$ ) PARA ALTURA EQUIVALENTE  $H=250$  M EM  $45,0^\circ$  DE LATITUDE.  $\Delta X=\Delta Y= 3,5^\circ$ .

		$k_u \rightarrow$							
		0	1	2	3	4	5	6	7
$l_v$	0	6856	6719	6356	5874	5370	4902	4494	4148
	1	6652	6525	6190	5741	5267	4822	4430	4097
	2	6141	6041	5769	5397	4994	4607	4259	3958
	3	5523	5448	5244	4956	4634	4315	4021	3761
	4	4936	4882	4730	4511	4260	4003	3761	3542
	5	4436	4396	4281	4113	3916	3709	3510	3326
	6	4032	4000	3911	3779	3620	3452	3285	3129
	7	3713	3687	3616	3508	3377	3235	3094	2959
	8	3465	3444	3384	3293	3182	3060	2936	2818
	9	3278	3260	3208	3129	3030	2922	2812	2706
	10	3142	3126	3079	3007	2918	2820	2719	2620
	11	3049	3034	2991	2924	2841	2749	2654	2561
	12	2995	2981	2939	2875	2796	2707	2615	2526
	13	2977	2963	2922	2859	2781	2693	2603	2514

8	9	10	11	12	13	14	15	16
3862	3628	3439	3289	3172	3085	3024	2989	2977
3820	3593	3408	3261	3147	3061	3002	2967	2956
3704	3493	3322	3184	3076	2995	2939	2906	2896
3538	3351	3196	3071	2972	2898	2847	2816	2806
3162	3020	2901	2802	2724	2664	2622	2597	2589
3350	3187	3050	2939	2850	2783	2737	2709	2700
2988	2865	2760	2673	2602	2549	2511	2489	2481
2837	2728	2634	2556	2493	2445	2411	2390	2383
2709	2612	2528	2457	2399	2355	2324	2305	2299
2607	2518	2441	2375	2322	2281	2252	2235	2229
2529	2446	2374	2313	2263	2224	2197	2180	2175
2474	2396	2327	2268	2220	2183	2157	2141	2136
2442	2365	2299	2242	2195	2159	2133	2118	2113
2431	2356	2289	2233	2187	2151	2125	2110	2105





CAPÍTULO 3ASPECTOS IMPLEMENTARES3.1 - FORÇANTE FÍSICO E CONDIÇÕES INICIAIS

No campo do forçante físico pré-fixado, são desprezadas as fontes de momentum e é escolhida uma fonte de calor diabática para representar a convecção que ocorre sobre a região tropical na América do Sul. A fonte de calor pré-fixada do tipo transiente, especificada como:

$$\dot{Q}_t(x, y, \sigma, t) = Q(\sigma) F(x, y) T(t) \quad , \quad (3.1)$$

onde  $Q(\sigma)$  representa a estrutura vertical da fonte. A fonte também pode ser parametrizada em função das variáveis do modelo ("wave-CISK"), descrita no Apêndice A. É feita decomposição em modos verticais de sua estrutura e são tomados os valores correspondentes ao modo de interesse, ou seja com altura equivalente próxima de 250 m. A parte espacial  $F(x, y)$  possui uma configuração do tipo "gaussiana" (De Maria, 1985), dada pela Equação 3.2:

$$F(x, y) = \exp \left[ - \left( \frac{x-x_0}{\Delta x} \right)^2 - \left( \frac{y-y_0}{\Delta y} \right)^2 \right] \quad , \quad (3.2)$$

onde  $x_0$  e  $y_0$  representam as posições do centro do forçante sobre a grade nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente, e  $\Delta x$  e  $\Delta y$  são os raios de atuação da fonte nessas direções respectivamente. São tomados  $\Delta x$  e  $\Delta y$  iguais a  $7,5 \times 10^5$  m e  $x_0 = 60^\circ$  W e  $y_0 = 9,375^\circ$  S de maneira que o valor máximo do forçante se encontra sobre a região amazônica.

A parte transiente da Equação 3.2 representada pelo termo  $T(t)$  é dada por:

$$T(t) = \frac{e^2}{4} \rho^2 t \exp(-\rho t), \quad (3.3)$$

onde  $\rho$  representa o termo do decaimento exponencial da amplitude do forçante (De Maria, 1985).

Em todos os experimentos feitos com o modelo, a topografia foi tomada nula. São tomados dois campos de entrada diferentes: dados simulados e dados reais. Os dados de altura e vento simulados (Figura 3.1) são obtidos após a integração de doze horas do modelo, com atuação do forçante pré fixado, descrito anteriormente, atingindo a máxima amplitude no tempo nesse momento. O objetivo é verificar se este modelo é capaz simular uma configuração contendo as principais características da circulação tropical de verão em altos níveis, após um certo período de integração com este campo de entrada. O campo simulado (Figura 3.1) apresenta uma alta de geopotencial associada a um campo de vento com divergência acentuada sobre a região da fonte de calor. Este mesmo campo ainda apresenta o vento cruzando as isolinhas de desvio de altura, o que indica a presença de um grupo de ondas de gravidade se propagando a partir de centro da grade. Os campos de divergência e vorticidade correspondentes a este campo de dados iniciais de entrada podem ser vistos nas Figuras 3.2 e 3.3.

Existe uma forte divergência e um anticiclone associados com a configuração dos campos de desvio de altura e vento citados. Como o forçante que representa a liberação de calor latente é parametrizado em função das variáveis dependentes do modelo, este é proporcional à divergência, conforme descrito no Apêndice A. A Figura 3.4

mostra os campos do forçante parametrizado para os dados simulados. Note-se que na Figura 3.4 o forçante indica forte atividade convectiva na região amazônica. As estrelas plotadas junto com a Figura 3.4, representadas por A, B, C, D, E, F e G são usadas posteriormente para análise da variação da divergência nesses pontos durante a integração no tempo, tanto no caso de dados reais como parametrizados. O primeiro e o último ponto são colocados próximos à fronteira, e os demais estão no centro da grade nas proximidades do forçante.

A Figura 3.5 mostra o campo de desvio de altura e vento dos dados do FGGE-IIIb do dia 8 de fevereiro de 1979 12 UTC, que também são utilizados como dados de entrada dos experimentos já citados. Este campo é o resultado da metade da diferença feita entre os níveis de 200 hPa e 850 hPa, o que representa aproximadamente o modo interno de altura equivalente em torno de 250 m, na decomposição em modos verticais. Nota-se nas proximidades de  $25^{\circ}$  W com  $13^{\circ}$  S da Figura 3.5 um movimento curvilíneo do campo de vento e a presença de um ciclone, conhecido como cavado do nordeste do Brasil. Existe também um anticiclone próximo de  $15^{\circ}$  S com  $65^{\circ}$  W, conhecido como a alta da Bolívia. O campo de vento correspondente (Figura 3.5) apresenta um forte jato nas proximidades das fronteiras norte e sul (jato subtropical do hemisfério norte e sul, respectivamente). Estes ventos fortes próximos das fronteiras provocam problemas de instabilidade numérica durante as fases de integração e de iniciação do modelo. Para evitar tais problemas é introduzido um termo dissipativo do tipo Laplaciano nas equações do modelo, nos campos de vento zonal, vento meridional e desvio de altura.

A dissipação é imposta de modo a atuar nos pontos de grade que possuem latitudes correspondentes maiores do que  $|30^{\circ}|$ , sendo que o coeficiente de

viscosidade turbulenta linear varia linearmente com a latitude, atingindo seu máximo de  $108 \text{ m}^2/\text{s}$  nos pontos de fronteira. O campo de divergência associado (Figura 3.6), apresenta algumas zonas de máximo nas proximidades da fronteira norte, próximo à região amazônica ao sul, em torno de  $35^\circ \text{ S}$  com  $26^\circ \text{ W}$ . O campo do forçante da Figura 3.8 apresenta alguns pontos de atividade não tão intensas, porém mais distribuídas ao norte e noroeste do Brasil.

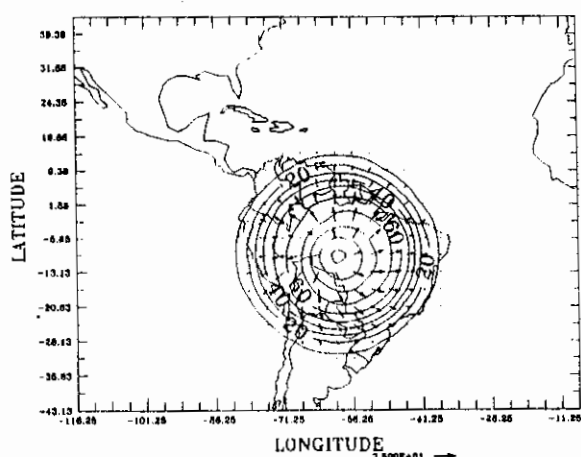


Fig. 3.1 - Campo de desvio de altura e vento de entrada, para dados simulados. Os contornos vão de 10 m a 100 m com intervalos de 10 m. O vento máximo é de  $25 \text{ ms}^{-1}$ .

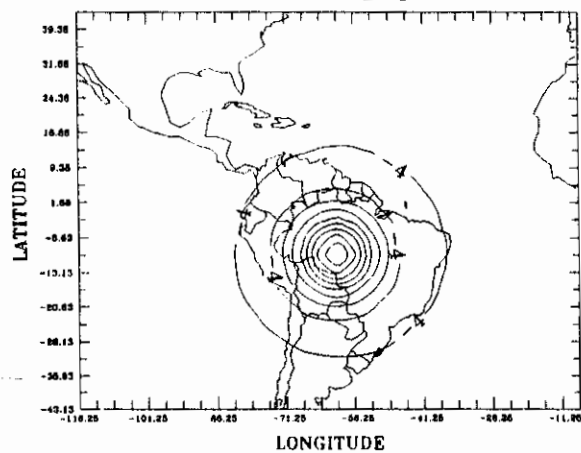


Fig. 3.2 - Campo de divergência de entrada, para dados simulados. Os contornos vão de  $-12 (10^{-6} \text{ s}^{-1})$  a  $56 (10^{-6} \text{ s}^{-1})$  com intervalos de  $8 (10^{-6} \text{ s}^{-1})$ .

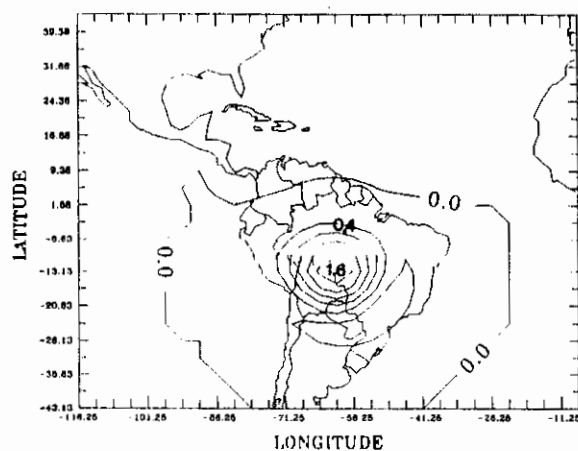


Fig. 3.3 - Campo de vorticidade relativa de entrada para dados simulados. Os contornos vão de  $-0,4 (10^{-5} \text{ s}^{-1})$  a  $1,6 (10^{-5} \text{ s}^{-1})$  com intervalos de  $0,4 (10^{-5} \text{ s}^{-1})$ .

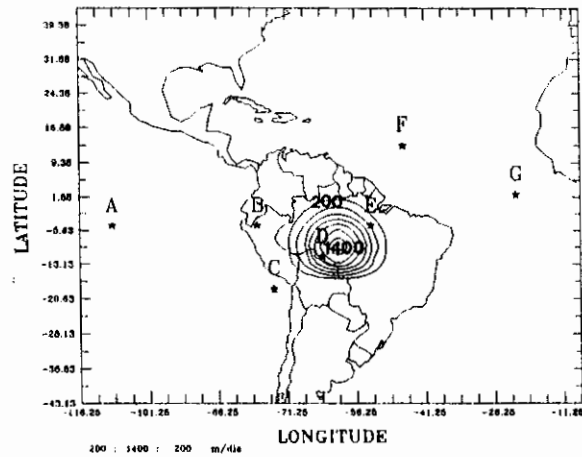


Fig. 3.4 - Campo do forçante parametrizado de entrada, para dados simulados. Os contornos vão de  $200 \text{ m.dia}^{-1}$  a  $1400 \text{ m.dia}^{-1}$  com intervalos de  $200 \text{ m.dia}^{-1}$ .

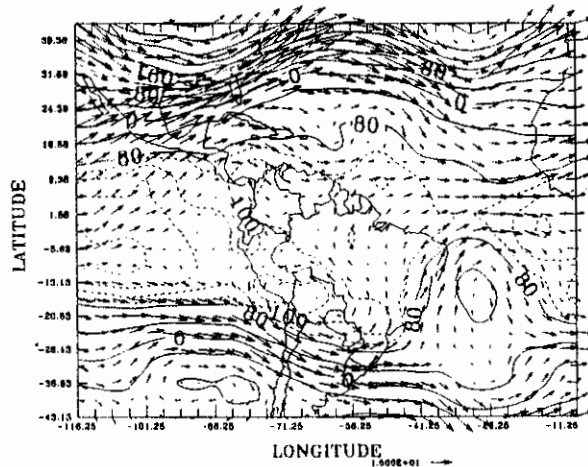


Fig. 3.5 - Campo de desvio de altura e vento de entrada, para dados reais. Os contornos vão de  $-240 \text{ m}$  a  $80 \text{ m}$  com intervalos de  $40 \text{ m}$  (linhas sólidas) e  $90 \text{ m}$  a  $110 \text{ m}$  com intervalos de  $10 \text{ m}$  (linhas pontilhadas). O vento máximo é de  $25 \text{ ms}^{-1}$ .

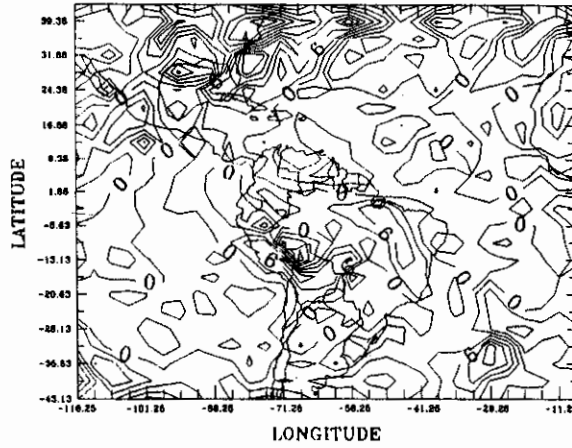


Fig. 3.6 - Campo de divergência de entrada, para dados reais. Os contornos vão de  $-15 (10^{-6} \text{ s}^{-1})$  a  $15 (10^{-6} \text{ s}^{-1})$  com intervalos de  $3 (10^{-6} \text{ s}^{-1})$ .

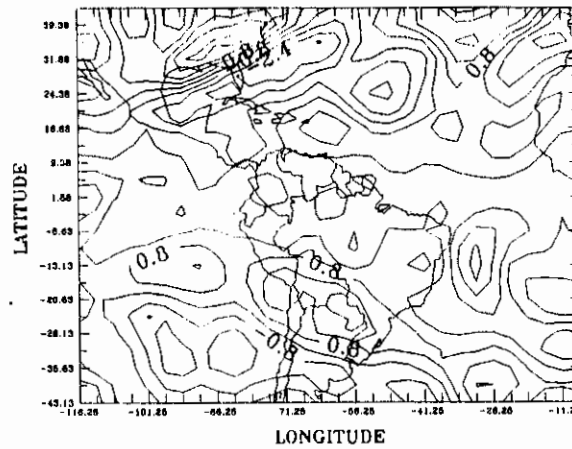


Fig. 3.7 - Campo de vorticidade relativa de entrada, para dados reais. Os contornos vão de  $-3,2 (10^{-5} \text{ s}^{-1})$  a  $3,2 (10^{-5} \text{ s}^{-1})$  com intervalos de  $0,8 (10^{-5} \text{ s}^{-1})$ .

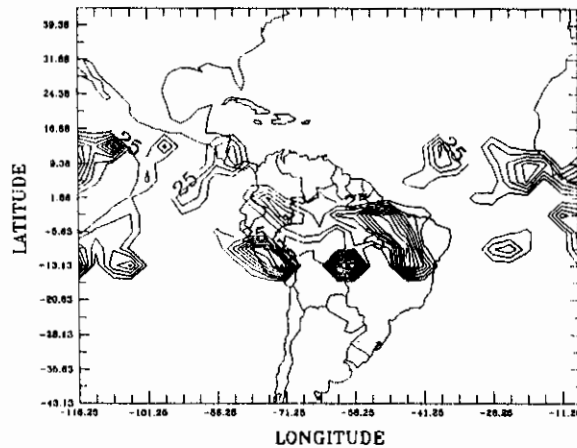


Fig. 3.8 - Campo do forçante parametrizado de entrada, para dados reais. Os contornos vão de  $25 \text{ m.dia}^{-1}$  a  $250 \text{ m.dia}^{-1}$  com intervalos de  $25 \text{ m.dia}^{-1}$ .

### 3.2 - ESQUEMA DE INTEGRAÇÃO NO ESPAÇO

Para a integração numérica das equações do modelo, necessita-se discretizar as variáveis dependentes no espaço e no tempo. A discretização no espaço é feita sobre uma grade justaposta, como da Figura 3.9, também conhecida como grade C de Arakawa. Este tipo de grade serve para simular melhor os processos de ajustamento geostrófico, e a velocidade de fase calculada para as ondas de gravidade é mais precisa (Messinger and Arakawa, 1976). Porém como as componentes  $u$  e  $v$  da velocidade do vento não se encontram sobre o mesmo ponto, existe uma dificuldade ao se tratar o termo da força de Coriolis. Também é necessário calcular as médias das componentes  $u$  e  $v$  do vento para plotagem junto com o geopotencial.

Usando-se condições de contorno artificiais, pode-se facilmente gerar ondas de comprimento igual a dois intervalos de grade, gerando ondas de gravidade dentro do domínio. Quando as ondas de gravidade são excitadas envolvendo as variáveis de uma grade C, como por exemplo o



forçante localizado em um ponto de grade ou numa linha, haverá propagação dessas ondas somente através da subgrade. As variáveis da outra subgrade são influenciadas através do termo de Coriolis e dos termos de advecção em uma escala de tempo muito grande.

