



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-8877-TDI/807

**MODELAGEM MATEMÁTICA DO COMPORTAMENTO
MECÂNICO DO DETECTOR DE ONDAS GRAVITACIONAIS
“ MARIO SCHENBERG “**

César Augusto Costa

Dissertação de Mestrado em Astrofísica, orientada pelos Drs. Odylio Denys de Aguiar e Nadja Simão Magalhães, aprovada em 26 de fevereiro de 2002.

INPE
São José dos Campos
2002

523.03:520.35

COSTA, C. A.

Modelagem matemática do comportamento mecânico do detector de ondas gravitacionais "Mario Schenberg" / C.

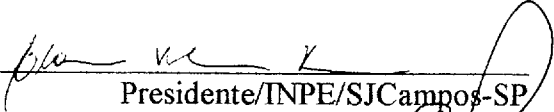
A. COSTA - São José dos Campos: INPE, 2002.

129p. – (INPE-8877-TDI/807).

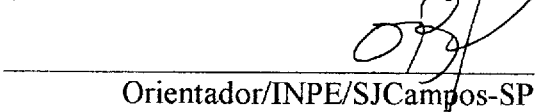
1.Ondas de gravidade. 2.Deteccção. 3.Astrofísica.
4.Excitação por ondas. 5.Relatividade. I.Título.

Aprovado pela Banca Examinadora em cumprimento a requisito exigido para a obtenção do Título de **Mestre em Astrofísica.**


Dr^a Cláudia Vilega Rodrigues


Presidente/INPE/SJCampos-SP

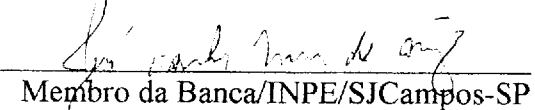
Dr. Odylio Denys de Aguiar


Orientador/INPE/SJCampos-SP

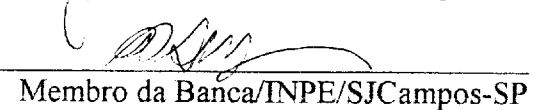
Dr^a Nadja Simão Magalhães


Orientadora/UNIBAN/São Paulo-SP

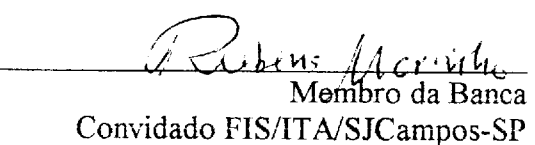
Dr. José Carlos Neves de Araújo


Membro da Banca/INPE/SJCampos-SP

Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza


Membro da Banca/INPE/SJCampos-SP

Dr. Rubens de Melo Marinho


Membro da Banca
Convidado FIS/ITA/SJCampos-SP

Candidato: César Augusto Costa

*À minha querida família,
pelo apoio e compreensão.*

AGRADECIMENTOS

Ao Odylio e à Nadja, pela amizade, atenção e incentivos, os quais foram essenciais para a concretização deste trabalho.

Aos docentes da Divisão de Astrofísica, que abriram as portas para uma nova forma de ver o Universo, ao esclarecerem algumas de minhas muitas dúvidas.

Aos colegas do grupo Gráviton, em especial Sérgio, Luiz, Kilder, Zé Melo e Carlos, que compartilharam comigo de suas experiências e conhecimentos.

Aos colegas de curso, com os quais compartilho a alegria desta conquista.

A toda a minha família, pelo amor, carinho e por compreenderem a importância deste feito.

À Fê, pela companhia, dedicação, e carinho com que suportou as minhas ausências.

Ao Steve Merkowitz e Warren Johnson, por terem sido sempre solícitos e fornecerem informações esclarecedoras.

A todas as amizades construídas durante estes dois últimos anos, esperando que sejam fortalecidas a cada dia.

A todos os colaboradores do INPE, em especial os da Divisão de Astrofísicas, colegas do cotidiano, que tornam nossa presença aqui mais agradável.

À CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual o trabalho seria inviabilizado.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é modelar matematicamente o comportamento mecânico do detector de ondas gravitacionais Mario Schenberg. São estudados os parâmetros físicos que afetam este comportamento. O modelo prevê as frequências de ressonância do sistema, quando são acoplados ressonadores mecânicos unidimensionais de dois modos, obedecendo a configuração sugerida por Johnson e Merkowitz. Prevê, também, como o sistema se comporta frente a um trem de onda gravitacional senoidal. Uma estimativa da contribuição das fontes de ruído ao movimento do sistema é apresentada, bem como, a equação apropriada para seu cálculo. O trabalho apresenta, também, uma revisão dos aspectos que envolvem a radiação gravitacional, sua geração por fontes astrofísicas e sua detecção.

**A MATHEMATICAL MODEL FOR THE MECHANICAL
BEHAVIOR OF MARIO SCHENBERG
GRAVITATIONAL WAVE DETECTOR**

ABSTRACT

The main goal of this work is to mathematically model the mechanical behavior of the Mario Schenberg detector. The physical parameters that affect this behavior are studied. The model gives the resonance frequencies of the system when two-mode mechanical resonators are coupled, following the arrangement suggested by Johnson and Merkwitz. It is also calculated how the system behaves under a gravitational sinewave quadrupolar force. An estimate of the noise sources contribution to the system movement is presented, as well as the equation for its calculation. This work also gives a short review on gravitational radiation, its generation by astrophysical sources and its detection.

SUMÁRIO

pág.

LISTA DE FIGURAS LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	17
CAPÍTULO 2 - A RADIAÇÃO GRAVITACIONAL	21
2.1. Equação de Campo de Einstein.....	21
2.2. Geração de Ondas Gravitacionais.....	27
2.3. Interação das Ondas Gravitacionais com a matéria.....	31
CAPÍTULO 3 - FONTES ASTROFÍSICAS DE RADIAÇÃO GRAVITACIONAL	35
3.1. Fontes Impulsivas.....	36
3.1.1. Supernova.....	37
3.1.2. Espiralação e Coalescência de Objetos Compactos.....	42
3.1.3. Queda de Estrelas e Pequenos Buracos Negros no interior de Buracos Negros Supermassivos.....	45
3.2. Fontes Periódicas.....	45
3.2.1. Pulsares de Milissegundos.....	46
3.2.2. Estrelas Binárias.....	49
3.3. Sinais Estocásticos.....	50
3.3.1. Sistemas Binários.....	51
3.3.2. Estrelas de População III.....	52
3.3.3. Ondas Gravitacionais Primordiais.....	52
3.3.4. Transições de Fase.....	53
3.3.5. Cordas cósmicas.....	53
CAPÍTULO 4 - DETECTORES DE ONDAS GRAVITACIONAIS	55
4.1. Interferômetros a laser.....	56
4.2. Detectores de Massa Ressonante.....	59
4.2.1. Características acústicas dos materiais.....	60
4.2.2. Detectores de Barra.....	61
4.2.3. Monitoramento do modo fundamental de oscilação da barra.....	62
4.2.4. Detectores de massa ressonante esféricos.....	65
4.2.5. Principais fontes de ruído em detectores de massa ressonante.....	65
CAPÍTULO 5 - O DETECTOR ESFÉRICO	69
5.1. Modelo da Esfera Desacoplada.....	70

5.2. A Esfera Acoplada a Ressonadores.....	76
5.2.1. Ressonadores de um modo longitudinal.....	77
5.2.2. Ressonadores de dois modos longitudinais.....	79
5.3. Localização dos Ressonadores.....	81
5.4. Monitoramento do Sistema (Canais dos Modos).....	82
CAPÍTULO 6 - RESULTADOS PARA O DETECTOR MARIO SCHENBERG.....	85
6.1. Obtenção dos Parâmetros.....	87
6.1.1. Frequências dos modos acoplados.....	92
6.2. Solução Analítica da Equação de Movimento.....	95
6.2.1. Autovalores e autovetores da matriz M	100
6.2.2. Expressões para $\tilde{A}(\omega)$, $\tilde{q}_1(\omega)$ e $\tilde{q}_2(\omega)$	102
6.3. Simulação da resposta do detector a um sinal.....	104
6.4. Uma estimativa da contribuição das fontes de ruído aos canais dos modos.....	108
CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	111
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	113
APÊNDICE A - ALGORITMOS.....	119

LISTA DE FIGURAS

	<u>pág</u>
2.1. Efeito de uma onda gravitacional sobre um círculo de partículas testes ao longo de um ciclo.....	26
2.2. Sistema binário emissor de ondas gravitacionais.....	30
2.3. Campo de acelerações para os dois estados de polarização quando o ângulo de fase é nulo.....	32
3.1. Medidas do atraso de fase do pulsar PSR1913+16	43
3.2. Forma de onda da coalescência de um sistema binário formado por estrelas de nêutrons.....	44
4.1. Modelo simples de um detector de ondas gravitacionais.....	55
4.2. Modelo simples de um interferômetro Michelson.....	57
4.3. (a) Esquema do monitoramento da amplitude complexa, (b) Esquema para aquisição dos valores de X_1 e X_2	62
4.4. Fontes impulsivas de ondas gravitacionais, mostrando a faixa dos possíveis sinais e a região de sensibilidade de alguns detectores.....	66
5.1. Modos normais quadrupolares de oscilação da esfera.....	74
5.2. Ressonador mecânico unidimensional de um modo acoplado à superfície da esfera.....	77
5.3. Ressonador mecânico unidimensional de dois modos acoplado à superfície da esfera.....	79
5.4. Dodecaedro e icosaedro truncado.....	81
5.5. Campos de simetria do icosaedro truncado.(1) Com relação aos hemisférios. (2) Com relação às faces hexagonais. (3) Com relação às faces pentagonais.....	82
6.1. Ajuste entre a função $j_2(x)$, e sua expansão em série, $s_i(j_2(x))$	88
6.2. Tempo de computação do algoritmo parametros.mws.....	89

6.3. Dependência entre p_1 e p_2 e ν , para $E=1,303 \times 10^{11} Pa$	90
6.4. Dependência entre p_1 e p_2 , e E , para $\nu=0,364$	90
6.5. Dependência da frequência com a razão poissônica, ν , e o módulo de Young, E ...91	
6.6. Dependência dos parâmetros $\alpha(R)$ e $\beta(R)$ e do fator χ com a razão poissônica.....92	
6.7. Distribuição dos ressonadores sobre a superfície da esfera.....93	
6.8. Frequências dos modos acoplados.....94	
6.9. Comportamento do segundo modo normal da esfera frente ao sinal simulado.....105	
6.10. Amplitudes nos ressonadores R2.....105	
6.11. Planificação do segundo modo normal da esfera, e a distribuição dos ressonadores sobre sua superfície.....106	
6.12. Comportamento dos canais dos modos.....107	
6.13. Densidade espectral da contribuição das forças de Langevin, nos canais dos modos.....109	

LISTA DE TABELAS

	<u>pág</u>
2.1. Expressões para os Harmônicos Esféricos Reais, Y_m	33
3.1. Amplitude máxima, $\max h $, e frequência característica, f_c , da onda gravitacional gerada pelos modos barra em estrelas de nêutrons recém-formadas, para dois valores representativos dos raios equatoriais, R_{eq}	40
3.2. Algumas fontes binárias de ondas gravitacionais de baixa frequência.....	50
4.1. Comparação entre as grandezas físicas de alguns materiais.....	60
4.2. Alguns detectores de barra que operam sob temperatura criogênica.....	64
6.1. Valores obtidos e utilizados pelo modelo.....	87

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Desde que Albert Einstein propôs a Teoria da Relatividade Geral, em 1916, ela tem sido submetida a testes, e em todos os que já foram realizados obteve êxito. Einstein mostrou que a existência da radiação gravitacional é uma consequência direta de sua teoria. Assim, quando estiverem operando em seus limites de sensibilidade, os detectores de ondas gravitacionais estarão, mais uma vez, testando sua validade. Porém, mais do que testar a Relatividade Geral, a detecção de ondas gravitacionais abrirá as portas para uma nova perspectiva no estudo do Universo, algo como um novo sentido, que ajudará a entendê-lo melhor.

As ondas gravitacionais são perturbações na curvatura local do espaço-tempo, que viajam pelo espaço-tempo à velocidade da luz, e excitam os modos normais de oscilação quadrupolares de corpos elásticos, por onde passam. O monitoramento destas excitações torna possível a detecção direta de ondas gravitacionais, e, conseqüentemente, a obtenção de informações sobre fontes astrofísicas emissoras de radiação gravitacional. Os instrumentos desenvolvidos com tal função são conhecidos como **detectores de ondas gravitacionais**.

Os primeiros detectores de ondas gravitacionais, com forma cilíndrica, ou de “barras”, foram construídos nos anos 60. Desde então, muitos avanços têm sido obtidos, e a sensibilidade dos instrumentos que estão sendo desenvolvidos está atingindo os patamares exigidos (previstos) para se captar sinais gerados por eventos astrofísicos. A idéia de se construir detectores esféricos ultracriogênicos tem ganhado adeptos, entre os quais destaca-se o grupo brasileiro **Gráviton**, que trabalha na construção de seu primeiro protótipo, o detector **Mario Schenberg**. Instrumentos com as características do Schenberg representam a próxima geração de detectores por massa ressonante.

Um único detector esférico será capaz de determinar tanto a direção quanto as

componentes tensoriais de uma onda gravitacional incidente. Porém, a construção do detector e monitoramento dos dados, que dele podem ser obtidos, apresentam dificuldades inerentes. O número de modos normais que acoplam fortemente com uma onda gravitacional (cinco, contra apenas um apresentado pelas barras) aumenta a complexidade do sistema, quando comparado com os detectores cilíndricos. A necessidade de que sejam acoplados pelo menos cinco ressonadores secundários à superfície da esfera para monitorar as oscilações normais, geram um sistema com pelo menos uma dezena de osciladores harmônicos acoplados entre si. Tais osciladores interrelacionam-se de maneira complexa, motivo pelo qual a forma com que estas relações acontecem merece um estudo detalhado.

O objetivo central deste trabalho é a elaboração de um modelo matemático, com a finalidade de simular o comportamento mecânico do Mario Schenberg frente à excitação causada pela passagem de uma onda gravitacional. Para tanto, os parâmetros físicos que regem este comportamento foram estudados. Desta forma, pretende-se adquirir confiabilidade suficiente no instrumento, a fim de que os dados por ele obtidos possam ser repassados à análise.

Este trabalho faz, também, uma rápida revisão dos conceitos fundamentais que permeiam a radiação gravitacional, e compreende os três primeiros capítulos. Dando início a esta revisão, a derivação da equação de onda, a partir das equações de campo de Einstein, os processos geradores de ondas gravitacionais e seus efeitos sobre a matéria são apresentados no Capítulo 2. As características das principais fontes astrofísicas de radiação gravitacional encontradas na literatura são revistas no Capítulo 3. O capítulo apresenta um apanhado de informações básicas sobre estas fontes, com a finalidade de fornecer uma noção da sensibilidade que os detectores de ondas gravitacionais devem atingir, para obterem sucesso. Detalhes maiores sobre estas fontes e seus processos peculiares de geração de radiação gravitacional podem ser encontrados na bibliografia referenciada. E os conceitos básicos que envolvem a detecção de ondas gravitacionais pelos instrumentos que estão sendo projetados, são apresentados no Capítulo 4.

O escopo principal deste trabalho envolve a utilização e adaptação de técnicas, desenvolvidas ao longo da última década, e destinadas, especificamente, à resolução do problema do detector esférico. Uma descrição detalhada da técnica utilizada para a elaboração do modelo matemático utilizado na resolução do problema proposto, é apresentada no Capítulo 5. Enquanto, o Capítulo 6, mostra os resultados obtidos pela sua aplicação ao detector Mario Schenberg.

CAPÍTULO 2

A RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

Os primeiros ensaios sobre a possibilidade de existência da radiação gravitacional foram feitos por Heaviside, em forma de um apêndice, no seu livro “Electromagnetic Theory”, publicado em 1893. Menos de uma década depois outras duas publicações abordaram o assunto, uma de 1900, assinada por H. A. Lorentz, e outra de 1905, de autoria de H. Poincaré [1]. Porém, a primeira derivação da equação de onda gravitacional a ter expressão na comunidade científica foi a apresentada à *Königlich Preussischen Akademie de Wissenschaften*, de Berlim, em junho de 1916, por Albert Einstein, o qual assinou uma segunda publicação em janeiro de 1918 sobre o mesmo tema.

Publicado alguns meses depois de sua Teoria da Relatividade Geral, o primeiro artigo de Einstein sobre radiação gravitacional restringia-se à emissão de ondas gravitacionais fracas (e linearizadas), que se propagam em um espaço-tempo plano. O segundo tratava da derivação quadrupolar da radiação gravitacional [2,3].

Nos anos seguintes, Weyl e Eddington refinariam o trabalho inicial de Einstein até que, na metade da segunda década do século passado, a teoria linearizada das ondas gravitacionais estaria completamente entendida [4,5].

2.1. EQUAÇÃO DE CAMPO DE EINSTEIN

Na Relatividade Geral, a métrica $g_{\mu\nu}$ descreve o campo gravitacional, que se relaciona com o tensor momento-energia, $T_{\mu\nu}$, por meio de equações diferenciais de segunda ordem, representadas pelas chamadas *equações de campo de Einstein*, e dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

1 Considerando-se a constante cosmológica $\Lambda=0$, em $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$.

onde $R_{\mu\nu}$ e $R = g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}$ denotam, respectivamente, o tensor e o escalar de Ricci.² G representa a constante de gravitação universal e c representa a velocidade da luz no vácuo.

Em espaços que apresentem curvaturas acentuadas, o cálculo do tensor de Riemann, $R_{\mu\nu\lambda\rho}$, e, conseqüentemente, o do tensor de Ricci, envolve complicadas equações não-lineares, onde o Princípio de Superposição não é válido. Contudo, pode-se supor uma situação em que a contrapartida espacial de $T_{\mu\nu}$ esteja confinada em um raio r , de tal forma que sua massa M esteja imersa em um campo gravitacional fraco, ou seja, em um espaço-tempo aproximadamente plano. Comprovada esta situação, torna-se apropriado escrever o tensor $g_{\mu\nu}$ como uma deformação na métrica de Minkowski,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

assumindo a forma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ³, sendo que a deformação $h_{\mu\nu}$ possui componentes numericamente pequenas ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$). Assim, o cálculo do tensor de Ricci pode ser simplificado, obtendo-se

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad (2.3)$$

onde a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (h_{\rho\nu,\mu} + h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\rho}) + O(h^2)$, e $O(h^2)$ representa os termos de ordem quadrática envolvendo a perturbação, os quais podem ser ignorados,

2 É aplicada aqui a convenção de soma de Einstein, onde $R = g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma} \equiv \sum_{\rho,\sigma} g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}$

3 Admitindo-se a existência de um fundo de radiação gravitacional (“background”) gerado por fontes de caráter estocástico (vide Seção 3.3), deve ser acrescentada mais uma parcela referente a esta perturbação, e a métrica torna-se: $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{OG} + h_{\mu\nu}^B$, onde $h_{\mu\nu}^B \equiv \text{background}$ e $h_{\mu\nu}^{OG} \equiv \text{onda gravitacional}$.

levando-se em conta que $|h| \ll 1$, linearizando-se, desta forma, a equação de campo.⁴

O fato da equação de campo possuir o termo $\frac{g_{\mu\nu}}{2}$ possibilita definir-se um $\bar{h}_{\mu\nu}$ tal que

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (2.4)$$

onde $h = h^\rho{}_\rho = \eta^{\lambda\rho} h_{\lambda\rho}$. Além disto, uma forma mais compacta da equação de campo pode ser obtida eliminando-se as ambiguidades, a partir da aplicação da condição (“gauge”) de Lorentz, a qual assume $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$. Tais transformações não alteram as soluções da Equação 2.1, ou seja, os campos são invariantes sob estas transformações, mantendo suas características inerentes. Portanto, a utilização das mesmas não altera os resultados físicos do problema, e a Equação 2.1 assume a forma

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.5a)$$

ou, no vácuo, onde $T_{\mu\nu} = 0$, tem-se

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.5b)$$

onde $\square^2 = -\partial_0^2 + \nabla^2$ é o operador D’Alambertiano.

As equações 2.5a e 2.5b representam equações tensoriais de onda, cujas soluções têm a forma $\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{[ik(z-ct)]}$, e denotam ondas monocromáticas, que se propagam na geometria do espaço-tempo, em uma direção qualquer, z , com velocidade, c , frequência angular, $\omega = kc$, e número de onda, k , às quais dá-se o nome de **ondas gravitacionais**.

4 Lembrando que $h_{\mu\nu,\rho} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\rho} h_{\mu\nu} \equiv \partial_\rho h_{\mu\nu}$.

Definido o tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad , \quad (2.6)$$

a Equação 2.1 pode ser escrita como

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} G_{\mu\nu} \quad . \quad (2.7)$$

Tal representação (eq. 2.7) permite compará-la à Lei de Hooke, $P = Eh$, onde P , E e h representam, respectivamente a pressão aplicada, o módulo de elasticidade do meio (módulo de Young) e a deformação linear. Por analogia, pode-se concluir que o espaço não é **infinitamente** rígido, como propõe a Física Newtoniana, mas sim **extremamente** rígido ($\log E \approx 42.7$, no SI) [6,7]. Assim, durante a passagem de uma onda gravitacional a estrutura do espaço-tempo oscila segundo a perturbação $h_{\mu\nu}(t)$.

É conveniente adotar-se o referencial da onda (ct', x', y', z') , com a finalidade de simplificar a análise do tensor perturbação, $h_{\mu\nu}$. A escolha deste referencial possibilita que o tensor perturbação torne-se transverso e sem traço (“gauge TT”), ou seja, a direção da oscilação evidencia-se perpendicular ao vetor da onda, tem ação nula no eixo do tempo e a amplitude da oscilação alterna-se nos demais eixos perpendiculares. Para se obter a forma TT para a perturbação é necessário que se defina um tensor $P_{\mu\nu}$, que atuará como um operador de projeção, o qual é expresso como [8]

$$P_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu \quad . \quad (2.8)$$

Tal operador projeta vetores em um plano ortogonal ao vetor unitário n_μ , que por sua vez é escolhido de forma que sua direção coincida com a direção de propagação da onda. Fazendo com que esta coincida com a direção z do sistema de referência da onda, tem-se

$$n_0=0 \quad , \quad n_j=\frac{k_j}{\omega} \quad . \quad (2.9)$$

Então, as componentes transversais de $h_{\mu\nu}$ são projeções representadas por $P_\mu^\rho P_\nu^\sigma h_{\rho\sigma}$, e a forma TT da perturbação é obtida pela relação

$$h_{\mu\nu}^{TT} = P_\mu^\rho P_\nu^\sigma h_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} P_{\mu\nu} P^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \quad . \quad (2.10)$$

Esta pode ser expressa em sua forma matricial como

$$\left[h_{\mu\nu}^{TT} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{yx} & -h_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (2.11)$$

Ao adotar-se esta configuração, o tensor de Riemann assume a forma

$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2} h_{ij,00}^{TT} \quad . \quad (2.12a)$$

ou, em particular,

$$R_{x0x0} = -R_{y0y0} = -\frac{1}{2} \ddot{h}_+ \left(t - \frac{z}{c} \right) \quad , \quad (2.12b)$$

$$R_{x0y0} = R_{y0x0} = -\frac{1}{2} \ddot{h}_\times \left(t - \frac{z}{c} \right) \quad , \quad (2.12c)$$

onde $h_{xx} = -h_{yy} \equiv h_+ = \Re \left(A_+ e^{-i[\omega(t-z/c) + \phi_+]} \right)$ e $h_{xy} = h_{yx} \equiv h_\times = \Re \left(A_\times e^{-i[\omega(t-z/c) + \phi_\times]} \right)$ são as amplitudes dos estados independentes de polarização da onda gravitacional, os quais chamaremos + (“mais”) e \times (“xis”), ϕ_+ e ϕ_\times representam os ângulos de fase

respectivos, e, ω , a frequência angular da onda.

Uma onda gravitacional não tem efeito sobre um único ponto. Em outras palavras, a perturbação não gera acelerações absolutas, só relativas. Então, é necessário utilizar-se, por exemplo, de um círculo de massas de teste para mostrar o efeito de cada uma das polarizações, apresentados na Figura 2.1.

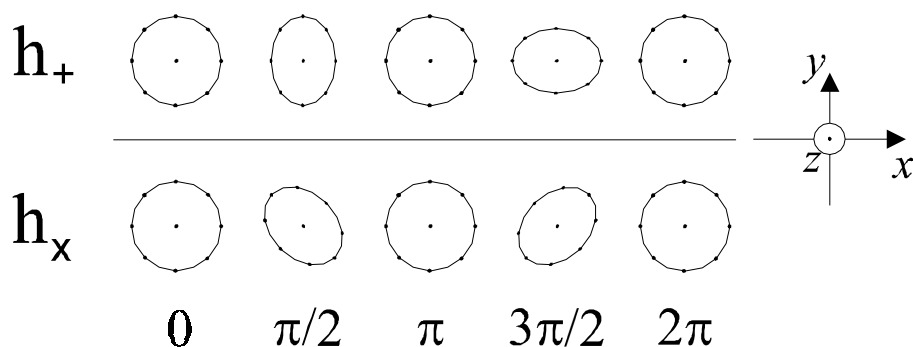


Fig. 2.1. Efeito de uma onda gravitacional sobre um círculo de partículas testadoras ao longo de um ciclo. A direção de propagação é perpendicular ao plano do papel e aponta para o observador.

Nota-se que as polarizações apresentadas pela radiação gravitacional são separadas por um ângulo espacial de 45° , enquanto no caso da radiação eletromagnética este ângulo é de 90° . O campo eletromagnético também possui dois estados de polarização independentes descritos no plano, cada qual invariante sob uma rotação ϑ de 360° no plano xy , e sua quantização baseia-se no fóton, uma partícula com massa nula e spin $S=1$ (onde, $S=360^\circ/\vartheta$). Aplicando-se a mesma análise ao campo gravitacional, conclui-se que os estados de polarização são invariantes sob rotação 180° no plano xy (Figura 2.1). Então, a partícula a ele associada – o gráviton, que também possui massa nula – possui spin $S=2$.

2.2. GERAÇÃO DE ONDAS GRAVITACIONAIS

Similarmente à radiação eletromagnética, a radiação gravitacional é produzida por “cargas” aceleradas, sendo que, no caso gravitacional, as “cargas” são dadas pelas massas. Ao considerar-se um sistema gerador de ondas gravitacionais, para um observador localizado em um ponto longe o suficiente do mesmo, a Equação 2.5a apresenta soluções com a forma [8]

$$h_{\mu\nu}(t) = \frac{4G}{rc^4} \int T_{\mu\nu}\left(t - \frac{r}{c}\right) d^3x, \quad (2.13)$$

onde r é a distância entre o ponto em que deseja-se estimar $h_{\mu\nu}$ e a fonte geradora da radiação gravitacional, x_μ é o sistema de coordenadas adotado e o termo $(t - r/c)$ denota o tempo retardado. Ao admitir-se que a fonte possui densidade de repouso ρ_0 , e é não-relativística ($v_i \ll c$), obtém-se, por uma aproximação Newtoniana, que

$$T_{00} \approx \rho_0 c^2 + \rho_0 \frac{v^2}{2} \quad (2.14a)$$

$$T_{ij} \approx \rho_0 v_i v_j \quad (2.14b)$$

Supondo-se que as acelerações relativas internas do sistema são pequenas, torna-se válida, também, a aproximação

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int T_{00} x_i x_j d^3x \right) \approx 2c^2 \int T_{ij} d^3x. \quad (2.15)$$

Então, neste caso,

$$h_{ij} = \frac{2G}{rc^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \rho_0 x_i x_j d^3x \right), \quad (2.16)$$

onde o termo entre parêntese é definido como o momento quadrupolar I_{ij} da densidade de energia da fonte.

Quando se opta por adotar o “gauge” TT para ajustar a forma da perturbação (h_{ij}^{TT}) é necessário, para que seja mantida a consistência das relações, que o momento quadrupolar siga o mesmo padrão. Para tanto, pode-se, inicialmente, tomar o momento quadrupolar reduzido, definido por

$$\mathcal{I}_{ij} = \int T_{00}(x_i x_j - \delta_{ij} x_k^2) d^3 x \quad . \quad (2.17)$$

Supondo-se um vetor \mathbf{d} transverso à direção \mathbf{r} que liga o observador à fonte, definido como $d_i^T \equiv P_{ij} d_j$, pode ser obtida a forma TT do momento quadrupolar, expressa como

$$I_{ij}^{TT} = P_{il} P_{jm} \mathcal{I}_{lm} - \frac{P_{ij} P_{lm} \mathcal{I}_{lm}}{2} \quad . \quad (2.18)$$

E, portanto,

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{r} \frac{1}{c^4} \ddot{I}_{ij}^{TT} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad . \quad (2.19)$$

Uma onda gravitacional carrega energia, que é utilizada para deformar o espaço-tempo. Então, a Equação 2.7 deve ser modificada quando há a presença de radiação gravitacional, no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$), assumindo a forma

$$G_{\mu\nu} - \frac{8\pi G}{c^4} t_{\mu\nu} = 0 \quad (2.20)$$

onde $t_{\mu\nu}$ corresponde ao tensor momento-energia carregado pela onda gravitacional, que, por sua vez pode ser representado segundo seu termo espacial

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{OG}, \quad (2.21)$$

onde $G_{\mu\nu}^{OG}$ refere-se a como a energia carregada pela onda contribui para a métrica local.

Calculando o valor do tensor $t_{\mu\nu}$, através das expressões 2.3, 2.6 e 2.21, obtém-se

$$t_{00} = \frac{c^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle. \quad (2.22)$$

E, sabendo-se que o fluxo de energia é dado por $F = ct_{00}$ [9], chega-se a

$$F_{OG} = \frac{c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad (2.23a)$$

ou

$$F_{OG} = \frac{c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle = \frac{G}{8\pi r^2 c^5} \langle \ddot{I}_{ij}^{TT} \ddot{I}_{ij}^{TT} \rangle \quad (2.23b)$$

A Equação 2.23b indica que se $\ddot{I}_{ij} \neq 0$ haverá fluxo de radiação gravitacional, sendo esta a condição necessária e suficiente para que um sistema físico emita ondas gravitacionais.

De 2.23b pode-se deduzir a luminosidade da fonte, chegando-se a

$$L_{OG} = r^2 \int F_{OG} d\Omega = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{I}_{ij}^{TT} \ddot{I}_{ij}^{TT} \rangle. \quad (2.24)$$

Como exemplo da geração de radiação gravitacional, pode-se supor um sistema composto por duas massas pontuais, M_1 e M_2 , em órbita circular com raio a , uma em torno da outra, sendo a_1 e a_2 as distâncias respectivas entre as massas e o centro de massa (0) do sistema, como mostra a Figura 2.2 [10].

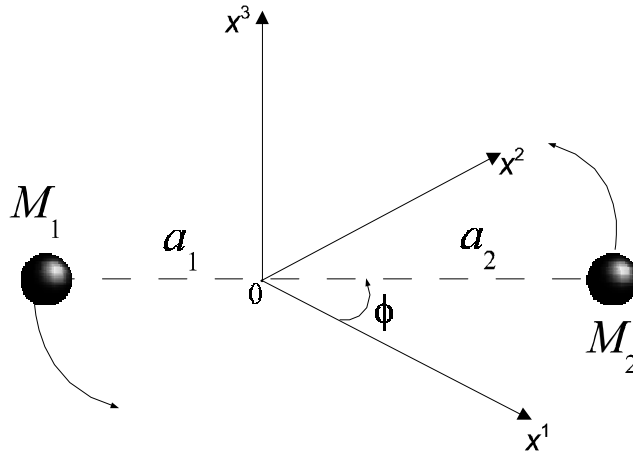


Fig. 2.2. Sistema binário emissor de ondas gravitacionais.

Tem-se que $M_1 a_1 = M_2 a_2 = \mu a$, onde $a = a_1 + a_2$ e $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$, a massa reduzida do sistema, e que $M_1 a_1^2 + M_2 a_2^2 = \mu a^2$. Então,

$$\dot{I}_{xx} = -\dot{I}_{yy} = \frac{1}{2} \mu a^2 \cos 2\phi + \text{constante} \quad , \quad (2.25a)$$

$$\dot{I}_{xy} = \dot{I}_{yx} = \frac{1}{2} \mu a^2 \sin 2\phi + \text{constante} \quad , \quad (2.25b)$$

$$\dot{I}_{zz} = 0 \quad , \quad (2.25c)$$

onde $\phi = \omega_{orb} t$, sendo ω_{orb} a velocidade angular orbital. Substituindo-se as equações 2.25 em 2.24, obtém-se

$$L_{OG} = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \omega_{orb}^6 \mu^2 a^4 \quad (2.26)$$

É fácil perceber que o fator G/c^5 torna o valor numérico da luminosidade, no espectro gravitacional, bastante reduzido ($\log(G/c^5) \approx -52.6$, no SI). Contudo, é possível mostrar que sob condições especiais, esta emissão pode ter um valor expressivo. Pode-se

supor um sistema não-composto cujas dimensões estejam próximas ao raio de Schwarzschild, [7]

$$r_{Sch} \approx \frac{2GM}{c^2} \rightarrow M \approx \frac{r_{Sch} c^2}{2G} , \quad (2.27)$$

como, por exemplo, tomando $a=2r_{Sch}$. Fazendo $\mu=M/2$ e $\omega=v/r_{Sch}$, a Equação 2.26 fica

$$L_{OG} \approx \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \left(\frac{v}{c} \right)^6 . \quad (2.28)$$

Nota-se que sistemas com características semelhantes às sugeridas para obter-se 2.28 fazem com que o fator, que outrora reduzia a luminosidade, seja invertido. Desta forma, fontes cujas dimensões aproximem-se de seus raios gravitacionais (r_{Sch}) convertem uma quantidade considerável de energia em forma de energia gravitacional. Uma visão mais detalhada dos sistemas astrofísicos com estas características será apresentada no Capítulo 3.

2.3. INTERAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS COM A MATÉRIA

Como visto anteriormente, uma onda gravitacional deforma o espaço-tempo e, para isto, fornece energia para o mesmo. Então, quando uma onda gravitacional passa ela produz um campo de densidade de forças, [11]

$$f_i^{OG}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \rho \sum_j \frac{\partial^2 h_{ij}(t)}{\partial t^2} x_j , \quad (2.29)$$

sobre um determinado material, localizado em uma posição \mathbf{x}_i , representada em um sistema de referência arbitrariamente escolhido (é conveniente que se escolha um cuja origem coincida com o centro de massa do detector em questão e com o mesmo tempo

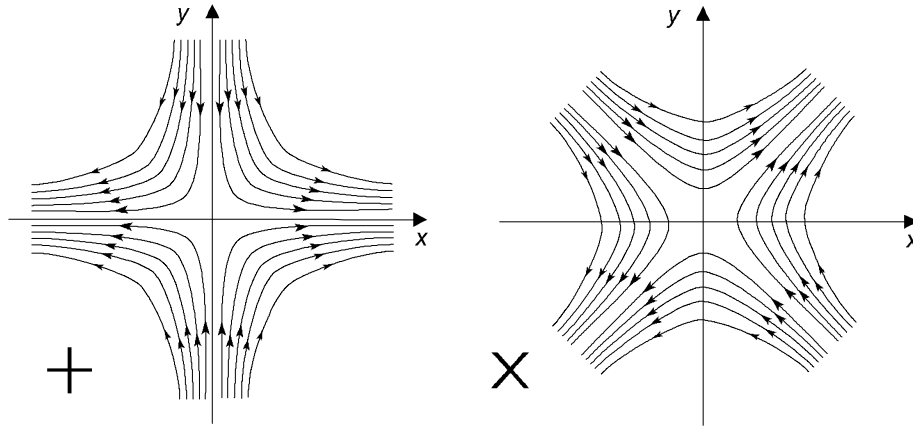


Fig. 2.3. Campo de acelerações para os dois estados de polarização quando o ângulo de fase é nulo.

próprio do laboratório). Tais forças estão relacionadas ao efeito de maré causado pela onda gravitacional, cujo campo de acelerações referente às polarizações é mostrado na Figura 2.3.

Pode-se representar este campo de densidade de forças como um gradiente de um potencial escalar, $\Phi(\mathbf{x}, t)$, assumindo a forma

$$f_i^{OG}(\mathbf{x}, t) = \nabla_i \Phi(\mathbf{x}, t) = \nabla_i \left(\sum_{j,k} \frac{1}{4} \rho x_j \ddot{h}_{jk}(t) x_k \right) . \quad (2.30)$$

A Equação 2.30 mostra que existe uma dependência espacial quadrática entre o campo de força gravitacional e o potencial escalar. Uma alternativa para contornar as dificuldades na resolução do problema, decorrentes desta dependência, é a utilização de uma representação adequada, onde a mesma possa ser separada em partes radiais e angulares. Os harmônicos esféricos aparecem com uma solução conveniente. O produto $x_j x_k$ pode ser expresso em termos de harmônicos esféricos Y_{lm} de ordem l e grau m . Sendo que apenas os harmônicos esféricos com $l=0$ e $l=2$ – que representam os modos monopulares e quadrupolares, respectivamente – podem ser excitados por uma onda gravitacional em qualquer que seja a teoria métrica de gravitação considerada [12]. A Teoria da Relatividade Geral (TRG) prevê que somente os modos multipolares, a partir

dos quadrupolares, são excitados⁵ por ondas gravitacionais. Neste trabalho, a atenção será voltada aos modos quadrupolares.

Aos harmônicos esféricos quadrupolares são associados $m=-2, \dots, 2$ modos normais de oscilação, os quais são denotados por $Y_{2m}(\theta, \phi)$. Tais harmônicos esféricos são representados por números complexos [13], mas, quando convenientemente combinados conduzem aos **harmônicos esféricos reais**, agora denotados simplesmente por $Y_m(\theta, \phi)$, com $m=1, \dots, 5$. As expressões para os harmônicos esféricos reais, bem como as combinações necessárias para obtê-los encontram-se na Tabela 2.1, nos sistemas de coordenadas cartesianas e esféricas.

TABELA 2.1. EXPRESSÕES PARA OS HARMÔNICOS ESFÉRICOS QUADRUPOLARES REAIS, Y_m

Harmônico Esférico Y_m	Dependência linear em Y_{2m}	Coordenadas Cartesianas	Coordenadas Esféricas
Y_1	$\sqrt{\frac{1}{2}}(Y_{22} + Y_{2-2})$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \frac{(x^2 - y^2)}{r^2}$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \sin^2 \theta \cos 2\phi$
Y_2	$\sqrt{\frac{1}{2}}i(Y_{2-2} - Y_{22})$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \frac{2xy}{r^2}$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \sin^2 \theta \sin 2\phi$
Y_3	$\sqrt{\frac{1}{2}}i(Y_{21} + Y_{2-1})$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \frac{2yz}{r^2}$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \sin 2\theta \sin \phi$
Y_4	$\sqrt{\frac{1}{2}}(Y_{2-1} - Y_{21})$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \frac{2xz}{r^2}$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \sin 2\theta \cos \phi$
Y_5	Y_{20}	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \frac{(3z^2 - r^2)}{r^2 \sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{15}{16\pi}} \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{\sqrt{3}}$

Sob esta representação, pode-se obter uma expressão para o potencial escalar que depende apenas das amplitudes h_+ e h_x e da direção de propagação, dada por [11]

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\pi}{15}} \rho r^2 \sum_m \ddot{h}_m(t) Y_m(\theta, \phi) \quad , \quad (2.31)$$

5 Devido às Leis de Conservação e ao fato de não existirem massas negativas, não existem monopolo nem dipolo gravitacional, na TRG.

onde as amplitudes esféricas $h_m(t)$, correspondem ao campo gravitacional local, e são denotadas por [14]

$$h_1(t, \beta, \gamma) = h_+(t) \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \beta) \cos 2\gamma + h_\times(t) \cos \beta \sin 2\gamma \quad , \quad (2.32a)$$

$$h_2(t, \beta, \gamma) = -h_+(t) \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \beta) \sin 2\gamma + h_\times(t) \cos \beta \cos 2\gamma \quad , \quad (2.32b)$$

$$h_3(t, \beta, \gamma) = -h_+(t) \frac{1}{2} \sin 2\beta \sin \gamma + h_\times(t) \sin \beta \cos \gamma \quad , \quad (2.32c)$$

$$h_4(t, \beta, \gamma) = h_+(t) \frac{1}{2} \sin 2\beta \cos \gamma + h_\times(t) \sin \beta \sin \gamma \quad , \quad (2.32d)$$

$$h_5(t, \beta) = h_+(t) \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin^2 \beta \quad . \quad (2.32e)$$

É interessante frisar que ao ajustar-se o eixo x do sistema referencial do laboratório para que aponte para o sul, e o eixo z para que coincida com o zênite local, a distância zenital e azimutal de uma possível fonte será dada pelos valores dos ângulos β e γ , respectivamente. Porém, precisão na determinação da localização de uma fonte restringe-se a um único hemisfério, portanto, fontes distintas em posições opostas numa mesma direção permanecerão indistinguíveis [8].

CAPÍTULO 3

FONTES ASTROFÍSICAS DE RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

Alguns sistemas astrofísicos aparecem como fortes candidatos a serem observados no espectro das ondas gravitacionais, por possuírem as características mencionadas na Seção 2.2. Tais fontes são caracterizadas basicamente pela amplitude h nas duas polarizações ($h^2 = h_+^2 + h_x^2$) e pelo fluxo F_{OG} detectado na Terra, ou ainda pela luminosidade L_{OG} , que denota a taxa de energia que o sistema converte em radiação gravitacional. Presumindo-se uma fonte que irradia ondas gravitacionais isotropicamente, da Equação 2.25, obtém-se a relação

$$L_{OG} = 4\pi r^2 F_{OG} \quad . \quad (3.1)$$

E, por sua vez o fluxo de radiação gravitacional que banha um detector alojado em um laboratório situado na Terra é dado por [15]

$$F_{OG} \approx 30 \left(\frac{f}{10^3 \text{ Hz}} \right)^2 \left(\frac{h}{10^{-20}} \right)^2 \text{ Wm}^{-2} \quad . \quad (3.2)$$

Eventos ocorridos a distâncias mais próximas que o centro do aglomerado de galáxias de Virgo, que correspondam a $h \sim 10^{-21}$, e na frequência de 1 kHz , apresentam um fluxo aproximado de $0,3 \text{ Wm}^{-2}$. Isto corresponde a cerca de 10^{20} vezes o fluxo apresentado por fontes astrofísicas típicas em rádio [6]. Porém, verifica-se que somente eventos de curta duração podem liberar energia suficiente para atingir tais valores. Assim, mostra-se útil uma classificação para as fontes astrofísicas de radiação gravitacional baseada em seus comportamentos temporais. Elas costumam ser classificadas em três grupos distintos, que implicarão métodos diferenciados de processamento e extração do sinal.

O primeiro grupo abrange as **fontes impulsivas**, ou **sinais “bursts”**, e ocupa uma larga

região do espectro das ondas gravitacionais. Seus representantes caracterizam-se pela curta duração dos eventos geradores de radiação gravitacional, e por possuírem poucos ciclos coerentes. Este grupo envolve eventos como a coalescência de sistemas binários formados por objetos compactos e a formação de buracos negros e estrelas de nêutrons através de supernovas.

O segundo grupo é composto pelas chamadas **fontes de banda fina**, ou **de sinais contínuos**, ou ainda denominadas **fontes periódicas**. Este grupo inclui estrelas de nêutrons axi-assimétricas (não simétricas axialmente), em particular pulsares com altas taxas de rotação, estrelas de nêutrons que estão acretando matéria, e sistemas binários distantes da coalescência. Normalmente, estas fontes apresentam-se mais fracas do que as impulsivas, porém, a possibilidade de se integrar o sinal ao longo do tempo apresenta-se como uma vantagem, no que diz respeito a extração de sinal do ruído.

O terceiro grupo é composto pelo **“stochastic background”**, ou **fontes estocásticas**. Estes sinais são provenientes, por exemplo, do efeito integrado de fontes periódicas fracas em nossa Galáxia, de sinais impulsivos oriundos de grandes distâncias, ou ainda, de processos cosmológicos ocorridos nos primeiros instantes do Universo. Caracterizam-se por uma distribuição aleatória de sinais, cuja extração do sinal imerso no ruído instrumental de um detector é extremamente laboriosa.

Neste capítulo serão descritas algumas fontes representativas de cada um dos três grupos.

3.1. FONTES IMPULSIVAS

Este grupo de fontes pode ser subdividido em duas classes: *normais*, que apresentam um h_{ij}^{TT} nulo antes do evento e seu valor retorna a zero após o término do mesmo, e *com memória*, quando h_{ij}^{TT} é inicialmente nulo, e, após o evento, mantém um valor constante não-nulo Δh_{ij}^{TT} .

Uma fonte impulsiva tem frequência característica, f_c , dependente do tempo de duração, τ_c , do fenômeno gerador, dada por

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau_c}, \quad (3.3)$$

e que representa a frequência onde ocorre o pico na distribuição espectral. A amplitude característica, h_c , que se refere à amplitude da onda que banha um detector, na frequência f_c , pode ser estimada ao considerar-se que o “pulso” é aproximadamente gaussiano, obtendo-se [16]

$$h_c \simeq 2,7 \times 10^{-20} \left(\frac{\Delta E_{OG}}{M_\odot c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 \text{ kHz}}{f_c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{10 \text{ Mpc}}{r} \right), \quad (3.4)$$

onde 10 Mpc representa a distância ao Aglomerado de Galáxias Virgo (assumindo $H_0 = 100 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, para a constante de Hubble), e ΔE_{OG} a energia convertida em radiação gravitacional.

Os valores tanto da quantidade de energia emitida em forma de ondas gravitacionais quanto da frequência característica dependem de propriedades inerentes ao sistema. Portanto, diferentes tipos de eventos astrofísicos preenchem diferentes regiões do espectro, cada um deles com diferentes formas de onda. Então, faz-se necessária uma rápida explanação sobre os mais importantes candidatos à detecção, pertencentes a este grupo, e suas características fundamentais.

3.1.1. Supernova

Acredita-se, com um alto grau de confiança, que uma supernova do tipo II seja proveniente do colapso gravitacional de estrelas massivas e evoluídas em objetos compactos como uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. Supernovas do tipo I, por sua vez, são decorrentes de explosões nucleares ocorridas na superfície de uma

estrela anã branca em um sistema binário, sobre a qual a companheira deposita material, sendo que a anã branca pode, ou não, colapsar para uma estrela de nêutrons.

A taxa de ocorrência observacional destes eventos em nossa galáxia é de uma do tipo I e uma do tipo II a cada 40 anos. Enquanto que, se a distância de rastreamento é ampliada ao aglomerado de Virgo, a taxa de ocorrência destes eventos sobe para um por ano ($eventos/ano \propto r^3$) [16].

A energia máxima que pode ser liberada por uma supernova é

$$\Delta E_{OG} = 0.3 Mc^2 \quad , \quad (3.5)$$

mas, normalmente, apenas uma pequena fração desta energia é emitida em ondas gravitacionais durante e pouco tempo após o colapso. E, mesmo que a maior parte desta energia seja convertida em radiação gravitacional, a Equação 3.4 prevê resultados como $h_c \sim 10^{-20}$ para $r \sim 10 Mpc$. Isto mostra que mesmo eventos desta natureza produzem ondas com amplitudes bastante pequenas, minimizando as chances de detecção. Um indicador de detectabilidade destes fenômenos – mais importante que a quantidade de energia irradiada em forma de ondas gravitacionais – é a razão sinal-ruído, dada por

$$\frac{S}{N} = \frac{h_c}{h_N(f_c)} \quad , \quad (3.6)$$

onde $h_N(f_c)$ corresponde à amplitude do ruído na frequência f_c . Portanto, ao reduzir-se o valor de $h_N(f_c)$ a níveis menores que h_c torna-se possível a detecção de ondas gravitacionais oriundas de fontes distantes.

Ruffini e Wheeler listaram alguns dos processos que contribuem para a geração de radiação gravitacional em uma supernova [17]:

- 1) A implosão inicial da estrela deve ser assimétrica, quanto maior o coeficiente de assimetria maior será o momento quadrupolar da fonte;

- 2) Fragmentação do núcleo em grandes pedaços devido à rotação e ao alto grau de achatamento durante o colapso. O achatamento, decorrente de um colapso assimétrico, pode excitar os modos da estrela de nêutrons, ou do buraco negro formado a partir da supernova;
- 3) Órbitas subseqüentes de um pedaço em torno do outro. Fragmentos orbitando entre si geram um valor $\Delta h_{ij}^{TT} \neq 0$, caracterizando um sinal impulsivo com memória;
- 4) Coalescência e colisão dos pedaços, criando uma cadeia de eventos e fazendo com que mais momento angular seja carregado para fora do sistema pelas ondas gravitacionais;
- 5) O surgimento de estrela(s) de nêutrons fora do núcleo ou nos pedaços.

Considerando uma estrela de nêutrons recém-formada com alta taxa de rotação, e modelada como um elipsóide axi-assimétrico, Lai e Shapiro mostraram que a amplitude característica da onda gravitacional durante a evolução de um esferóide de Maclaurin para um elipsóide de Dedekind é dada (com 20% de precisão) por [18]

$$h_c \sim 1,8 \times 10^{-22} \left(\frac{10 \text{ Mpc}}{R} \right) \left(\frac{M}{10 M_\odot} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{r}{10 \text{ km}} \right) f^{\frac{1}{2}}, \quad (3.7)$$

sendo R e M o raio e a massa da estrela, respectivamente, e r a distância entre a fonte e o detector.

Durante o colapso gravitacional podem ocorrer instabilidades dinâmicas axi-assimétricas que acarretam deformações na estrela recém-formada, achatando-a e fazendo com que esta perca massa e momento angular. Tais instabilidades afetam os modos $e^{\pm 2i\phi}$, chamados de “modos barra”, que são comumente parametrizados por $\beta \equiv K/|U|$, onde K e U representam, respectivamente, a energia cinética de rotação e a energia potencial

TABELA 3.1. AMPLITUDE MÁXIMA E FREQUÊNCIA CARACTERÍSTICA
DA ONDA GRAVITACIONAL GERADA PELOS MODOS BARRA
EM ESTRELAS DE NÊUTRONS RECÊM-FORMADAS, PARA DOIS VALORES
REPRESENTATIVOS DOS RAIOS EQUATORIAIS

R_{eq}	10 km	20 km
$\max h _{VL}$	$(5 - 6) \times 10^{-19}$	$(2 - 3) \times 10^{-19}$
$\max h _{GL}$	$(8 - 9) \times 10^{-21}$	$(4 - 5) \times 10^{-21}$
$\max h _{AV}$	$(4 - 5) \times 10^{-22}$	$(2 - 3) \times 10^{-22}$
f_c (Hz)	$(3000 - 3500)$	$(1100 - 1300)$

Fonte: Houser [19].

A massa do núcleo adotada é $M = 1,4 M_{\odot}$. As amplitudes máximas são obtidas através da consideração de fontes localizadas na Via Láctea (VL), no Grupo Local (GL), e no Aglomerado de Virgo (AV). Os limites inferior e superior devem-se aos valores adotados para o parâmetro de energia inicial $\beta_i \sim 0,28$ e $\beta_i \sim 0,34$, respectivamente.

gravitacional [19]. Modelos que utilizam $\beta_i \gtrsim 0,28$ mostram que (4–21)% e (14–62)% da massa e do momento angular, respectivamente, podem ser expelidos pelo(s) braço(s) espiral(is) [20]. Tanto a duração do evento quanto a amplitude e a frequência característica do sinal gravitacional são sensíveis ao parâmetro β_i . Em objetos com frequências de rotação elevadas, é esperado que durante a fase elipsoidal jacobiana, a amplitude característica pode ser estimada por [15]

$$h_c \sim 2,7 \times 10^{-20} \left(\frac{10 Mpc}{R} \right) \left(\frac{M}{1,4 M_{\odot}} \right)^{\frac{2}{4}} \left(\frac{r}{10 km} \right) f^{-\frac{1}{5}} . \quad (3.8)$$

Como pode ser percebido pela análise da Tabela 3.1, e pela Equação 3.8, supernovas que resultam em estrelas de nêutrons com altas taxas de rotação podem aparecer como fontes intensas de radiação gravitacional. Mas, como foi apresentado no início desta seção, estes eventos raramente ocorrem nos limites de nossa galáxia. Então, para que alguns destes eventos possam ser detectados no decorrer de um ano, a sensibilidade dos

detectores atuais deve atingir $h \lesssim 10^{-22}$.