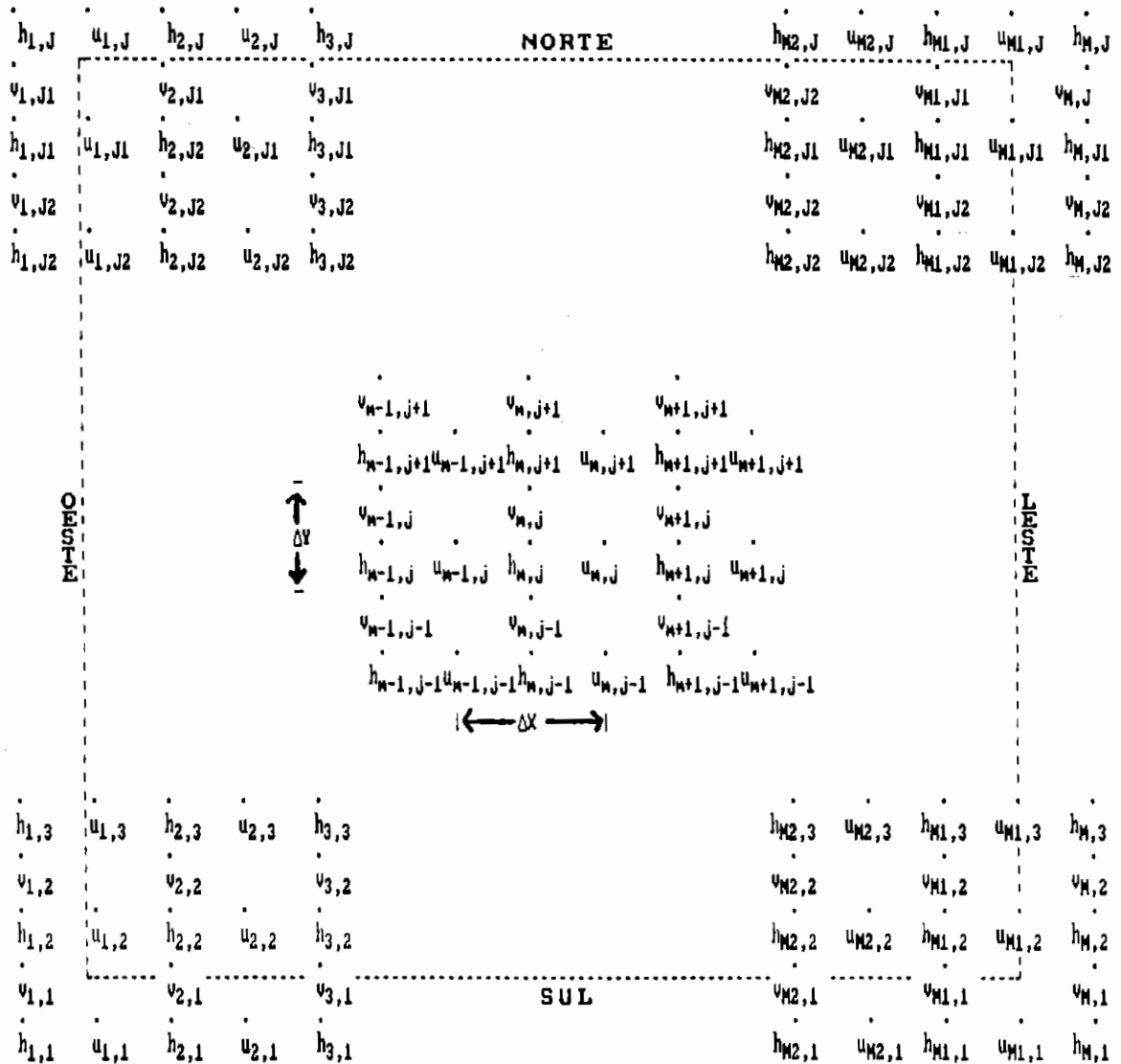


Fig. 3.9 - Representação esquemática da grade C de Arakawa bidimensional

### 3.3 - ESQUEMA DE INTEGRAÇÃO NO TEMPO

Os esquemas utilizados para se discretizar os termos que possuem derivadas no tempo nas equações primitivas são relativamente simples, geralmente de segunda ordem de aproximação, ou até de primeira ordem. Existem algumas razões para isto; uma delas é que os esquemas construídos com ordem de aproximação mais altas, em sua maioria não apresentam muito sucesso na resolução de um conjunto de equações diferenciais parciais. Isto pode contrastar com a experiência, onde esquemas de grande precisão como o método de Range-Kutta, são extremamente compensadores. Existe uma razão básica para isto. Para uma equação diferencial ordinária, uma condição inicial simples é tudo que se necessita para se obter sua solução exata. Assim, o erro da solução numérica é devido ao fato do esquema não ser adequado. No caso de uma equação diferencial parcial, o erro da solução numérica é também devido à insuficiência de informações sobre as condições iniciais, desde que estas são conhecidas somente em pontos discretos o espaço. Assim, aumentando-se a precisão do esquema haverá uma melhora somente em uma dessas componentes, e os resultados não serão tão impressionantes.

Outra razão para não se requerer um esquema de alta ordem de aproximação dos termos com derivadas no tempo, está no fato de se ter que encontrar o critério de estabilidade, o que geralmente é feito escolhendo-se um passo de tempo ligeiramente menor do que o requerido para a aproximação adequada.

Uma vez escolhido o passo de tempo, outros erros de aproximação surgirão, por exemplo, devido à discretização espacial, que são muito maiores do que os devido à diferenciação no tempo. Dessa maneira, o esforço computacional deve ser mais empregado na redução desses

erros de aproximação, e não no refinamento da diferenciação no tempo. Isto não significa que não se deve considerar cuidadosamente as propriedades dos vários esquemas de diferenciação temporal possíveis, onde a precisão pode ser um fator de decisão.

Para diferenciação temporal é escolhido um esquema de três níveis centrado no tempo, também conhecido como esquema "leap-frog". Este esquema exige a disponibilidade simultânea das informações das variáveis em dois níveis de tempo para a avaliação da Equação 3.4

$$u^{n+1} = u^{n-1} + \int_{(n-1)\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u,t) dt \quad . \quad (3.4)$$

Tomando como um valor constante igual à média do intervalo  $2\Delta t$  tem-se

$$u^{n+1} = u^{n-1} + 2\Delta t f(n) \quad . \quad (3.5)$$

Este esquema é condicionalmente estável e seu erro de truncamento é da ordem de  $(\Delta t)^2$  (segunda ordem).

### 3.4 - CRITÉRIO DE ESTABILIDADE LINEAR DO ESQUEMA CENTRADO NO TEMPO

Para se analisar o critério de estabilidade linear do modelo de água rasa utilizado, é necessário tomar as equações na forma linearizada, discretizadas no espaço sobre a grade C e de acordo com o esquema centrado no tempo, como mostrado a seguir:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{f_0}{4} (v_{m,j} + v_{m+1,j} + v_{m,j-1} + v_{m+1,j-1}) +$$

$$+ \frac{g}{\Delta x} (h_{m+1,j} - h_{m,j}) = 0 \quad , \quad (3.6)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{f_0}{4} (u_{m,j} + u_{m,j+1} + u_{m-1,j+1} + u_{m-1,j}) +$$

$$+ g \frac{(h_{m,j+1} - h_{m,j})}{\Delta y} = 0 \quad , \quad (3.7)$$

$$\frac{h^{n+1} - h^{n-1}}{2\Delta t} + H \left[ \frac{(u_{m,j} - u_{m-1,j})}{\Delta x} + \right.$$

$$\left. + \frac{(v_{m,j} - v_{m,j-1})}{\Delta y} \right] = 0 \quad (3.8)$$

Supõe-se que o sistema de equações acima possua a seguinte solução numérica:

$$\begin{pmatrix} u_{m,j} \\ v_{m,j} \\ h_{m,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{h} \end{pmatrix} e^{i(km\Delta x + lj\Delta y - \omega n\Delta t)} \quad . \quad (3.9)$$

Definindo os parâmetros auxiliares

$$f_u = \frac{f_0}{4} (1 + e^{ik\Delta x}) (1 + e^{-il\Delta y}), \quad (3.10)$$

$$k_u = \frac{(eik\Delta x - 1)}{\Delta x}, \quad (3.11)$$

$$l_v = \frac{(eil\Delta y - 1)}{\Delta y}, \quad (3.12)$$

e substituindo as soluções numéricas propostas, chega-se em

$$\begin{pmatrix} \frac{isen \omega \Delta t}{\Delta t} & f_u & -k_u g \\ -f_u^* & \frac{isen \omega \Delta t}{\Delta t} & -l_v g \\ Hk_u^* & Hl_v^* & \frac{isen \omega \Delta t}{\Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} = 0. \quad (3.13)$$

Para que o Sistema 3.13 possua solução não-trivial, é necessário que o determinante da matriz seja nulo, o que implica em

$$\frac{\text{sen}^2 \omega \Delta t}{\Delta t^2} = [ |f_u|^2 + gH (|k_u|^2 + |l_v|^2) ] . \quad (3.14a)$$

Como o valor máximo que  $\text{sen} \omega \Delta t$  atinge é 1, a variação de  $\Delta t$  permitido será:

$$\Delta t \leq [ |f_u|^2 + gH (|k_u|^2 + |l_v|^2) ]^{-1/2} . \quad (3.14b)$$

Para os valores típicos de  $g=9,8 \text{ ms}^{-2}$ ,  $f_0=10^{-4} \text{ s}^{-1}$  e com  $\Delta x$  e  $\Delta y$  correspondentes a  $3,5^\circ$ , pode-se obter o valor do  $\Delta t$  máximo para o menor comprimento de onda que o sistema comporta.

Usando a Equação 3.14 e os valores citados acima, para o caso em que altura equivalente (H) é igual a 250 m, obtém-se  $\Delta t \leq 2978 \text{ s}$  e para 9800 m o  $\Delta t$  deve ser menor ou igual a 475 s.

Os valores de  $\Delta t$  obtidos garantem a estabilidade numérica linear do sistema de equações. Na prática utilizam-se valores pouco menores aos obtidos para se proceder a integração no tempo.

### 3.5 - CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Em modelos de área limitada é importante que se estabeleça uma condição de fronteira que seja matematicamente conveniente e fisicamente consistente. Os valores do contorno devem ser especificados de modo que o problema possa ser resolvido, isto é, a solução dependa continuamente das condições de fronteira. Pequenas variações nos valores da fronteira devem produzir pequenas mudanças na solução.

As condições de contorno laterais podem ser abertas (isto é, as perturbações de mesoescala podem entrar e sair do domínio do modelo) ou fechadas (não é permitida a entrada ou saída de tais perturbações). Existem muitos tipos dessas condições de contorno laterais, algumas são próprias para minimizar a reflexão de informações errôneas que voltam para o domínio do modelo e ainda permitir a entrada de perturbação de escalas maiores para dentro da região.

Neste trabalho usa-se a condição de contorno tipo radiacional nas fronteiras leste e oeste e as condições de Neumann e Dirichlet combinadas nas fronteiras norte e sul.

### 3.5.1 - CONDIÇÃO DE FRONTEIRA RADIACIONAL

Neste procedimento, as variáveis nos contornos laterais são mudadas de valor em cada passo de integração no tempo a fim de minimizar a reflexão das perturbações que estão se propagando para fora, e que voltam para a região de domínio. Diversos processos têm sido introduzidos para se implementar as condições radiacionais, usando para os contornos leste-oeste, a equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.15)$$

onde  $u$  é o vento zonal, tomado como exemplo.

Orlanski (1976) avaliou o valor de  $c$  (velocidade de fase do fluxo médio) na proximidades do último ponto de grade, junto à fronteira, impondo que  $0 \leq c \leq \Delta x / \Delta t$ . Na fronteira leste, por exemplo, da grade C, usando um esquema centrado no espaço e semi-implícito no tempo, o valor de  $c$  é dado por:

$$c = - \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{u_{J_1}^{n+1} - u_{J_1}^{n-1}}{u_{J_1}^{n+1} + u_{J_1}^{n-1} - 2 u_{J_2}^n}. \quad (3.16)$$

Com este valor de  $c$  obtido e com o uso da Equação 3.15, o valor dos pontos situados na fronteira são dados por

$$u_J^{n+1} = \frac{(1 - \tilde{c})}{(1 + \tilde{c})} u_J^{n-1} - \frac{2\tilde{c}}{(1 + \tilde{c})} u_J^n, \quad (3.17)$$

onde  $\tilde{c} = c\Delta t/\Delta x$ . Note-se que no caso em que  $\tilde{c} < 0$ , impõe-se  $\tilde{c} = 0$  e se  $\tilde{c} > 1$  impõe-se  $\tilde{c} = 1$  para garantir a estabilidade e que o escoamento seja na direção para fora da fronteira. Na fronteira oeste o procedimento é análogo, considerando-se apenas que uma onda que chega na fronteira para deixar o domínio possui velocidade de fase negativa.

### 3.5.2 - CONDIÇÃO DE NEUMANN E DIRICHLET

Em uma região fechada na qual se tem a solução de uma equação diferencial, ou um sistema de equações elípticas, pode-se avaliar tal solução conhecendo-se o fluxo normal ao contorno dessa região. Este procedimento é conhecido como condição de Von Neumann. Para a integração numérica das equações da água rasa é fornecido o valor da derivada espacial da variável;

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\text{front}} = \text{constante}. \quad (3.18)$$

No esquema de integração usado e na grade C, tem-se os pontos da fronteira norte dados por

$$u_J^{n+1} = u_{J-1}^{n+1} + (\text{constante}) \cdot \Delta x, \quad (3.19)$$

sendo que para  $u$  e  $h$  esta constante é nula. Para a variável  $v$  usa-se a condição de Dirichlet ( $v = \text{constante}$ )



nos contornos norte e sul. É escolhida esta constante nula, pois como  $v$  é a velocidade normal nestas fronteiras, o modelo não permitirá o transporte de propriedades (nem massa) através desses contornos.



## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados obtidos com a integração do modelo descrito são mostrados nesta seção. A escala de comprimento horizontal do modelo  $[L] = (c_n/\beta)^{1/2}$  pode ser interpretada como o raio de deformação de Rossby  $c_n/\beta$  avaliado em  $y=L_n$ , onde  $c_n$  é a velocidade de fase igual a  $(gH_n)^{1/2}$ ,  $H_n$  a altura equivalente e  $n$  representa o índice de modo vertical (De Maria, 1985). Usando  $H_n=250$  m, obtém-se  $c_n=49,51$  m/s e  $L_y=1,47 \times 10^6$  m, e no caso de  $H_n=9800$  m obtém-se  $c_n=310$  m/s e  $L_y=3,68 \times 10^6$  m. Nota-se que no primeiro caso o raio de deformação de Rossby, que representa a distância efetiva da região de geração até onde o escoamento se estende, é duas vezes e meia menor do que no segundo. Para o primeiro caso o escoamento deve permanecer mais concentrado próximo do equador, e para o segundo caso, de altura equivalente igual a 9800 m o campo resultante deve apresentar um escoamento principal mais amplo, atingindo as latitudes médias.

Para a altura equivalente igual a 9800 m foram feitos testes preliminares que mostram um escoamento mais relevante próximo às fronteiras norte e sul, com os campos de vento e altura na região equatorial não correspondendo bem com os campos respectivos observados. Sendo assim, somente a altura equivalente igual a 250 m é usada no modelo.

#### 4.1 - DADOS SIMULADOS

Nesta seção são discutidos os resultados obtidos com as integrações do modelo usando os dados simulados como entrada. O forçante usado é do tipo parametrizado e a dissipação não está incluída no modelo.

A Figura 4.1 mostra os campos de vento e geopotencial após IDMN. Houve um abaixamento da altura de aproximadamente 10 m em relação aos dados iniciais de entrada (Figura 3.1a), porém os centros de máxima altura estão sobre o ponto máximo do forçante. A diferença entre estas duas figuras é mostrada através da Figura 4.2. Percebe-se que houve uma filtragem nos campos de vento e altura. Nesta última figura o campo de vento predominante aparece cruzando as linhas de altura, indicando que foi filtrado um grupo de ondas de gravidade.

Os campos de vorticidade e divergência após a IDMN são dados pelas Figuras 4.3 e 4.4, respectivamente. O campo de vorticidade não foi muito alterado, em relação ao campo de entrada correspondente (Figura 3.3a). No campo de divergência nota-se uma diminuição dos ruídos e da magnitude no campo, indicando novamente uma filtragem, já que a variação da divergência no tempo gera ondas de gravidade. Com isso, o forçante parametrizado (Figura 4.5) também sofreu uma diminuição em sua intensidade, porém a estrutura espacial permaneceu quase inalterada.

As Figuras 4.6 e 4.7 mostram os campos de vento e geopotencial após um dia de integração, sendo que no primeiro caso houve IDMN e no segundo não. Muitas características importantes podem ser vistas nestas duas figuras.

O centro de alta do campo de desvio de altura que se desenvolveu em resposta ao forçante é deslocado a sudoeste do máximo inicial de forçante, e um cavado surgiu a leste desta alta. Esta configuração é uma manifestação das ondas de Rossby pois a alta é gerada em resposta à fonte de calor e migra para oeste, o que pode ser explicado pela velocidade de grupo das ondas de Rossby. Como as ondas de Rossby são quase não-dispersivas e possuem mais energia

cinética na componente meridional do que na componente zonal do vento (Longuet-Higgins, 1964), faz surgir um escoamento meridional na longitude do máximo forçante.

O escoamento se torna mais geostrófico com o incremento da latitude, em concordância com o aumento do parâmetro de Coriolis e nota-se um forte escoamento trans-equatorial, com curvatura anticiclônica no hemisfério norte, próximo de 48o W.

Ventos de oeste se desenvolveram ao longo do equador com máxima velocidade em aproximadamente 35°W e com máximo de altura levemente deslocado para o hemisfério norte. Este escoamento que se propaga para leste (Figuras 4.6 e 4.7), está associado com a contribuição da onda de Kelvin, que se propaga rapidamente como um grupo de onda quase não dispersivo. A ligeira característica dispersiva (alongamento) desse grupo de onda se deve à contínua geração dessas ondas pela atividade do forçante.

As ondas mista de Rossby-gravidade têm velocidade de fase para oeste, mas propagam energia para leste, com um aumento do geopotencial e dos ventos máximos. O escoamento noroeste no equador, entre 2° N e 20° S e a baixa de altura próxima de 20° S com 33° W (Figuras 4.6 e 4.7) estão associados com a presença das ondas mista de Rossby-gravidade. A formação do cavado a leste do anticiclone sobre a Bolívia também é causado pela dispersão para leste das ondas curtas de Rossby.

Algumas diferenças podem ser notadas entre os campos integrados com e sem IDMN. A estrutura de ambos para o vento e o desvio de altura não mudou drasticamente, conservando as principais características da circulação já citadas. A Figura 4.8 mostra a diferença entre os dois casos após um dia de integração. Nas proximidades da

fronteira oeste há um intenso vento de leste cruzando as linhas de altura, o que indica a filtragem das ondas curtas de Kelvin que se propagam nesta região.

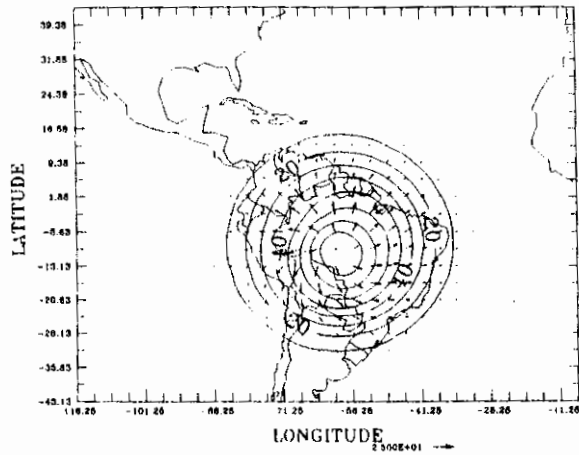


Fig. 4.1 - Campo do desvio de altura (m) e do vento ( $\text{ms}^{-1}$ ) para dados simulados após IDMN. Contornos e 10 m a 90m e intervalos de 10 m. A seta de referência representa o módulo de  $25 \text{ ms}^{-1}$ .