Levando-se em conta que os colapsos gravitacionais podem também formar buracos negros, o tempo de duração destes eventos pode ser estimado com mais precisão. Assumindo-se que o tempo característico, associado à emissão de radiação gravitacional, é dado pelo tempo que a onda gravitacional leva para viajar uma distância $d = 2 r_{Sch}$, em uma região em um campo gravitacional intenso, obtém-se

$$\tau_c \equiv \frac{d}{c} = \frac{4GM}{c^3} . \quad (3.9)$$

A Equação 3.9 implica (por 3.3) que ondas gravitacionais produzidas neste tipo de evento devem ter frequência característica

$$f_c = \frac{c^3}{8\pi GM} \sim 1,3 \times 10^4 \left(\frac{M_\odot}{M} \right) . \quad (3.10)$$

Assim, buracos negros com massas $M \lesssim 10 M_\odot$ devem irradiar energia gravitacional em frequências na faixa de kiloHertz.

A amplitude característica da onda gravitacional emitida no colapso gerador de um buraco negro também depende de quão assimétrico é o colapso. Mas, tanto o grau de assimetria quanto a frequência de ocorrência deste tipo de colapso não são completamente conhecidos. Estima-se que a taxa de formação de buracos negros com baixa massa é de, aproximadamente, 1/3 da taxa de formação de estrela de nêutrons [16]. Assim, colapsos que gerem buracos negros com massa da ordem de $10^6 M_\odot$ só têm ocorrência prevista em núcleos galácticos e a uma taxa de poucos por ano dentro do Universo observado. Já a amplitude característica pode ser estimada por [15]

$$h_c \sim 5 \times 10^{-21} \left(\frac{1 \text{ kHz}}{f_c} \right) \left(\frac{10 \text{ Mpc}}{r} \right) \left(\frac{\epsilon}{10^{-3}} \right)^{\frac{1}{2}} , \quad (3.11)$$

onde $\epsilon = \Delta E_{GW} / M_{\odot} c^2$ é a eficiência da conversão de energia em radiação gravitacional. Para colapsos axissimétricos, o valor de ϵ provavelmente não excede 7×10^{-4} [6]. Então, colapsos ocorridos nos limites do aglomerado de Virgo apresentariam uma amplitude da ordem de 10^{-21} na Terra.

Por ser impossível se obter informações após o colapso através do espectro eletromagnético (a menos da existência de disco de acreção), o que se sabe destes objetos é puramente teórico. O advento da astrofísica de ondas gravitacionais poderá trazer informações jamais obtidas sobre tais objetos.

3.1.2. Espiralação e Coalescência de Objetos Compactos

Existem inúmeros sistemas binários espalhados nas variadas escalas do Universo. Alguns destes sistemas devem ser formados por objetos compactos como estrelas de nêutrons e buracos negros. E, se seus componentes estiverem bastante próximos um do outro, o sistema coalescerá “rapidamente” por perder energia pela emissão de radiação gravitacional. Isto foi provado por Taylor e Hulse, quando utilizaram-se da emissão de ondas gravitacionais para explicar o decaimento do período orbital do pulsar binário PSR1913+16 [21]. Este pulsar, estudado desde 1975, apresenta uma taxa de decaimento do período orbital consistente com as previsões da Teoria da Relatividade Geral, para a emissão de ondas gravitacionais ($d\tau/dt = -2,4 \times 10^{-12}$). Segundo esta taxa de decaimento, o sistema irá coalescer daqui a $3,5 \times 10^8$ anos [8]. A Figura 3.1 mostra o decaimento do período da órbita expressa pelo atraso de fase em segundos. A linha curva refere-se ao previsto pela Relatividade Geral, e a linha horizontal pontilhada corresponde ao atraso nulo.

As observações do pulsar binário PSR1913+16 forneceram informações sem precedentes sobre as ondas gravitacionais. Os parâmetros orbitais do sistema binário, incluindo as massas do pulsar e de sua companheira, puderam ser determinados. Outras interessantes aplicações dos dados têm também sido exploradas, como por exemplo, a determinação

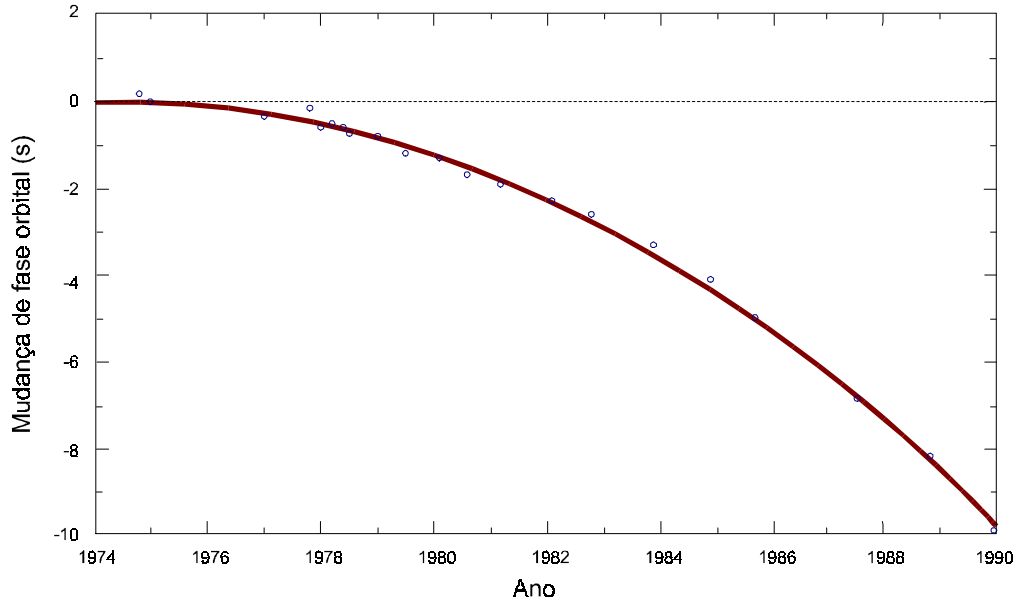


Fig. 3.1. Medidas do atraso de fase do pulsar PSR1913+16 [8,21].

do limite superior para a densidade de energia de um fundo de ondas gravitacionais de frequência muito baixa.

Sistemas binários compactos emitem ondas gravitacionais periódicas, cujas frequências varrem o espectro atingindo seus valores máximos quando estão próximos à coalescência, sendo [16]

(i) $f_{max} \simeq 1 \text{ kHz}$, para estrelas de nêutrons e;

(ii) $f_{max} \simeq \frac{10 \text{ kHz}}{M_1/M_\odot}$, para buracos negros em que o maior tem massa M_1 .

Já a amplitude característica da onda na fase de espiralação é [15]

$$h_c = 4,1 \times 10^{-22} \left(\frac{\mu}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{100 \text{ Mpc}}{r} \right) \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f_c} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad (3.12)$$

onde M e μ são, respectivamente, a massa total e massa reduzida do sistema.

Lai e Shapiro mostraram que a interação gravitacional entre duas estrelas de nêutrons pode causar instabilidades hidrodinâmicas, que aceleram significativamente a coalescência dos objetos quando estes se encontram suficientemente próximos um do outro. O modelo, que leva em conta a hidrodinâmica dissipativa do sistema, prevê redução no tempo de coalescência e aumento da amplitude h em sistemas com viscosidade não-nula, como mostra a Figura 3.2 [22].

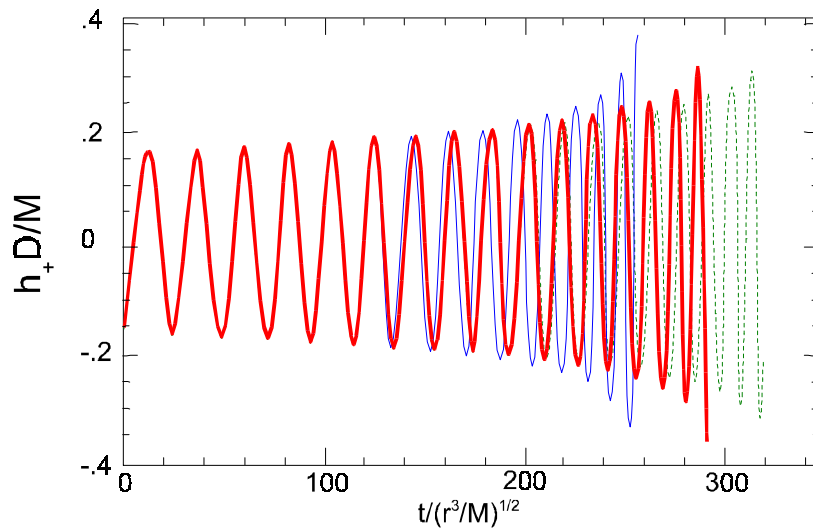


Fig. 3.2. Forma de onda da coalescência de um sistema binário formado por estrelas de nêutrons, onde $D \equiv t$. A linha grossa corresponde à viscosidade nula. Na linha fina assume-se uma viscosidade cinética $\nu_c = 0,5(M/r)^{1/2}$. Na linha pontilhada considera-se massas pontuais [1].

A taxa de ocorrência deste tipo de sistema é muito pequena. Uma estimativa mais otimista foi apresentada por Tutukov e por Yamaoka. Utilizando-se de modelos de evolução estelar, mostraram que a taxa a uma distância de $200 Mpc$ gira em torno de 100/ano (considerando-se $H_0 \sim 66 \text{ kms}^{-1} Mpc^{-1}$) [23,24].

3.1.3. Queda de Estrelas e Pequenos Buracos Negros no interior de Buracos Negros Supermassivos

Observações recentes dão indícios da existência de buracos negros supermassivos ($M \geq 10^6 M_{\odot}$) no centro das galáxias. Um exemplo provável é NGC 3115, cujos sinais observacionais sugerem a existência de um buraco negro com massa $M \sim 2 \times 10^9 M_{\odot}$ no seu interior [25]. Existe, portanto, a possibilidade de que os mesmos sofram acreção de matéria, aumentando suas dimensões em escalas de tempo da ordem de 10^8 anos [16]. Alguns objetos podem orbitar próximos o suficiente, a tal ponto de transferirem matéria, ou mesmo podem mergulhar dentro dos buracos negros, ou ainda serem espalhados pela forte aceleração do campo gravitacional (efeito catapulta). Em um raio $r \sim 10 \text{ Mpc}$ temos uma probabilidade considerável de que existam galáxias que apresentem estas características.

A forma de onda emitida por uma estrela ou um pequeno buraco negro que “ricocheteia”, ou mergulha em um buraco negro supermassivo pode ser modelada com bastante precisão utilizando-se formalismo de perturbação. A frequência e a amplitude característica da onda gerada, segundo este modelo, são dadas, respectivamente, por [16]

$$f_c \simeq \frac{1}{20M_1} = \left(\frac{10^8 M_{\odot}}{M_1} \right) \times 10^{-4} \text{ Hz} \quad \text{e} \quad (3.13)$$

$$h_c \simeq \frac{M_2}{2r} = 2 \times 10^{-21} \left(\frac{M_2}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{10 \text{ Mpc}}{r} \right) \quad , \quad (3.14)$$

onde M_1 é a massa do buraco negro supermassivo e M_2 é a massa do corpo em queda.

3.2. FONTES PERIÓDICAS

As ondas gravitacionais originárias de sistemas periódicos são caracterizadas pelo

conjunto discreto de frequências (Δf pequeno). Como exemplos de fontes periódicas podemos citar estrelas de nêutrons axi-assimétricas (especialmente pulsares com períodos de rotação na faixa de milissegundos), sistemas binários distantes da coalescência, e estrelas pulsantes que oscilam entre as configurações prolata e oblata.

3.2.1. Pulsares de Milissegundos

Um pulsar axi-assimétrico emite radiação gravitacional em duas vezes sua frequência de rotação ($f_c = 2f_{orb}$). Se o pulsar estiver precessionando, então ele pode estar emitindo tanto na frequência de rotação como no seu dobro.

Os pulsares de milissegundos são caracterizados pela alta taxa de rotação e pelo baixo campo magnético superficial ($10^8 G$ contra $10^{12} G$ para pulsares ordinários). Normalmente, os pulsares novos possuem períodos na ordem de segundos, porém, não há nada que proíba um pulsar de “nascer” com alta taxa de rotação (acredita-se que o pulsar de Crab tenha “nascido” com um período de $16ms$) [26]. O discurso padrão é de que pulsares de milissegundos sejam pulsares velhos que diminuíram seus períodos de rotação pela acreção de matéria despejada por uma companheira.

A taxa de acreção é limitada pela pressão de radiação da estrela acreedora, e supõe-se ser necessário em torno de 10^8 anos para um pulsar acretar matéria suficiente para diminuir seu período para a ordem de milissegundos. Isto implica uma companheira de baixa massa ($M \sim 1 M_{\odot}$), visto que uma companheira de massa significativamente maior evoluiria rapidamente, e não haveria tempo suficiente para que uma estrela de nêutrons atingisse uma taxa de rotação maior.

A acreção de matéria na estrela de nêutrons produz raios-X que têm sido detectados. Recentemente, têm sido diretamente observados pulsares de milissegundos em sistemas LMXB (sistemas binários com baixa massa emissores de raios-X), dando suporte experimental à hipótese de aumento da taxa de rotação por acreção de matéria [27].

A questão da baixa intensidade do campo magnético dos pulsares de milissegundos permanece um mistério. É possível que a acreção de matéria acarrete a redução do campo, mas nem todas as observações de pulsares de milissegundos sustentam esta hipótese.

Desvios de simetria nestes objetos podem ser produzidos por diversos fatores, entre eles:

- 1) A história de formação da estrela de nêutrons. É possível que o colapso tenha sido assimétrico, causando deformidades no objeto remanescente.
- 2) O campo magnético da estrela pode ser suficientemente intenso, exercendo pressão magnética para distorcê-la significativamente.
- 3) O período de rotação é maior que o período crítico⁶.

A amplitude característica depende da polarização da onda, que, por sua vez, está ligada à orientação do plano de rotação do pulsar em relação ao plano do céu, e pode ser estimada pela expressão

$$h_c \equiv \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left\langle |h_{0+}(\alpha, \beta, r)|^2 + |h_{0\times}(\alpha, \beta, r)|^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

onde α e β são os ângulos entre o plano de rotação e a linha de visada. Utilizando-se do formalismo para movimentos não-relativísticos, obtém-se

$$h_{0+} = 2(1 + \cos^2 \alpha) \frac{(I_{xx} - I_{yy})(\pi f)^2}{r} \quad (3.16a)$$

6 O período crítico de rotação depende da estrutura da estrela e da dependência entre a temperatura e a viscosidade, e corresponde ao período máximo que o objeto pode ter para que seja mantida a simetria.

$$h_{0\times} = 4 \frac{(I_{xx} - I_{yy})(\pi f)^2}{r} \cos \alpha \quad (3.16b)$$

onde I_{xx} e I_{yy} são as componentes do momento quadrupolar ao longo dos eixos principais no plano equatorial da estrela de nêutrons e α , o ângulo entre o eixo de rotação e a linha do sinal [16]. Assim, 3.15 nos dá

$$h_c = 7,7 \times 10^{-20} \varepsilon \left(\frac{I_{zz}}{10^{45} \text{ gcm}^2} \right) \left(\frac{f_c}{1 \text{ kHz}} \right)^2 \left(\frac{10 \text{ kpc}}{r_0} \right), \quad (3.17)$$

onde I_{zz} é o momento de inércia da estrela em relação ao seu eixo de rotação, e

$$\varepsilon \equiv \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \quad (3.18)$$

é sua elipcidade no plano equatorial. Tal valor é de difícil estimativa, não havendo modo de determiná-lo observacionalmente. Estimativas teóricas prevêm valores entre 10^{-6} e 10^{-2} , variando de acordo com a velocidade de rotação e a existência de fenômenos sísmicos na estrela (os “starquakes”, ou “estrelamotos”, que são provenientes de acomodações do material estelar). Estrelas de nêutrons com massas $M \sim 1,4 M_{\odot}$ possuem $I_{zz} \simeq 0,3 - 3,0 \times 10^{45} \text{ gcm}^2$, dependendo da equação de estado destas massas [16].

São conhecidas, atualmente, algumas estrelas de nêutrons que acretam matéria em sistemas binários, apresentando desta forma assimetria axial. A energia irradiada sob a forma de ondas gravitacionais e de raio-X devem ser proporcional à taxa de acreção e, conseqüentemente, a amplitude característica das ondas gravitacionais é proporcional à raiz quadrada do fluxo em raio-X [15]

$$h_c \simeq 2 \times 10^{-27} \left(\frac{300 \text{ Hz}}{f_c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{F_x}{10^{-8} \text{ erg cm}^2 \text{ s}^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.19)$$

onde F_x representa o fluxo em raio-X recebido na Terra.

Se uma estrela está reduzindo o valor do seu período de rotação devido a emissão de ondas gravitacionais, a amplitude máxima recebida na Terra será dada por [16]

$$h_{max} = \frac{4G}{c^4} \frac{f^2}{r} I \varepsilon \sim \left(\frac{\dot{E}_{OG}}{1,6 \times 10^{38} \text{ erg s}^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{f_c r} \quad (3.20)$$

Introduzindo valores observacionais para pulsares de milissegundos na Equação 3.20, chegou-se a um dos melhores candidatos a observação, o pulsar PSR1957+20, que apresenta $P=1,6 \text{ ms}$, $\dot{P}=1,6 \times 10^{-20}$ e $r=1,5 \text{ kpc}$, conduz a um $h_{max}=1,6 \times 10^{-27}$ [7,27].

3.2.2. Estrelas Binárias

Sistemas binários emitem radiação gravitacional com frequências extremamente baixas e são as fontes de ondas gravitacionais mais estudadas. É possível, utilizando-se de medidas da massa e de parâmetros orbitais, estimar a distância entre as estrelas e, desta forma, calcular com precisão a emissão de ondas gravitacionais. Verbunt calculou a densidade numérica de alguns sistemas binários que apresentam períodos curtos [28]. A Tabela 3.2 mostra alguns sistemas binários, com as respectivas massa M e m , a frequência orbital, e a amplitude aproximada da onda gravitacional

Excentricidades na órbita geram ondas geram linhas espectrais igualmente espaçadas com harmônico dominante na frequência (assim como os pulsares de milissegundos) igual ao dobro da frequência orbital, e que apresentam amplitude característica

TABELA 3.2. ALGUMAS FONTES BINÁRIAS DE ONDAS GRAVITACIONAIS DE BAIXA FREQUÊNCIA

Tipo	Densidade numérica	d (pc)	M/M_{\odot}	m/M_{\odot}	f	h
WUMa (0.3–0.6 M_{\odot})	$2 \times 10^4 pc^{-3}$	15	0.6	0.3	$10^{-4.0}$	$10^{-20.4}$
WUMa (0.1–0.3 M_{\odot})	$2 \times 10^4 pc^{-3}$	15	0.3	0.1	$10^{-3.7}$	$10^{-20.7}$
Variáveis Cataclísmicas	$10^5 pc^{-3}$	45	0.3	0.6	$10^{-3.7}$	$10^{-20.7}$
Duplas Degeneradas (AM CVn)		100	0.04	0.6	$10^{-2.7}$	$10^{-21.2}$
LMXB ($P_o < 2 \times 10^4 s$)	30	1000	0.4	1.4	$10^{-3.8}$	$10^{-21.7}$
Pulsares LMB (PSR2051-08)		1300	0.03	1.4	$10^{-3.8}$	$10^{-21.7}$
HMXB (Cyg X-3)	1	10000	4.0	1.4	$10^{-3.9}$	$10^{-20.8}$
Pulsares binários EN-EN (PSR1913+16)	$< 10^{-5}$	500	1.4	1.4	$10^{-3.7}$	$10^{-20.8}$
Binárias em aglom. globulares (4U1820-30)		8100	0.06	1.4	$10^{-2.5}$	$10^{-22.3}$

FONTE: Lu, L., Blair, D. G., Zhao, C. [15]

- WUMa – Binárias de Ursa Maior W
- LMXB – Binárias de baixa massa que emitem raios-X
- LMB – Binárias de baixa massa
- HMXB – Binárias de alta massa que emitem raios-X
- EN – estrelas de nêutrons

$$h_c = 8 \left(\frac{2}{15} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu}{r} (\pi M f_c)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.21)$$

onde M e μ são a massa total e reduzida do sistema, respectivamente [15,16].

3.3. SINAIS ESTOCÁSTICOS

Os sinais de caráter estocástico podem ser imaginados como um ruído de fundo gravitacional. As emissões, oriundas de uma distribuição estatística de fontes, fazem com que o espaço-tempo não seja completamente “liso”, mas apresente pequenas “rugosidades” que se deslocam perturbando a métrica local segundo um

$$h_{jk}^{tt}(t, x^i) = \sum_K h_{K,jk}^{tt}(t, x^i), \quad (3.22)$$

onde o índice K indica o modo do campo. Ou seja, a amplitude de onda associada a uma determinada posição x^i e a um modo K é levada em conta como um processo randômico, e portanto estatístico. A amplitude total neste ponto x^i é, então, a somatória das amplitudes em todos os modos K 's. As amplitudes nos modos K 's seriam expressas como

$$h_{K\ jk}^{TT} = h_K(t, x^i) e_{jk}^K, \quad (3.23)$$

onde h_K é uma função de onda escalar e e_{jk}^K representa um vetor constante de polarização, cujo é convencionalmente normalizado na forma $e_{jk}^K e_{jk}^K = 2$, em coordenadas Cartesianas [15].

Como mencionado inicialmente, estes sinais são oriundos de fontes periódicas fracas em nossa Galáxia; de sinais impulsivos ocorridos a grandes distâncias; de processos cosmológicos ocorridos nos primeiros instantes do Universo, dentre outras fontes. Algumas delas são apresentadas a seguir.

3.3.1. Sistemas Binários

A radiação gravitacional proveniente dos inúmeros sistemas binários na nossa e em outras galáxias contribuem para o fundo estocástico, na região de frequência $f \leq 0,03 \text{ Hz}$. A contribuição de todas as outras galáxias porém, deve ser menor do que 15% da contribuição da Via Láctea [3].

Qualquer fonte impulsiva que tenha amplitude menor que a amplitude do fundo causado pelas fontes periódica torna-se imersa no ruído, o que transforma-se em um obstáculo difícil de se contornar na busca de fontes impulsivas na faixa de frequência $0,03 \text{ Hz} \leq f \leq 10^{-5} \text{ Hz}$.

3.3.2. Estrelas de População III

Considerando-se a existência de uma população pré-galáctica de estrelas supermassivas (a chamada População III), que devem ter desaparecido em meio a eventos violentos, envolvendo colapsos em estrelas de nêutrons e buracos negros, é natural imaginar que tais eventos tenham produzido ondas gravitacionais. Estas supernovas pré-galácticas podem ter criado um fundo estocástico isotrópico com amplitudes $h_c \lesssim 10^{-22}$, em frequências $f_c \sim 50 \text{ Hz}$. [29].

3.3.3. Ondas Gravitacionais Primordiais

As ondas gravitacionais primordiais, ou cosmológicas, podem ser comparadas à radiação cósmica de fundo, pois ambas são originárias do período do último espalhamento de suas partículas (grávitons e fótons, respectivamente) pela matéria. Porém, a interação das ondas gravitacionais com a matéria é muito menor, e portanto elas são provavelmente $\sim 10^5$ anos mais antigas, ou em outras palavras, sofreram o último espalhamento em $z \sim 10^{30}$ (próximo ao tempo de Planck, $\sim 10^{-43} \text{ s}$) [6,16]. Desta forma, as ondas gravitacionais primordiais transportam informações sobre os momentos iniciais do Universo, e de sua estrutura inicial.

É difícil especular sobre a amplitude deste tipo de sinal estocástico por não conhecer-se a física que era válida neste período, podendo, inclusive, a frequência característica da radiação gravitacional ter sido deslocada (“shiftada”) e encontrar-se hoje no regime das microondas. Ou ainda, ter sofrido ganhos em amplitude por interferência construtiva (amplificação paramétrica).

Considerando que o Universo apresentava-se uma inomogenidade inicial na amplitude, h_g , a amplitude hoje, em uma determinada frequência, f , seria grosseiramente dada por

$$h \sim 10^{-20} \frac{h_g}{f} , \quad (3.24)$$

apresentando valores na ordem de 10^{-28} para $f \sim 1kHz$, e 10^{-21} para $f \sim 10^4 Hz$ [16].

3.3.4. Transições de Fase

Na fase inicial da expansão do Universo é possível que tenham ocorrido transições de fase de primeira ordem associadas às interações da QCD (“Quantum Chromodynamics”) e às interações eletrofracas. Em cada uma destas transições de fase, a fase original é super-resfriada, devido a expansão cosmológica, a uma temperatura abaixo da temperatura de equilíbrio da nova fase. Assim, bolhas da nova fase surgem em pontos isolados e expandem a taxas próximas à velocidade da luz, até o ponto em que comprimem a fase original suficientemente para que as duas coexistam em equilíbrio. Estudos mostram que este processo pode produzir ondas gravitacionais diretamente pela expansão da bolha, pela subsequente onda de som que ela gera e pela inhomogeneidade associada com as duas fases coexistindo [16].

É difícil estimar a amplitude destas ondas dado o desconhecimento da topologia inicial do Universo, apesar de ter-se consciência que possuam um limite superior razoável. Porém, pode-se estimar as frequências características máximas que apresentam hoje, obtendo-se

$$f_{max} \sim 2 \times 10^{-7} \left(\frac{kT}{1 GeV} \right) Hz , \quad (3.25)$$

onde T é a temperatura da transição de fase.

3.3.5. Cordas cósmicas

Antes das transições de fase da QCD e das interações eletrofracas terem ocorrido, é possível que tenham havido transições associadas às interações da Grande Unificação. E, estas transições podem ter criado *cordas cósmicas*, ou seja, defeitos topológicos unidimensionais no vácuo (algo como buracos negros filamentosos) [16].

O aparecimento destes defeitos pode ter ocorrido em um instante muito próximo a singularidade inicial. E com a expansão do horizonte do Universo, sua vibração atingiu taxas próximas à velocidade da luz. A interação entre as cordas gerou “loops”, que poderiam ter promovido a formação de galáxias e aglomerados de galáxias, enquanto decaíam por emissão de ondas gravitacionais. Porém, a teoria ou modelo de formação de estruturas via cordas cósmicas não é consistente com as observações da radiação cósmica de fundo.

Vachaspati e Vilenkin, estimaram que, para o caso de as cordas não serem supercondutoras, a razão entre a densidade de energia por unidade logarítmica de frequência e a densidade de energia crítica é dada por [30]

$$\Omega_{OG}(f) \sim 10^{-7} \left(\frac{G\mu}{10^{-6}} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ para frequências, } f \gtrsim 10^{-8} \left(\frac{10^{-6}}{G\mu} \right) \text{ Hz}, \quad (3.26)$$

onde $\mu \sim M/l$ representa a massa por unidade de comprimento, l . Valores de $G\mu$ inferiores 10^{-6} levam a complicações no modelo das cordas cósmicas não supercondutoras para a formação de galáxias. Observações futuras de ondas gravitacionais podem conduzir a estimativa de Ω_{OG} , e conseqüentemente, o valor de $G\mu$.

CAPÍTULO 4

DETECTORES DE ONDAS GRAVITACIONAIS

Em 1960, Joseph Weber mostrou que as ondas gravitacionais poderiam ser detectadas utilizando-se de medidas do tensor de Riemann, através do monitoramento de movimentos relativos entre massas pontuais [31]. Desde então, a comunidade científica tem trabalhado no desenvolvimento de sensores capazes de medir os deslocamentos causados pelo efeito de maré de uma onda gravitacional. Estes instrumentos são conhecidos como **detectores de ondas gravitacionais**.

Um grande número de detectores de ondas gravitacionais, envolvendo tecnologias das mais simples às mais sofisticadas podem ser encontrados na literatura. Este capítulo discutirá apenas algumas características de um grupo, denominado de **detectores mecânicos**.

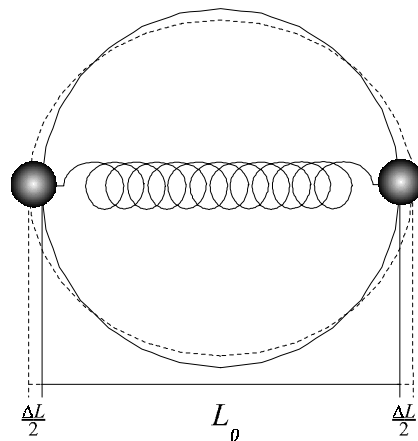


Fig. 4.1. Modelo simples de um detector de ondas gravitacionais.

Um detector mecânico de ondas gravitacionais pode ser representado, simplificada, por duas massas ligadas por molas, e separadas por um comprimento L_0 , como mostra a Figura 4.1.

Quando uma onda gravitacional passa pelo círculo (linha cheia), distorce-o (linha pontilhada)⁷, depositando energia sobre a mola, e fazendo com que ambas as massas desloquem-se por uma distância $\Delta L/2$, relativa ao centro do círculo. A variação na distância relativa entre as massas é dada por [32]

$$\Delta L = \frac{1}{2} h L_0 \quad , \quad (4.1)$$

onde h é a amplitude da onda gravitacional. Assim, o monitoramento dos deslocamentos relativos fornece informações sobre uma onda gravitacional que passa pelo detector. Os detectores mecânicos, por sua vez, são classificados como interferômetros a laser e detectores de massa ressonante.

4.1. INTERFERÔMETROS A LASER

Esta classe baseia-se no princípio idealizado por Gertsenshtein e Pustovoit, em 1962 [33], e também sugerido por Weber, apesar de nunca ter publicado sua sugestão [15]. Os interferômetros Michelson, conhecidos há um longo tempo por sua sensibilidade às mudanças no comprimentos de seus braços, são aplicados na construção destes detectores.

O interferômetro Michelson consiste de três massas de teste livres – um espalhador de feixe, e dois espelhos dispostos formando um ângulo reto entre si, conforme mostra a Figura 4.2. Quando uma onda gravitacional atravessa o sistema cria um deslocamento relativo entre as massas de teste, os espelhos. A variação de distância entre os espelhos é lida pelo foto-detector como uma variação de intensidade, fornecendo informações sobre a onda gravitacional.

Como exemplo, pode-se supor uma onda gravitacional que se propaga perpendicular ao plano do papel, e com uma polarização paralela aos braços do interferômetro. A

⁷ No Capítulo 2 foi apresentado o efeito de uma onda gravitacional sobre um círculo de massas de teste (Figura 2.1).

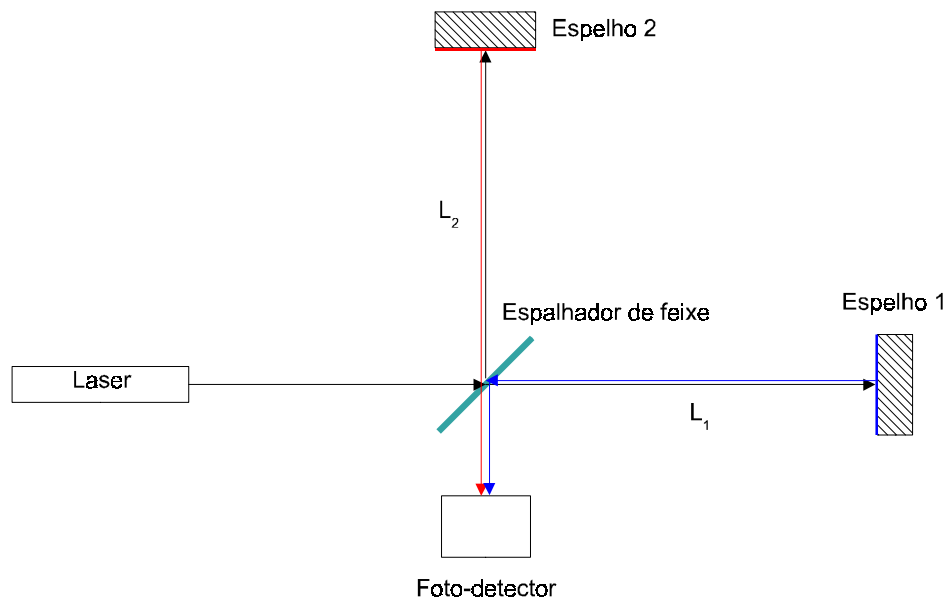


Fig. 4.2. Modelo simples de um interferômetro Michelson.

passagem da onda gravitacional faz com que o comprimento de um dos braços diminua, enquanto o do outro aumenta, durante metade do período da onda. Na segunda metade do período, a elongação e a contração se reverte. Esta elongação-contração causa uma mudança de fase no feixe de laser, ΔF , devido à variação no caminho óptico, $\Delta L = \Delta L_2 - \Delta L_1$, que é dada por [15]

$$\Delta F = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} \quad , \quad (4.2)$$

onde λ representa o comprimento de onda do laser. A variação do caminho óptico é proporcional aos comprimentos dos braços somados, L , e dado por

$$\Delta L = hL \quad , \quad (4.3)$$

sendo que são, geralmente, sensíveis à combinação linear de ambas as polarizações da onda gravitacional, e h pode ser representado por

$$h = F_+ h_+ + F_\times h_\times , \quad (4.4)$$

onde os coeficientes F_+ e F_\times dependem de fatores como a direção da fonte e a orientação do interferômetro.

Parece claro pela Equação 4.3 que a intensificação do sinal, ΔL , pode ser obtida pelo aumento do comprimento dos braços do interferômetro. Contudo, existe um comprimento ótimo, pois comprimentos superiores farão com que o sinal gravitacional seja percebido pelas massas durante um tempo menor que o tempo de viagem da luz, tornando-se imperceptível. Assim, o comprimento ótimo é dado por

$$L_{ot} = \frac{c}{2 f_{OG}} , \quad (4.5)$$

onde f_{OG} representa a frequência do sinal gravitacional que se pretende captar. Ao comprimento ótimo corresponderá uma frequência característica, em que se encontrará o pico de sensibilidade do detector. Por exemplo, para se captar sinais em $1kHz$, o caminho óptico deveria ser de aproximadamente $150km$. Comprimentos desta ordem são praticamente impossíveis de serem obtidos, na Terra, devido à sua curvatura. Porém, comprimentos na ordem de até poucos quilômetros são possíveis. Três interferômetros com braços longos, baseados na Terra, estão sendo desenvolvidos:

- O “Laser Interferometric Gravitational Waves Laboratory” (LIGO), nos Estados Unidos, já construído e que conta com dois instrumentos com braços de $4km$, um em Hanford e outro em Livingstone (<http://www.ligo.caltech.edu>).
- O VIRGO, projeto ítalo-francês que prevê a construção de um interferômetro a laser, cujos braços terão $3km$ de comprimento, em Casina, próximo a Pisa/Itália (<http://www.virgo.infn.it>).

Outros detectores menores estão sendo desenvolvidos

- O projeto GEO, com braços de 600m, sob construção em Hannover, a partir de uma cooperação entre Alemanha e Inglaterra (<http://www.geo600.uni-hannover.de>);
- O TAMA, em Tóquio, com 300m, que já se encontra em operação (<http://tamago.mtk.nao.ac.jp>).

Todos estes detectores utilizam feixes de laser que percorrem os comprimentos dos seus braços por tubos mantidos sob vácuo. E sua sensibilidade é limitada pela gama de fontes de ruído como, por exemplo, o ruído térmico interno dos espelhos, ruídos sísmicos, ruídos causados pela pressão de radiação exercida pelo laser sobre os espelhos, ruídos de frequência inerentes do laser, ruídos provenientes do sistema de controle do instrumento, ruídos de refração causada pelo gás residual, entre outros.

Há ainda um ambicioso projeto da NASA/ESA, pretendendo a construção de um interferômetro a laser, que permanecerá em uma órbita especial em torno do Sol, o “Laser Interferometer Space Antenna” (LISA, <http://lisa.jpl.nasa.gov>). Tal instrumento terá braços com $5 \times 10^6 km$ (1/30 unidades astronômicas) de comprimento e será sensível a ondas gravitacionais de frequência muito baixa.

A faixa de sensibilidade dos interferômetros a laser é ampla, e abrange frequências de poucos Hertz a algumas dezenas de kiloHertz, cobrindo um grande apanhado de fontes astrofísicas de radiação gravitacional (vide o exemplo para o LIGO na Figura 4.4 , na Seção 4.2.4).

4.2. DETECTORES DE MASSA RESSONANTE

Os detectores de massa ressonante são instrumentos desenvolvidos para medir sinais acústicos induzidos pelo acoplamento de ondas gravitacionais com a matéria. E,

portanto, são caracterizados por algumas propriedades acústicas do material do qual são construídos.

4.2.1. Características acústicas dos materiais

Se o material possuir um fator de qualidade mecânica alto ($Q_m = \omega_m \tau_m > 10^6$, sendo ω_m , a frequência de ressonância, e, τ_m , o tempo de decaimento das oscilações no modo m), permanecerá oscilando por um longo tempo após a passagem da onda gravitacional, “memorizando” seus efeitos. Assim, quanto maior o valor de Q , maior será o tempo disponível para se inferir a ação da onda gravitacional. Novos materiais oferecem a perspectiva de se atingir valores altos para o Q mecânico (vide Tabela 4.1), que podem ser incrementados significativamente na preparação e suspensão do detector.

TABELA 4.1. COMPARAÇÃO ENTRE AS GRANDEZAS FÍSICAS DE ALGUNS MATERIAIS*

Material	$\rho (10^3 \text{ kg/m}^3)$	Q	$v_s (10^3 \text{ m/s})$
Alumínio 6061	2,7	5×10^6	5,1
Alumínio 5056	2,7	7×10^7	5,1
Nióbio	8,6	$2,3 \times 10^8$	3,4
Silício	2,3	2×10^9	8,5
Safira	4,0	3×10^9	9,4
Chumbo	11,4		1,1
Tungstênio	18,8		4,3
Cobre(94%)/Alumínio(6%)	8,0	2×10^7	4,6

FONTE: Lu, L., Blair, D. G., Zhao. [15]

* Valores estimados a temperatura ambiente.

A quantidade de energia absorvida depende da densidade, ρ , e da velocidade do som, v_s , do material (que, para as barras, $\sim \rho v_s^3$) [15]. O acoplamento entre a onda gravitacional e o detector pode ser maximizado combinando-se valores de ρ e v_s . Além disso, altos valores de Q fazem com que o sistema aproxime-se de um oscilador

harmônico ideal, minimizando perdas acústicas (Q^{-1}), e desta forma torna-se possível prever seu movimento frente à excitação causada por uma onda gravitacional. A importância do Q ainda abrange a questão da amplitude das vibrações térmicas do corpo. Em detectores com altos Q s, e, conseqüentemente, com baixas perdas acústicas, a energia destas oscilações é diminuída em um fator τ_i/τ_m , onde τ_i é o tempo de integração do sinal.

Além do material com que é confeccionado, a forma do detector também fornece-lhe características próprias.

4.2.2. Detectores de Barra

Ainda nos anos 60, Weber iniciou a construção do primeiro detector de ondas gravitacionais. Seu trabalho pioneiro consistia de uma barra de alumínio sustentada pelo centro de massa por um cabo de titânio. A barra era envolta por uma campânula que a mantinha sob vácuo, e à temperatura ambiente [34]. Da mesma forma que o modelo apresentado na Figura 4.1, uma onda gravitacional, ao passar, realiza trabalho mecânico sobre a barra. Esta, por sua vez, armazena a energia em seu modo normal quadrupolar, e passa a oscilar. Sobre a barra, eram colados cristais piezelétricos sensíveis às deformações por ela sofridas. Em 1969, Weber conseguiu que seu detector fosse sensível a variações de comprimento com amplitudes $h \sim 10^{-16}$. Operando com dois detectores, um em Argonne e outro em Maryland, ele afirmou ter obtido coincidências entre os dados fornecidos pelos dois instrumentos [35]. Outros grupos tentaram repetir o experimento de Weber, mas não obtiveram sucesso. Mais tarde, os cristais piezelétricos foram substituídos por transdutores supercondutores, que também convertem os sinais mecânicos em elétricos.

Uma onda gravitacional, ao passar pelo detector, deposita energia, mudando a amplitude e/ou a fase do movimento do modo normal longitudinal de vibração da barra.

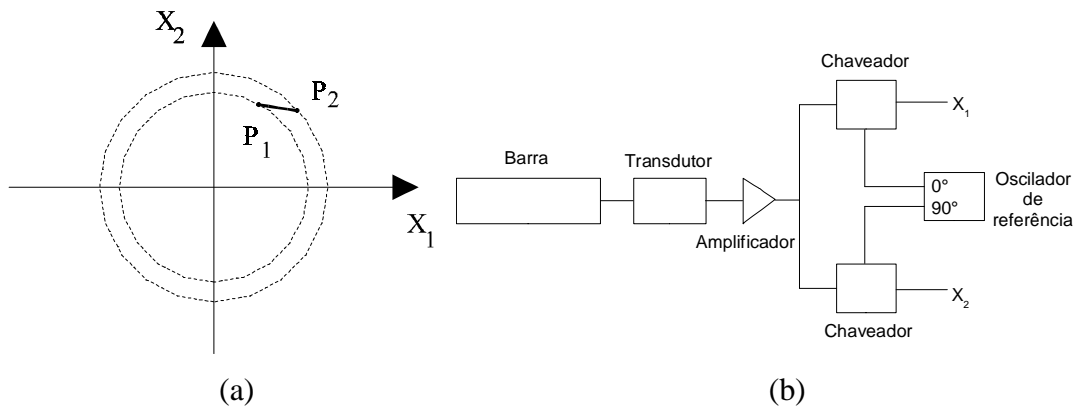


Fig. 4.3. (a) Esquema do monitoramento da amplitude complexa.
 (b) Esquema para aquisição dos valores de X_1 e X_2 .

4.2.3. Monitoramento do modo fundamental de oscilação da barra

É conveniente descrever o estado do modo fundamental de oscilação da barra por meio de coordenadas

$$X_1 = A \cos \phi \quad , \quad (4.6a)$$

$$X_2 = A \sin \phi \quad , \quad (4.6b)$$

onde $A = |P| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ define a amplitude, e $\phi = \omega t = \tan^{-1} X_2 / X_1$, a fase. Assim, o estado do detector, no instante inicial, t_1 , é representado pelo ponto no plano X_1 e X_2 , conforme mostra a Figura 4.3a. Ao ser excitado por uma onda gravitacional, o estado do modo passa para uma posição P_2 . A direção deste movimento depende e as variações, ΔX_1 e ΔX_2 , fornecem informações sobre a fase e a amplitude relativas da onda gravitacional e da barra. O monitoramento dos valores de X_1 e X_2 é realizado utilizando-se dois chaveadores (amplificadores “lock-in’s”, ou PSDs), segundo a configuração apresentada na figura 4.3b, que separam o sinal em fase (0°) e em quadratura (90°), a partir de um oscilador de referência, do qual se conhece a frequência. Estas medidas estão condicionadas ao Princípio da Incerteza de Heisenberg, que assume a forma [36]

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{\hbar}{2M \omega}, \quad (3.7)$$

onde M é a massa da barra, $\omega = \pi v_s / L$, sua frequência angular, e \hbar , a constante de Plack reduzida. Assim, o produto entre estas variações ΔX_1 e ΔX_2 limita a precisão que pode se atingir em suas medidas, e, conseqüentemente, apresenta-se como um **limite quântico**, que representa uma barreira inevitável (porém, contornável até certo ponto [36]) nas medidas de ΔL para os detectores que serão construídos futuramente.

A partir dos anos 70, foram sugeridas algumas melhorias ao desenho original de Weber. Entre elas podem ser mencionadas:

- a) resfriamento da antena à temperatura do hélio líquido (4K), com o objetivo de reduzir o movimento térmico browniano;
- b) a implantação de um sistema de isolamento vibracional elaborado para reduzir/eliminar movimentos de natureza sísmica;
- c) a utilização de transdutores ressonantes com baixo ruído de amplificação conectados à extremidade da barra, com a finalidade de converter vibrações mecânicas em sinais eletrônicos, substituindo os cristais piezelétricos utilizados por Weber.

Alguns detectores estão sendo desenvolvidos nesta linha operacional, e são apresentados na Tabela 4.2. As frequências de sensibilidade destes detectores estão dentro da faixa preenchida por fontes periódicas, principalmente pulsares de milissegundos e sistemas binários envolvendo estrelas de nêutrons, e de possíveis colapsos de estrelas massivas em buracos negros.

A sensibilidade do detector à um sinal gravitacional está condicionada ao ângulo entre a direção de propagação da onda e o eixo central do detector, apresentando valor máximo

TABELA 4.2. ALGUNS DETECTORES DE BARRA QUE OPERAM
SOB TEMPERATURAS CRIOGÊNICAS

Antena	Localização	Material	Temperatura de operação	Frequência (Hz)	Sensibilidade (h adimensional)
ALLEGRO	Baton Rouge	Al	4K	900	7×10^{-19}
EXPLORER	CERN	Al	2K	900	7×10^{-19}
NIOBE	Perth	Nb	5K	700	5×10^{-19}
NAUTILUS	Frascati	Al	100 mK	900	6×10^{-19}
AURIGA	Legnaro	Al	100 mK	900	3×10^{-19}

FONTE: Lu, L., Blair, D. G., Zhao, C.[15]

quando a incidência é perpendicular. Sua eficiência é determinada pela fração de energia da onda que é convertida em energia acústica dentro da barra. Quanto maior for esta fração mais eficiente é o detector.

O acoplamento com as ondas gravitacionais depende de sua seção de choque, cuja noção foi introduzida por Weber e pode ser expressa de inúmeras formas [37]. A expressão que descreve a seção de choque de um detector de barra, integrada em frequência, é dada por [38]

$$\int \sigma(f) df = \frac{8GM}{\pi c} \left(\frac{v_s}{c} \right)^2 m^2 Hz \quad . \quad (4.8)$$

A Equação 4.8 deixa claro que para se obter uma alta sensibilidade é necessário que o detector seja tão massivo quanto possível, e que seja confeccionado com um material com alta velocidade do som. Por esta razão, muitos dos detectores apresentados na Tabela 4.2 são de alumínio. A seção de choque pode, ainda, ser incrementada por mudanças na geometria do detector.

4.2.4. Detectores de massa ressonante esféricos

Os detectores de massa ressonantes com forma esférica vem sendo estudados intensivamente por Coccia e Lobo [39-42], Johnson e Merkowitz [11,14,43-46], e Stevenson [47,48], entre outros.

Esta classe de detectores consistem de uma massa esférica (ou tão aproximada à esfera quanto possível), onde são acoplados cinco ou mais transdutores ressonantes, e que monitoram, simultaneamente, os cinco modos quadrupolares fundamentais, e, ainda podem monitorar seu modo monopolar. Portanto, possuem seção de choque cerca de seis vezes maior que a apresentada por detectores de barra [49], e, apresentam a vantagem adicional de possuírem sensibilidade omnidirecional, ou seja, são igualmente sensíveis a todas as direções e polarizações de onda.

Três destes detectores estão sendo construídos, em uma colaboração internacional: o detector **Mario Schenberg**, do grupo brasileiro **Gráviton**, o **Mini-GRAIL**, da Holanda e o **SFERA**, na Itália. Com estes detectores pretende-se atingir sensibilidades capazes de captar sinais gravitacionais com $h \sim 10^{-21}$, operando na faixa de alguns kiloHertz.

Algumas fontes astrofísicas previstas nesta faixa de frequência e suas amplitudes características são apresentadas na Figura 4.4. A grandeza $h/3ano$ indica a amplitude mínima (envolvendo a escala de distância mínima) em que é possível se ter, pelo menos, três eventos do tipo por ano. A figura também compara a sensibilidade esperada do detector Schenberg e a do LIGO, em suas duas fases de operação.

As características mecânicas deste tipo de detector serão pormenorizadas no capítulo seguinte.

4.2.5. Principais fontes de ruído em detectores de massa ressonante

A medida de sinais gravitacionais, em detectores por massa ressonantes, envolve a leitura

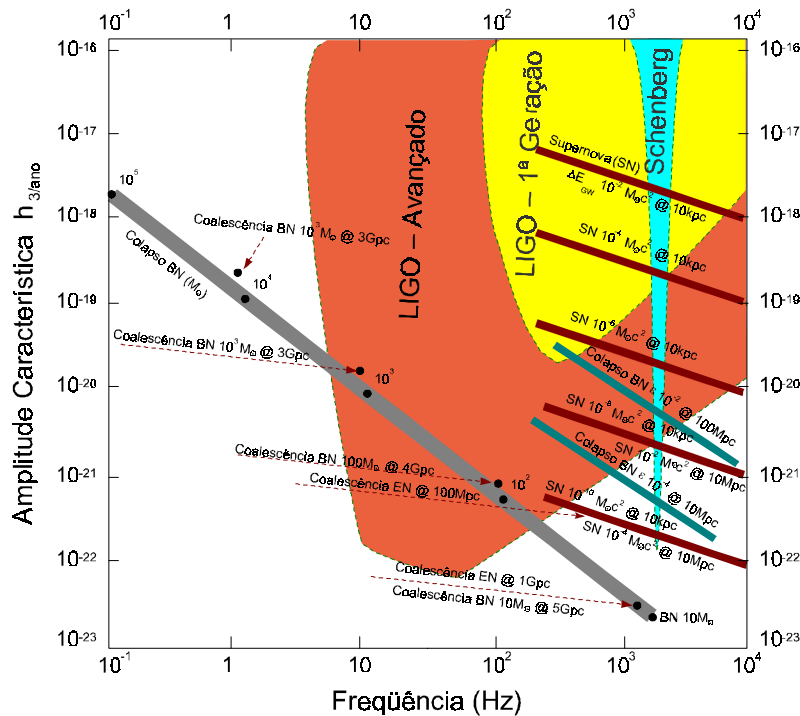


Fig 4.4. Fontes impulsivas de ondas gravitacionais, mostrando a faixa dos possíveis sinais e a região de sensibilidade de alguns detectores.
FONTE: Adaptada de Thorne [16].

precisa do movimento do detector. Isto requer uma cuidadosa otimização das contribuições das fontes de ruído inerentes ao sistema. Três fontes de ruído fundamentais são identificadas a seguir:

a) Movimento Browniano : Análogo ao ruído Nyquist, em circuitos LCR, o movimento browniano corresponde às excitações térmicas do(s) modo(s) fundamental(is) de um corpo. A energia média destas excitações é dada por $k_B T$, sendo k_B , a constante de Boltzman e, T , a temperatura física do corpo. Mas o ruído térmico efetivo é determinado por flutuações nesta energia, resultado da interação entre as partículas, que alteram o estado do(s) modo(s). Estas variações fazem com que a(s) energia(s) do(s) modo(s) oscile(m) com relação à média, segundo $\pm k_B T_N$, onde T_N representa a temperatura de ruído do detector. A forma como este movimento age sobre o detector pode ser modelado pela Equação de Langevin. Sua atuação é, então, descrita pelas forças

de Langevin. Seus efeitos podem ser minimizados pela redução da temperatura física do detector à níveis criogênicos.

b) Ruído Serial : Este ruído é inserido ao sistema de forma aditiva, e é oriundo pelo próprio processo de leitura devido ao(s) transdutor(es) e o(s) amplificador(es). Sua contribuição pode ser modelada, desde que se conheça a temperatura de ruído, T_A , do transdutor e do amplificador, e suprimida da energia do(s) modo(s) fundamental(is).

c) “Back-action” : Esta terceira fonte de ruído é proveniente do acoplamento eletromecânico. O campo elétrico interage com a parte mecânica do transdutor aplicando-lhe uma força de reação (“back-action”), que, subseqüentemente, é aplicada sobre o corpo do detector, fazendo com que a amplitude das oscilações varie. Existe, pelo menos uma técnica para contornar este problema, conhecida como “**back-action evasion**” [36].

Estas fontes de ruído vêm sendo estudadas incessantemente, e seus efeitos sobre os detectores são bem descritos. Mas existem outras fontes que independem do conhecimento do instrumental, e que podem interferir na detecção de ondas gravitacionais como por exemplo, a entrada de ruído, que ultrapassa o isolamento vibracional, pelo sistema de sustentação, vibrações provenientes do sistema de refrigeração, partículas com alta energia, que ultrapassam o sistema de blindagem, etc. Formas de amenizar estas contribuições estão sendo desenvolvidas, e espera-se que, em breve, pouco interfiram na sensibilidade dos detectores.