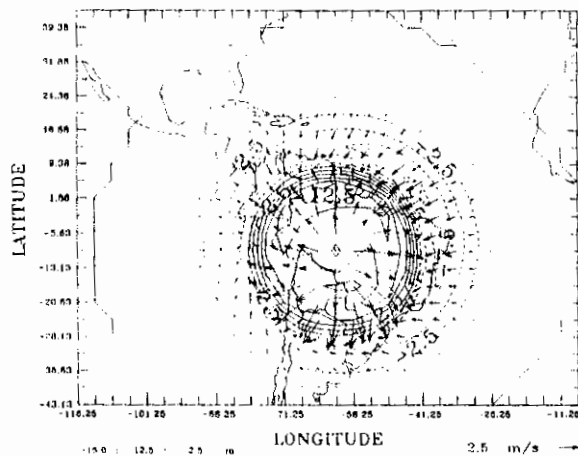


Fig. 4.2 - Campo da diferença entre a entrada e a iniciação para o desvio de altura (m) e o vento ( $\text{ms}^{-1}$ ) dos dados simulados. Contornos de -15 m a 12,5m e intervalos de 2,5m. A seta de referência representa o módulo de  $2,5 \text{ ms}^{-1}$ .

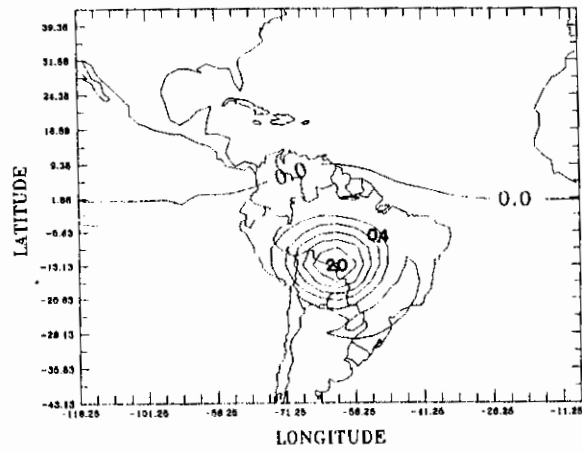


Fig. 4.3 - Campo de vorticidade relativa ( $\bar{s}^{-1}$ ) após IDMN para dados simulados. Contornos de  $-0,4 \text{ s}^{-1}$  a  $2,0 \text{ s}^{-1}$  e intervalos de  $0,4 \text{ s}^{-1}$ . Os valores estão multiplicados por  $10^5$ .

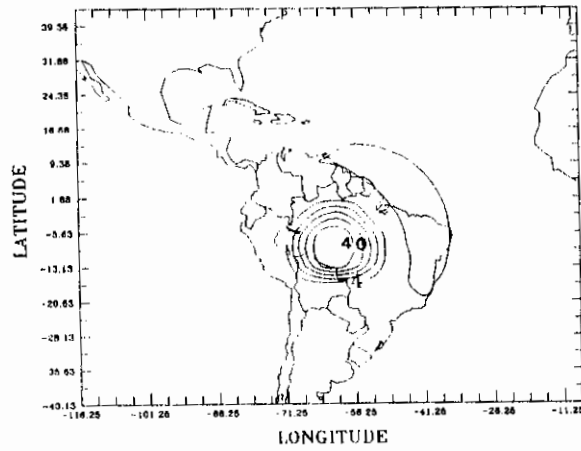


Fig. 4.4 - Campo de divergência ( $\bar{s}^{-1}$ ) para dados simulados após IDMN. Contornos de  $-4 \text{ s}^{-1}$  a  $40 \text{ s}^{-1}$  e intervalos de  $8 \text{ s}^{-1}$ . Os valores estão multiplicados por  $10^6$ .

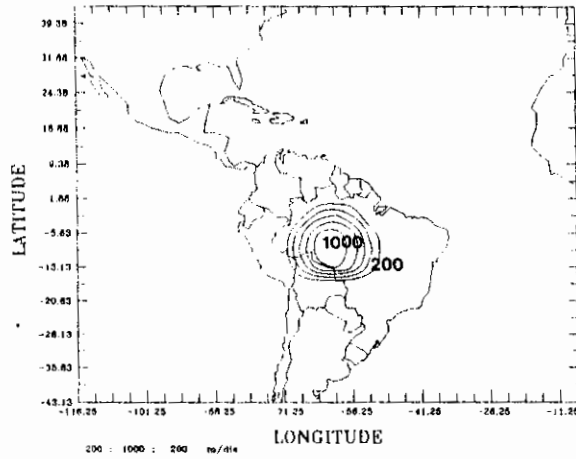


Fig. 4.5 - Campo do forçante parametrizado para dados simulados após IDMN. Contornos de  $200 \text{ m.dia}^{-1}$  a  $1000 \text{ m.dia}^{-1}$  com intervalos de  $200 \text{ m.dia}^{-1}$ .

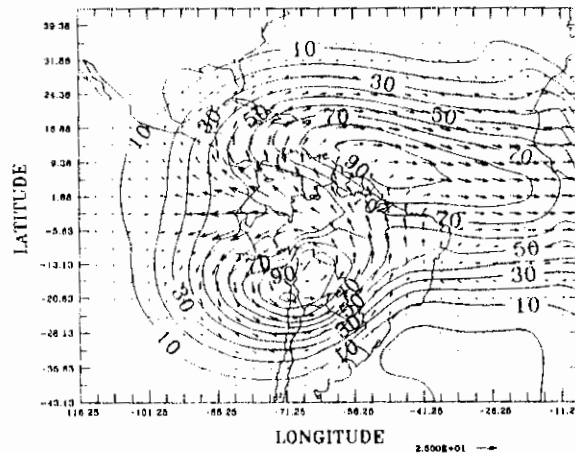


Fig. 4.6 - Campo do desvio de altura (m) e do vento ( $\text{ms}^{-1}$ ) para dados simulados após 1 dia de integração com IDMN. Contornos de 0 m a 100m e intervalos de 10 m. A seta de referência representa o módulo de  $25 \text{ ms}^{-1}$ .



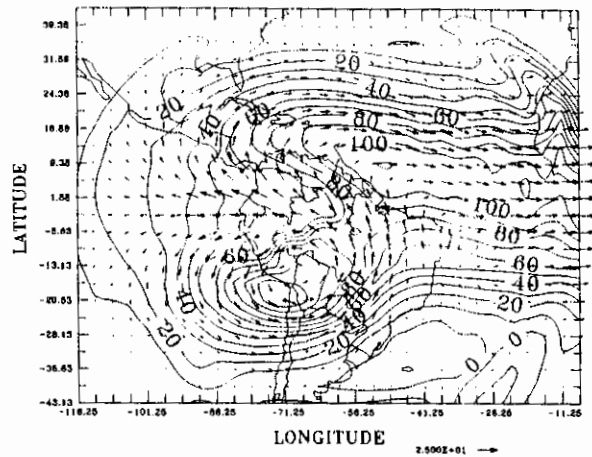


Fig. 4.7 - Campo do desvio de altura (m) e do vento ( $\text{ms}^{-1}$ ) para dados simulados após 1 dia de integração sem iniciação. Contornos de -10 m a 100m e intervalos de 10 m. A seta de referência representa o módulo de  $25 \text{ ms}^{-1}$ .

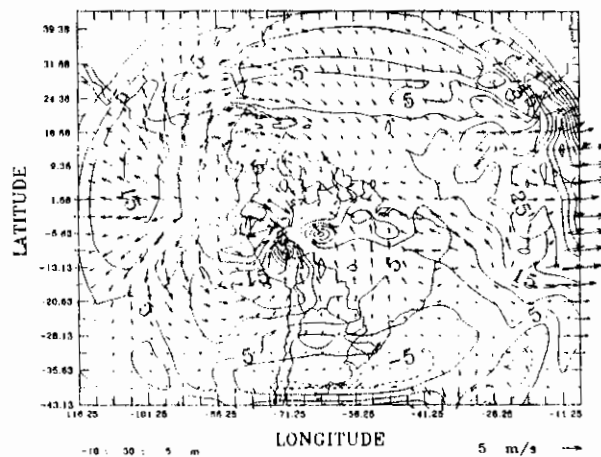


Fig. 4.8 - Campo da diferença entre a integração com e sem iniciação após 1 dia para o desvio de altura (m) e o vento ( $\text{ms}^{-1}$ ) para dados simulados. Contornos de -10 m a 30m e intervalos de 5 m. A seta de referência representa o módulo de  $5 \text{ ms}^{-1}$ .

Na parte inferior da Figura 4.8, em  $26^\circ \text{ W}$  e  $56^\circ \text{ S}$  houve uma filtragem de uma zona de baixa. Dois pequenos vórtices também aparecem em  $70^\circ \text{ W}$  com  $8^\circ \text{ S}$ . Estes

estão associados com as ondas de Kelvin geradas pela atuação do forçante. Na parte superior também há filtragem de um campo de vento de norte cruzando as linhas de desvio de altura, o mesmo acontecimento próximo à fronteira leste com os ventos de oeste.

As Figuras 4.9 e 4.10 são os campos de vorticidade relativa após um dia de integração, para os casos com IDMN e sem IDMN, respectivamente. A circulação anticiclônica relatada anteriormente é confirmada por estas figuras, evidenciada pelo centro de vorticidade positiva sobre a região da Bolívia. Na costa nordeste do Brasil, nota-se um pequeno centro de vorticidade negativa, portanto com circulação ciclônica. Logo acima do equador aparece um centro de vorticidade negativa (anticiclônica), um pouco mais fechado no caso sem iniciação (Figura 4.10). Os campos de divergência após um dia com e sem IDMN são dados pelas Figuras 4.11 e 4.12, respectivamente.

Pode-se notar uma zona de convergência em torno do equador e outra nas proximidades da fronteira leste, sendo que estes campos de convergência são menos intensos no caso com IDMN (Figura 4.11). Em ambos os casos nota-se ainda mais duas zonas de forte convergência. Uma delas está em  $13^{\circ}$  S e  $35^{\circ}$  W e a outra, mais importante está à noroeste do campo do forçante inicial. Devido a essa configuração dos campos de divergência, os campos do forçante (Figuras 4.13 e 4.14) possuem estruturas semelhantes, porém mais concentradas na proximidades do equador.

O braço que se estende do continente para o oceano poderia estar relacionado com a zona de convergência da América do Sul (ZCAS).

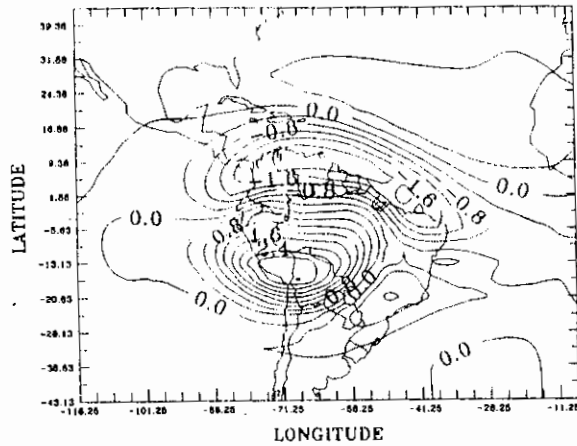


Fig. 4.9 - Campo de vorticidade relativa ( $\bar{s}^1$ ), após 1 dia com IDMN para dados simulados. Contornos de  $-2,0 \text{ s}^{-1}$  a  $3,6 \text{ s}^{-1}$  e intervalos de  $0,4 \text{ s}^{-1}$ . Os valores estão multiplicados por  $10^5$ .

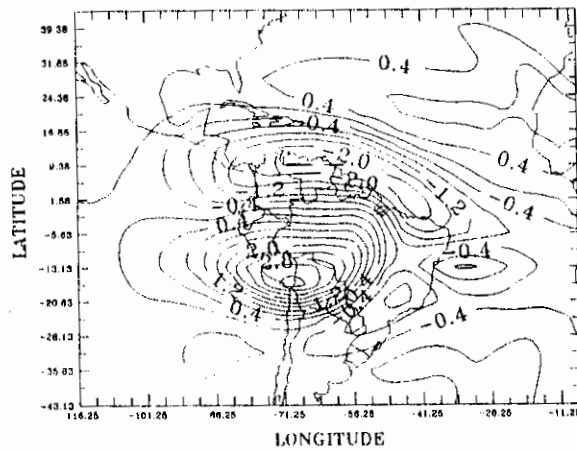


Fig. 4.10 - Campo de vorticidade relativa ( $\bar{s}^1$ ), após 1 dia sem IDMN para dados simulados. Contornos de  $-2,4 \text{ s}^{-1}$  a  $3,2 \text{ s}^{-1}$  e intervalos de  $0,4 \text{ s}^{-1}$ . Os valores estão multiplicados por  $10^5$ .

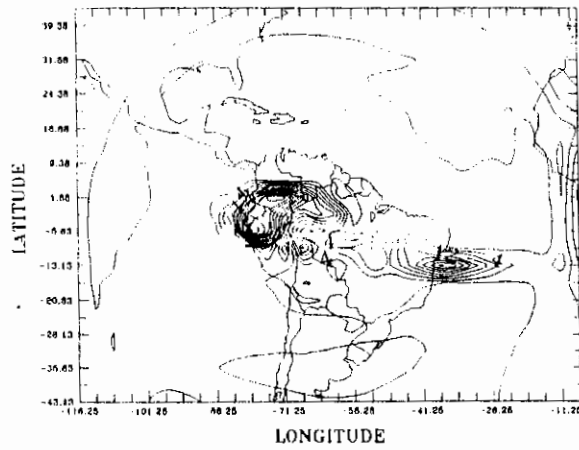


Fig. 4.11 - Campo de divergência ( $\bar{s}^1$ ) para dados simulados após 1 dia com iniciação. Contornos de  $-8 \text{ s}^{-1}$  a  $56 \text{ s}^{-1}$  e intervalos de  $4 \text{ s}^{-1}$ . Os valores estão multiplicados por  $10^6$ .

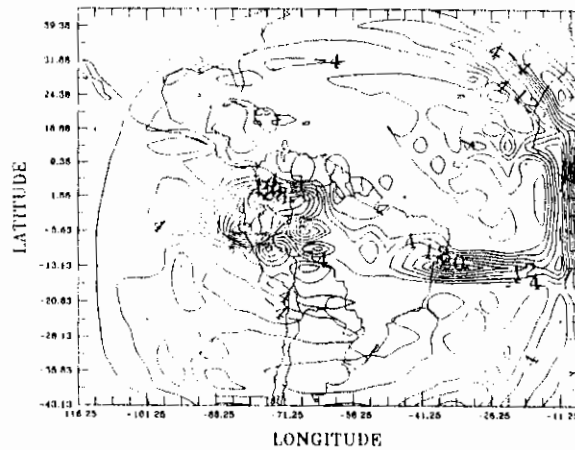


Fig. 4.12 - Campo de divergência ( $\bar{s}^1$ ) para dados simulados após 1 dia sem iniciação. Contornos de  $-16 \text{ s}^{-1}$  a  $36 \text{ s}^{-1}$  e intervalos de  $4 \text{ s}^{-1}$ . Os valores estão multiplicados por  $10^6$ .

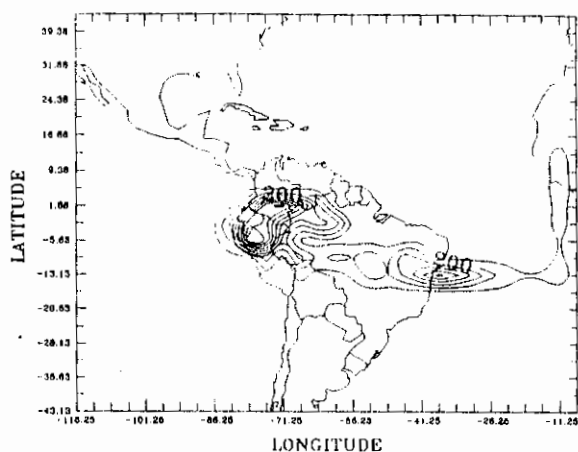


Fig. 4.13 - Campo do forçante parametrizado para dados simulados após 1 dia de integração com IDMN. Contornos de  $50 \text{ m.dia}^{-1}$  a  $1250 \text{ m.dia}^{-1}$  com intervalos de  $150 \text{ m.dia}^{-1}$ .

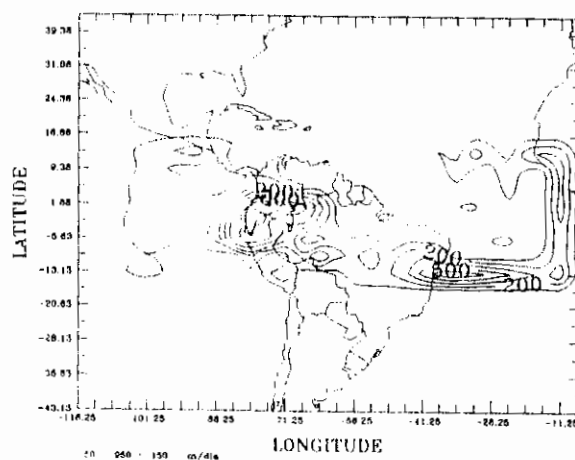


Fig. 4.14 - Campo do forçante parametrizado para dados simulados após 1 dia de integração sem IDMN. Contornos de  $50 \text{ m.dia}^{-1}$  a  $950 \text{ m.dia}^{-1}$  com intervalos de  $150 \text{ m.dia}^{-1}$ .

As variações temporais da divergência nos pontos de grade A, B, C, D, E, F e G (ver Figura 3.4a) podem ser vistos através das Figuras 4.15a à 4.15g, respectivamente.

Como os pontos A e G estão localizados mais próximos das fronteiras, há um intervalo de tempo maior para que estes manifestem a passagem dos grupos de onda. Por isso, até aproximadamente 12 horas se mantêm constantes, e daí começam a variar suas magnitudes. Para estes dois casos, observa-se que quando houve IDMN a oscilação foi menor. Com os demais pontos localizados nas proximidades do forçante (pontos B,C,D e E), e no centro da grade (ponto F), está clara a diferença entre os casos iniciado e não-iniciado, não só em termos de oscilação no tempo, mas também com relação à amplitude, que é muito maior no caso não-iniciado devido à filtragem das ondas de gravidade pela IDMN.

As Figuras 4.16a a 4.16d dão a evolução temporal da energia cinética, energia potencial, energia total e "massa" do sistema, respectivamente, durante a integração do modelo com e sem IDMN. Como este modelo possui condições de fronteiras abertas e fonte de massa, não há conservação de energia nem de massa. No caso com IDMN, as energia cinética, potencial e total e a massa possuem amplitudes menores, devido a eliminação de parte da energia contida nos grupos de onda de gravidade.

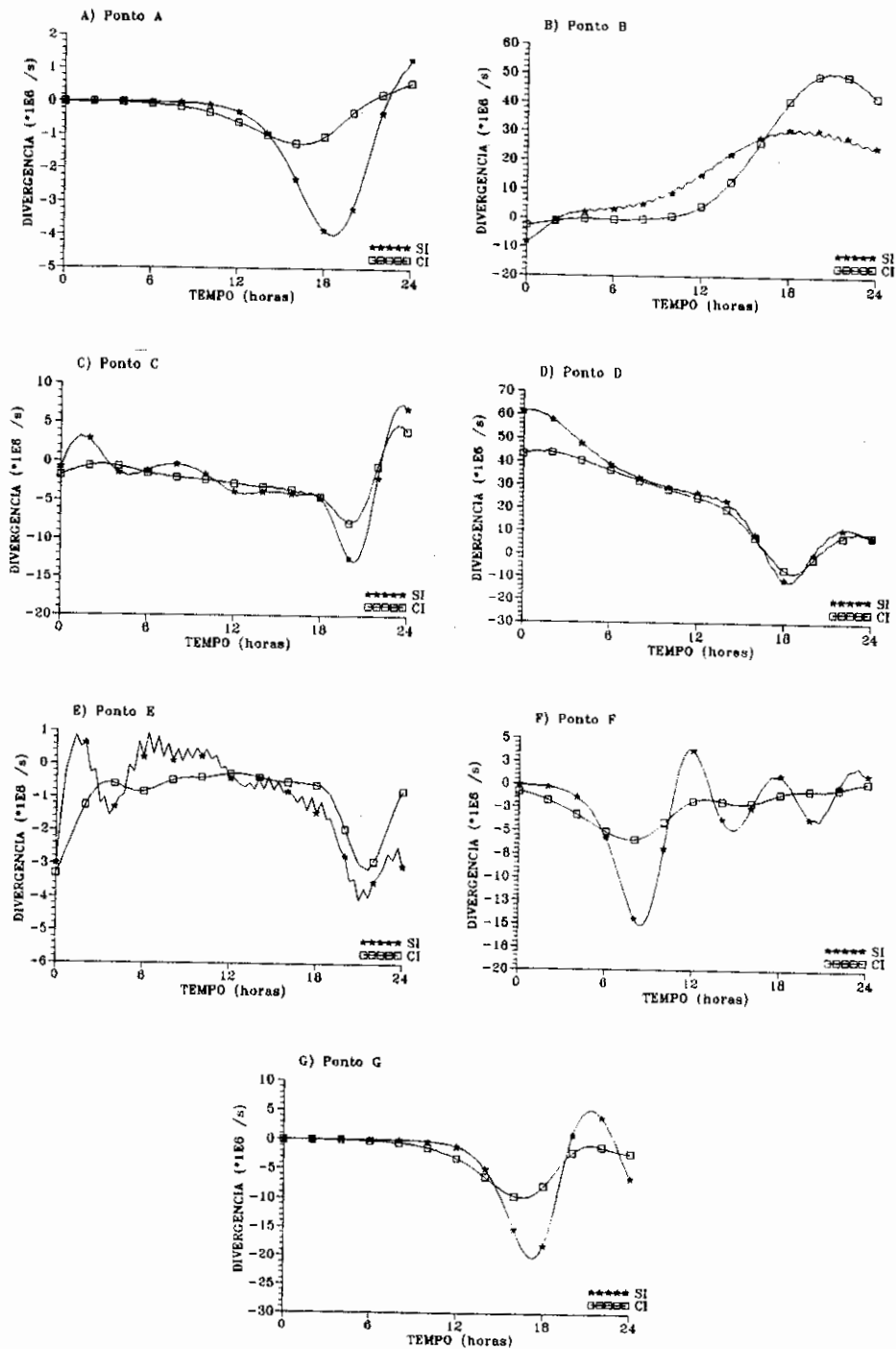


Fig. 4.15 - Variação temporal da divergência ( $\bar{s}^{-1}$ ) sobre os pontos (a) A, (b) B, (c) C, (d) D, (e) E, (f) F e (g) G para o modelo usando dados simulados.

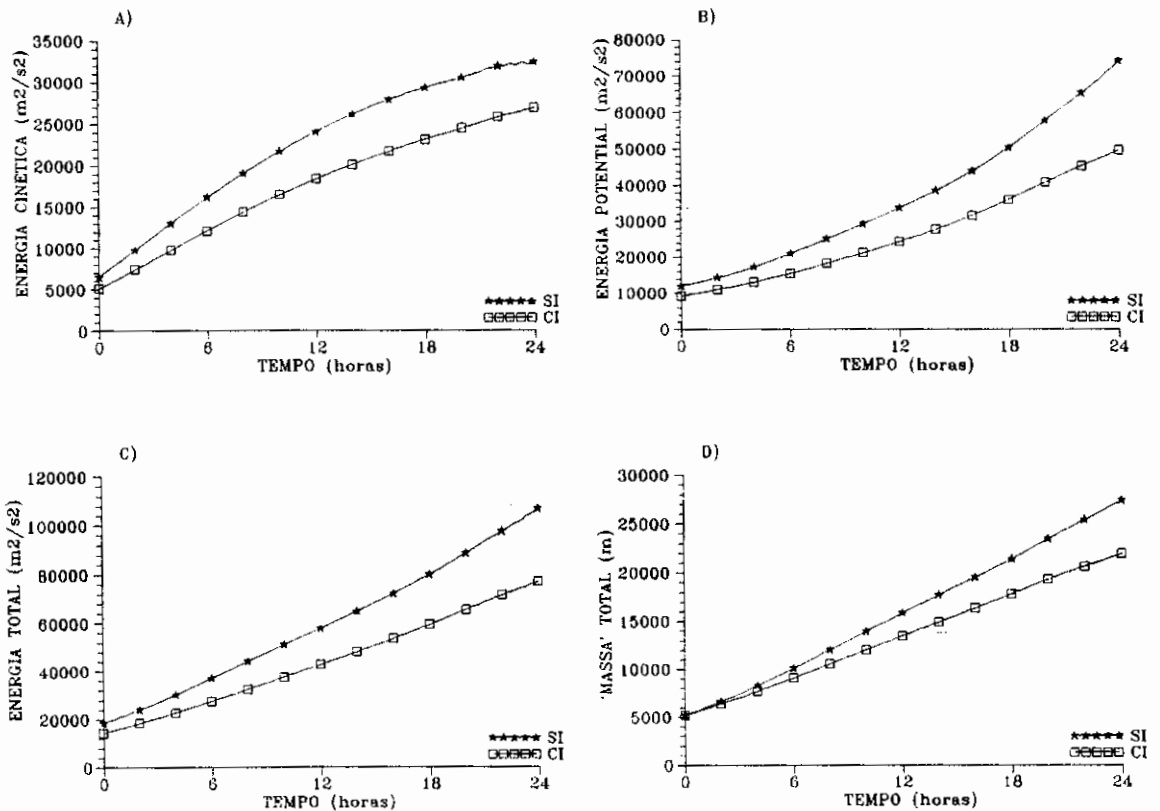


Fig. 4.16 - Variação temporal da (a) Energia cinética ( $m^2s^{-2}$ ), (b) Energia potencial ( $m^2s^{-2}$ ), (c) Energia total ( $m^2/s^{-2}$ ) e (d) 'massa' (m) para o modelo usando dados simulados.

#### 4.2 - DADOS REAIS

Os resultados obtidos com as integrações do modelo usando-se dados reais são mostrados nesta seção. Estão incluídos neste caso além do forçante parametrizado, a dissipação por atrito descrita anteriormente na Seção 3.1.

A Figura 4.17 mostra o campo inicial de entrada após a IDMN. Destacam-se as principais características sinóticas na região equatorial sobre a América do Sul: a circulação anticiclônica sobre a Bolívia, o cavado sobre a costa nordeste do Brasil. Também é notada



a presença dos jatos subtropicais do hemisfério norte e hemisfério sul.

Percebe-se que a alta da Bolívia se tornou mais alongada e inclinada na direção noroeste-sudeste após a IDMN. A Figura 4.18 mostra a diferença entre os campos de desvio de altura e vento de entrada com o iniciado.

Próximo à fronteira norte houve filtragem de um escoamento na direção meridional, associado com o jato existente próximo àquela região. Nota-se uma filtragem semelhante na fronteira sul, próximo de  $30^{\circ}$  W. Isto está relacionado com o efeito da IDMN através da forte dissipação colocada nas proximidades destas fronteiras.

Houve remoção de alguns centros de alta e baixa de desvio de altura, devendo ser destacados os centros localizados sobre a costa nordeste do Brasil e próximo de  $71^{\circ}$  W com  $20^{\circ}$  S. Isto significa que a iniciação espalhou a alta da Bolívia e concentrou o cavado do nordeste do Brasil. Os campos de vorticidade e divergência após a IDMN são dados pelas Figuras 4.19 e 4.20, respectivamente. O campo de vorticidade iniciado (Figura 4.19) está em concordância com as características da circulação descritas anteriormente, possuindo um centro de vorticidade positiva próximo de  $71^{\circ}$  W com  $20^{\circ}$  S.

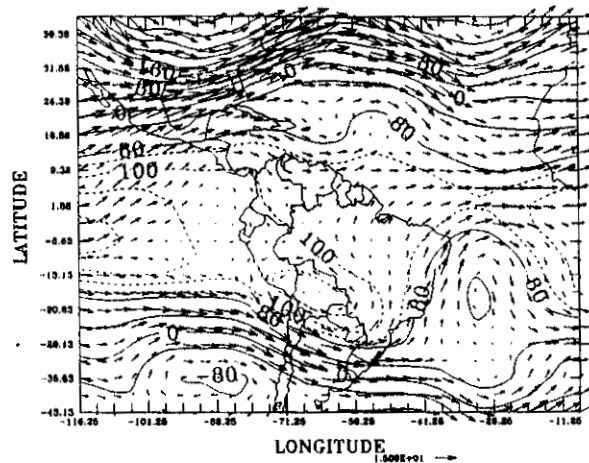


Fig. 4.17 - Campo do desvio de altura (m) e do vento ( $\text{ms}^{-1}$ ) para dados reais após IDMN. Contornos de -240 m a 80m e intervalos de 10 m (linhas sólidas), 90 m a 120 m com intervalos de 10 m (linhas pontilhada). A seta de referência representa o módulo de  $15 \text{ ms}^{-1}$ .

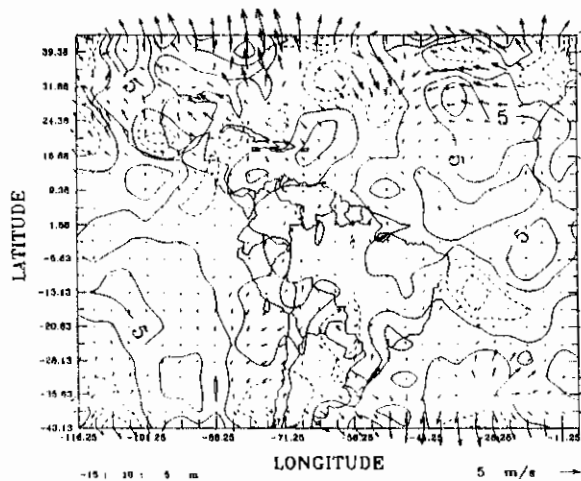


Fig. 4.18 - Campo da diferença entre a entrada e a iniciação para o desvio de altura (m) e o vento ( $\text{ms}^{-1}$ ) dos dados reais. Contornos de -15 m a 10,5m e intervalos de 5 m. A seta de referência representa o módulo de  $5 \text{ ms}^{-1}$ .

Na Figura 4.19 há um centro de vorticidade negativa importante, que está sobre o oceano Atlântico em

$25^{\circ}$  W com  $13^{\circ}$  S, representando uma baixa próximo à costa nordeste do Brasil. Comparando o campo de vorticidade de entrada (Figura 3.3b) com o iniciado (Figura 4.19), nota-se que este último se apresenta com um pouco menos de ruídos do que o primeiro, principalmente nas regiões próximas às fronteiras norte e sul. Não houve maiores mudanças porque a circulação associada ao campo de vento também manteve sua estrutura bem próxima da inicial.

O campo de divergência iniciado (Figura 4.20) mostra um pequeno centro positivo próximo de  $45^{\circ}$  W com  $13^{\circ}$  S, relacionado com o escoamento meridional de sul que ocorre nesta região. Outros centros com forte atividade divergente se encontram na fronteira norte, relacionados com a presença da fronteira do modelo que aí se encontra.

Comparando o campo de divergência iniciado (Figura 4.20) com o campo de entrada (Figura 3.2b) pode-se perceber claramente a eliminação de vários centros de divergência pequenos, eliminando assim possíveis fontes geradoras de ruídos (ondas de gravidade) quando da integração do modelo. Como o campo do forçante parametrizado é diretamente proporcional à divergência positiva, este se apresenta com uma atividade intensa ao centro e norte do Brasil (Figura 4.21), concordando com a simulação da atividade convectiva nesta região. Comparando este com o campo de entrada (Figura 3.4b) observa-se que após a iniciação, houve uma maior concentração da atividade do forçante no centro e norte do Brasil.

Após a integração de um dia do modelo com os dados reais (Figuras 4.22 e 4.23) observa-se que as características principais da circulação em altos níveis do verão tropical foram preservadas.

O anticiclone sobre a Bolívia tende a se deslocar para oeste, talvez devido à não inclusão da topografia. O jato subtropical do hemisfério norte foi desintensificado nas proximidades desta fronteira, através da atuação da dissipação, enquanto na fronteira sul, próximo de  $26^{\circ}$  W o jato perdeu quase todas as suas características. Esta descontinuidade da corrente de jato do hemisfério sul ocorreu também devido à dissipação colocada próxima à fronteira.

O escoamento trans-equatorial próximo de  $40^{\circ}$  W deixou de existir, passando a ser um escoamento zonal devido à propagação do grupo de onda de Kelvin, ao norte do cavado do nordeste do Brasil. Nota-se que o centro deste cavado foi deslocado mais para o sul, relacionado com a passagem da onda de Kelvin, que estaria dominando neste momento. A partir desta passagem, a contribuição da onda mista de Rosby-gravidade voltaria a dominar, deslocando novamente o centro do cavado mais para o norte.

A Figura 4.24 mostra a diferença entre os campos de vento e desvio de altura após a integração com e sem IDMN. A complexidade na sua aparência sugere que houve uma filtragem de ondas espúrias ao modelo. O campo de vento nas proximidades da fronteira norte se modificou devido a dissipação que atuou sobre a corrente de jato. Próximo de  $11^{\circ}$  N com  $41^{\circ}$  W o campo de vento foi alterado, devido à geração da onda de Kelvin que possui grande velocidade de fase. Na faixa entre  $26^{\circ}$  W a  $71^{\circ}$  W com  $20^{\circ}$  S, houve modificação na estrutura do vento devido ao deslocamento para sul do centro do cavado do nordeste brasileiro, à desintensificação da saída do jato subtropical do hemisfério sul e também devido ao enfraquecimento do escoamento trans-equatorial que havia nas proximidades.

Nos campos de vorticidade relativa (Figuras 4.25 e 4.26) nota-se a separação da alta da Bolívia em duas partes, com a formação de um centro mais para oeste, devido à propagação da onda de Rossby e talvez também pela não inclusão de topografia no modelo.

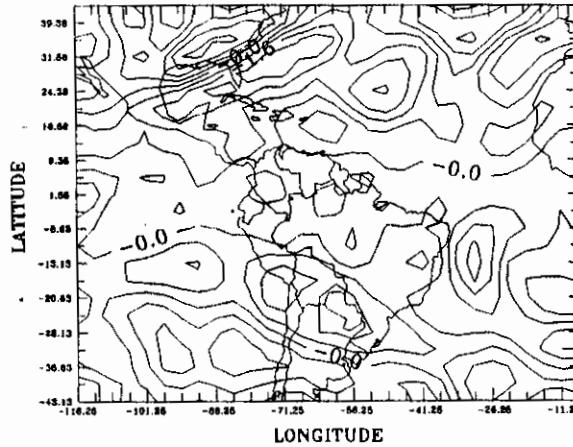


Fig. 4.19 - Campo de vorticidade relativa ( $\bar{s}^1$ ) após IDMN para dados reais. Contornos de  $-2,4 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$  a  $3,2 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$  e intervalos de  $0,8 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ .

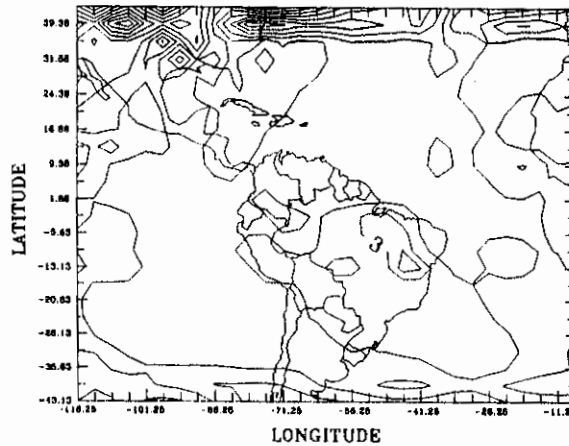


Fig. 4.20 - Campo de divergência ( $\bar{s}^1$ ) para dados reais após IDMN. Contornos de  $-18 \text{ s}^{-1}$  a  $9 \text{ s}^{-1}$  e intervalos de  $3 \text{ s}^{-1}$ . Os valores estão multiplicados por  $10^6$ .

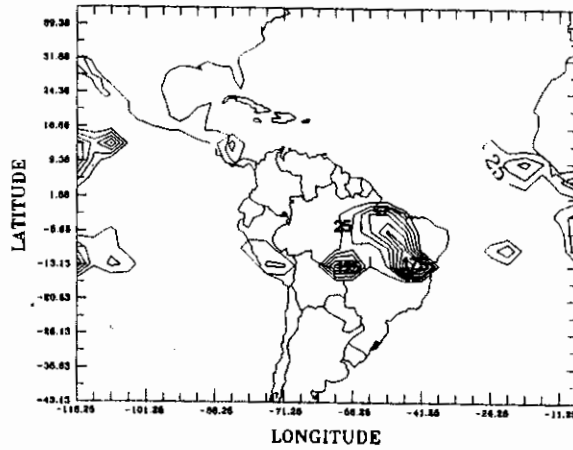


Fig. 4.21 - Campo do forçante parametrizado para dados reais após IDMN. Contornos de  $25 \text{ m.dia}^{-1}$  a  $175 \text{ m.dia}^{-1}$  com intervalos de  $25 \text{ m.dia}^{-1}$ .

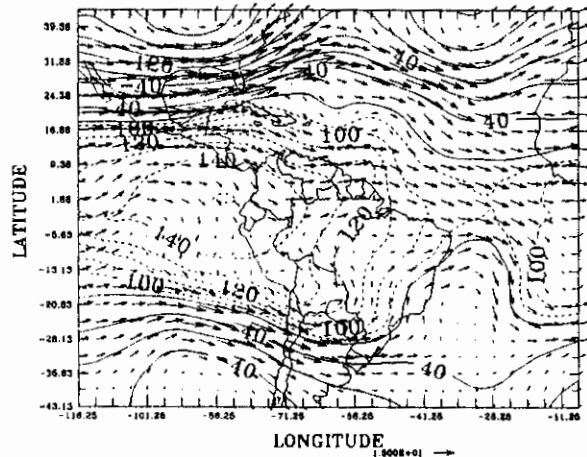


Fig. 4.22 - Campo do desvio de altura (m) e do vento ( $\text{ms}^{-1}$ ) para dados reais após 1 dia de integração com IDMN. Contornos de  $-240 \text{ m}$  a  $80 \text{ m}$  e intervalos de  $40 \text{ m}$  (linhas sólidas),  $90 \text{ m}$  a  $150 \text{ m}$  com intervalos de  $10 \text{ m}$  (linhas pontilhadas). A seta de referência representa o módulo de  $15 \text{ ms}^{-1}$ .