CAPÍTULO 5

O DETECTOR ESFÉRICO

A construção de um detector esférico foi inicialmente sugerida por Robert L. Forward, no início dos anos 70 [50]. Ele concebeu uma esfera sobre a qual seriam anexados transdutores eletro-mecânicos, os quais mediriam deformações sofridas pela esfera, decorrentes da excitação de seus modos normais de oscilação devido à passagem de uma onda gravitacional. Estes transdutores seriam dispostos de forma a serem dependentes entre si e, desta forma, impossibilitariam ambiguidades na determinação da direção de origem da radiação gravitacional.

Pouco tempo depois, Ashby e Dreitlein realizaram uma descrição do problema da esfera encontrando as expressões necessárias para sua solução [51]. Logo, Wagoner e Paik apresentaram valores numéricos para os parâmetros necessários à solução das equações sugeridas por Ashby e Dreitlein [49].

Durante mais de uma década, com detectores de barra operando, e pelas dificuldades tecnológicas que envolvem o funcionamento de um detector esférico, o assunto permaneceu inerte. Mas, no início da década passada, alguns grupos optaram por esta configuração, e desde então têm direcionado seus esforços para a solução do problema.

Neste capítulo, pretende-se apresentar o modelo do detector esférico de massa ressonante. A Seção 5.1 apresenta o modelo da esfera isolada. A seção seguinte expõe como abordar o problema quando são acoplados ressonadores secundários sobre sua superfície. Uma sugestão para a distribuição destes ressonadores é apresentada na Seção 5.3. E, finalmente, o monitoramento do sinal é abordado na Seção 5.4.

5.1. MODELO DA ESFERA DESACOPLADA

Considere-se um corpo esférico elástico isotrópico (que possui as mesmas propriedades elásticas em todas as direções), S , de raio R e feito de um material de densidade ρ , e que se encontra imerso em um campo de forças gerado por uma onda gravitacional.

A deformação sofrida por um elemento de massa dM do corpo é descrita pelo vetor deslocamento $u_i = x'_i - x_i$, onde x_i representa sua posição de equilíbrio, e x'_i , a posição do elemento dM após a deformação. Como o vetor u_i possui módulo muito pequeno, a aplicação da teoria de elasticidade linear à análise do problema é válida. Portanto, o tensor deformação, u_{ij} , referente ao deslocamento, u_i , é definido por [12,52]

$$u_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad , \text{ com } i, j = 1, 2, 3. \quad (5.1)$$

A ele estão associadas equações constitutivas, generalizações da lei de Hooke, que relacionam a tensão, σ_{ij} , com a deformação em um material elástico linearmente isotrópico, e que são representadas por

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda u_{ll} + 2 \mu u_{ij} \quad . \quad (5.2)$$

Os símbolos λ e μ representam os coeficientes de Lamé, que descrevem o comportamento elástico do corpo, e são definidos como

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad , \quad (5.3)$$

sendo ν e E , a razão poissônica⁸ e o módulo de Young⁹, respectivamente, referentes

8 Quando um material é achatado devido a alguma pressão exercida, ele tende a alongar-se perpendicularmente à direção de compressão. Assim, a razão poissônica é definida como a razão entre a elongação perpendicular e o achatamento na direção da compressão, sendo, portanto, adimensional.

9 Como visto na Seção 2.1, a lei de Hooke pode ser escrita como $P = Eh$. Fazendo a deformação $h=1$, então $P=E$. Então, o módulo de Young representa a pressão (teórica) necessária para comprimir ou alongar o material em 100%. Logo, possui unidades de pressão. E relaciona-se com a densidade e a velocidade do som no material por $E = \rho v_s^2$.

ao material que compõe a esfera.

Aplicando-se o princípio de conservação do momentum linear chega-se às equações de equilíbrio, representadas por

$$\sigma_{ij,j} + \rho u_{i,00} = f_i \quad , \quad (5.4a)$$

onde f_i corresponde o campo de densidade de forças externas à esfera (no caso, o campo de densidade de força gravitacional) e $\rho u_{i,00}$ representa o campo de densidade de forças internas. Estas equações são chamadas **equações de Navier**, e podem ser escritas como

$$(\lambda + \mu) u_{k,k i} + \mu u_{i,j j} + \rho u_{i,00} = f_i \quad , \quad (5.4b)$$

ou, na forma vetorial,

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad . \quad (5.4c)$$

As equações de Navier devem ser satisfeitas por um conjunto de funções $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ que representam os deslocamentos dentro de uma região pré-definida limitada pelo raio R . Portanto, as equações 5.4 requerem a utilização de condições de contorno que indiquem que a superfície da esfera é livre para oscilar. Esta condição de contorno é definida por [12]

$$n_j \sigma_{ij} = 0 \quad , \quad (5.5)$$

em $r=R$, e onde $n_i \equiv x_i / r$ representa a unidade normal. Deste conjunto, composto por 15 equações, devem ser obtidos os valores de 15 incógnitas (3 deslocamentos, os u_i ; 6 deformações, os u_{ij} ; e 6 tensões, os σ_{ij}), o que implica um sistema solucionável.

Porém, o vetor deslocamento u_i possui dependência temporal, e isto dificulta a solução das equações 5.4. Torna-se conveniente, mais uma vez, separar as dependências, neste caso, espaciais e temporais. Considerando-se que a esfera é não-relativística ($v_{som} \ll c$), que seu raio é muito menor que o comprimento da onda gravitacional, e que seu fator de qualidade mecânica é alto ($Q_m = \omega_m \tau_m \gg 1$, onde τ_m é o tempo de decaimento das oscilações no modo m), o módulo do vetor deslocamento pode ser representado através da decomposição em seus modos normais, assumindo a forma [11,49]

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_m A_m(t) \Psi_m(\mathbf{x}) \quad , \quad (5.6)$$

As funções características $\Psi_m(\mathbf{x})$ obedecem o critério de normalização regido pela expressão

$$\int_V \Psi_n(\mathbf{x}) \cdot \Psi_m(\mathbf{x}) d^3x = N_m \delta_{mn} \quad , \quad (5.7)$$

onde N_m representa um fator normalizador arbitrário, normalmente escolhido com base no tipo de geometria utilizada, determinando a interpretação física tanto da amplitude do modo, $A_m(t)$, quanto da função característica, $\Psi_m(\mathbf{x})$. Admitindo-se que a esfera em questão é homogênea, e portanto $\rho(\mathbf{x})$ é constante, tem-se

$$N_m \equiv \frac{4\pi}{3} R^3, \quad \forall m. \quad (5.8)$$

Então, a equação de movimento da esfera como um oscilador harmônico forçado é dada por [11]

$$\ddot{A}_m(t) + \tau_m^{-1} \dot{A}_m(t) + \omega_m^2 A_m(t) = \frac{1}{\rho N_m V_0} \int \Psi_m(\mathbf{x}) \cdot \sum f(\mathbf{x}, t) d^3x \quad . \quad (5.9)$$

Uma vez conhecida a amplitude característica no modo m , $A_m(t)$, e conhecendo-se o comportamento de $\Psi_m(\mathbf{x})$, a Equação 5.9 conduz à determinação da força efetiva em cada modo. Tal força representa a força resultante da interação da esfera com o exterior (sinal+ruídos) e as forças internas (ruídos), e está representada pelo somatório dos campos de densidade de forças, $\sum f$, na Equação 5.9. Desconsiderando por um momento as outras forças que não a gravitacional, pode-se definir a força gravitacional efetiva referente a cada modo normal da esfera

$$\mathcal{F}_m(t) = \int_{V_0} \Psi_m f^{\omega} d^3x, \text{ com } m=1\dots 5. \quad (5.10)$$

Soluções específicas para a Equação 5.9, referentes aos modos de oscilação esferoidais¹⁰, podem ser descritas utilizando-se os harmônicos esféricos quadrupolares na determinação da função característica $\Psi_m(\mathbf{x})$, e esta assume a forma [11,12]

$$\Psi_m(r, \theta, \phi) = [\alpha(r)\hat{r} + \beta(r)R\nabla] Y_m(\theta, \phi), \quad (5.11)$$

onde as funções $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ determinam os movimentos nas direções radial e tangencial, respectivamente. A Figura 5.1 representa a distribuição da função característica Ψ_m na superfície da esfera e na direção radial, utilizando-se dos harmônicos esféricos quadrupolares.

Ashby e Dreitlein descreveram as funções $\alpha(r)$ e $\beta(r)$, obtendo valores do tipo [51]

$$\alpha(r) = p_1 R \frac{\partial}{\partial r} j_2(qr) + 6 p_2 \frac{R}{r} j_2(kr), \text{ e} \quad (5.12a)$$

$$\beta(r) = p_1 j_2(qr) + 6 p_2 \frac{\partial}{\partial r} [r j_2(kr)], \quad (5.12b)$$

¹⁰ Existem soluções relacionadas aos modos monopulares e toroidais, mas estes não são excitados pela passagem de uma onda gravitacional, segundo a Relatividade Geral e, portanto, não serão abordados neste trabalho.[4]

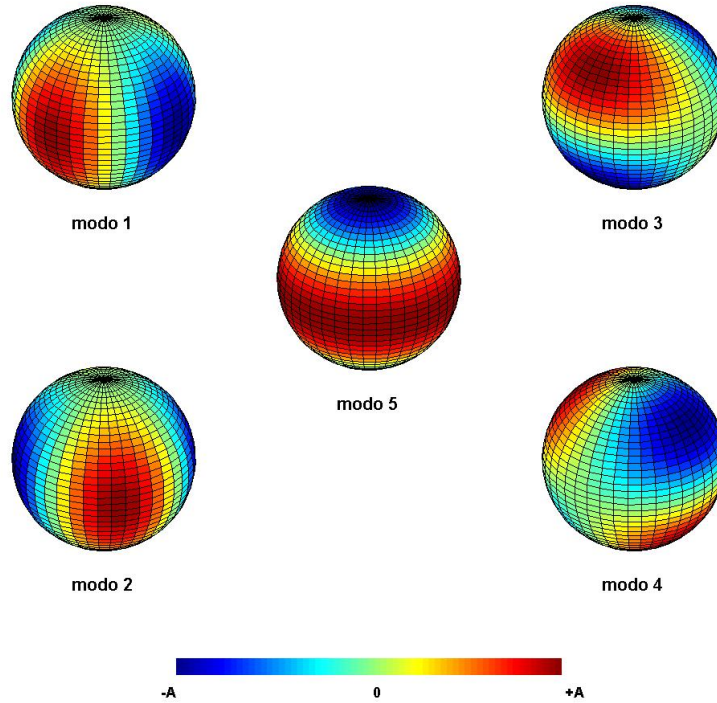


Fig. 5.1. Modos normais quadrupolares de oscilação da esfera. As cores representam diferentes amplitudes nos movimentos radiais, onde o vermelho e o azul representam as regiões de maior movimento radial, com amplitudes opostas.
FONTE: Adaptada de Merkwitz [14]

onde j_2 é a função esférica de Bessel de ordem 2, definidas por [9,10]

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x^2}, \quad (5.13)$$

e $q^2 = \rho \omega_0^2 l (\lambda + 2\mu)$ e $k^2 = \rho \omega_0^2 l \mu$ são os quadrados dos vetores transversal e longitudinal da onda, respectivamente. O valor de ω_0 , que representa a frequência dos modos degenerados¹¹, é determinado pelas condições de contorno 5.5, que aqui assumem a forma [11,49]

¹¹ Modos são chamados degenerados quando possuem a mesma frequência de excitação.

$$p_1 \frac{d}{dr} \left[\frac{j_2(qr)}{r} \right] + p_2 \left[\frac{5}{r^2} - \frac{k^2}{2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] j_2(kr) = 0 \quad , \text{ e} \quad (5.14a)$$

$$p_1 \left[\frac{6}{r^2} - \frac{k^2}{2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right] j_2(qr) + 6 p_2 \frac{d}{dr} \left[\frac{j_2(kr)}{r} \right] = 0 \quad , \quad (5.14b)$$

em $r=R$. A utilização do fator normalizador N_m , de 5.8, na Equação 5.7 determina os valores para os parâmetros normalizadores p_1 e p_2 .

Conhecendo-se estes parâmetros pode-se combinar as expressões 2.31, 2.32 e 5.10 à 5.12, chegando-se a uma expressão para a força gravitacional efetiva, dada por

$$\mathcal{F}_m(t) = \sqrt{\frac{4\pi}{15}} \rho \ddot{h}_m(t) R^4 [p_1 j_2(qR) + 3 p_2 j_2(kR)] = \frac{1}{2} \ddot{h}_m(t) m_s \chi R \quad , \quad (5.15)$$

onde m_s é a massa física da esfera, e χR é o raio efetivo da esfera, sendo que o fator

$$\chi = \sqrt{\frac{3}{5\pi}} [p_1 j_2(qR) + 3 p_2 j_2(kR)] \quad (5.16)$$

possui uma fraca dependência com a razão Poissônica (vide Seção 6.1). Merkwitz menciona que $\chi \approx 0.6$ para sólidos, sendo que seu valor preciso depende do material com que a esfera é confeccionada [14]. O valor de χ determina a massa efetiva da esfera, que, segundo Harry, é dada por [54]

$$m_{ef} = \frac{5}{6} \frac{\chi}{2} \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right) \rho \quad , \quad (5.17)$$

onde o fator $5/6$ leva em conta os múltiplos modos e os ressonadores que serão acoplados à esfera, na Seção 5.2. A massa efetiva corresponde à massa que interage com a força gravitacional efetiva, e que pela Equação 5.17, para a esfera, é $\sim 1/4$.

É razoável supor que a força gravitacional efetiva não seja a única força a atuar sobre a esfera, e que a força resultante sobre a esfera possui componentes adicionais, as forças F_S^N , provenientes das fontes de ruído (forças decorrentes da interação com objetos acoplados à esfera, forças de Langevin, forças oriundas do sistema de sustentação, etc). Todas estas forças irão convoluir com a força gravitacional efetiva, complicando a obtenção de informações sobre a mesma.

Formas de minimizar a contribuição das forças de ruído à força resultante sobre a esfera estão sendo estudadas. Muito do que foi aprendido em décadas de experiências com detectores de barra (em sistemas de isolamento vibracional, resfriamento do equipamento, isolamento eletromagnético, etc) está sendo reaproveitado e reestruturado, de forma a adaptar-se às peculiaridades dos detectores esféricos. Mas, mesmo assim, apesar de ser possível obter-se informações sobre a dependência espacial do campo gravitacional, através do monitoramento dos modos quadrupolares de uma esfera isolada, esta não se apresenta como um detector prático, devido às pequenas amplitudes das deformações.

Portanto, desde que possuam massa muito menor que a da esfera, ressonadores secundários a ela acoplados servirão como transformadores de impedância mecânica, amplificando o sinal, ou seja, fazendo com que uma pequena vibração na superfície da esfera corresponda a um grande deslocamento no sensor de movimento.

5.2. A ESFERA ACOPLADA A RESSONADORES

Considere, então, que são acoplados à esfera j ressonadores mecânicos unidimensionais idênticos. Os ressonadores são acoplados de forma que sua direção de movimento seja radial. Assim, o vetor deslocamento radial z_j da esfera sob cada ressonador j é dado por

$$z_j(t) = \hat{r}_j \cdot \sum_m A_m(t) \Psi_m(\mathbf{x}_j) \quad . \quad (5.18)$$

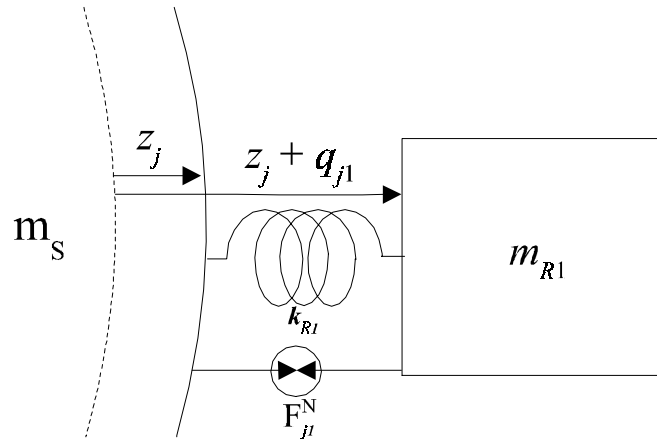


Fig. 5.2. Ressonador mecânico unidimensional de um modo acoplado à superfície da esfera.

Vibrações ocorridas na superfície da esfera excitam o ressonador j , localizado na posição x_j , transferindo-lhe momentum.

5.2.1. Ressonadores de um modo longitudinal

A Figura 5.2 mostra um ressonador j de um modo ($i=1$), que sofre um deslocamento q_{j1} relativo à superfície da esfera, e um deslocamento $q_{j1} + z_j$ relativo ao referencial do laboratório. Assume-se que os ressonadores $R1$ possuem massas m_{R1} e constantes de mola k_{R1} , e ainda possuem frequência de ressonância ajustada à frequência característica dos modos de oscilação da esfera, tal que $k_S/m_S = \omega_0^2 = k_{R1}/m_{R1}$. Assim, cada ressonador obedece à equação de um oscilador harmônico unidimensional [11]

$$m_{R1} [\ddot{q}_{j1}(x_j, t) + \ddot{z}_j(x_j, t)] + H_{R1} \dot{q}_{j1}(x_j, t) = -k_{R1} q_{j1}(x_j, t) + F_{j1}^N(x_j, t) \quad , \quad (5.19)$$

onde $F_{j1}^N(x_j, t)$ corresponde às forças de ruído que atuam entre o ressonador e a esfera, e $H_{R1} = m_{R1} \tau_{R1}^{-1} Q_{R1}$, ao coeficiente de amortecimento, sendo τ_{R1} o tempo de decaimento das oscilações no ressonador $R1$.

Os valores para os deslocamentos radiais da superfície esférica sob cada um dos ressonadores, referentes a cada um dos modos, podem ser agrupados em m **vetores modelo**, assim chamados por descreverem o modelo de deslocamento radial para cada modo específico. Estes vetores coluna podem ser, por sua vez, agrupados na forma de uma **matriz modelo**, B_{mj} , definida como [11,55]

$$B_{mj} = \frac{1}{\alpha} \hat{\mathbf{r}}_j \cdot \boldsymbol{\Psi}_m(x_j) \quad , \quad (5.20)$$

onde $\alpha = \alpha(R)$ representa a função $\alpha(r)$ na superfície. Comparando-se 5.18 com 5.11, e considerando-se apenas a componentes radial de $\boldsymbol{\Psi}_m$, percebe-se que

$$B_{mj} \equiv Y_m(\theta_j, \phi_j) \quad , \quad (5.21)$$

ou seja, B_{mj} representa o comportamento do harmônico esférico Y_m na posição \mathbf{x}_j .

De posse da equação de movimento dos ressonadores, pode-se associá-la ao movimento dos modos da esfera, obtendo-se a relação

$$m_S \ddot{A}_m(t) + H_S \dot{A}_m(t) + k_S A_m(t) = \sum_j \alpha B_{mj} [k_{Rl} q_{jl}(t) - H_{Rl} \dot{q}_{jl}(t) - F_{jl}^N(t)] + F_{m(S)}(t) \quad , \quad (5.22)$$

onde $F_{m(S)}(t) = \mathcal{F}_m(t) + F_S^N(t)$, sendo $F_S^N(t)$ as forças de ruído que atuam sobre a esfera, no modo m . Esta equação pode ser representada sob notação matricial, assumindo a forma

$$\begin{bmatrix} m_S \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{Q}} \\ m_{Rl} \alpha \underline{\underline{B}}^T & m_{Rl} \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{\underline{A}}}(t) \\ \ddot{\underline{\underline{q}}}_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_S \underline{\underline{I}} & H_{Rl} \alpha \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{Q}} & H_{Rl} \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\underline{A}}}(t) \\ \dot{\underline{\underline{q}}}_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_S \underline{\underline{I}} & -k_{Rl} \alpha \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{Q}} & k_{Rl} \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}(t) \\ \underline{\underline{q}}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & -\alpha \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{Q}} & \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}_S(t) \\ \underline{\underline{F}}_1^N(t) \end{bmatrix} \quad , \quad (5.23)$$

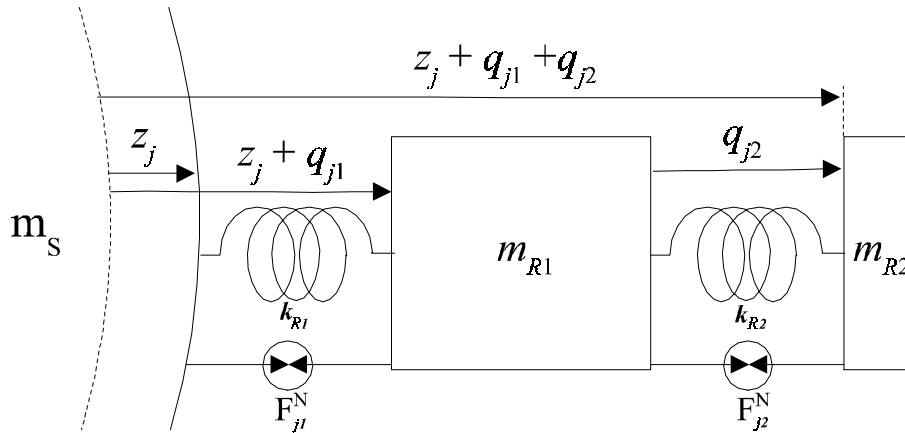


Fig. 5.3. Ressonador mecânico unidimensional de dois modos acoplado à superfície da esfera.

onde os termos duplamente sublinhados representam matrizes e os sublinhados, vetores coluna, sendo $\underline{\underline{B}}^T = [B_{jm}]$, a transposta de $\underline{\underline{B}} = [B_{mj}]$; $\underline{\underline{I}}$, a matriz identidade e; $\underline{\underline{Q}}$, a matriz nula. As dimensões das matrizes são definidas pelos vetores $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{q}}_1$, sendo que $\underline{\underline{A}}$ tem cinco componentes, uma para cada modo de oscilação da esfera, e $\underline{\underline{q}}_1$ terá o mesmo número de componentes quanto forem os ressonadores, ou seja, j componentes. Portanto, o sistema possuirá $j+5$ modos de oscilação.

5.2.2. Ressonadores de dois modos longitudinais

Uma forma de se aumentar a amplitude do sinal obtido pelo sistema é a inserção de modos adicionais aos ressonadores secundários, sendo que a massa deste terceiro oscilador, R_2 , deve respeitar a relação

$$\frac{m_S}{m_{R1}} = \frac{m_{R1}}{m_{R2}} = \mu_{rm} \quad , \quad (5.24)$$

onde μ_{rm} representa a razão constante entre massas m_i e m_{i+1} . Um diagrama do sistema é mostrado na Figura 5.3. A introdução de um oscilador adicional ao ressonador faz com que a equação do movimento, na forma matricial, seja representada por

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m_S \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\ m_{R1} \alpha \underline{B}^T & m_{R1} \underline{I} & \underline{0} \\ m_{R2} \alpha \underline{B}^T & m_{R2} \underline{I} & m_{R2} \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{A}}(t) \\ \ddot{\underline{q}}_1(t) \\ \ddot{\underline{q}}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_S \underline{I} & H_{R1} \alpha \underline{B} & \underline{0} \\ \underline{0} & H_{R1} \underline{I} & H_{R2} \underline{I} \\ \underline{0} & \underline{0} & H_{R2} \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{A}}(t) \\ \dot{\underline{q}}_1(t) \\ \dot{\underline{q}}_2(t) \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} k_S \underline{I} & -k_{R1} \alpha \underline{B} & \underline{0} \\ \underline{0} & k_{R1} \underline{I} & -k_{R2} \underline{I} \\ \underline{0} & \underline{0} & k_{R2} \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}(t) \\ \underline{q}_1(t) \\ \underline{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & -\alpha \underline{B} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} & -\underline{I} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}_S^N(t) \\ \underline{F}_1^N(t) \\ \underline{F}_2^N(t) \end{bmatrix}. \quad (5.25)
\end{aligned}$$

A Equação 5.25 determina o modelo básico de uma antena esférica acoplada a ressonadores unidimensionais de dois modos. Sobre ela estão concentrados os propósitos deste trabalho, e sua solução é apresentada na Seção 6.2.

Uma onda gravitacional com direção de propagação coincidente com o eixo z do sistema de referência do laboratório ($\beta, \gamma=0$), fará com que as equações 2.32 conduzam a Equação 5.15 a apresentar resultados do tipo

$$\mathcal{F}_1 = m_S \chi R \frac{1}{2} \ddot{h}_+(t) \quad , \quad \mathcal{F}_2 = m_S \chi R \frac{1}{2} \ddot{h}_\times(t) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_5 = 0 \quad . \quad (5.26)$$

Porém, para que se obtenha resultados com estas características de ondas gravitacionais oriundas de direções arbitrárias, seria necessária a rotação de Ψ_m , o que causaria uma completa deconvolução orientacional do sinal. Além disso, extrair as componentes de \mathcal{F}_m das medidas dos vetores q_{j2} , impregnadas de ruídos causados pelas forças $F_{ji}^N(t)$, tomando-se uma matriz modelo B_{mj} arbitrária, torna o problema ainda mais complexo, com as componentes aparecendo em todas as saídas q_{ij} e possuindo complicadas dependências em frequência. Assim, uma boa escolha de B_{mj} é essencial para simplificar o problema. E esta escolha baseia-se em uma distribuição adequada dos ressonadores sobre a superfície da esfera.

5.3. LOCALIZAÇÃO DOS RESSONADORES

Johnson e Merkwitz propuseram que seis ressonadores fossem dispostos de tal forma que a localização de cada um deles coincidissem com o centro das faces de um Dodecaedro (D) concêntrico à esfera [43]. Porém, um dodecaedro não aparece como uma boa aproximação à esfera ($V_D/V_S \approx 0.66$ para $R_D = R_S$). Existe um outro poliedro arquimediano, conhecido como icosaedro truncado (IT), ou comumente chamado de “buckybola”, cujas faces pentagonais são paralelas às faces do dodecaedro, e que possui uma melhor aproximação com a esfera ($V_{IT}/V_S \approx 0.87$, para $R_{IT} = R_S$). O icosaedro truncado possui 32 faces regulares, 20 delas hexagonais e outras 12 pentagonais (Figura 5.4). O centro das faces pentagonais do Icosaedro Truncado têm distribuição, em um dos hemisférios, nos dois ângulos polares $\theta_1 \approx 37.3774^\circ$ e $\theta_2 \approx 79.1877^\circ$, e com ângulos azimutais $\phi = 0^\circ, 60^\circ, -60^\circ, 120^\circ, -120^\circ, 180^\circ$.

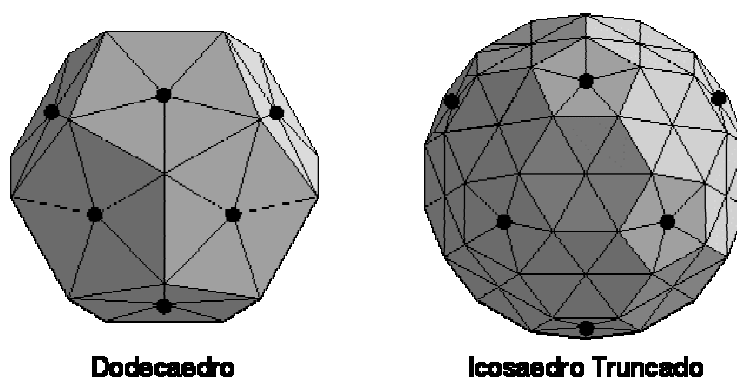


Fig. 5.4. Dodecaedro e icosaedro truncado. As marcas circulares representam o centro das faces pentagonais, onde são dispostos os ressonadores.

A distribuição nesta configuração apresenta uma variedade de simetrias (Figura 5.5), que se evidenciam pela ortogonalidade entre seus vetores modelo. A matriz modelo pode ser construída de tal forma que seus vetores modelo sejam ortogonais aos pares. Assim, apresenta as seguintes propriedades [11]

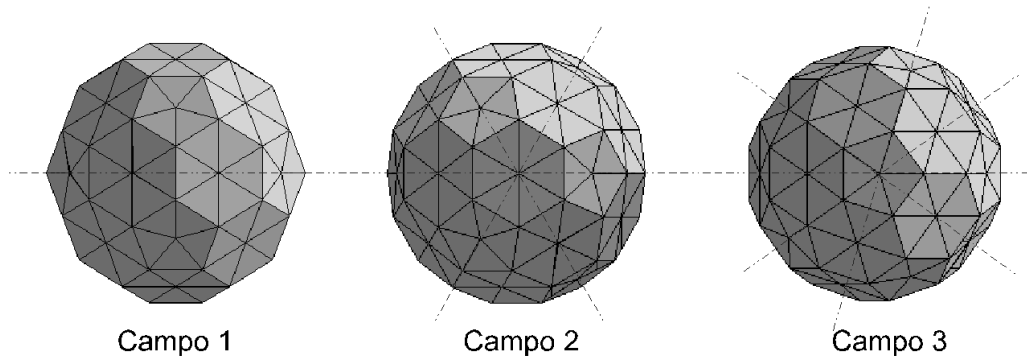


Fig. 5.5. Campos de simetria do icosaedro truncado.(1) Com relação aos hemisférios. (2) Com relação às faces hexagonais. (3) Com relação às faces pentagonais.

$$\underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}}^T = \frac{3}{2\pi} \underline{\underline{I}} \quad ; \quad (5.27a)$$

$$\underline{\underline{B}} \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}} \quad ; \quad (5.27b)$$

onde $\underline{\underline{1}}$ e $\underline{\underline{I}}$ representam, respectivamente um vetor coluna e uma matriz, cujos elementos são todos unitários, e $\underline{\underline{0}}$ representa o vetor nulo. Durante o desenvolvimento deste trabalho, foi encontrada uma nova propriedade para $\underline{\underline{B}}$, descrita por

$$\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} = \frac{3}{2\pi} \underline{\underline{I}} - \frac{1}{4\pi} \underline{\underline{1}} \underline{\underline{1}}^T . \quad (5.27c)$$

Estas propriedades fazem desta configuração uma opção bastante interessante para a distribuição dos ressonadores sobre a esfera, pois minimizam os efeitos de um sobre os outros. A aplicação de tais propriedades é essencial para se obter a solução analítica apresentada na Seção 6.2.

5.4. MONITORAMENTO DO SISTEMA (CANAIS DOS MODOS)

Também é uma característica da configuração IT, que apenas alguns ressonadores sejam

afetados por modos específicos da esfera, de tal forma que é possível saber, pelo sinal obtido dos mesmos, quão excitado está cada modo da esfera, e conseqüentemente estimar o sinal candidato.

As saídas dos segundos modos dos seis ressonadores, podem, então, ser combinadas linearmente, possibilitando o monitoramento dos modos normais de oscilação da esfera. À combinação linear das seis saídas, Merkowitz e Johnson chamaram **canais dos modos**, $g_m(t)$, os quais são representados por [11]

$$\underline{g}(t) \equiv \underline{B} q_2(t) \quad . \quad (5.28)$$

A proporcionalidade existente entre g_m e F_{ms} faz com que a leitura direta de cada canal do modo corresponda a uma componente da força F_{ms} . A aplicação de métodos adequados de correlação, filtragem e otimização possibilitam a extração do valor de \mathcal{F}_m de F_{ms} , e portanto possibilitam a obtenção de informações sobre perturbações no campo gravitacional local, h_m . Em outras palavras, viabilizam a detecção de ondas gravitacionais.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS PARA O DETECTOR MARIO SCHENBERG

A primeira fase do Projeto Gráviton é a construção e operação do detector esférico de ondas gravitacionais Mario Schenberg. O instrumento está sendo construído no Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IF/USP), e os primeiros testes devem ser realizados ainda em 2002. O trabalho é financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), e conta com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e do INPE/MCT, além da colaboração de vários grupos de pesquisa ao redor do mundo.

A proposta inicial era a construção de um icosaedro truncado com 800kg , porém, em acordo com o projeto Mini-GRAIL (Holanda) e SFERA (Itália), optou-se pela construção de uma antena esférica com 65 cm de diâmetro e 1150 kg , usinada com a liga metálica CuAl(6%) (Cobre 94% , Alumínio 6%). Os três detectores operarão na mesma faixa de frequências, e, portanto, será possível cruzar suas informações, e assim aumentar a confiabilidade na detecção. O Schenberg irá operar a temperaturas menores que $0,1\text{ K}$, e terá sensibilidade suficiente para captar sinais com amplitudes $h > 10^{-21}\text{ Hz}^{-1/2}$, na faixa de $3,0\text{--}3,4\text{ kHz}$ [56], sendo um detector competitivo com os interferômetros à laser, nesta faixa de frequências.

Dentro desta banda de frequências, encontram-se algumas fontes interessantes de radiação gravitacional, e que são candidatas a serem observados pelo Schenberg. Dentre elas podemos citar [56]:

- 1) Colapsos nucleares em supernovas axi-assimétricas (Seção 3.1.1);
- 2) Instabilidades hidrodinâmicas em estrelas de nêutrons (Seção 3.1.1);

- 3) Excitação dos modos f de estrelas de nêutrons, decorrente da matéria acretada que colide com a superfície da estrela, “estrelamotos”, etc (Seção 3.2.1);
- 4) Excitação dos primeiros modos quadrupolares de buracos negros com $M \sim 3.8 M_{\odot}$ [57,58];
- 5) Coalescência de objetos compactos, como estrelas de nêutrons e buracos negros, cujo objeto final possua massa $\sim 3.8 M_{\odot}$ (Seção 3.1.2).

Além disso, algumas especulações são feitas sobre objetos mais exóticos como:

- 6) Rotação de estrelas bosônicas ou de matéria estranha em $\sim 1.6 \text{ kHz}$ [59,60].
- 7) Espiração de mini-buracos negros em sistemas binários [61].

O interesse astrofísico por estas fontes é grande, já que as informações sobre estes eventos são escassas, e muitas vezes puramente teóricas. Isto impulsiona o desenvolvimento de tecnologias para que detectores com as características do Mario Schenberg sejam eficientes e confiáveis.

A proposta deste trabalho foi de estudar e encontrar os parâmetros que regem o movimento da esfera, bem como, estimar o comportamento do detector frente a um sinal gravitacional. Utilizando-se o modelo apresentado no capítulo anterior (Seção 5.1), tais parâmetros foram encontrados e suas propriedades e dependências são apresentadas na Seção 6.1. Uma solução analítica para a Equação de movimento 5.25 é mostrada na Seção 6.2. De posse destas expressões, a resposta do detector a um sinal é simulada na Seção 6.3. E, completando os objetivos deste trabalho, uma estimativa da densidade espectral do ruído browniano estão expostas na Seção 6.4. Todos os valores numéricos dos parâmetros e constantes utilizadas para os cálculos encontram-se na Tabela 6.1.

TABELA 6.1. VALORES OBTIDOS E UTILIZADOS PELO MODELO.

Descrição	Símbolo	Valor
Raio da esfera a 4K	R	0,3239 m
Massa da esfera	m_s	1149,5 Kg
Massa efetiva da esfera	m_{ef}	288,0 Kg
Massa do 1° ressonador	m_{R1}	1,697 Kg
Massa do 2° ressonador	m_{R2}	0,010 Kg
Densidade média da esfera a 4K	ρ	8077,5 Kg/m^3
Módulo de Young a 4K	E	1,303x10 ¹¹ Pa
Razão poissônica	ν	0,364
Coefficiente de contração linear do CuAl(6%) [62]*	$\Delta R/R$	344,52x10 ⁻⁵
Coefficiente volumétrico de Lamé	μ	4,776x10 ¹⁰ Pa
Coefficiente tangencial de Lamé	λ	1.2784x10 ¹¹ Pa
Frequência de ressonância dos modos normais	f_0	3171,1 Hz
Parâmetro normalizador 1	p_1	-5,5435
Parâmetro normalizador 2	p_2	2,2736
Parâmetro de movimento radial	$\alpha(R)$	2,8622
Parâmetro de movimento tangencial	$\beta(R)$	0,6611
Fator χ	χ	0,6014
Fator de qualidade mecânica da esfera	Q_s	2,0x10 ⁷
Fator de qualidade mecânica do 1° ressonador	Q_{R1}	1,0x10 ⁶
Fator de qualidade mecânica do 2° ressonador	Q_{R2}	1,0x10 ⁶

* média ponderada = 94% Cu + 6% Al

6.1. OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS

O algoritmo **parametros.wms** foi desenvolvido com a finalidade de se obter os parâmetros característicos da esfera do detector Mario Schenberg. O algoritmo, apresentado no apêndice A, Seção A.1, é um “script” para o software de computação algébrica Maple V, da Waterloo Maple Inc.. E tem como dados de saída principais os valores de $\alpha(R)$ e $\chi(R)$, fundamentais para uma determinação do movimento radial

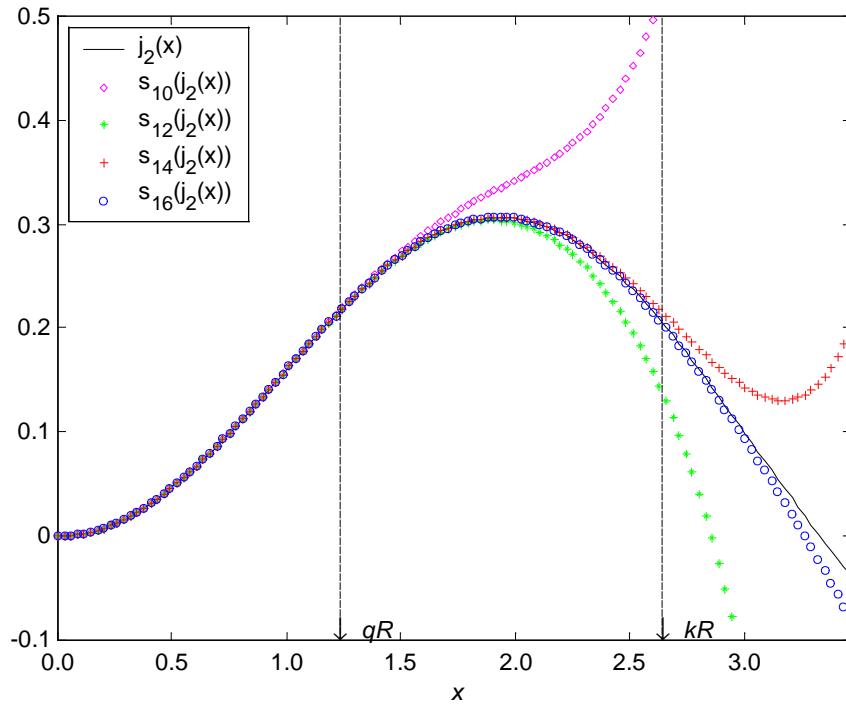


Fig. 6.1. Ajuste entre a função $j_2(x)$, e sua expansão em série, $s_i(j_2(x))$.

do detector e da massa efetiva da esfera, respectivamente. Um parêntese deve ser aberto com relação à sua linha de comando

```
j2:=convert(series((3/t^3-1/t)*sin(t)-3*cos(t)/t^2,t,16),polynom);
```

que tornou-se necessária devido ao software ter sido incapaz de solucionar o problema algébrico, já que as incógnitas faziam parte do argumento das funções trigonométricas. A linha de comando realiza uma expansão em série da função esférica de Bessel de ordem 2, $j_2(x)$, apresentada na Equação 5.13. Como tal série é infinita foi necessária truncá-la em um de seus termos. A Figura 6.1 mostra como a série, $s_i(j_2(x))$, e a função $j_2(x)$ se ajustam dentro dos limites dos argumentos $x=qR$, kR , de acordo com a ordem do termo no qual a série foi truncada, sendo que o índice i representa a ordem do termo. No modelo, a série é truncada no termo de ordem 16.

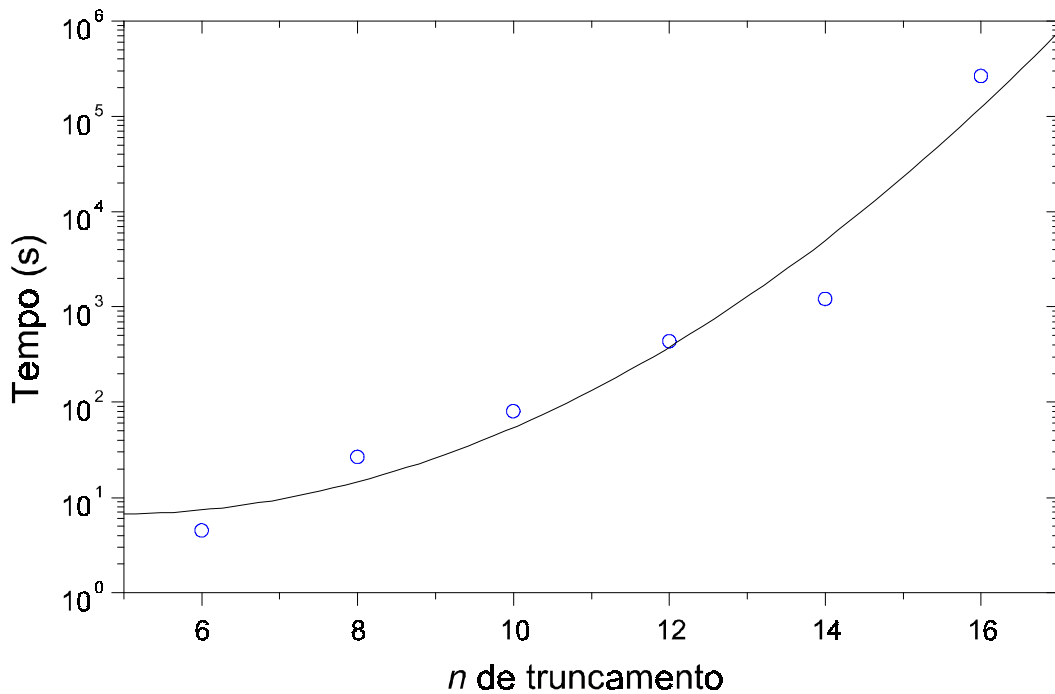


Fig. 6.2. Tempo de computação do algoritmo parametros.mws.

A utilização de um número maior de termos na série refinaria o resultado, porém o tempo de computação cresceria muito, devido às várias operações realizadas com a função $j_2(x)$, o que era indesejável. Pode-se observar pela Figura 6.1, que o truncamento no termo de ordem 16 encaixa-se satisfatoriamente ($j_2(kR)/s_{16}(j_2(kR)) \approx 1$). A Figura 6.2 mostra o acréscimo do tempo de computação em função da ordem de truncamento, quando o algoritmo é executado em um micro-computador Pentium III 800 MHz, com 256 Mb de RAM, e dedicação exclusiva. O algoritmo funciona como um “script”, ou seja, não é compilado, e portanto, é naturalmente lento. Como pode ser observado pelo gráfico, o truncamento da série no termo de ordem $n=16$ dispensou cerca de três dias de computação. A linha cheia corresponde ao ajuste polinomial.

As equações 5.3, 5.14a, 5.14b e as definições de q e k indicam que tanto os parâmetros normalizadores, p_1 e p_2 , quanto a frequência característica, f_0 , estão condicionados aos valores do raio, da razão poissônica e do módulo de Young referentes à esfera. O algoritmo leva em conta a contração térmica sofrida pelo raio quando a temperatura

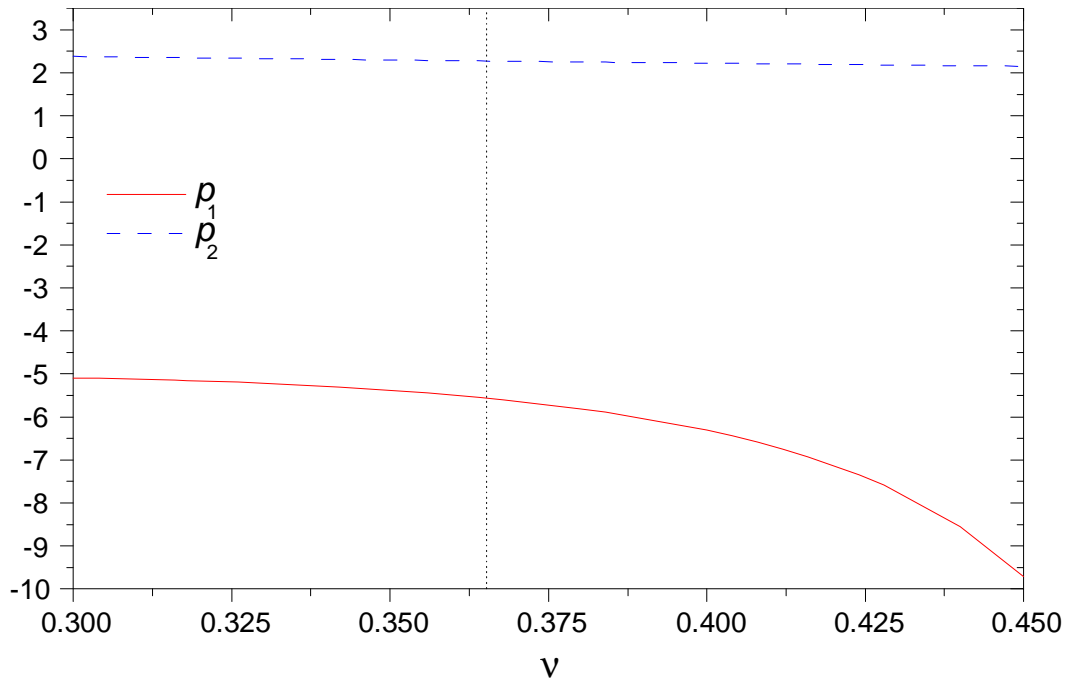


Fig. 6.3. Dependência entre p_1 e p_2 e ν , para $E = 1,303 \times 10^{11} \text{ Pa}$.

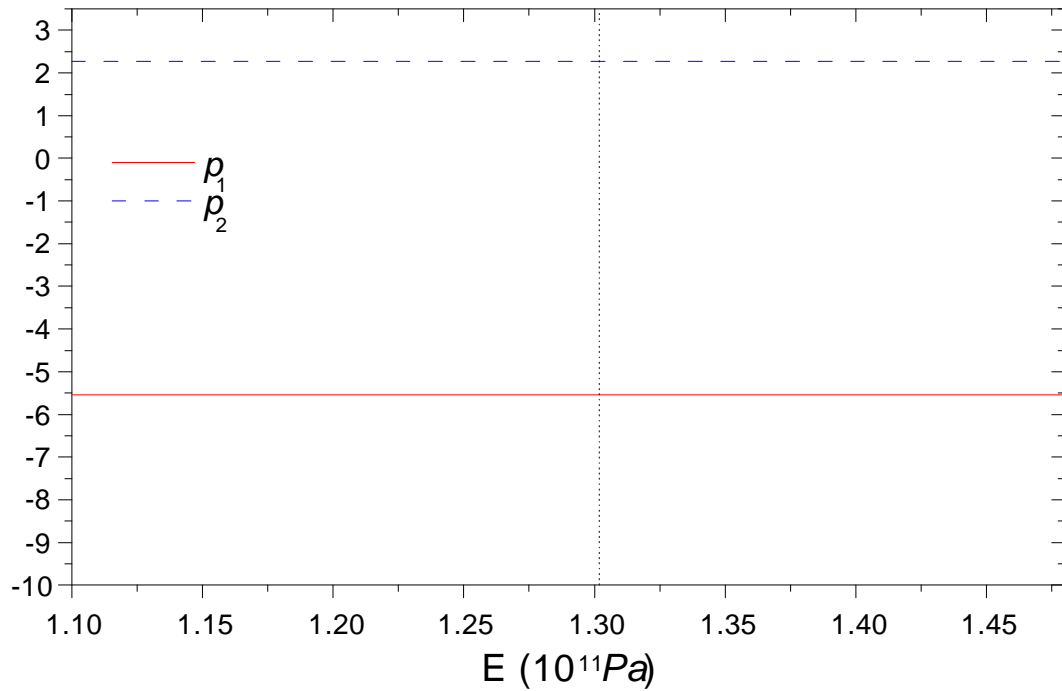


Fig. 6.4. Dependência entre p_1 e p_2 , e E , para $\nu = 0,364$.

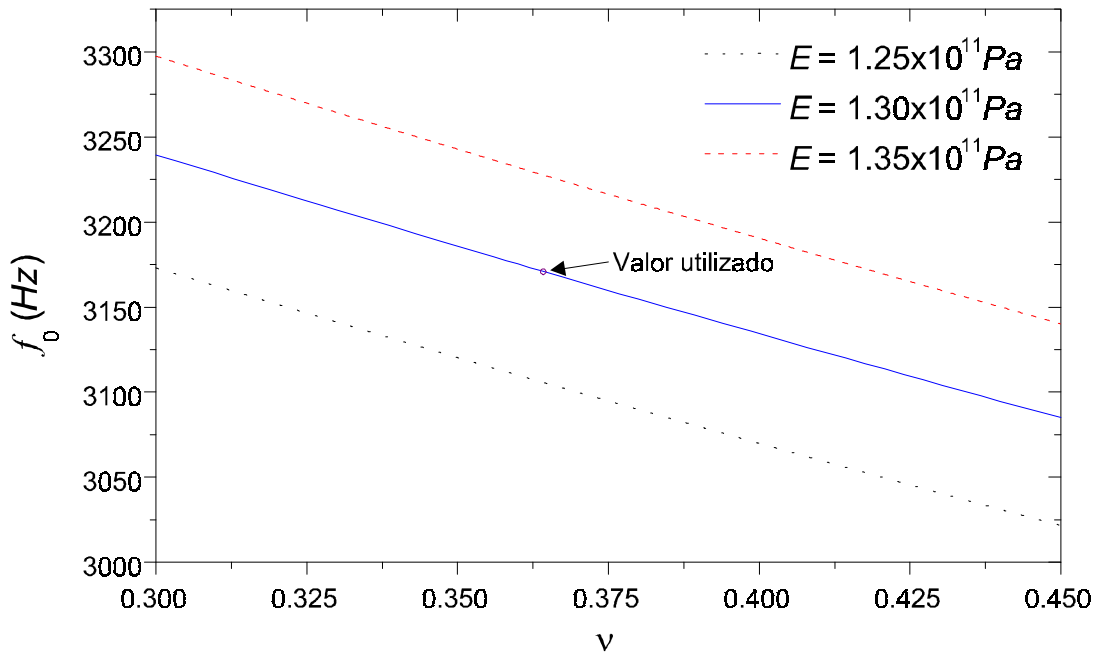


Fig. 6.5. Dependência da frequência com a razão poissônica e o módulo de Young.

do detector é reduzida a milikelvins. Como não foi encontrado, na bibliografia disponível, o valor da contração térmica do CuAl(6%) a baixas temperaturas, utilizou-se uma média ponderada dos valores do cobre e do alumínio [62]. As dependências de p_1 e p_2 com a razão poissônica estão representadas na Figura 6.3. Tais parâmetros praticamente independem do valor utilizado para o módulo de Young, como pode ser observado pela Figura 6.4. A linha vertical pontilhada intercepta os valores utilizados. A forma com a variação dos valores de ν e E afetam a frequência dos modos normais desacoplados está mostrada na Figura 6.5. Valores maiores para o módulo de Young e/ou valores menores da razão poissônica deslocam a frequência de ressonância para frequências mais altas, e vice-versa. Isto faz com que a faixa de sensibilidade do detector seja também deslocada.