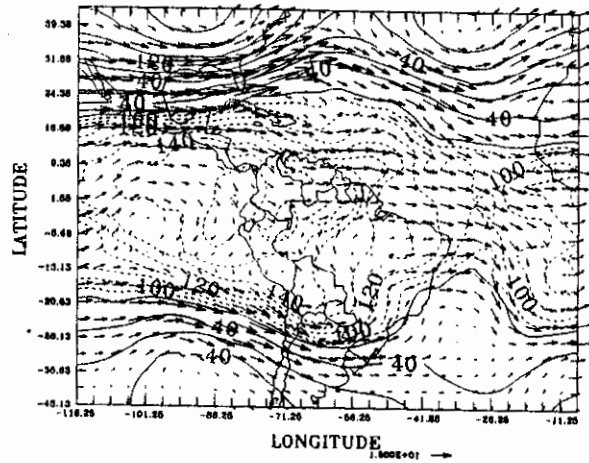


Fig. 4.23 - Campo do desvio de altura (m) e do vento ( $\text{ms}^{-1}$ ) para dados reais após 1 dia de integração sem iniciação. Contornos de -240 m a 80m e intervalos de 40 m (linhas sólidas), 90 m a 160 m com intervalos de 10 m (linhas pontilhadas). A seta de referência representa o módulo de  $15 \text{ ms}^{-1}$ .

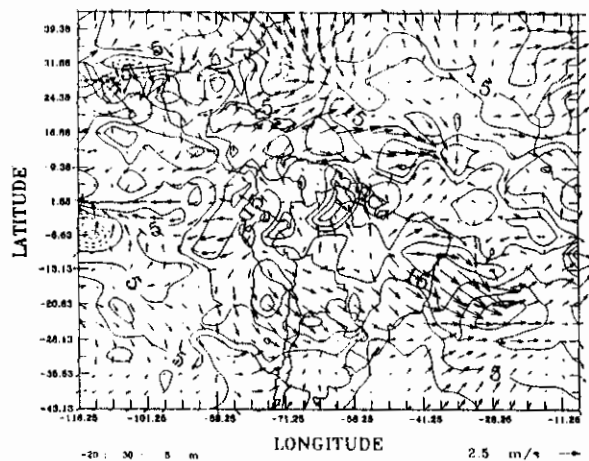


Fig. 4.24 - Campo da diferença entre a integração com e sem iniciação após 1 dia para o desvio de altura (m) e o vento ( $\text{ms}^{-1}$ ) para dados reais. Contornos de -20 m a 30m e intervalos de 5 m. A seta de referência representa o módulo de  $2,5 \text{ ms}^{-1}$ .

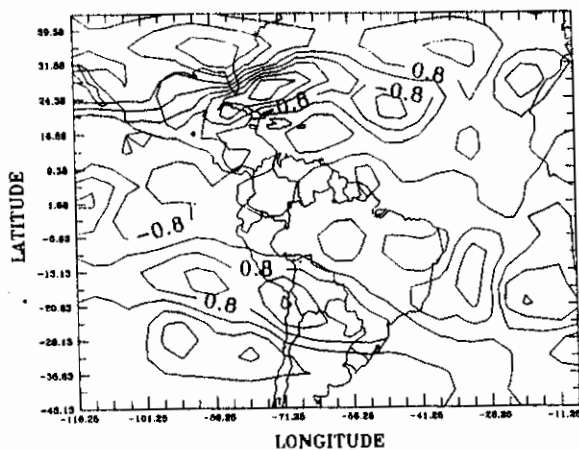


Fig. 4.25 - Campo de vorticidade relativa ( $\bar{s}^1$ ), após 1 dia com IDMN para dados reais. Contornos de  $-3,2s^{-1}$  a  $32,4 s^{-1}$  e intervalos de  $0,8 s^{-1}$ . Os valores estão multiplicados por  $10^5$ .

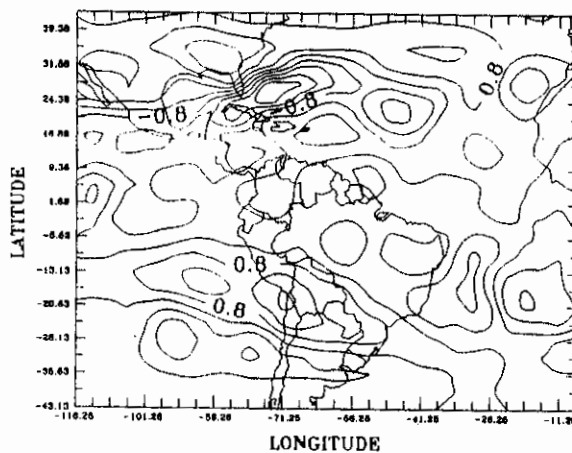


Fig. 4.26 - Campo de vorticidade relativa ( $\bar{s}^1$ ), após 1 dia sem IDMN para dados reais. Contornos de  $-3,2s^{-1}$  a  $2,4 s^{-1}$  e intervalos de  $0,8 s^{-1}$ . Os valores estão multiplicados por  $10^5$ .

Pode-se notar através das Figuras 4.27 e 4.28 que o campo de divergência integrado com IDMN se apresenta mais limpo, indicando que houve uma boa filtragem das ondas curtas e rápidas.



Após um dia de integração nota-se que o campo do forçante para o caso iniciado, dado pela Figura 4.29, possui dois focos de atuação importantes localizado sobre o Brasil central com atividade mais reduzida, causada pela divergência. Além deste dois focos, no caso sem iniciação (Figura 4.30) observa-se outros mais ao norte com atividade bastante intensa ainda.

Os pontos isolados onde foi estudada a evolução da divergência no tempo são dados pelas Figuras 4.31a a 4.31g. Nota-se claramente que no caso com iniciação, a variação da divergência com o tempo foi muito pouca, para os pontos B, C, D, E, F e G. Mesmo para o ponto A, as oscilações foram menores no caso iniciado. Como a tendência da divergência provoca ondas de gravidade, nota-se que a iniciação fez com que a geração dessas ondas durante o período de integração fosse bastante reduzida.

A energia cinética, potencial e total do modelo, dadas pelas Figuras 4.32a, 4.32b e 4.32c, respectivamente, sofreram um decaimento no tempo ao longo de um dia de integração. Nota-se que todos esses tipos de energia do modelo indicam uma tendência para um valor constante, para o caso que houve iniciação. Na energia total para o caso em que não houve iniciação, ao fim de um dia de integração, há indícios de que recomeçará um novo crescimento. Este fato está relacionado com a energia contida nas ondas de gravidade, que são amortecidas durante a IDMN. O decréscimo das energias durante um longo período de tempo, é devido à forte dissipação contida próximo às fronteiras norte e sul e pelo fato do modelo possuir condições de fronteira do tipo aberta, favorecendo a passagem de ondas para fora do domínio. A variação da "massa" total do modelo, mostrada na Figura 4.32d se apresenta com crescimento quase linear com o tempo, devido à presença de uma fonte no campo de desvio de altura.

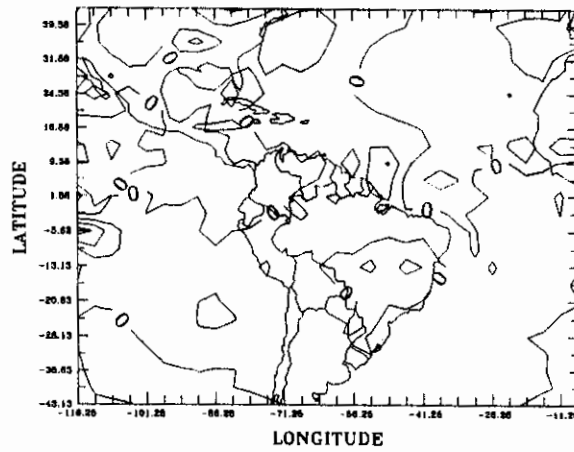


Fig. 4.27 - Campo de divergência ( $\bar{s}^1$ ) para dados reais após 1 dia com iniciação. Contornos de  $-9 \text{ s}^{-1}$  a  $3 \text{ s}^{-1}$  e intervalos de  $3 \text{ s}^{-1}$ . Os valores estão multiplicados por  $10^6$ .

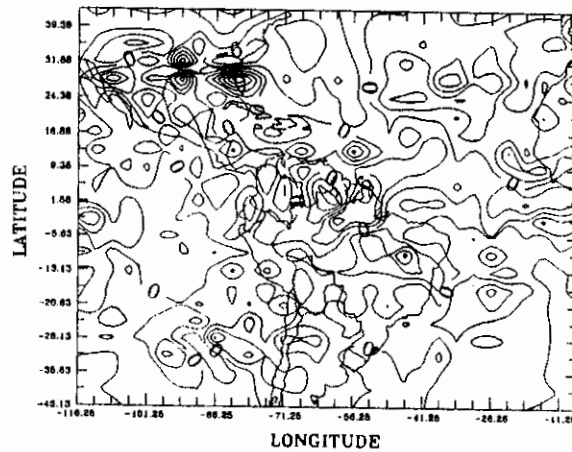


Fig. 4.28 - Campo de divergência ( $\bar{s}^1$ ) para dados reais após 1 dia sem iniciação. Contornos de  $-15 \text{ s}^{-1}$  a  $15 \text{ s}^{-1}$  e intervalos de  $3 \text{ s}^{-1}$ . Os valores estão multiplicados por  $10^6$ .

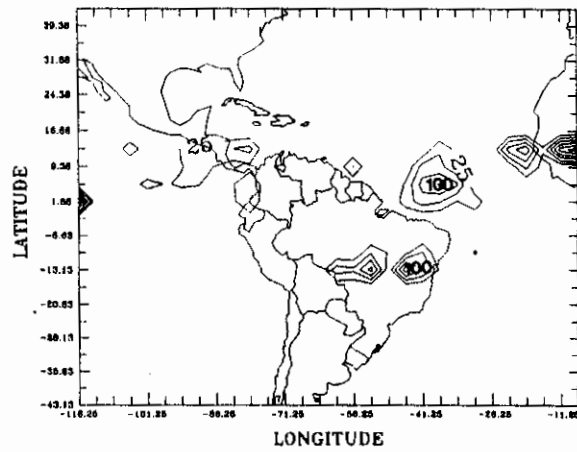


Fig. 4.29 - Campo do forçante parametrizado para dados reais após 1 dia de integração com IDMN. Contornos de  $25 \text{ m.day}^{-1}$  a  $150 \text{ m.day}^{-1}$  com intervalos de  $25 \text{ m.day}^{-1}$ .

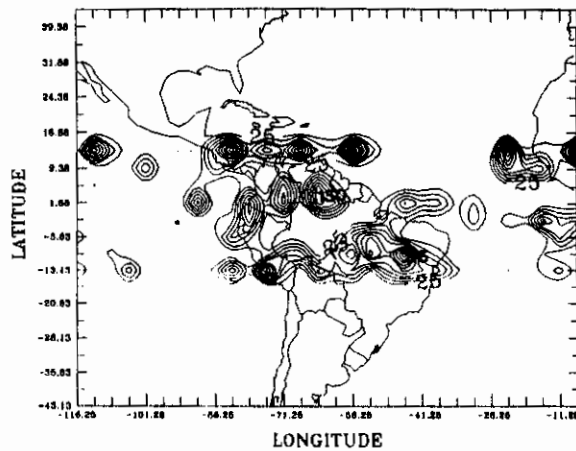


Fig. 4.30 - Campo do forçante parametrizado para dados reais após 1 dia de integração sem IDMN. Contornos de  $25 \text{ m.day}^{-1}$  a  $275 \text{ m.day}^{-1}$  com intervalos de  $25 \text{ m.day}^{-1}$ .

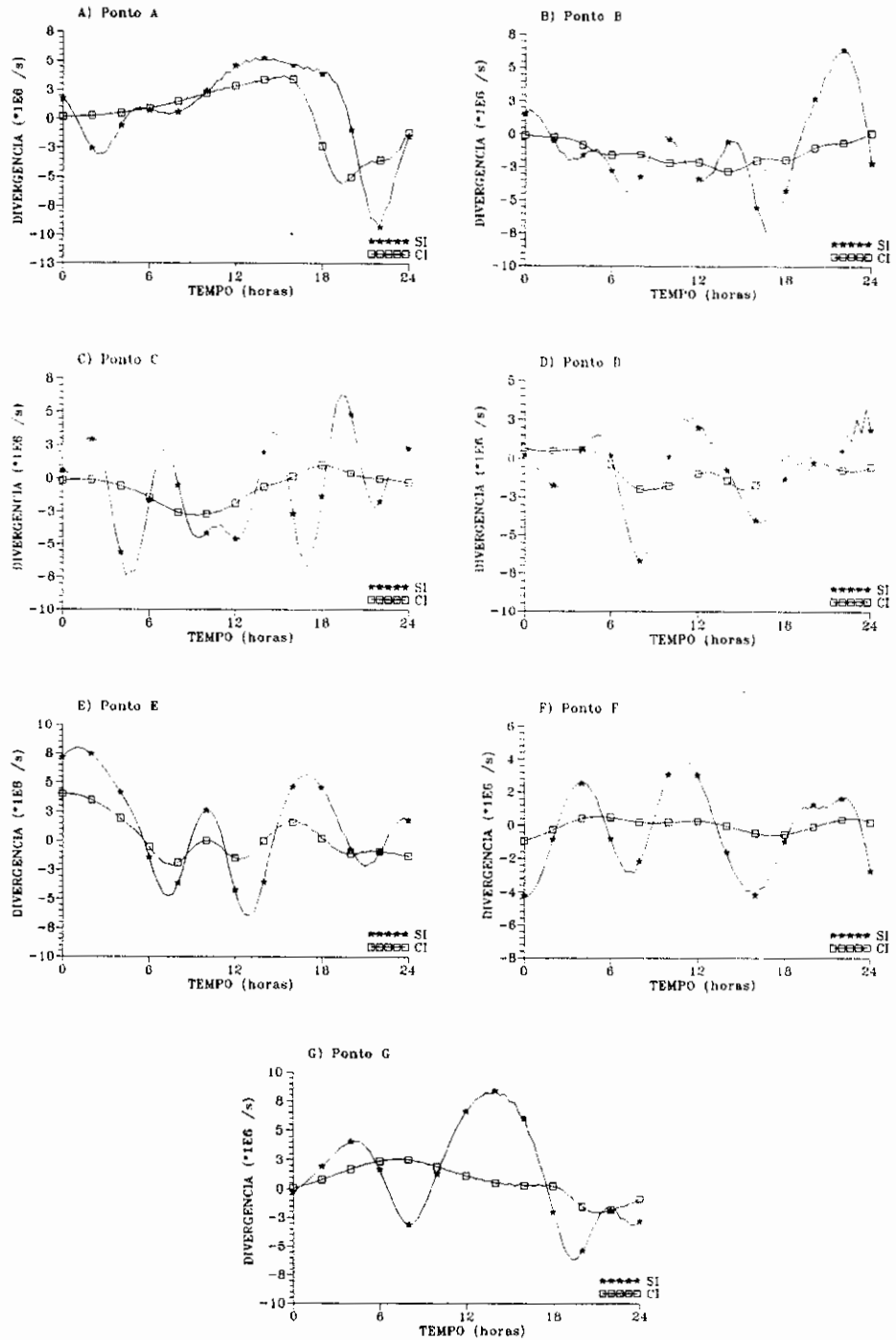


Fig. 4.31 - Variação temporal da divergência ( $\bar{s}^1$ ) sobre os pontos (a) A, (b) B, (c) C, (d) D, (e) E, (f) F e (g) G para o modelo usando dados reais.

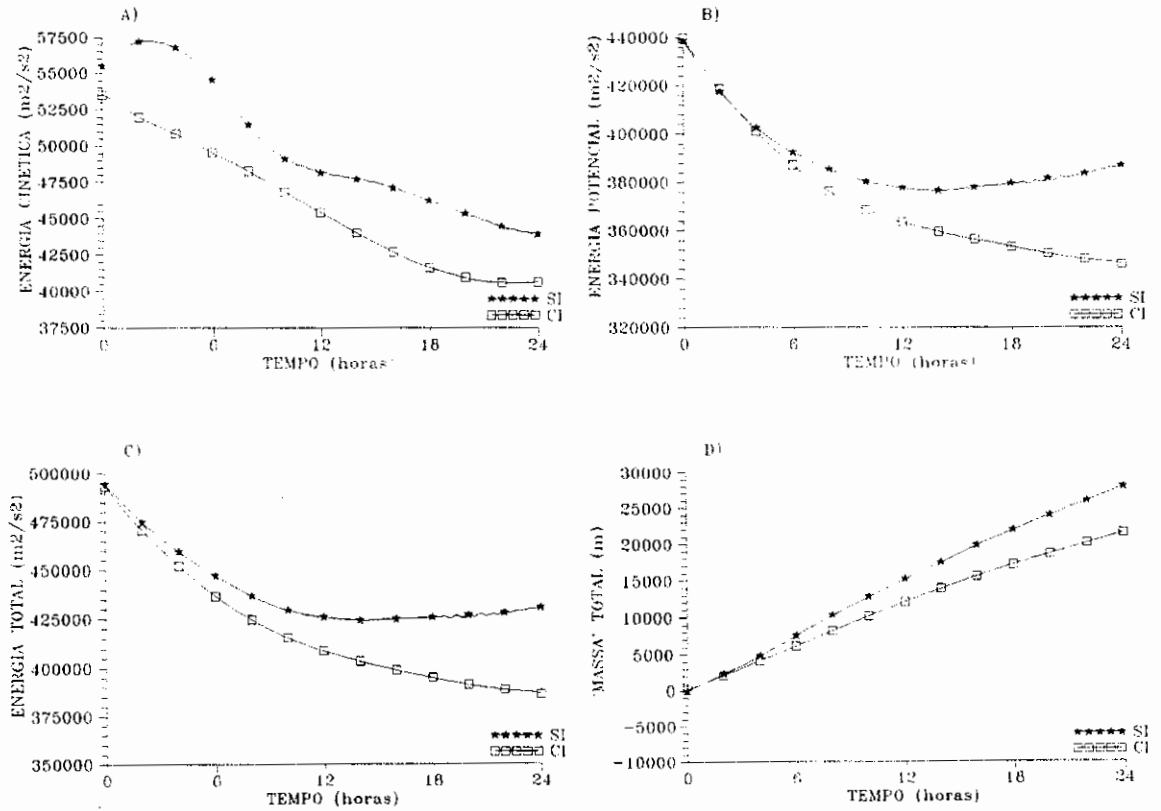


Fig. 4.32 - Variação temporal da (a) Energia cinética ( $m^2/s^2$ ), (b) Energia potencial ( $m^2/s^2$ ), (c) Energia total ( $m^2/s^2$ ) e (d) 'massa' (m) para o modelo usando dados reais.



CAPÍTULO 5COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Um modelo de equações de água rasa de área limitada no plano beta equatorial foi usado para se implementar o método de IDMN. Os dados iniciais de entrada usados foram de dois tipos: simulados e reais decompostos para o modo vertical de altura equivalente próximo de 250 m.

A integração do modelo com ambos conjuntos de dados, após um dia mostra o campo representando as principais características da circulação de altos níveis para o verão sobre a América do Sul, apesar da simplicidade deste modelo. A integração do modelo usando o perfil do forçante pré-fixado (De Maria, 1985) resultou num campo inicial que serviu para os testes com o modelo. O forçante parametrizado usado na integração de um dia do modelo, com e sem iniciação, serviu para simular a fonte de massa para se testar o método de filtragem das ondas de gravidade dos campos.