Com tais valores é possível determinar os parâmetros de movimento radial, α , e tangencial, β , na superfície da esfera, bem como o valor do fator χ . Suas dependências com a razão poissônica são mostradas na Figura 6.6. Todos os resultados obtidos pelo

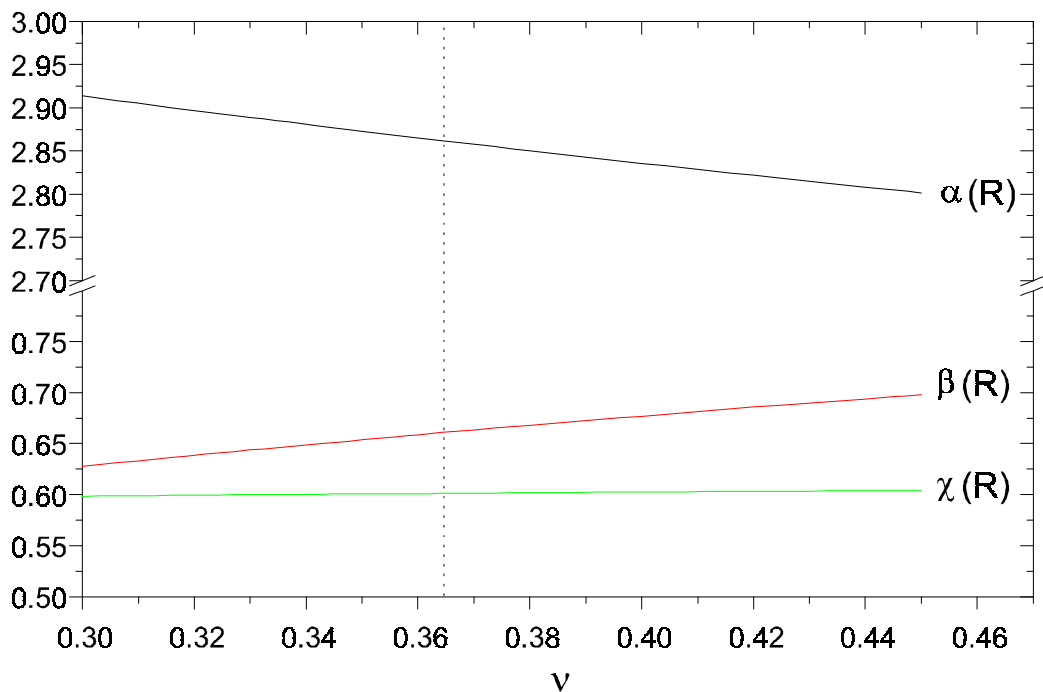


Fig. 6.6. Dependência dos parâmetros $\alpha(R)$ e $\beta(R)$ e do fator $\chi(R)$ com a razão poissônica.

modelo estão condizentes como os encontrados por Wagoner e Paik, e por Merkwitz e Johnson [11,49].

O algoritmo supõe uma simetria esférica perfeita e ignora os efeitos do furo de sustentação, apesar de considerar a perda de massa causada pelo mesmo, diminuindo a densidade média do corpo. Os efeitos da quebra de simetria causada pelo furo não foram estudados, mas sabe-se que os mesmos alteram a constante de mola da esfera (pela diminuição de massa), afetando de forma diferenciada cada um dos modos normais (a porção de massa retirada pelo furo, contribuiria para o transporte da oscilação ao longo da esfera de forma diferente para cada modo), deslocando suas frequências de ressonância, e quebrando a degenerescência.

6.1.1. Frequências dos modos acoplados

O acoplamento de ressonadores secundários à esfera, com i modos de oscilação, sob a

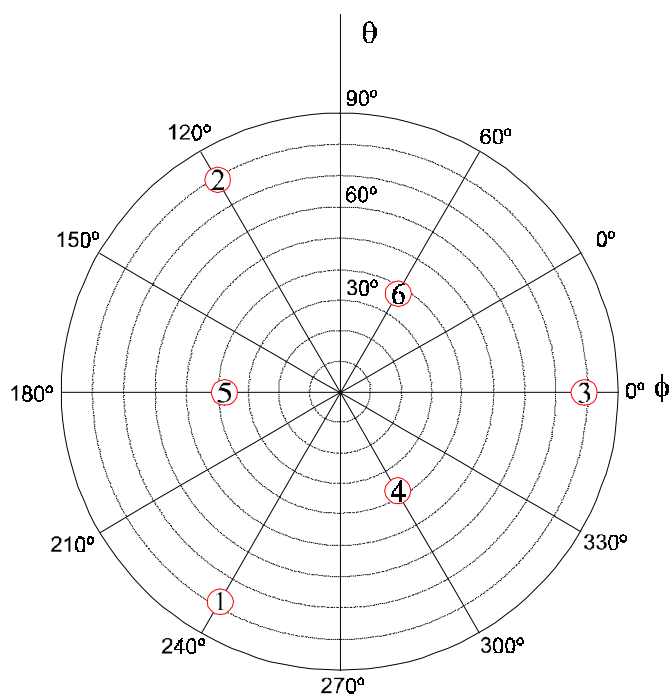


Fig. 6.7. Distribuição dos ressonadores sobre a superfície da esfera.

configuração IT, faz com que a distribuição das frequências características apresentem $i+1$ quintupletos degenerados, e i modos não-degenerados. Estas degenerescências são conseqüências das simetrias apresentadas pela configuração, evidenciadas pelas propriedades 5.27, a, b e c, e da proporcionalidade entre as massas sugerida pela Equação 5.24. A Figura 6.7 mostra como os ressonadores estão distribuídos sobre a superfície da esfera, onde os números indicam como estão ordenados no modelo. No caso do detector Mario Schenberg, onde se pretende acoplar seis ressonadores de dois modos, obtém-se um total de três quintupletos degenerados ($f \sim 3002,2; 3175,7; 3344,6Hz$), além de dois modos isolados ($f \sim 3051,7; 3295,1Hz$), totalizando 17 modos de oscilação.

A Figura 6.8 demonstra o comportamento das frequências de ressonância do sistema à medida que os ressonadores vão sendo acoplados. O cálculo foi realizado pelo algoritmo **f_2modos.m**, apresentado no apêndice A, Seção A.3, para o software Matlab 5.3, da Mathworks Inc.. Os números à esquerda do gráfico correspondem ao número de

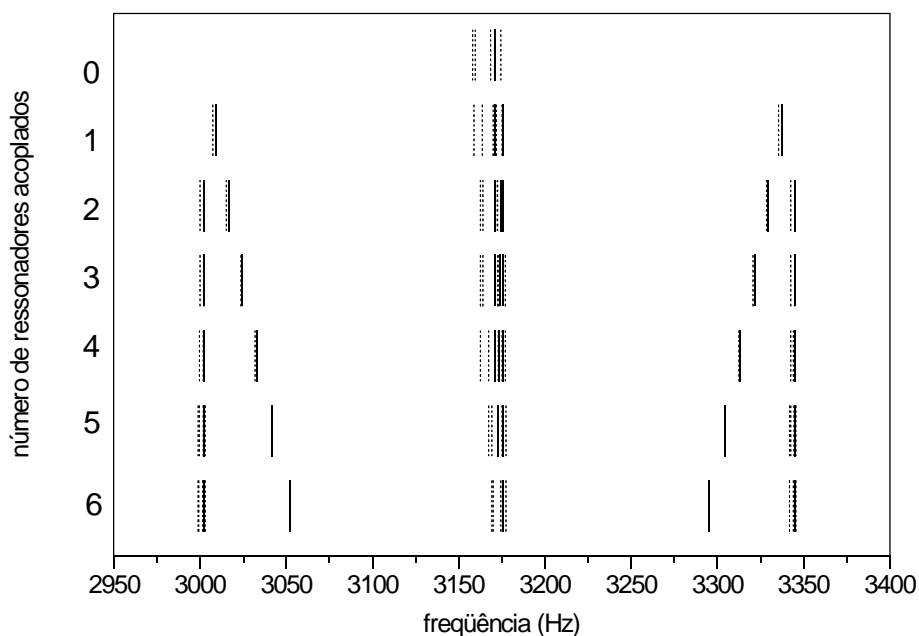


Fig. 6.8. Frequências dos modos acoplados.

ressonadores acoplados à esfera, respeitando a ordenação evidenciada na Figura 6.7. O número 0 (zero) corresponde à esfera isolada (5 modos normais degenerados). O número 1, indica que somente o primeiro ressonador está acoplado. O número 2, que o primeiro e o segundo ressonadores estão conectados à esfera, e assim por diante. As linhas pontilhadas indicam as frequências medidas por de Waard, Gottardi e Frossati, do Mini-Grail, com o primeiro protótipo da esfera, à temperatura de $1.8 K$ [63], juntamente com as frequências dos modos acoplados, simuladas pelo modelo. Como pode ser observado pela Figura 6.8, as frequências medidas dão suporte experimental à frequência obtida pelo modelo. Seu valor preciso depende de valores exatos de E e ν .

Ao supor que os modos normais desacoplados são degenerados, que os ressonadores possuem frequência de ressonância coincidente e que possuem um forte acoplamento com os modos da esfera, de forma que não existam perdas por fricção, torna-se possível encontrar uma solução analítica para Equação 5.25.

6.2. SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

O objetivo principal deste trabalho consiste em se obter uma expressão que descreva o comportamento dos canais dos modos, quando o detector é excitado por uma onda gravitacional. Para tanto, é necessário que se conheça a expressão que descreve a amplitude dos deslocamentos relativos dos ressonadores. Como visto na Seção 5.2, a equação de movimento da esfera acoplada a j ressonadores de um modo é dada, assumindo-se que $\tau_m \rightarrow \infty$, por:

$$\begin{bmatrix} m_S \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\ m_{R1} \alpha \underline{B}^T & m_{R1} \underline{I} & \underline{0} \\ m_{R2} \alpha \underline{B}^T & m_{R2} \underline{I} & m_{R2} \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{A}}(t) \\ \ddot{\underline{q}}_1(t) \\ \ddot{\underline{q}}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_S \underline{I} & -k_{R1} \alpha \underline{B} & \underline{0} \\ \underline{0} & k_{R1} \underline{I} & -k_{R2} \underline{I} \\ \underline{0} & \underline{0} & k_{R2} \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}(t) \\ \underline{q}_1(t) \\ \underline{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & -\alpha \underline{B} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} & -\underline{I} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E}^S \\ \underline{E}_1^N \\ \underline{E}_2^N \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Tal aproximação é válida (e necessária para simplificar a resolução do problema) quando o tempo de decaimento das oscilações é muito maior que o tempo de análise das mesmas. E a Equação 6.1 pode ser expressa (quando admitido que $\omega_i = \omega_0$, portanto $k_i = m_i \omega_0^2$) sob a forma

$$\begin{bmatrix} m_S \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\ m_{R1} \alpha \underline{B}^T & m_{R1} \underline{I} & \underline{0} \\ m_{R2} \alpha \underline{B}^T & m_{R2} \underline{I} & m_{R2} \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{A}} \\ \ddot{\underline{q}}_1 \\ \ddot{\underline{q}}_2 \end{bmatrix} + \omega_0^2 \begin{bmatrix} m_S \underline{I} & -m_{R1} \alpha \underline{B} & \underline{0} \\ \underline{0} & m_{R1} \underline{I} & -m_{R2} \underline{I} \\ \underline{0} & \underline{0} & m_{R2} \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & -\alpha \underline{B} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} & -\underline{I} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E}^S \\ \underline{E}_1^N \\ \underline{E}_2^N \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Com a finalidade de facilitar a solução do problema, o vetor que contém as amplitudes

dos modos e os deslocamentos relativos dos ressonadores pode ser decomposto em um sistema de coordenadas baseado no “comprimento de massa”, segundo a relação

$$\begin{bmatrix} \underline{A}(t) \\ \underline{q}_1(t) \\ \underline{q}_2(t) \end{bmatrix} = \underline{\Upsilon} \underline{w}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_S}} \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \frac{1}{\sqrt{m_{R1}}} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \frac{1}{\sqrt{m_{R2}}} \underline{I} \end{bmatrix} \underline{w}(t). \quad (6.3)$$

Ao aplicar-se 6.3 em 6.2, chega-se à expressão

$$\begin{bmatrix} \sqrt{m_S} \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\ \frac{m_{R1}}{\sqrt{m_S}} \alpha \underline{B}^T & \sqrt{m_{R1}} \underline{I} & \underline{0} \\ \frac{m_{R2}}{\sqrt{m_S}} \alpha \underline{B}^T & m_{R2} \sqrt{m_{R1}} \underline{I} & \sqrt{m_{R2}} \underline{I} \end{bmatrix} \ddot{\underline{w}} + \omega_0^2 \begin{bmatrix} \sqrt{m_S} \underline{I} & -\sqrt{m_{R1}} \alpha \underline{B} & \underline{0} \\ \underline{0} & \sqrt{m_{R1}} \underline{I} & -\sqrt{m_{R2}} \underline{I} \\ \underline{0} & \underline{0} & \sqrt{m_{R2}} \underline{I} \end{bmatrix} \underline{w} = \begin{bmatrix} \underline{I} & -\alpha \underline{B} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} & -\underline{I} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E}^S \\ \underline{E}_1^N \\ \underline{E}_2^N \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

A Equação 6.4 pode ser simplificada através de sua multiplicação à esquerda pela inversa da matriz que multiplica $\ddot{\underline{w}}(t)$, dada por

$$\begin{bmatrix} \sqrt{m_S} \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\ \frac{m_{R1}}{\sqrt{m_S}} \alpha \underline{B}^T & \sqrt{m_{R1}} \underline{I} & \underline{0} \\ \frac{m_{R2}}{\sqrt{m_S}} \alpha \underline{B}^T & m_{R2} \sqrt{m_{R1}} \underline{I} & \sqrt{m_{R2}} \underline{I} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_S}} \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\ -\frac{\sqrt{m_{R1}}}{m_S} \alpha \underline{B}^T & \frac{1}{\sqrt{m_{R1}}} \underline{I} & \underline{0} \\ \frac{m_{R2}}{\sqrt{m_S}} \alpha \underline{B}^T & -\frac{\sqrt{m_{R2}}}{m_{R1}} \underline{I} & \frac{1}{\sqrt{m_{R2}}} \underline{I} \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Ao multiplicar-se 6.4 por 6.5, obtém-se

$$\ddot{\underline{w}} + \omega_0^2 \begin{bmatrix} \underline{I} & -\frac{\sqrt{m_{R1}}}{\sqrt{m_s}} \alpha \underline{B} & \underline{0} \\ -\frac{\sqrt{m_{R1}}}{\sqrt{m_s}} \alpha \underline{B}^T & \frac{m_{R1}}{m_s} \alpha^2 \underline{B}^T \underline{B} + \underline{I} & -\frac{\sqrt{m_{R2}}}{\sqrt{m_{R1}}} \underline{I} \\ \underline{0} & -\frac{\sqrt{m_{R2}}}{\sqrt{m_{R1}}} \underline{I} & \left(\frac{m_{R2}}{m_{R1}} + 1 \right) \underline{I} \end{bmatrix} \underline{w} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{m_s}} \begin{bmatrix} \underline{I} & -\alpha \underline{B} & \underline{0} \\ -\frac{\sqrt{m_{R1}}}{\sqrt{m_s}} \alpha \underline{B}^T & \frac{\sqrt{m_{R1}}}{\sqrt{m_s}} \left(\alpha^2 \underline{B}^T \underline{B} + \frac{m_s}{m_{R1}} \right) \underline{I} & -\frac{\sqrt{m_s}}{\sqrt{m_{R1}}} \underline{I} \\ \underline{0} & -\frac{\sqrt{m_s} \sqrt{m_{R2}}}{m_{R1}} \underline{I} & \frac{\sqrt{m_s}}{\sqrt{m_{R2}}} \left(\frac{m_{R2}}{m_{R1}} + 1 \right) \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}^S \\ \underline{F}_1^N \\ \underline{F}_2^N \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

A fim de facilitar a manipulação algébrica necessária para a resolução dos passos subsequentes do problema, é conveniente definir-se

$$\sqrt{\frac{m_{R1}}{m_s}} \alpha = b \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{m_{R2}}{m_{R1}}} = a. \quad (6.7)$$

Assim, a Equação 6.6 torna-se

$$\ddot{\underline{w}}(t) + \omega_0^2 \begin{bmatrix} \underline{I} & -b \underline{B} & \underline{0} \\ -b \underline{B}^T & b^2 \underline{B}^T \underline{B} + \underline{I} & -a \underline{I} \\ \underline{0} & -a \underline{I} & (a^2 + 1) \underline{I} \end{bmatrix} \underline{w}(t) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{m_s}} \begin{bmatrix} \underline{I} & -\alpha \underline{B} & \underline{0} \\ -b \underline{B}^T & \alpha \left(b \underline{B}^T \underline{B} + \frac{1}{b} \underline{I} \right) & -\alpha \frac{1}{b} \underline{I} \\ \underline{0} & -\alpha \frac{a}{b} \underline{I} & \alpha \left(\frac{a^2 + 1}{ab} \right) \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}^S \\ \underline{F}_1^N \\ \underline{F}_2^N \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

E definindo-se

$$\begin{aligned} \bullet \quad \underline{\underline{M}} &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & -b\underline{\underline{B}} & \underline{\underline{0}} \\ -b\underline{\underline{B}}^T & b^2\underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{I}} & -a\underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{0}} & -a\underline{\underline{I}} & (a^2+1)\underline{\underline{I}} \end{bmatrix}; \\ \bullet \quad \underline{\underline{K}} &= \frac{1}{\sqrt{m_s}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & -\alpha\underline{\underline{B}} & \underline{\underline{0}} \\ -b\underline{\underline{B}}^T & \alpha\left(b\underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{B}}+\frac{1}{b}\underline{\underline{I}}\right) & -\alpha\frac{1}{b}\underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{0}} & -\alpha\frac{a}{b}\underline{\underline{I}} & \alpha\left(\frac{a^2+1}{ab}\right)\underline{\underline{I}} \end{bmatrix}, \\ \bullet \quad \underline{\underline{E}} &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}}^S \\ \underline{\underline{E}}_1^N \\ \underline{\underline{E}}_2^N \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

a Equação 6.8 torna-se

$$\ddot{\underline{\underline{w}}}(t) + \omega_0^2 \underline{\underline{M}} \underline{\underline{w}}(t) = \underline{\underline{K}} \underline{\underline{F}}(t). \quad (6.9)$$

O próximo passo é obter uma forma ortonormal da equação de movimento, representada por 6.9, a fim de separar os $m+2j$ osciladores harmônicos, o que resultaria num mesmo número de equações lineares, simplificando a solução do problema. Para tanto, pode-se levar em conta que $\underline{\underline{M}}$ é simétrica e diagonalizável, e uma forma de diagonalização é a aplicação da expressão

$$\underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{D}}, \quad (6.10)$$

onde $\underline{\underline{U}}$ e $\underline{\underline{D}}$ representam, respectivamente, a matriz cujas colunas comportam os autovetores e a matriz diagonal dos autovalores de $\underline{\underline{M}}$. Então, a Equação 6.9 assume

sua forma canônica, quando \underline{M} é substituída por \underline{D} . É prudente admitir que \underline{D} possui apenas valores reais e positivos, pois deseja-se que as frequências sejam reais e positivas. Impor que \underline{U} é hermetiana ($\underline{U}^T \underline{U} = \underline{I}$, onde \underline{U}^T é a transposta de \underline{U}) assegura que \underline{M} seja positivamente definida e, portanto, que \underline{D} seja real e positiva. Assim, quando a Equação 6.9 é multiplicada por \underline{U}^T e \underline{M} é substituída por \underline{D} , obtém-se sua forma ortonormal, dada por

$$\ddot{\underline{\zeta}}(t) + \omega_0^2 \underline{D}(t) \underline{\zeta}(t) = \underline{U}^T \underline{K} \underline{F}(t), \quad (6.11)$$

onde $\underline{\zeta} = \underline{U}^T \underline{w}$.

Feito isto, o problema é reduzido à $m+2j$ equações diferenciais, que podem ser solucionadas pela aplicação de inúmeros métodos. Um deles consiste em resolver este sistema no domínio das frequências. Para isto toma-se a transformada de Fourier da Equação 6.11, a qual assume a forma

$$\left(-\omega^2 \underline{I} + \omega_0^2 \underline{D} \right) \tilde{\underline{\zeta}}(\omega) = \underline{U}^T \underline{K} \tilde{\underline{F}}(\omega). \quad (6.12)$$

O termo entre parênteses equivale a uma matriz diagonal, já que \underline{D} e \underline{I} são diagonais. Definindo-a como $\tilde{\underline{J}}^{-1}(\omega)$, a Equação 6.12 conduz a

$$\tilde{\underline{\zeta}}(\omega) = \tilde{\underline{J}}(\omega) \underline{U}^T \underline{K} \tilde{\underline{F}}(\omega). \quad (6.13)$$

Ao combinar-se a transformada de Fourier do vetor deslocamento relativo, dado por 6.3, com as equações 6.11 e 6.13, chega-se a

$$\begin{bmatrix} \tilde{\underline{A}}(\omega) \\ \tilde{\underline{q}}_1(\omega) \\ \tilde{\underline{q}}_2(\omega) \end{bmatrix} = \underline{\Upsilon} \underline{U} \tilde{\underline{\zeta}}(\omega) = \underline{\Upsilon} \underline{U} \tilde{\underline{J}}(\omega) \underline{U}^T \underline{K} \tilde{\underline{F}}(\omega), \quad (6.14)$$

que representa a solução da equação de movimento, no domínio das frequências.

6.2.1. Autovalores e autovetores de \underline{M}

Como pode ser observado pela Equação 6.14, uma boa determinação dos autovalores e autovetores da matriz \underline{M} é essencial para a resolução do problema. Portanto, suas expressões devem ser obtidas de tal forma que respeitem rigorosamente às condições impostas anteriormente. Para atingir este propósito, utilizando-se de resultados numéricos, obtidos pelo algoritmo **f_2modos.m**, percebeu-se que \underline{U} pode ser separada em dois grupos distintos

$$\underline{U}_{1\pm} = n_{1\pm} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{1} \\ d_{1\pm} \underline{1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{U}_k = n_k \begin{bmatrix} \underline{I} \\ c_k \underline{B}^T \\ d_k \underline{B}^T \end{bmatrix}, \quad \text{para } k = 2,3,4, \quad (6.15)$$

onde os \underline{U}_k correspondem às três degenerescências, enquanto, os $\underline{U}_{1\pm}$, às frequências isoladas. A notação \pm denota os autovetores correspondentes às frequências que estão acima (+) e abaixo (-) da degenerescência central. Os valores das constantes $n_{1\pm}$, $d_{1\pm}$, n_k , c_k e d_k são obtidos através da relação $\underline{M}\underline{U} = \underline{U}\underline{D}$, derivada da Equação 6.10, onde

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \lambda_{1\pm} & \underline{0} \\ \underline{0} & \lambda_k \underline{I} \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Os valores de λ_k correspondem aos três quintupletos degenerados, mencionados na Seção 5.1.1, enquanto, $\lambda_{1\pm}$ refere-se aos dois modos não-degenerados.

Assim, obtêm-se as seguintes expressões para as constantes adimensionais $n_{1\pm}$, $d_{1\pm}$, n_k , c_k e d_k

$$n_{1\pm}^2 = \frac{1}{1 + \frac{3}{2\pi} (1 + d_{1\pm}^2)}; \quad (6.17a)$$

$$d_{1\pm} = -\frac{1}{2} (a \pm \sqrt{a^2 + 4}); \quad (6.17b)$$

$$n_k^2 = \frac{1}{1 + \frac{3}{2\pi} (c_k^2 + d_k^2)}; \quad (6.17c)$$

$$d_k = \frac{3}{2\pi} \frac{b}{a} \left(c_k^2 + b c_k - \frac{2\pi}{3} \right); \quad (6.17d)$$

$$c_2 = \frac{s_3' + 4x' - 2x s_3 - 2y}{6s_3}; \quad (6.17e)$$

$$c_{3,4} = \frac{4(-1 \mp i\sqrt{3})x' + (-1 \pm i\sqrt{3})s_3' - 4x s_3 + 12(1 \pm i\sqrt{3})y}{12s_3},^{12} \quad (6.17f)$$

onde

$$i = \sqrt{-1}; \quad (6.17g)$$

$$s_3 = (s_1 + 12\sqrt{s_2})^{1/3}; \quad (6.17h)$$

$$s_1 = -8x^3 + 36xy - 108z; \quad (6.17i)$$

$$s_2 = 12y^3 + 12x^3z - 3x^2y^2 + 81z^2 - 54xyz; \quad (6.17j)$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{a^2}{b} + \frac{3}{2\pi} b \right); \quad (6.17k)$$

$$y = \frac{2\pi}{3} \left[\frac{a^2}{b^2} \left(b^2 - \frac{2\pi}{3} \right) - 1 \right]; \quad (6.17l)$$

$$z = -\frac{4\pi' a^2}{9 b}. \quad (6.17m)$$

¹² Apesar de $c_{3,4}$ conterem parcelas imaginárias, seus valores são reais.

Além disso,

$$\lambda_{1\pm} = 1 - a d_{1\pm} \quad \text{e} \quad \lambda_k = 1 - \frac{3\pi}{2} b^2 c_k. \quad (6.17n)$$

A partir da aplicação dos valores das equações 6.17n em 6.16 e, subseqüentemente, na Equação 6.12, obtém-se

$$\tilde{\underline{I}}(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_{1\pm}^2)} & \underline{0} \\ \underline{0} & \frac{1}{(\omega^2 - \omega_k^2)} \underline{I} \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

onde

$$\omega_{1\pm}^2 = \lambda_{1\pm} \omega_0^2 \quad \text{e} \quad \omega_k^2 = \lambda_k \omega_0^2, \quad (6.19)$$

correspondendo às frequências de ressonância do sistema. Assim, torna-se possível obter expressões analíticas que descrevam os deslocamentos relativos.

6.2.2. Expressões para $\tilde{\underline{A}}(\omega)$, $\tilde{q}_1(\omega)$ e $\tilde{q}_2(\omega)$

Utilizando-se das propriedades de simetria da configuração IT, apresentadas pelas equações 5.27a, 5.27b e 5.27c, e depois de um exercício algébrico, obteve-se as expressões analíticas para a Equação 6.14, dadas por

$$\tilde{\underline{A}}(\omega) = \sum_{k=2}^4 \eta_k \lambda_k \left(\frac{1}{\sqrt{m_s}} \tilde{\underline{E}}^S + \frac{1}{\sqrt{m_{R1}}} c_k \underline{\underline{B}} \tilde{\underline{E}}_1^N + \frac{1}{\sqrt{m_{R2}}} d_k \underline{\underline{B}} \tilde{\underline{E}}_2^N \right), \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{q}}_1(\omega) = & \frac{1}{\sqrt{m_{R1}}} \sum_{k=2}^4 \eta_k c_k \lambda_k \underline{\underline{B}}^T \tilde{\underline{E}}^S + \frac{\sqrt{m_s}}{m_{R1}} \left[\sum_{k=2}^4 \eta_k c_k^2 \lambda_k \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} + (\eta_{1+} \lambda_{1+} + \eta_{1-} \lambda_{1-}) \underline{\underline{1}} \right] \tilde{\underline{E}}_1^N + \\ & \frac{\sqrt{m_s}}{m_{R1} \sqrt{m_{R2}}} \left[\sum_{k=2}^4 \eta_k c_k d_k \lambda_k \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} + (\eta_{1+} d_{1+} \lambda_{1+} + \eta_{1-} d_{1-} \lambda_{1-}) \underline{\underline{1}} \right] \tilde{\underline{E}}_2^N, \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{q}}_2(\omega) = & \frac{1}{\sqrt{m_{R2}}} \sum_{k=2}^4 \eta_k d_k \lambda_k \underline{\underline{B}}^T \tilde{\underline{E}}^S + \\ & \frac{\sqrt{m_s}}{\sqrt{m_{R1} m_{R2}}} \left[\sum_{k=2}^4 \eta_k c_k d_k \lambda_k \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} + (\eta_{1+} d_{1+} \lambda_{1+} + \eta_{1-} d_{1-} \lambda_{1-}) \underline{\underline{1}} \right] \tilde{\underline{E}}_1^N + \\ & \frac{\sqrt{m_s}}{m_{R2}} \left[\sum_{k=2}^4 \eta_k d_k^2 \lambda_k \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} + (\eta_{1+} d_{1+}^2 \lambda_{1+} + \eta_{1-} d_{1-}^2 \lambda_{1-}) \underline{\underline{1}} \right] \tilde{\underline{E}}_2^N, \end{aligned} \quad (6.22)$$

onde $\eta_{1\pm} = \eta_{1\pm}(\omega) = \frac{n_{1\pm}^2}{(\omega_{1\pm}^2 - \omega^2)}$ e $\eta_k = \eta_k(\omega) = \frac{n_k^2}{(\omega_k^2 - \omega^2)}$.