No Capítulo 2 é mostrada a equivalência entre a IDMN e a IMNN para um modelo de água rasa linear discretizado sobre uma grade C. O uso deste tipo de grade em modelos mostra que podem-se ter efeitos diferentes sobre o parâmetro de Coriolis e os números de onda zonal e meridional, para cada índice de harmônico. Alguns cuidados devem ser tomados com o termo dissipativo incluído no modelo. Neste mesmo capítulo é mostrado que tal termo deve ser tratado como estritamente não-linear, para serem evitados problemas de instabilidade numérica com o modelo ao se usar o esquema de Okamura.

A dissipação do tipo Laplaciano e o termo forçante transiente do campo de massa influenciam diretamente o comportamento das soluções do conjunto de equações de água rasa lineares. Para os números de onda não-nulos, as frequências naturais de vibração (modos de Rossby e gravidade) possuem decaimento exponencial igual a  $1/\omega$  quando este tipo de dissipação é incluída. Para os números de onda nulos, este tipo de dissipação não influencia nas soluções, sendo que o mais ideal é um termo dissipativo do tipo "Rayleigh-friction". A fonte de massa contribui provocando um crescimento quase linear no campo de altura.

A inclusão de uma dissipação do tipo Laplaciano nas proximidades das fronteiras norte e sul evitou problemas de instabilidade numérica do modelo, quando se utilizou os dados reais de entrada.

A IDMN mostrou ser um processo simples e de grande eficiência na remoção das ondas de gravidade e ruídos provocados pelos desbalanços existentes entre os campos de vento e massa. Como não se requer o conhecimento explícito dos modos normais do modelo, as equações podem ser manipuladas diretamente no espaço físico. Faz-se a integração em torno do tempo inicial com o uso do esquema de Okamura (Haltiner e Williams, 1980).

Este método de iniciação é prático e bastante conveniente para ser usado em modelos globais ou de área limitada, onde estejam incluídos termos não-lineares e parametrizações de processos físicos, pois todos os campos são ajustados de forma dinâmica. A eliminação dos ruídos ou o nível de filtragem das ondas curtas pode ser controlado variando-se o número de ciclos de integração avançada-atrasada.



Como sequência deste trabalho poderiam ser destacadas algumas aplicações deste método de iniciação em modelos baroclínicos, simulação de marés atmosféricas, uma vez que este permite o controle qualitativo do nível de ajuste entre os campos. Para tanto, deve se estudar o efeito do decaimento seletivo do referido esquema modificando-se o peso da média ponderada que é feita após uma etapa de integração avançada-atrasada. Pode-se combinar com isto a variação do número de ciclos de integração.

O modelo em si, bem como os estudos teóricos envolvidos, por exemplo, efeitos da grade alternada e cálculos de estabilidade numérica linear ou dissipação pode ser usado para fins didáticos, testar novos esquemas de integração ou efeitos de condições de fronteira diferentes.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A. Handbook of mathematical functions. New York, Dover, 1970.
- BAER, F.; TRIBBIA, J. On complete filtering of gravity modes through nonlinear initialization. Monthly Weather Review, 105(12):1536-1539, 1977.
- BONATTI, J.P.; SILVA DIAS P.L. Estabilidade numérica de um modelo barotrópico divergente discreto de área limitada. São José dos Campos, INPE, 1983a. (INPE-2703-RPE/430).
- BONATTI, J.P.; SILVA DIAS, P.L. Um modelo espectral barotrópico global com iniciação por modos normais. São José dos Campos, INPE, 1983b. (INPE-674-RPE/428).
- BONATTI, J.P.; SILVA DIAS; MOURA, A.D. Funções de Hough: Teoria e utilização. São José dos Campos, INPE, 1983. (INPE-2697-RPE/429).
- BRATSETH, A.M. A simple and efficient approach to the initialization of weather prediction models. Tellus, 34(4):352-357, 1982.
- BRIERE, S. Nonlinear normal mode initialization of a limited area model. Monthly Weather Review, 110(9):1166-1186, 1982.
- BOURKE, W.; MCGREGOR, J.L. A nonlinear vertical mode initialization scheme for a limited area prediction model. Mon. Weather Review, 111(12):2285-2297, 1983.
- CHANG, C.P., Vertical structure of tropical waves maintained by internally induced cumulus heating. Journal of Atmospheric Sciences, 33(5):729-739, 1976.

- CHARNEY, J.G. The use of the primitive equations of motion in numerical prediction. Tellus, 7(1):22-26, 1955.
- DALEY, R. The application of non-linear normal mode initialization to an operational forecasting model. Atmospheric Ocean, 17(2):97-124, 1979.
- Normal mode initialization. Reviews of Geophysics and Space Physics, 19(3):450-468, 1981.
- DE MARIA, M. Linear response of a stratified tropical atmosphere to convective forcing. Journal of the Atmospheric Sciences, 42(18):1944-1959, 1985.
- HALTINER, J.G.; WILLIAMS, R.T. Numerical prediction and dynamic meteorology. New York, J. Willey & Sons, 1980. 477 p.
- HAYASHI, Y. A theory of large-scale equatorial waves generated by condensation heat and accelerating the zonal wind. Journal of the Meteorology Society of Japan, 48(2): 140-160, 1970.
- HOLTON, J.R. An introduction to dynamic meteorology. 3.ed. Washington, D.C, Washington Academic, 1979. 391 p.
- KASAHARA, A. Further studies on a spectral model of the global barotropic primitive equations with Hough harmonic expansions. Journal of the Atmospheric Sciences, 35(11): 2043-2051, 1978.
- KASAHARA, A.; PURI, K. Spectral representation of three dimensional global data by expansion in normal mode functions. Monthly Weather Review, 109(1):37-51, 1981.

- KASAHARA, A.; SILVA DIAS, P.L. Response of planetary waves stationary tropical heating in a global atmosphere with meridional and vertical shear. Journal of the Atmospheric Sciences, 43(18):1893-1911, 1986.
- KUMAR, A. Generalized dynamic normal mode initialization (Doctoral Thesis), Department of Meteorology. The Florida State University-College of Arts and Sciences, USA, 1990. 133 p.
- LINDZEN, R.S. Wave-CISK in the tropics. Journal of the Atmospheric Sciences, 31(1):156-179, 1974.
- LONGUET-HIGUINS, M.S. The eigenfuncions of Laplace's tidal equations over a sphere. Royal Society of London. A(262):253-371, 1968.
- LYNCH, P. Initialization of a barotropic limited-area model using Laplace transform technique. Monthly Weather Review, 113(8):1338-1344, 1985.
- MACHENHAUER, B. On the dynamics of gravity oscilations in a shallow water model with applications to normal mode initialization. Contribution of Atmospheric Physics, 50(1):253-271, 1977.
- MATSUNO, T. Quasi-geostrophic motions in the equatorial area. Journal of the Meteorological Society of Japan. 44(1):25-43, 1966.

- MESSINGER, F; ARAKAWA, A. Numerical methods used in atmospheric models. Geneve, WMO/ICSU Joint Organizing Committee, 1976. 64p.
- MIYAKODA, K.; MOYER, R.W. A method of initialization of dynamical weather forecasting. Tellus, 20(1):115-128, 1968.
- MIYAKODA, K.; ROSSATI, A. One-way nested grid models: The interface conditions and the numerical accuracy. Monthly Weather Review, 105(9):1092-1107, 1977.
- MOURA, A. D. The eigenfunctions of the linearized balance equation over a sphere. Journal of the Atmospheric Sciences, 33(6):877-907, 1976.
- NITTA, T.; HOVERMALE, J.B. A technique of objective analyses and initialization for the primitive forecast equations. Monthly Weather Review, 97(9):652-658, 1969.
- NITTA, T. Initialization and Analysis for the primitive equation model. WMO/IUGG-Symposium on numerical weather prediction, Tokyo, 1969.
- NOBLE, B.; DANIEL, J.M. Applied linear algebra. 2.ed. Englewood Cliffs, NJ Prentice-Hall, 1977.
- ORLANSKI, I. A simple boundary condition of unbounded hyperbolic flows. Journal Computer Physics, 21(1):251-269, 1976.
- PEDLOSKY, J. Geophysical fluid dynamics. New York. Springer-Verlag. N. 1979.

- PHILLIPS, N.A. Principles of large scale numerical weather prediction. In: Morel, P., ed. Dynamic meteorology. Dordrecht, Holland, D. Reidel Publishing Company, 1973.
- PURI, K. Normal mode initialization for the ANMRC spectral model. Australian Meteorology Magazine, 31(1):85-95, 1983.
- SATOMURA, T. Dynamic mode initialization for a limited area model. Journal of the Meteorological Society of Japan, 66(2):261-276, 1988.
- SILVA DIAS, P.L.; BONATTI, J.P. A preliminary study of the observed vertical mode structure of the summer circulation over tropical South America. Tellus, 37(2): 185-195, 1985.
- SILVA DIAS, P.L.; BONATTI, J.P. Vertical mode decomposition and model resolution. Tellus, 38A(3):205-214, 1986.
- SILVA DIAS, P.L.; BONATTI, J.P.; KOUSKY, V.E. Diurnally forced tropical tropospheric circulation over South America. Monthly Weather Review, 115(8):1465-1478, 1987.
- SUGI, M. Dynamic normal mode initialization. Journal of the Meteorological Society of Japan, 64(5):623-636, 1986.
- TEMPERTON, C. Dynamic initialization for barotropic and multilevel models. Quarterly Journal Royal Meteorology Society, 102():297-311, 1976.
- THOMPSON, P.D. Numerical weather analysis and prediction. New York, The Mac Millan, 1961. 170 p.

TOKIOKA, T. Some considerations on vertical differencing.  
Journal of the Meteorological Society of Japan, 56(2):  
98-111, 1978.

WILLIAMSON, D. Normal mode initialization procedure  
applied to the forecasts with the global shallow water  
equations. Monthly Weather Review, 104(2):195-206, 1976.



APÊNDICE ADECOMPOSIÇÃO EM MODOS VERTICAIS

Neste apêndice, será demonstrada a equivalência das equações da água rasa de um fluido com a estrutura horizontal das equações primitivas (Kasahara & Puri, 1981; Bonatti et al, 1983). O termo que representa o aquecimento diabático é mantido como função do tempo na separação de variáveis do sistema de equações diferenciais.

A.1 - EQUAÇÕES BÁSICAS

Serão consideradas nesta análise as equações primitivas em coordenadas esféricas na horizontal e em coordenada sigma ( $\sigma$ ) na vertical. A coordenada sigma é definida por:

$$\sigma = \frac{p}{p_s}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $p$  é a pressão no nível considerado e  $p_s$  é a pressão na superfície, correspondente à projeção vertical sobre a superfície do ponto  $(\theta, \phi, p)$  considerado.

As equações do movimento horizontal, da termodinâmica (1a. lei), da tendência de pressão na superfície, da continuidade de massa e do equilíbrio hidrostático para a atmosfera nas coordenadas citadas são, respectivamente (Kasahara and Puri, 1981):

$$\frac{du}{dt} - \left( f + \frac{u}{a} \tan \phi \right) v = - \frac{1}{a \cos \phi} g \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} + RT \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) + F_{\theta}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{dv}{dt} + \left( f + \frac{u}{a} \tan \phi \right) u = - \frac{1}{a} g \left( \frac{\partial z}{\partial \phi} + RT \frac{\partial q}{\partial \phi} \right) + F_{\phi} , \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{dT}{dt} = \kappa T \left( \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} - \underline{v} \cdot \underline{\nabla} + (\underline{v} - \tilde{\underline{v}}) \cdot \underline{\nabla} q + \dot{Q}_t \right) , \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \tilde{\underline{v}} \cdot \underline{\nabla} q + \underline{\nabla} \cdot \tilde{\underline{v}} = 0 , \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{v} - \tilde{\underline{v}}) + (\underline{v} - \tilde{\underline{v}}) \cdot \underline{\nabla} q = 0 , \quad (\text{A.6})$$

$$g \frac{\partial z}{\partial \sigma} = - \frac{RT}{\sigma} , \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} , \quad (\text{A.8})$$

$$\underline{v} \cdot \underline{\nabla} = \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} , \quad (\text{A.9})$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{1}{a \cos \phi} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \phi) \right) , \quad (\text{A.10})$$

$$q = \ln p_s , \quad (\text{A.11})$$

$\underline{V}=(u,v)$  é a velocidade horizontal;  $u$  a componente zonal da velocidade;  $v$  é a componente meridional da velocidade;  $\dot{\sigma}=\dot{\sigma}/dt$  a componente vertical da velocidade;  $z$  é a altura geopotencial;  $T$  a temperatura absoluta;  $R$  a constante do gás para o ar seco ( $287,05 \text{ m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-2}$ );  $C_p$  o calor específico do ar seco à pressão constante ( $1005 \text{ m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1}$ );  $\kappa=R/C_p$ ;  $g$  é a aceleração da gravidade da Terra ( $9,81 \text{ m/s}^2$ );  $a$  é o raio médio da terra ( $6,37 \times 10^6 \text{ m}$ );  $f=2\Omega \sin\phi$  é o parâmetro de Coriolis;  $\Omega$  é a velocidade angular da Terra ( $7,292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ );  $F_\theta$  e  $F_\phi$  são os forçantes no momentum nas direções  $\theta$  e  $\phi$  (atrito);  $Q_t$  é o forçante na temperatura (aquecimento diabático) e finalmente,  $\tilde{\underline{V}} = \int \underline{V} d\sigma$  é a média vertical da velocidade horizontal.

As condições de contorno para este sistema dinâmico são:

a) horizontal: regularidade nos pólos;

b) vertical :  $\dot{\sigma} = 0$  em  $\sigma = 0$  e  $\sigma = 1$ .

As Equações A.2 a A.7 sugerem a introdução de duas novas variáveis  $P$  e  $W$  tal que:

$$P = gz + RT_0(\sigma) q, \quad (\text{A.12})$$

$$W = \dot{\sigma} - \sigma(\nabla \cdot \tilde{\underline{V}} + \tilde{\underline{V}} \cdot \nabla q), \quad (\text{A.13})$$

onde  $T_0(\sigma) = T - T'$  é a temperatura da atmosfera básica e depende somente da coordenada vertical e  $T'$  é o desvio em relação à temperatura  $T$ . O estado básico escolhido está em repouso, ou seja;  $u_0 = v_0 = \dot{\sigma}_0 = 0$ .

Pode-se então, usando  $P$ , reescrever as equações do movimento horizontal (Equações A.2 e A.3) como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial P}{\partial \theta} = -\underline{v} \cdot \nabla u - \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - \frac{RT'}{a \cos \phi} \frac{\partial q}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{uv}{a} \tan \phi + F_{\theta} , \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu + \frac{1}{a} \frac{\partial P}{\partial \phi} = -\underline{v} \cdot \nabla v - \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} - \frac{RT'}{a} \frac{\partial q}{\partial \phi} -$$

$$- \frac{u^2}{a} \tan \phi + F_{\phi} . \quad (\text{A.15})$$

Usando  $W$  a equação da continuidade torna-se:

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} + \nabla \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \nabla q . \quad (\text{A.16})$$

Diferenciando a Equação A.12 em relação a  $e$  ao tempo, e usando a equação da hidrostática (Equação A.7) e a equação da tendência de pressão na superfície (Equação A.5) mais a definição de  $W$  (Equação A.13) obtém-se:

$$\frac{\sigma}{R\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial P}{\partial \sigma} + W = \frac{1}{\Gamma_0} \left[ \underline{v} \cdot \nabla T' - \frac{RT'}{C_p \sigma} W + \dot{\sigma} \frac{\partial T'}{\partial \sigma} - \right.$$

$$\left. - \frac{RT}{C_p} \underline{v} \cdot \nabla q + \dot{Q}_t \right] , \quad (\text{A.17})$$

onde  $\Gamma(\sigma) = \frac{R T_0}{C_p} - \frac{d T_0}{d \sigma}$  é uma medida da estabilidade estática da atmosfera básica.

As condições de contorno em termos das novas variáveis se tornam:

$$W = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 0, \quad (\text{A.18})$$

onde foi usada a Equação A.13. Para a condição inferior ( $\sigma = 1$ ), usa-se a Equação A.5 associada à definição de P e W com  $\sigma = 1$ :

$$z P_s = g h_b + R T_{0s} q \quad (\text{A.19})$$

e

$$W_s = - (\nabla \cdot \tilde{V} + \tilde{V} \cdot \nabla q) \quad (\text{A.20})$$

onde  $h_b = h_b(\theta, \phi)$  representa a topografia da terra e o subscrito s para P, W e  $T_0$  refere-se aos seus valores na superfície. Da Equação A.5 para  $\sigma = 1$  tem-se:

$$\left( \frac{\partial q}{\partial t} \right)_{\sigma=1} - W_s = 0.$$

Como a variação de  $h_b$  com o tempo é praticamente nula, e multiplicando-se a equação acima por  $R T_{0s}$ , pode-se escrever:

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} - R T_{0s} W_s = 0 \quad \text{em} \quad \sigma = 1. \quad (\text{A.21})$$

## A.2 - EQUAÇÕES LINEARIZADAS

Ao se considerar movimentos de pequena amplitude em uma atmosfera diabática, com estado básico em repouso e com temperatura  $T_0(\sigma)$ ; pode-se escrever as equações das perturbações (denotadas por linhas), referentes ao sistema formado pelas Equações de A.14 a A.17, como:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - fv' + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial P'}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + fu' + \frac{1}{a} \frac{\partial P'}{\partial \phi} = 0, \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial W'}{\partial \Gamma} + \nabla \cdot \underline{v}' = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{\sigma}{R\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial P'}{\partial \sigma} \right) + W' = \frac{\dot{Q}'_t}{\Gamma_0}. \quad (\text{A.25})$$

Pode-se eliminar  $W'$  entre as Equações A.24 e A.25, diferenciando a Equação A.25 com relação a  $\sigma$  e usando a Equação A.24 para se substituir  $\partial W'/\partial \sigma$ , obtendo-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\sigma}{R\Gamma_0} \frac{\partial P'}{\partial \sigma} \right) \right] - \nabla \cdot \underline{v}' = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\dot{Q}'_t}{\Gamma_0} \right). \quad (\text{A.26})$$

As Equações A.22, A.23, A.26 formam um sistema de equações em  $u'$ ,  $v'$  e  $P'$  com as seguintes condições de contorno:

a) usando a Equação A.25, a condição superior dada pela Equação A.18 pode ser mudada para

$$\frac{\partial P'}{\partial \sigma} = \text{finito } (\sigma=0) \text{ em } \sigma = 0, \quad (\text{A.27})$$

b) a condição inferior (Equação A.21) associada à Equação A.25 para  $\sigma=1$ , e levando-se em conta que a liberação de calor latente no topo da atmosfera e na superfície é nula, torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial P'_s}{\partial \sigma} \right) + R \Gamma_{os} \cdot W'_s = 0,$$

logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial P'_s}{\partial \sigma} + P'_s \frac{\Gamma_{os}}{T_{os}} \right) = 0,$$

e então

$$\frac{\partial P'_s}{\partial \sigma} + \frac{\Gamma_{os}}{T_{os}} P'_s = \text{finito } (\sigma=0) \text{ em } \sigma = 1. \quad (\text{A.28})$$

Serão estudadas duas formas de se introduzir o termo  $Q_t$ . No primeiro caso são usados perfis verticais pré-fixados para este termo, e no segundo caso, usa-se a parametrização do tipo "wave-CISK".

1°. Caso: A liberação de calor latente é estimada usando perfis verticais de aquecimento pré-fixados apropriados para a região tropical (Chang, 1976).

A única equação do sistema formado pelas Equações A.22, A.23 e A.26 que apresenta derivada na vertical é a última, através do seu primeiro termo:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\sigma}{R \Gamma_0} \frac{\partial P'}{\partial \sigma} \right) . \quad (\text{A.29})$$

Definindo a transformada vertical finita da função  $P'(\theta, \phi, t)$  como:

$$P'_n(\theta, \phi, t) = \int_0^1 P'(\theta, \phi, \sigma, t) \psi_n(\sigma) d\sigma , \quad (\text{A.30})$$

onde  $\psi_n(\sigma)$  é o Kernel da transformação, que deve transformar a Equação A.29, sujeito às condições de contorno dadas nas Equações A.27 e A.28, em uma constante multiplicada por  $P'_n$ .

Tomando a transformada vertical da Equação A.29 e integrando por partes duas vezes, obtém-se:

$$\int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\sigma}{R \Gamma_0} \frac{\partial P'}{\partial \sigma} \right) \right] \psi_n(\sigma) d\sigma = \left[ \frac{\sigma}{R \Gamma_0} \left( \psi_n \frac{\partial P'}{\partial \sigma} - P' \frac{d\psi_n}{d\sigma} \right) \right] +$$

$$+ \int_0^1 P' \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\sigma}{R \Gamma_0} \frac{d\psi_n}{d\sigma} \right) d\sigma . \quad (\text{A.31})$$

Ao se escolher  $\psi_n(\sigma)$  como solução do seguinte problema:

$$\frac{d\psi_n}{d\sigma} \left( \frac{\sigma}{R \Gamma_0} \frac{d\psi_n}{d\sigma} \right) + \frac{1}{D_n} = 0 , \quad (\text{A.32})$$



$$\frac{d\psi_n}{d\sigma} + \frac{\Gamma_{os}}{\Gamma_{os}} = 0, \quad \text{em } \sigma = 1, \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{d\psi_n}{d\sigma} = 0 \quad \text{em } \sigma = 0, \quad (\text{A.34})$$

onde  $D_n$  representa a constante de separação das estruturas vertical e horizontal e ao se usar as condições de contorno nas Equações A.27 e A.28, a Equação A.31 se torna:

$$\int_0^1 \psi_n(\sigma) \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\sigma}{R\Gamma_o} \frac{\partial P'}{\partial \sigma} \right) \right] d\sigma = \frac{1}{gD_n} P_n. \quad (\text{A.35})$$

Esta é a propriedade operacional desejada para a transformada vertical finita definida na Equação A.29.

A inversa da transformada vertical pode ser obtida demonstrando que  $\psi_n(\sigma)$  é um conjunto ortonormal e completo, pois a Equação A.32, juntamente com as condições de contorno dadas nas Equações A.33 e A.34, formam um problema de Sturm-Liouville, como é provado em Bonatti et al (1983).

Dessa maneira, existe uma sequência  $\psi_n(\sigma)$  associada ao autovalor  $D_n$ , tal que é ortonormal e forma uma base completa de autofunções (Abramowitz and Stegun, 1970). Obtém-se então a transformada inversa da Equação A.30:

$$P'(\theta, \phi, \sigma, t) = \sum_n g h_n'(\theta, \phi, t) \psi_n(\sigma), \quad (\text{A.36})$$

com

$$\int_0^1 \psi_n(\sigma) \psi_m(\sigma) d\sigma = \delta_{nm}, \quad (\text{A.37})$$

onde  $hn'$  é o coeficiente de expansão para a função  $P'$  e  $g$  é a aceleração da gravidade, aqui introduzida para conveniência futura.

Como  $\psi_n(\sigma)$  é um conjunto ortonormal completo, pode-se expressar  $u'$ ,  $v'$  e  $\tilde{Q}'$  como

$$u'(\theta, \phi, \sigma, t) = \sum_n u_n'(\theta, \phi, t) \psi_n(\sigma), \quad (\text{A.38})$$

$$v'(\theta, \phi, \sigma, t) = \sum_n v_n'(\theta, \phi, t) \psi_n(\sigma), \quad (\text{A.39})$$

$$\tilde{Q}'(\theta, \phi, \sigma, t) = \sum_n \tilde{Q}_n'(\theta, \phi, t) \psi_n(\sigma), \quad (\text{A.40})$$

onde  $u_n'$  e  $v_n'$  são coeficientes de expansão na vertical das componentes horizontais da velocidade e  $\tilde{Q}' = \partial/\partial\sigma$  ( $\dot{Q}t/\Gamma_0$ ).

Substituindo-se as Equações A.36, A.38, A.39 e A.40 nas Equações originais A.22, A.23 e A.26, tem-se:

$$\sum_n \psi_n(\sigma) \left( \frac{\partial u_n'}{\partial t} - f v_n' + \frac{g}{a \cos \phi} \frac{\partial h_n'}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (\text{A.41})$$

$$\sum_n \psi_n(\sigma) \left( \frac{\partial v_n'}{\partial t} + f u_n' + \frac{g}{a} \frac{\partial h_n'}{\partial \phi} \right) = 0, \quad (\text{A.42})$$

$$\sum_n \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ h_n' \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\sigma g}{R \Gamma_0} \frac{d\psi_n}{d\sigma} \right) \right] - \psi_n(\sigma) \nabla \cdot \underline{V}_n' \right\} =$$

$$= \sum_n \tilde{Q}'_n(\theta, \phi, t) \psi_n(\sigma) , \quad (\text{A.43})$$

e usando a Equação A.32 pode-se escrever a Equação A.43 como

$$\sum_n \psi_n(\sigma) \left( \frac{1}{D_n} \frac{\partial h'_n}{\partial t} + (\nabla \cdot \underline{v}'_n + \tilde{Q}'_n) \right) = 0 . \quad (\text{A.44})$$

Como os  $\psi_n(\sigma)$  formam uma base ortonormal e completa, ao se multiplicar as Equações A.41, A.42 e A.44 por  $\psi_n(\sigma)$  e integrar-se sobre o domínio em  $\sigma$  (de 1 a 0), obtém-se os seguintes sistemas de equações para cada  $n$ , que governam a variação temporal dos coeficientes de expansão, definidos na equações A.36, A.37, A.38 e A.39:

$$\frac{\partial u'_n}{\partial t} - f v'_n = - \frac{g}{a \cos \phi} \frac{\partial h'_n}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\partial v'_n}{\partial t} + f u'_n = - \frac{g}{a} \frac{\partial h'_n}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{\partial h'_n}{\partial t} + D_n (\nabla \cdot \underline{v}'_n + \tilde{Q}'_n) = 0 . \quad (\text{A.47})$$

O sistema de Equações A.45, A.46 e A.47 representa a estrutura da solução, uma vez que  $D_n$  é encontrado como um autovalor da Equação da estrutura vertical A.32, sob as condições de contorno dadas nas Equações A.33 e A.34. Desde que as equações da estrutura horizontal são idênticas às equações linearizadas da água

rasa, com uma altura do fluido  $D_n$ , esta será chamada de altura equivalente.

A Equação A.32 representa a equação da estrutura vertical, juntamente com as condições de contorno definidas nas Equações A.33 e A.34. Esta é resolvida numericamente utilizando diferenças finitas, com uma distribuição alternada das variáveis na grade vertical, segundo o esquema C' proposto por Tokioka (1978). Esta distribuição tem a vantagem de descrever os modos internos como realmente internos e não apresenta modos computacionais no campo de temperatura.

O programa em linguagem FORTRAN utilizado (elaborado por J.P. Bonatti), possui opção de se efetuar a decomposição em modos verticais de um forçante nos campos de  $u$ ,  $v$  ou  $h$ , com base nos perfis verticais de temperatura e pressão desejados.

O perfil utilizado é um perfil sobre Manaus, média de setembro de 1968 a 1976, fornecido pelo "National Climatic Center, Asheville, North Carolina, EUA", mostrado na Tabela (A.1).

**TABELA A.1: PERFIL VERTICAL DE TEMPERATURA PARA O ESTADO BÁSICO USADO NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ESTRUTURA VERTICAL**

NIVEL	SIGMA	PRESSÃO (hPa)	GAMA0 (K)	TEMPERATURA (K)
1	0,05	145	52,5	204,15
2	0,15	235	42,5	228,15
3	0,25	325	50,0	245,65
4	0,35	415	56,8	258,15
5	0,45	505	56,5	267,15
6	0,55	595	51,3	274,15
7	0,65	685	34,8	280,15
8	0,75	775	35,7	286,65
9	0,85	865	43,1	292,15
10	0,95	955	45,2	296,15

A temperatura para o nível de 1000 hPa é obtida por extrapolação linear dos últimos níveis.

O termo que representa o forçante foi suposto de forma semelhante a Chang (1976), que é apropriado para latitudes tropicais do tipo  $\tilde{Q}'(\sigma) = Q_0 \eta(\sigma)$ , onde

$$\eta(\sigma) = \frac{(s^2 + \pi^2)}{\pi(1 + e^{-s})} e^{-s\sigma} \text{sen}(\pi\sigma), \quad (\text{A.48})$$

onde  $Q_0$  é uma constante e representa a taxa de aquecimento em °C/dia,  $s = \pi \cotan(\pi\sigma_0)$  é um coeficiente que serve para impor onde se encontra o ponto máximo do perfil vertical do forçante e a Equação A.48 foi normalizada de forma a ter integral vertical sempre igual a  $Q_0$ .

São feitos três testes variando a posição do ponto máximo da fonte em níveis diferentes. A Figura A.1 mostra os três perfis verticais normalizados da fonte.

A Tabela A.2 mostra o modo vertical associado com a decomposição do forçante para os três casos estudados. É tomada uma taxa de aquecimento médio máximo de  $15\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{dia}$  ( $Q_0$ ) na atmosfera.

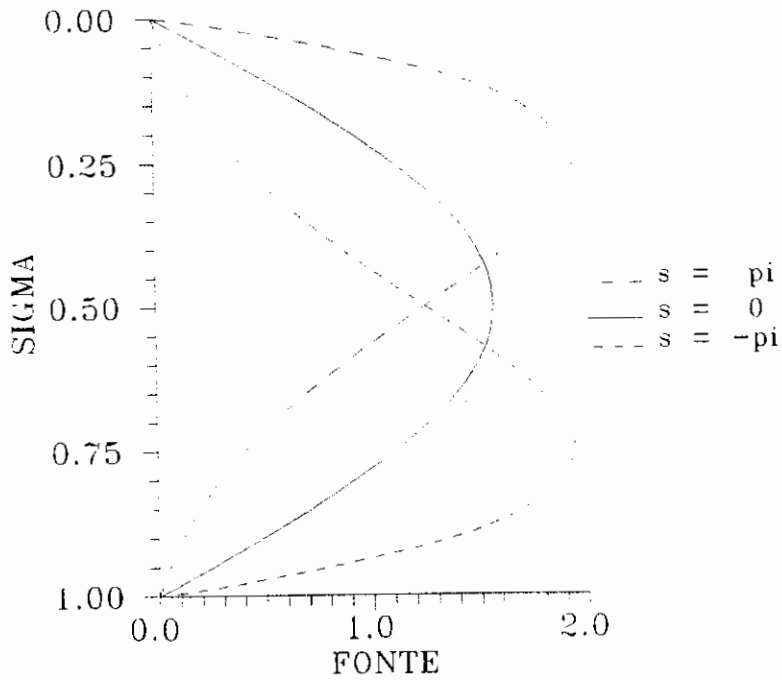


Fig. A.1 - Perfis Verticais da Fonte de Calor.

**TABELA A.2: MODO VERTICAL ASSOCIADO COM ALTURA EQUIVALENTE  
E FORÇANTES DECOMPOSTOS**

MODO	A. EQUIV. (m)	FORÇANTE ( $F_n$ ) (m/s)		
		$s=-\pi$	$s=0$	$s=\pi$
1	8402,3	1,35E-02	1,29E-02	1,18E-02
2	274,2	7,04E-03	1,00E-02	1,24E-02
3	72,7	-2,49E-03	-6,50E-04	2,71E-03
4	35,2	-1,34E-03	-3,82E-04	-1,31E-04
5	20,7	-8,68E-04	-4,16E-04	-3,04E-04
6	14,1	-4,13E-04	-2,89E-05	1,78E-04
7	10,6	1,63E-04	2,63E-05	4,74E-05
8	8,1	4,39E-05	-3,59E-05	-2,77E-05
9	5,4	-9,87E-05	-9,47E-05	-3,80E-05
10	3,4	1,52E-05	1,86E-05	1,20E-05

Com base na Tabela A.2, verifica-se que tanto no caso em que  $s=-\pi$  (isto é, a taxa de aquecimento é máxima em  $\sigma=0,75$ ) como no caso em que  $s=0$  (isto é, a taxa de aquecimento é máxima em  $\sigma=0,5$ ), ou ainda para  $s=\pi$  (isto é, a taxa de aquecimento é máxima em  $\sigma=0,25$ ), o forçante decomposto ( $F_n$ ) possui seu módulo máximo localizado no 1o. modo, ou modo externo com altura equivalente igual a 8,402.4 m, seguido do modo interno de altura equivalente igual a 274,2 m. Aparentemente não há dependência do máximo forçante ( $F_n$ ) em relação ao perfil vertical da taxa de aquecimento. Isto pode ser devido ao perfil de estado básico escolhido ou ainda pela falta de um termo de resfriamento nas extremidades dos perfis da taxa de aquecimento.

Usando-se o perfil vertical de temperatura dado na Tabela A.1 como estado básico para a resolução da Equação A.32, obtiveram-se as autofunções dadas na Figura A.2. Os autovalores dão as alturas equivalentes expressas na Tabela A.2.

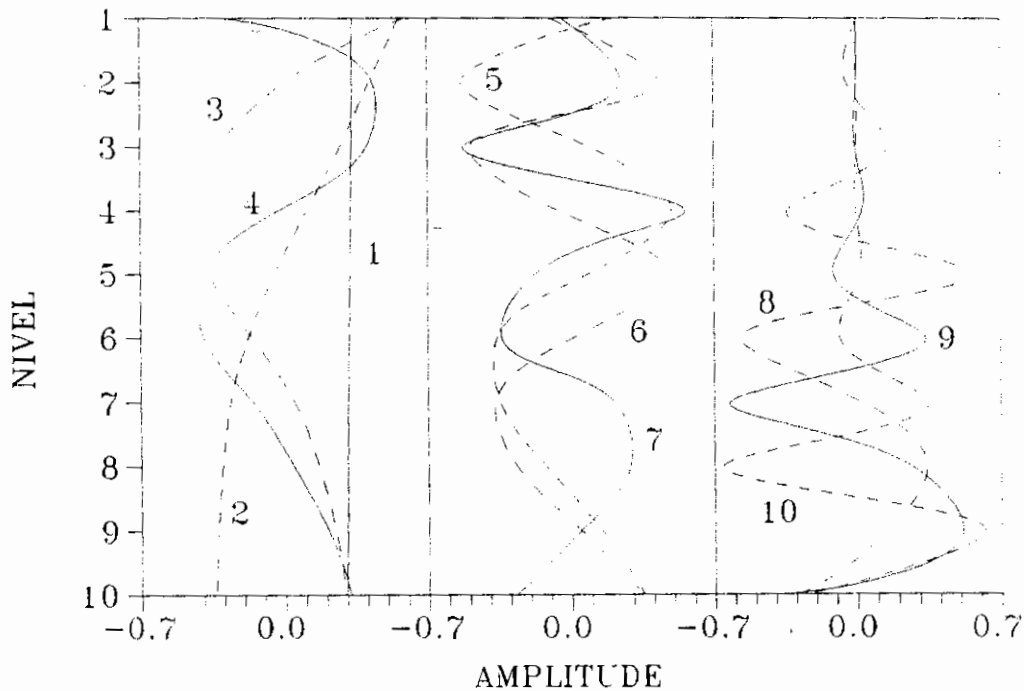


Fig. A.2 - Perfis verticais das autofunções  $\psi_n$  correspondentes a cada altura equivalente  $D_n$ .

2°. Caso: O forçante é parametrizado em termos das variáveis do modelo.

A interação cooperativa entre convecção cúmulus e perturbações de grande escala é denominada CISK (conditional instability of the second kind). Neste caso o aquecimento devido às nuvens cúmulus é parametrizado em termos das variáveis de grande escala.

As parametrizações do tipo CISK são usadas para explicar o desenvolvimento dos distúrbios de escalas intermediárias, associadas com núvens cúmulus e chuva.

Existem dois tipos de parametrização CISK. No primeiro tipo, a convergência de umidade em baixos níveis é produzida pelo escoamento friccional afluente na camada



limite ("Ekman-CISK"). No segundo tipo, a convergência em baixos níveis é tomada como sendo a convergência associada com a própria onda ("wave-CISK").

No "wave-CISK" convencional toda a convergência de umidade calculada nos modelos de grande escala é canalizada de volta ao processo de realimentação.

Dessa maneira, considera-se que o aquecimento devido à liberação de calor latente é parametrizado por:

$$\dot{Q}_t = Q_o \eta(\sigma) \dot{\sigma}_B \quad , \quad (\text{A.49})$$

onde  $Q_o$  está relacionado com a intensidade do aquecimento,  $\eta(\sigma)$  é o perfil vertical e  $e_B \sigma = \sigma(\theta, \phi, t)$  é a velocidade vertical na base da nuvem ( $\sigma_B$ ). Este é o esquema tradicional da parametrização "wave-CISK" (Hayashi, 1970; Lindzen, 1974)

A velocidade vertical na base da nuvem é calculada por:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_B = & - \int_{\sigma_B}^0 \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} d\sigma = \nabla \cdot \left( \int_{\sigma_B}^0 \underline{V}' d\sigma - \int_1^0 \underline{V}' d\sigma \right) + \\ & + \left( \int_{\sigma_B}^0 \underline{V}' d\sigma - \int_1^0 \underline{V}' d\sigma \right) \cdot \nabla q \quad . \quad (\text{A.50}) \end{aligned}$$

O último termo do lado direito da Equação A.26 pode ser escrito como

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\dot{Q}'_t}{\Gamma_o} \right) = \dot{\sigma}_B Q_o \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\eta(\sigma)}{\Gamma_o(\sigma)} \right) = \Lambda(\sigma) \dot{\sigma}_B \quad , \quad (\text{A.51})$$

e com isso a Equação A.26 se torna:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\sigma}{R\Gamma_0} \frac{\partial P'}{\partial \sigma} \right) \right] - \nabla \cdot \underline{V}' = \tau + \Lambda(\sigma), \quad (\text{A.52})$$

onde

$$\tau = \underline{V}' \cdot \nabla q + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{\Gamma_0} (\underline{V}' \cdot \nabla T' - \frac{RT'}{C_p} W + \sigma \frac{\partial T'}{\partial \sigma} - \frac{RT'}{C_p} \underline{V}' \cdot \nabla q) \right). \quad (\text{A.53})$$

Como mostrado no 1º. caso; existe uma sequência  $\psi_n(\sigma)$  associado ao autovalor  $D_n$ , tal que  $\psi_n$  é ortonormal e forma uma base completa de autofunções (Abramowitz e Stegun, 1970). O desenvolvimento em série dessas autofunções  $n$  para as variáveis da Equação A.52 são dadas por:

$$P' = \sum_n g h'_n \psi_n(\sigma), \quad (\text{A.54})$$

$$\underline{V}' = \sum_n \underline{v}'_n \psi_n(\sigma), \quad (\text{A.55})$$

$$\tau = \sum_n \tau_n \psi_n(\sigma), \quad (\text{A.56})$$

$$\Lambda = \sum_n \Lambda_n \psi_n(\sigma), \quad (\text{A.57})$$

onde  $h'_n$ ,  $\underline{v}'_n$ ,  $\tau_n$  e  $\Lambda_n$  são os coeficientes de expansão na vertical das variáveis correspondentes e  $g$  foi introduzido em A.54 para facilidade futura.

Substituindo as Equações A.54 a A.57 na Equação A.52, segue-se que

$$\sum_n \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\sigma g}{R\Gamma_0} \frac{d\psi_n}{d\sigma} \right) \frac{\partial h'_n}{\partial t} - \sum_n \psi_n(\sigma) \nabla \cdot \underline{V}'_n =$$

$$= \sum_n \tau_n \psi_n(\sigma) + \dot{\sigma}_B \sum_n \Lambda_n \psi_n(\sigma), \quad (\text{A.58})$$

e usando a Equação A.32 na equação anterior obtém-se:

$$\sum_n \psi_n \left( - \frac{1}{D_n} \frac{\partial h'_n}{\partial t} - \nabla \cdot \underline{V}'_n - \tau_n - \dot{\sigma}_B \Lambda_n \right) = 0$$

ou

$$\frac{\partial h'_n}{\partial t} + D_n ( \nabla \cdot \underline{V}'_n + \tau_n + \Lambda_n \dot{\sigma}_B ) = 0 \quad (\text{A.59})$$

A velocidade vertical na base da nuvem ( $\dot{\sigma}_B$ ) e o termo que representa o perfil vertical de aquecimento, expandidos em termos das autofunções  $\psi_n$  são:

$$\dot{\sigma}_B = \sum_n K_m ( \nabla \cdot \underline{V}'_m + \underline{V}'_m \cdot \nabla q ), \quad (\text{A.60})$$

onde

$$K_m = \int_{\sigma_B}^0 \psi_m d\sigma - \int_1^0 \psi_m d\sigma \quad (\text{A.61})$$

e

$$\Lambda_m = Q_0 \int_1^0 \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\eta_n(\sigma)}{\Gamma_0} \right) \psi_m \quad (\text{A.62})$$

que substituídos na Equação A.59, leva a:

$$\frac{\partial h'_n}{\partial t} + D_n \nabla \cdot \underline{V}'_n - \Lambda_n \sum_n K_n \nabla \cdot \underline{V}'_m + D_n (\tau_n - \Lambda_n \sum_n \underline{V}'_m \cdot \nabla q) = 0 \quad (\text{A.63})$$

Desprezando-se as interações não-lineares entre os diferentes modos verticais, ou seja, tomando-se  $m=n$  na equação anterior, chega-se a

$$\frac{1}{D_n} \frac{\partial h'_n}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{V}'_n = \Lambda_n K_n \nabla \cdot \underline{V}'_n + \beta_n, \quad (\text{A.64})$$

onde  $\beta_n$  está representando os termos não lineares.

A Equação A.64 mostra o efeito da introdução do termo de aquecimento diabático parametrizado em função das variáveis de grande escala. Nota-se que na equação da variável  $h$  do modelo barotrópico (estrutura horizontal), este efeito é proporcional à divergência. As constantes de proporcionalidade  $\Lambda_n$  e  $K_n$  são calculadas a partir da decomposição vertical para os modos de interesse. Pode-se dizer então que a principal consequência de se usar a parametrização da liberação de calor latente do tipo "wave-CISK" é um aumento ou diminuição da divergência, através do fator  $\Lambda_n K_n$ , estimado em 1,2, o que corresponde a 1.250 m.dia<sup>-1</sup> para uma divergência de  $5 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  e  $D_n$  de 250 m; o que equivale a cerca de 15 °C.dia<sup>-1</sup> integrados numa coluna vertical de área horizontal unitária.

APÊNDICE BSOLUÇÕES ANALÍTICAS DE UM MODELO DE ÁGUA RASA

O objetivo deste apêndice é estudar a solução analítica das equações da água rasa na forma linearizada, sobre um estado básico em repouso, onde estão incluídos um termo que representa a dissipação por atrito do tipo Laplaciano e um termo representando a taxa de aquecimento diabático do tipo transiente.

B.1 - O MODELO DE ÁGUA RASA

As equações do modelo de água rasa usadas para este estudo, no plano beta centrado em  $y_0$ , podem ser descritas por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} - fv = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} + fu = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} + K \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & - \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) (h-h_b) - \\ & - (h-h_b) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + F' + K \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right), \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

onde  $u$  e  $v$  representam o vento zonal e meridional, respectivamente,  $h$  é o desvio de altura,  $h_b$  a topografia,  $K$  é o coeficiente de viscosidade turbulenta,  $f=f_0+\beta(y-y_0)$

com  $\beta = 2\Omega \cos(\gamma_0/a)$ ,  $f_0 = 2\Omega \sin(\gamma_0/\gamma)$ ; onde  $a$  é o raio médio da Terra e  $\gamma$  a velocidade angular da Terra.

A fonte de massa  $F' = F'(x, y, t)$  possui equivalência com o aquecimento diabático (Kasahara and Puri, 1980 e Bonatti et alli, 1983). No Apêndice A deste trabalho é mostrada esta equivalência e feita sua decomposição para os modos verticais de interesse.

Linearizando as Equações B.1 a B.3 sobre um estado básico em repouso, no plano  $f$ , e usando as escalas  $|L| = \sqrt{gH}/f_0$  e  $|T| = 1/f_0$ ; pode-se evidentemente escrevê-las na forma adimensional como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} - v = K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial y} + u = K \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = K \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + F(x, y, t). \quad (\text{B.9})$$

Admitindo-se soluções periódicas do tipo

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ h \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}(t) \\ \hat{v}(t) \\ -i \hat{h}(t) \\ -i \hat{F}(t) \end{pmatrix} e^{i(kx + ly)} \quad (\text{B.10})$$

e substituindo nas Equações B.7 a B.9, obtém-se:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \nu \hat{u} - \hat{v} + k \hat{h} = 0 \quad , \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \nu \hat{v} + \hat{u} + l \hat{h} = 0 \quad , \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \nu \hat{h} - (k\hat{u} + l\hat{v}) = \hat{F} \quad , \quad (\text{B.13})$$

onde os números de onda  $k$  e  $l$  estão adimensionalizados com a escala  $k=k'\sqrt{gH}/f_0$  e  $\nu=K\mu^2$  com  $\mu^2 = (k^2 + l^2)$ . Eventualmente poderia ser uma constante que não dependesse dos números de onda, e estaria representando um processo de dissipação interna de calor ("Rayleigh friction", Holton, 1979).

O termo forçante  $\hat{F}$  pode ser dependente do tempo, simulando uma variação interdiurna de uma fonte de calor da seguinte forma:

$$\hat{F} = F_0 + F_1 e^{i\omega' t} \quad , \quad (\text{B.14})$$

onde  $\omega'$  representa a frequência de oscilação do forçante no tempo e  $F_0$  e  $F_1$  são constantes.

Para conveniência; define-se as seguintes grandezas em função dos números de onda:

$$\hat{\delta} = k \hat{u} + l \hat{v} \quad , \quad (\text{B.15})$$

$$\hat{\xi} = k \hat{v} - l \hat{u} \quad , \quad (\text{B.16})$$

associadas às amplitudes da divergência horizontal e componente vertical da vorticidade, respectivamente, de modo que as Equações B.11 a B.13 se tornam:

$$\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial t} + \nu \hat{\xi} + \hat{\delta} = 0, \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial \hat{\delta}}{\partial t} + \nu \hat{\delta} - \hat{\xi} + \mu^2 \hat{h} = 0, \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \nu \hat{h} - \hat{\delta} = \hat{F}. \quad (\text{B.19})$$

As equações acima serão auxiliares para se encontrar a solução analítica do modelo de água rasa linearizado. Pretende-se analisar três situações distintas, bem como as relações existentes entre elas. Na primeira, existe dissipação de calor, na segunda não há dissipação de calor do tipo Laplaciano devido ao fato dos números de onda serem nulos, porém é visto o que acontece se estiver presente um termo de dissipação tipo "Rayleigh friction"; na terceira, não há dissipação no sistema.

## B.2 - SOLUÇÕES ANALÍTICAS E DISCUSSÕES

1º. caso:  $k \neq 0$  ou  $l \neq 0$  e  $\nu \neq 0$ .

Combinando-se as Equações B.17 a B.19 e usando a Equação B.14, tem-se:

$$\frac{\partial^3 \hat{h}}{\partial t^3} + 3\nu \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial t^2} + (3\nu^2 + \mu^2 + 1) \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \nu(\nu^2 + \mu^2 + 1) \hat{h} - \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial t^2} =$$



$$- 2\nu \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} - (\nu^2 + 1) \hat{F} = 0 \quad , \quad (\text{B.20})$$

que auxilia na obtenção das soluções do sistema de Equações B.17 a B.19, dadas por:

$$\hat{h} = h_0 + A e^{i\omega' t} + \tilde{h} e^{i\omega t} \quad , \quad (\text{B.21})$$

$$\hat{u} = u_0 + B e^{i\omega' t} + \tilde{u} e^{i\omega t} \quad , \quad (\text{B.22})$$

$$\hat{v} = v_0 + C e^{i\omega' t} + \tilde{v} e^{i\omega t} \quad , \quad (\text{B.23})$$

onde

$$h_0 = \frac{(\nu^2 + 1) F_0}{(\nu^2 + \mu^2 + 1)} \quad , \quad (\text{B.24})$$

$$u_0 = - \frac{(k\nu - 1) h_0}{(\nu^2 + 1)} \quad , \quad (\text{B.25})$$

$$v_0 = - \frac{(l\nu - k) h_0}{(\nu^2 + 1)} \quad , \quad (\text{B.26})$$

$$A = \frac{F_1 [(i\omega' + \nu)^2 + 1]}{(i\omega' + \nu)^3 + (i\omega' + \nu)(\mu^2 + 1)} \quad , \quad (\text{B.27})$$

$$B = - \frac{[(i\omega' + \nu) k + 1] A}{(i\omega' + \nu)^2 + 1} \quad , \quad (\text{B.28})$$

$$C = - \frac{[(i\omega' + \nu) l - k] A}{(i\omega' + \nu)^2 + 1}, \quad (B.29)$$

$$\tilde{u} = - \frac{[(i\omega + \nu) k + 1] \tilde{h}}{(i\omega + \nu)^2 + 1}, \quad (B.30)$$

$$\tilde{v} = - \frac{[(i\omega + \nu) l - k] \tilde{h}}{(i\omega + \nu)^2 + 1} \quad e \quad (B.31)$$

$$\omega = \frac{i \nu}{i + \sqrt{1 + \mu^2}}. \quad (B.32)$$

Dada uma condição inicial em  $\hat{h}$ , escolhidos os parâmetros do forçante ( $F_0, F_1$ ) e para  $k$  e  $l$  quaisquer, obtém-se  $\tilde{h}$  pela Equação B.21. Em decorrência disso e das Equações B.24 a B.32, pode-se determinar os demais parâmetros para um  $\omega$  típico. Daí então pode-se fazer a integração no tempo das soluções analíticas; e compará-las com os campos de  $u$ ,  $v$  e  $h$  integrados numericamente.

A frequência do modo geostrófico neste caso é dependente de  $\nu$  (equivalente a  $K \nabla_{\hat{h}}$ ); implicando em um decaimento das amplitudes dos campos  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  e  $\hat{h}$  com tempo de decaimento exponencial igual a  $1/\nu$ . Para os modos gravitacionais (oeste e leste), além do decaimento da amplitude no tempo, os campos apresentam uma oscilação com frequência igual a  $(1 + \mu^2)^{1/2}$ .

2o. caso:  $k=0$  ;  $l=0$  com  $\mu^2 K = \nu = 0$ .

Neste caso, o sistema de Equações B.11 a B.13 torna-se:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \hat{v} = 0, \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \hat{u} = 0, \quad (\text{B.34})$$

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} = F_0 + F_1 e^{i\omega' t}, \quad (\text{B.35})$$

cujas soluções são dadas por:

$$\hat{h} = F_0 t + \frac{iF_1}{\omega} (1 - e^{i\omega' t}) + h_0, \quad (\text{B.36})$$

$$\hat{u} = \tilde{u} e^{-t}, \quad (\text{B.37})$$

$$\hat{v} = \tilde{v} e^{-t}, \quad (\text{B.38})$$

onde  $\tilde{v} = + i\tilde{u}$ .

Nota-se que se  $k$  e  $l$  são nulos e  $\mu$  for do tipo  $\mu^2 K$ , portanto nulo também, o sistema de Equações governantes B.33 a B.35 apresenta a variável  $\hat{h}(t)$  desacoplada das demais  $\hat{u}(t)$  e  $\hat{v}(t)$ . A rigor, integra-se a Equação B.35 com  $\hat{u}(t)=\hat{v}(t)=0$ . Dessa maneira, verifica-se que a solução analítica para o campo de  $\hat{h}(t)$ , dado pela Equação B.36 possui uma variação no tempo, exclusivamente devido a contribuição do forçante. As soluções para os campos de  $\hat{u}(t)$  e  $\hat{v}(t)$  dadas pelas Equações B.37 e B.38 respectivamente, representam uma oscilação inercial.

É interessante notar que as soluções representadas pelas Equações B.36 a B.38 não correspondem ao limite das Equações B.21 a B.23, quando  $l$ ,  $k$  e  $\nu$  tendem a zero. Isto se deve ao fato de que ao se calcular o mesmo limite nas Equações diferenciais B.11 a B.13; estas passam a representar um problema de natureza diferente do original; apresentando assim soluções diferentes.

Mas no caso de representar uma dissipação de calor do tipo Rayleigh (originalmente  $\nu=0$ ); o sistema de Equações B.11 a B.13 torna-se:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \nu \hat{u} - \hat{v} = 0, \quad (\text{B.39})$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \nu \hat{v} + \hat{u} = 0, \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \nu \hat{h} = F_0 + F_1 e^{i\omega' t}, \quad (\text{B.41})$$

com as soluções:

$$\hat{h} = F_0/\nu + F_1/(i\omega' + \nu) e^{i\omega' t} + \tilde{h} e^{-\nu t}, \quad (\text{B.42})$$

$$\hat{u} = \tilde{u} e^{(-\nu+1)t}, \quad (\text{B.43})$$

$$\hat{v} = \tilde{v} e^{(-\nu+1)t}, \quad (\text{B.44})$$

onde  $\tilde{v} = \bar{v} + i\tilde{u}$ .

Neste caso existe nas equações diferenciais, como nas Equações B.39 a B.41. A relação de com  $K\nabla_H$  não é

verdadeira. Pode-se verificar que a Equação da variável  $\hat{h}(t)$  permanece mais uma vez desacoplada dos campos  $\hat{u}(t)$  e  $\hat{v}(t)$ ; semelhante ao 2º. caso. A solução para  $\hat{h}(t)$  é dada pela Equação B.43. Observa-se uma oscilação no tempo devido ao forçante, somado a um decaimento no tempo devido a dissipação. Os campos de  $\hat{u}(t)$  e  $\hat{v}(t)$  apresentam decaimento semelhante, juntamente com uma parte oscilatória devido à força inercial.

Quando  $k$  e  $l$  tendem a zero na Equação B.21, existe uma equivalência na solução da Equação B.41 com  $\hat{u}(t)=\hat{v}(t)=0$  e  $\omega = i\omega$  (Rossby). As soluções dadas pelas Equações B.22 e B.23 no limite de  $k$  e  $l$  tendendo a zero são equivalentes a solução da Equações B.40 e B.41 com  $h=0$  e  $\omega = \bar{\tau}(-\nu + i)$ .

3o. caso:  $\omega = 0$  ( $K = 0$ );  $k \neq 0$  ou  $l \neq 0$ .

O sistema de Equações B.11 a B.13 é escrito na forma:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \hat{v} + k \hat{h} = 0, \quad (\text{B.45})$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \hat{u} + l \hat{h} = 0, \quad (\text{B.46})$$

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} - (k\hat{u} + l\hat{v}) = F_0 + F_1 e^{i\omega' t}, \quad (\text{B.47})$$

cujas soluções são dadas por:

$$\hat{h} = h_0 t + A' e^{i\omega' t} + \tilde{h} e^{i\omega t}, \quad (\text{B.48})$$

$$\hat{u} = u_0 + B' e^{i\omega' t} + \tilde{u} e^{i\omega t}, \quad (\text{B.49})$$

$$\hat{v} = v_0 + C' e^{i\omega' t} + \tilde{v} e^{i\omega t}, \quad (\text{B.50})$$

onde

$$h_0 = \frac{F_0}{(\mu^2 + 1)}, \quad (\text{B.51})$$

$$u_0 = -1 h_0, \quad (\text{B.52})$$

$$v_0 = k h_0, \quad (\text{B.53})$$

$$A' = \frac{F_1 (1 - \omega'^2)}{i\omega' [(1 - \omega'^2) + \mu^2]} \quad (\text{B.54})$$

$$B' = - \frac{A' (ik\omega' + 1)}{(1 - \omega'^2)}, \quad (\text{B.55})$$

$$C' = - \frac{A' (i\omega' - k)}{(1 - \omega'^2)}, \quad (\text{B.56})$$

$$\tilde{u} = - \frac{(i\omega k + 1) \tilde{h}}{(1 - \omega^2)}, \quad (\text{B.57})$$

$$\tilde{v} = - \frac{(i\omega l - k) \tilde{h}}{(1 - \omega^2)} \quad (\text{B.58})$$

$$\omega = \frac{0}{\pm\sqrt{1+\mu^2}} \quad . \quad (B.59)$$

Neste último caso considera-se o problema sem dissipação ( $K=0$  com  $\nu=0$ ); porém  $k$  ou  $l$  diferentes de zero. As Equações B.48 a B.50 são soluções desse caso. A variável  $\hat{h}(t)$  possui um termo com crescimento linear no tempo somado a outros dois termos. Um deles representa uma oscilação no tempo devido ao forçante. O outro pode representar uma constante, para o caso em que  $\omega=0$ ; ou uma oscilação no tempo com frequência igual a  $(1+\mu^2)^{1/2}$ . Os campos  $\hat{u}(t)$  e  $\hat{v}(t)$  possuem variação temporal semelhante a  $\hat{h}(t)$ , com exceção do termo de crescimento linear no tempo.

Existe uma equivalência deste caso com aquele em que a dissipação é do tipo "Rayleigh friction". Isto pode ser verificado aplicando-se limite para  $k$ ,  $l$  e tendendo a zero nas suas soluções dados pelas Equações B.48 a B.50. Com isso a solução em  $\hat{h}(t)$  é dada para  $\hat{u}(t)=\hat{v}(t)=\omega=0$ ; e na solução dos campos  $\hat{u}(t)$  e  $\hat{v}(t)$ ,  $\hat{h}(t)$  é tomado como sendo nulo e  $\omega = \pm 1$ .