E, finalmente, utilizando-se da Equação 5.28 é possível obter uma expressão para os canais dos modos, $\tilde{\underline{g}}_m(\omega)$, dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{g}}(\omega) = & \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{m_{R2}}} \left(\sum_{k=2}^4 \eta_k d_k \lambda_k \tilde{\underline{E}}^S + \frac{\sqrt{m_s}}{\sqrt{m_{R1}}} \sum_{k=2}^4 \eta_k c_k d_k \lambda_k \underline{\underline{B}} \tilde{\underline{E}}_1^N \right) + \\ & \frac{3}{2\pi} \frac{\sqrt{m_s}}{m_{R2}} \sum_{k=2}^4 \eta_k d_k^2 \lambda_k \underline{\underline{B}} \tilde{\underline{E}}_2^N. \end{aligned} \quad (6.23)$$

As transformadas inversas de Fourier das equações 6.20 a 6.23, dão a solução da equação de movimento 5.25. Estas equações permitem prever o comportamento do sistema frente a um sinal gravitacional.

6.3. SIMULAÇÃO DA RESPOSTA DO DETECTOR A UM SINAL

Para simular o comportamento do detector, foi gerado um sinal, em força gravitacional efetiva, que serve de entrada no modelo. O sinal gerado supõe uma onda gravitacional senoidal que incide sobre o zênite local, ou seja, sua direção de propagação coincide com o eixo z do sistema de referências adotado. A onda possui somente polarização “ x ” não-nula. Isto faz com que, unicamente, o segundo modo normal seja excitado, já que a única componente não-nula da força gravitacional efetiva, é \mathcal{F}_2 (pelas equações de 2.31 até 2.32e, e, 5.15). A frequência do sinal coincide com a frequência de ressonância da esfera desacoplada. Todos os termos referentes às fontes de ruído foram omitidos nesta simulação. O algoritmo **amp_2modos.m**, apresentado no apêndice A, Seção A.4, calcula as amplitudes relativas e a resposta dos canais dos modos.

As simetrias especiais, apresentadas pela distribuição dos ressonadores sob a configuração IT, previnem que os demais modos sejam excitados pelo movimento dos ressonadores, como mostra a Figura 6.9. Tal figura representa o invólucro do batimento entre as oscilações do modo da esfera e dos ressonadores por ele excitados, e apresenta amplitude máxima A .

A Figura 6.10 mostra o comportamento dos ressonadores R_2 excitados pelo modo de oscilação da esfera. Os valores expressos à direita representam quanto o valor máximo de q_2 é maior que o valor de amplitude máxima A . Richard demonstrou que, por conservação de energia, a razão entre os deslocamentos é [64]

$$\frac{|x_2|}{|x_1|} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \rightarrow \frac{|q_2|}{|A|} = \sqrt{\frac{m_{ef}}{m_{R2}}} , \quad (6.24)$$

nas frequências de ressonância. Realizando-se o cálculo da massa efetiva do Schenberg, e aplicando-se a relação 6.24, chega-se a

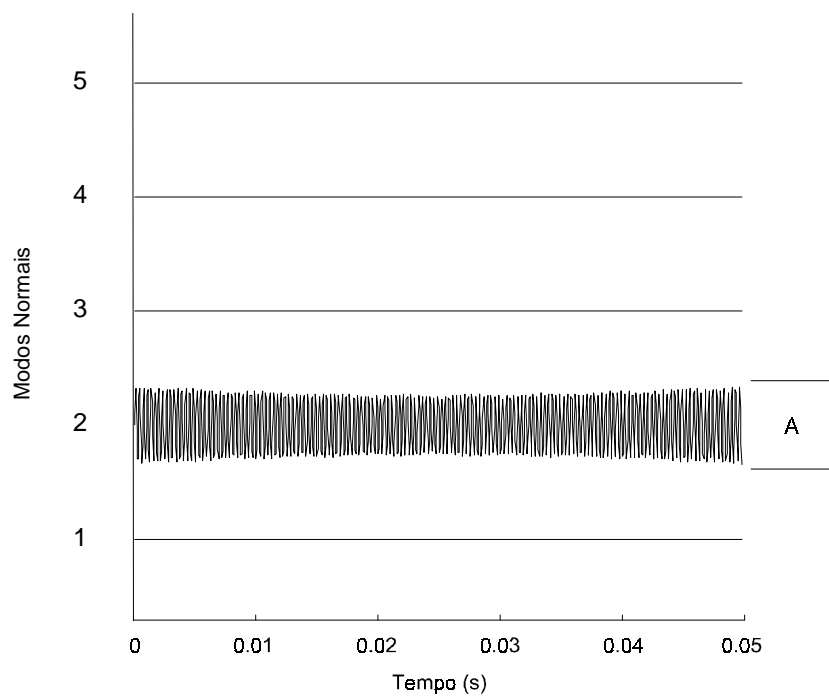


Fig. 6.9. Comportamento do segundo modo normal da esfera frente ao sinal simulado.

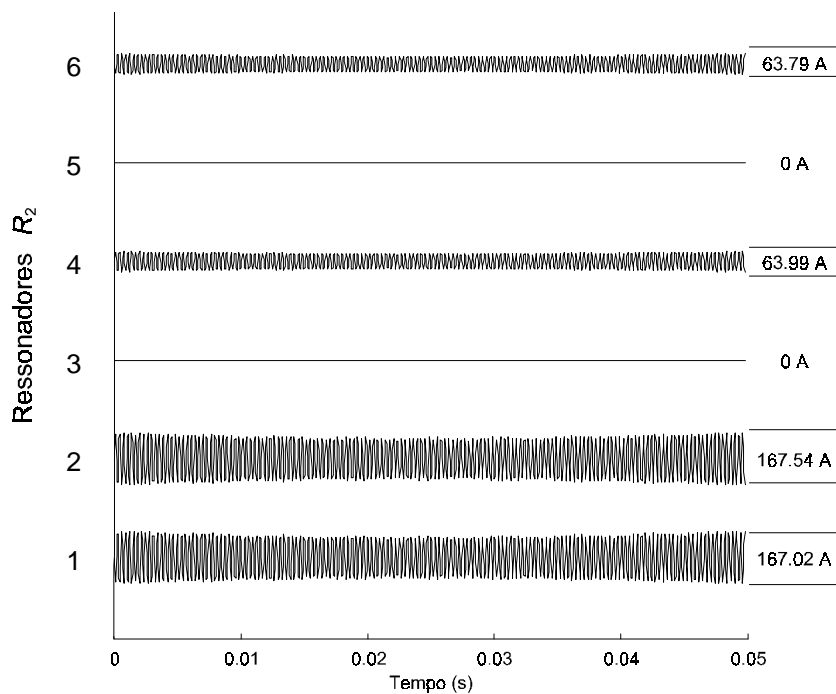


Fig. 6.10. Amplitudes nos ressonadores R2.

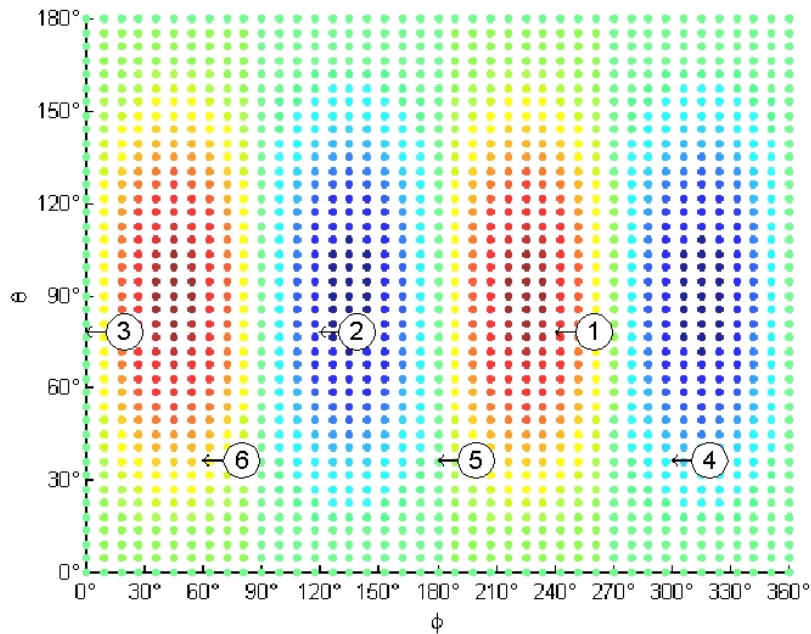


Fig. 6.11. Planificação do segundo modo normal da esfera, e a distribuição dos ressonadores sobre sua superfície. O azul e vermelho representam as regiões de maior amplitude radial e sentidos opostos de movimento. O verde, regiões de movimento nulo.

$$\frac{|q_2|}{|A|} \approx 169.7 \quad , \quad (6.25)$$

que representa um valor acima dos encontrados. Porém, como pode ser observado pela Figura 6.11, os ressonadores não se encontram em pontos de máxima amplitude de A , e isto justifica a diferença entre os valores. A figura representa uma planificação do segundo modo normal, apresentado na Figura 5.1, onde o azul e vermelho representam as regiões de maior movimento radial. De acordo com a figura podemos observar que os ressonadores 3 e 5 encontram-se em regiões de movimento radial nulo (cor verde). Os ressonadores 1 e 2 são os que mais se aproximam das regiões de máxima amplitude. Uma análise análoga foi realizada com os demais modos, e obteve-se resultados compatíveis.

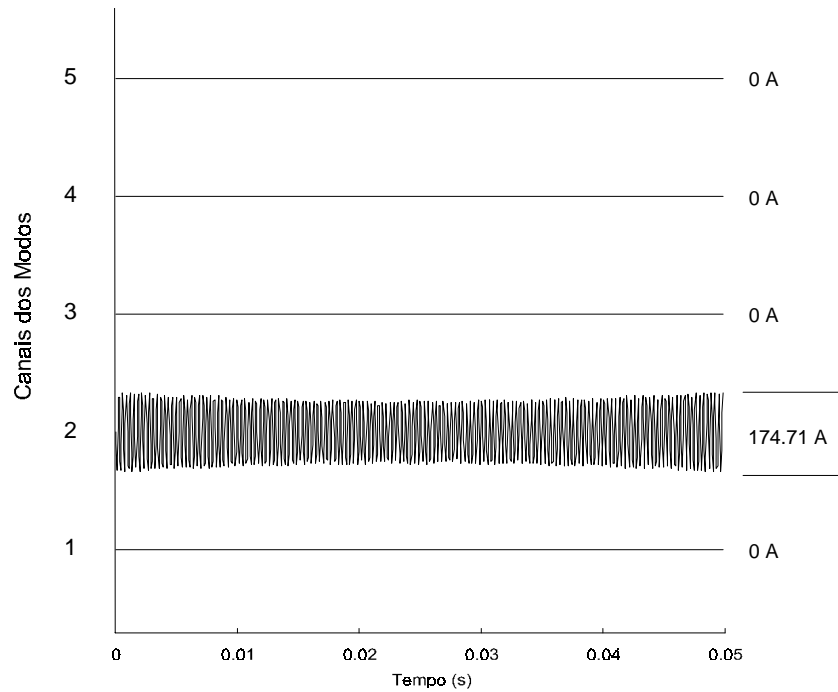


Fig. 6.12. Comportamento dos canais dos modos.

Pela Equação 5.27, obtêm-se os canais dos modos, cujo comportamento é representado na Figura 6.12. Comparando-se as Figuras 6.9 e 6.12, é fácil perceber que, exceto pela inversão de fase, o canal corresponde a uma leitura direta do modo 2 da esfera, com um ganho de quase duas ordens de magnitude. Pela Equação 6.23, percebe-se sua proporcionalidade com a força gravitacional efetiva, quando são suprimidos os termos correspondentes às fontes de ruído, como sugerido na Seção 5.4.

Realizando-se a transformada de Fourier da Equação 5.15, obtém-se

$$\tilde{\mathcal{F}}_m(\omega) = -\frac{1}{2} \omega^2 m_S \chi R \tilde{h}_m(\omega) \quad . \quad (6.26)$$

Assim, pelo monitoramento de $\tilde{g}(\omega)$, pode ser obtida uma leitura direta de $\tilde{h}_m(\omega)$.

Porém, o detector real não está livre das fontes de ruído.

6.4. UMA ESTIMATIVA DA CONTRIBUIÇÃO DAS FONTES DE RUÍDO AOS CANAIS DOS MODOS

Para encontrar uma expressão que corresponda à contribuição das fontes de ruído aos canais dos modos, a Equação 6.23 pode ser reescrita como

$$\tilde{g}_m(\omega) = \xi(\omega) \tilde{F}_m^S + \Omega_{mj}^{R_1}(\omega) \tilde{F}_{jl}^N + \Omega_{mj}^{R_2}(\omega) \tilde{F}_{j2}^N, \quad (6.27)$$

onde o escalar $\xi(\omega)$ corresponde à função de transferência das componentes de \tilde{F}_m^S ao canal do modo g_m correspondente. Analogamente, as matrizes $\Omega_{mj}^{R_i}(\omega)$ representam as funções resposta do canal do modo m , sendo que cada um deles responde a todas as forças de ruído \tilde{F}_{ji}^N .

Assumindo-se que as fontes geradoras de ruído são estatisticamente independentes, e ignorando-se as componentes $\tilde{\mathcal{F}}_m$ em \tilde{F}_m^S , a densidade espectral dos canais dos modos pode ser expressa por

$$S_m^g(\omega) = |\xi(\omega)|^2 S^{F_m^S} + \sum_j |\Omega_{mj}^{R_1}(\omega)|^2 S_j^{F_{R1}^N} + \sum_j |\Omega_{mj}^{R_2}(\omega)|^2 S_j^{F_{R2}^N}, \quad (6.28)$$

com $S^{\tilde{F}_m^S} = \tilde{F}_m^S * \tilde{F}_m^S$ e $S^{\tilde{F}_{ji}^N} = \tilde{F}_{ji}^N * \tilde{F}_{ji}^N$.

Como exemplo da aplicação da Equação 6.28, calculou-se a contribuição do ruído causado pelas forças de Langevin, cuja a densidade espectral é bem conhecida, e dada por [65]

$$S^{FL_i}(\omega) = \frac{4 k_B T m_i \omega}{Q_i}, \quad (6.29)$$

onde $k_B = 1,38 \times 10^{-23} J/K$ representa a constante de Boltzman, T , a temperatura física

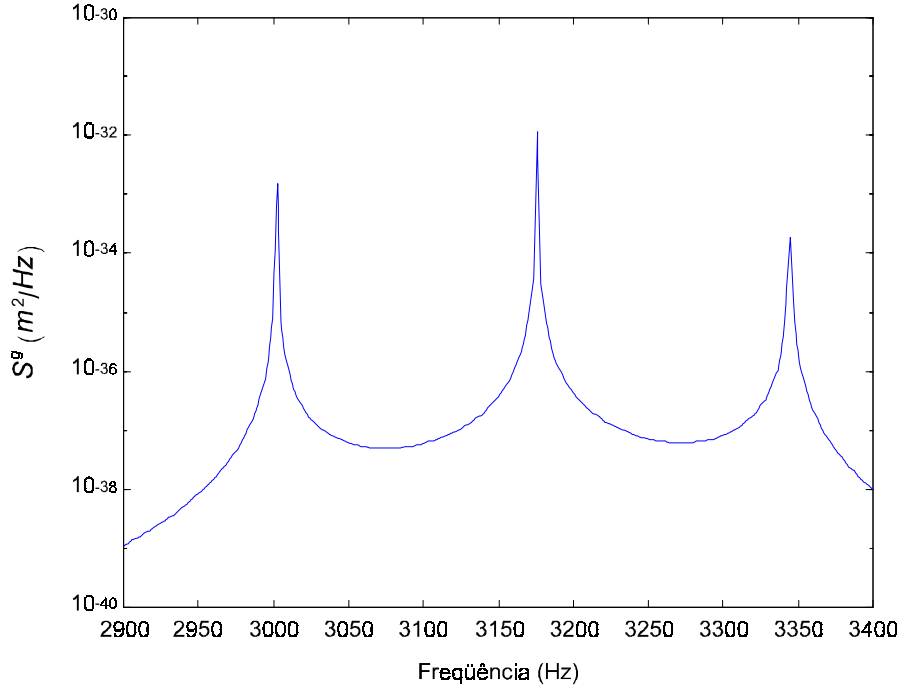


Fig. 6.13. Densidade espectral da contribuição das forças de Langevin, nos canais dos modos.

do sistema, e m_i e Q_i correspondem à massa e ao fator de qualidade mecânica do corpo i , respectivamente. A Figura 6.13 mostra o resultado obtido do cálculo da densidade espectral, $S_m^g(\omega)$, ignorando-se a ação de qualquer sinal gravitacional ($\ddot{\mathcal{F}}_m=0$). As contribuições a cada um dos modos normais possuem, aparentemente, a mesma densidade espectral, porém seus valores são levemente diferentes, pois cada um deles recebe contribuições diferentes de cada um dos ressonadores. Estas contribuições são pequenas comparadas com a da esfera ($m_S/Q_S \sim 34 m_{R1}/Q_{R1} \sim 5.7 \times 10^3 m_{R2}/Q_{R2}$, para os valores utilizados), já que a massa dos ressonadores é muito menor. A concordância entre os valores de $S_m^g(\omega)$ deve-se, também, ao fato de considerar-se, inicialmente, que todos os modos possuem a mesma função de transferência $\xi(\omega)$. O estudo de funções $\xi(\omega)$ diferenciadas para cada modo m , pode ajudar a compreender os efeitos das assimetrias da “esfera” real sobre as respostas individuais dos modos às ondas gravitacionais [47].

A partir de uma boa estimativa das fontes de ruído, através do conhecimento de suas densidades espectrais, possibilita-se a extração de suas contribuições aos canais dos modos, tornando-se possível o monitoramento de $\tilde{h}_m(\omega)$. Seus valores fornecem subsídios para determinar a posição zenital e azimutal da fonte, bem como as amplitudes nas polarizações “x” e “+”, fornecendo informações sobre fontes de radiação gravitacional.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo apresentado descreve o comportamento de um detector de ondas gravitacionais esférico, acoplado a seis ressonadores unidimensionais de dois modos, com as características do Mario Schenberg, frente a excitação causada pela passagem de uma onda gravitacional, cumprindo, desta forma, os objetivos deste trabalho.

A distribuição dos ressonadores na configuração IT permite combinar as informações sobre os comportamentos individuais de tal forma, que é possível reconstruir o comportamento de cada modo normal, separadamente. As simetrias apresentadas pela configuração minimizam os efeitos de um ressonador sobre os demais. Os canais dos modos possuem relação unívoca com os modos normais, e conseqüentemente com as componentes tensoriais da onda gravitacional. Portanto, segundo mostram os resultados apresentados, esta distribuição parece ser a mais indicada para o detector Mario Schenberg.

As expressões analíticas, que representam a solução para a equação de movimento da esfera acoplada a seis ressonadores de dois modos (Equações 6.20 a 6.23), estão em perfeita concordância com as soluções numéricas, encontradas pelas operações matriciais da Equação 6.14, o sugere que estão corretas, podendo, então, serem utilizadas futuramente na análise do detector.

A falta de testes experimentais com a esfera real, que será utilizada na construção do detector inviabilizou uma estimativa dos valores para a razão poissônica e para o módulo de Young. Isto impossibilitou a obtenção de um valor preciso para sua frequência de ressonância. Porém, utilizando os valores estimados pela equipe de Giorgio Frossati, obteve-se que as diferenças entre as frequências finais de ressonância do sistema são menores que 1% (para ressonadores idênticos), como mostra a Figura 6.8. Portanto, valores mais precisos tendem a garantir melhorias na aproximação ao deslocar as

freqüências para as posições condizentes com a realidade.

Obteve-se uma expressão (Equação 6.28) que torna possível, conhecendo-se as naturezas das fontes de ruídos, estimar suas contribuições aos canais dos modos separadamente. Tal expressão vinha sendo procurada há algum tempo pelos integrantes do grupo, e será bastante útil para modelagens futuras.

De posse destas expressões será possível resolver o problema inverso, ou seja, a partir do comportamento mecânico do detector determinar as características da onda gravitacional incidente responsável pela excitação do sistema. Este é o próximo passo na elaboração de um modelo completo do detector Mario Schenberg e constitui parte do projeto de doutorado, onde pretende-se elaborar um modelo/ algoritmo capaz de extrair estas informações, mesmo que imersas no ruído instrumental.

Além disto, para finalizar, sugere-se alguns tópicos para trabalhos futuros como um estudo detalhado dos efeitos do furo de sustentação e como inserir a entrada de sinais “espúrios” que ultrapassem o isolamento vibracional no modelo, como considerar as perdas por fricção e efeitos do acoplamento não pontual dos ressonadores, e ainda, a contribuição dos movimentos tangenciais no monitoramento dos canais dos modos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Amaldi, E. The Search for Gravitational Wave. In: Shapiro, M. M., Wefel, J. P ed. **Cosmic gamma-rays and related astrophysics**. Dordrecht: D. Reidel, p. 563-607, 1989.
- [2] Einstein, A. Näherungsweise integration der field gleichungen der gravitation. **Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akad. der Wissenschaften**. Berlin: Erster Halbband, 1916, p. 688-696.
- [3] Einstein, A. Über gravitationswellen. **Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akad. der Wissenschaften**. Berlin: Erster Halbband, 1918, p. 154-167.
- [4] Weyl, H. **Space-time-matter**. Londres: Methuen, 1922.
- [5] Eddington, A. S. **The mathematical theory of relativity**. 2 ed. Cambridge: University Press, 1924.
- [6] Blair, D. G. **The detection of gravitacional waves**. Cambridge: University Press, 1991.
- [7] Aguiar, O. D. **Astrofísica de ondas gravitacionais**. Notas de aula da disciplina AST-300 do curso de Pós-Graduação em Astrofísica do INPE, 1992.
- [8] Kenyon, I. R. **General relativity**. Oxford:University Press, 1990.
- [9] Isaacson, R. A. Gravitational radiation in the limit of high frequency. I. The linear approximation and geometrical optics. **Phys. Rev.** , 166, p. 1263–1271, Feb. 1968.
- [10]Shapiro, S. L.; Teukolsky, S.A. **Black holes, white dwarfs and neutron stars: the physics of compact objects**. New York: Wiley-Interscience, Cap. 16, 1983, p. 466-498.
- [11]Merkowitz, S. M.; Johnson, W. W. Techniques for detecting gravitational waves with a spherical antenna. **Phys. Rev. D**, v. 56, n. 12, p. 7513-7528, Dec. 1997.
- [12]Bianchi, M.; Coccia, E.; Colacino, C. N.; Fafone, V.; Fucito, F. Testing theories of gravity with a spherical gravitational wave detector. **Class. Quantum Grav.**, v. 13, n. 11, p. 2865-2873, Nov. 1996.
- [13]Arfken, G. B., Weber, H. J. **Mathematical methods for physicists**. Burlington: HAP, 2000.

- [14]Merkowitz, S. M. **Truncated icosahedral gravitational wave antenna**. Baton Rouge, Louisiana. 134 p. Ph. D. (Dissertation in Physics and Astronomy). Louisiana State University, 1995.
- [15]Lu, L.; Blair, D. G.; Zhao, C. Detection of gravitational waves. **Rep. Prog. Phys.**, v. 63, p. 1317-1427, 2000.
- [16]Thorne, K. S. Gravitational Radiation. In: Hawking, S., Israel, W. ed. **Three hundred years of gravitation**. Cambridge University Press, 1987, Cap. 9, p. 330-458.
- [17]Ruffini, J. A.; Wheeler, J. Relativistic Cosmology and Space Platforms. In: Conference on Space Physics, Paris, 1971. **Proceedings**. Paris: ESRO, 1971. p. 145-174.
- [18]Lai, D.; Shapiro, S. L. Hidrodinamics of coalescing binary neutron star: ellipsoidal treatment. **Ap. J.**, v. 443, n. 2, p. 705-716, 1995.
- [19]Houser, J. L., Centrella, J. M., Smith, S. C. Gravitational Radiation from Non axisymmetric Instability in a Rotating Star. **Phys. Rev. Letters**, v. 72, n. 9, p. 1314-1317, Feb. 1994.
- [20]Houser, J. L. The effect of rotation on the gravitational radiation and dynamical stability of stiff stellar cores. **Mont. Not. R. Astron. Soc.**, v. 299, n. 4, p. 1069-1086, 1998.
- [21]Taylor, J. H. Binary pulsars and relativistic gravity. **Rev. of Modern Phys.**, v. 66, n. 3, p. 711-719, Jul. 1994.
- [22]Lai, D.; Shapiro, S. L. Hidrodinamics of coalescing binary neutron star: ellipsoidal treatment. **Ap. J.**, v. 443, n.2, p. 705-716, 1995.
- [23]Tutukov, A. V.; Yungelson, L. R. The merger rate of neutron star and black hole binaries. **Mont. Not. R. Astron. Soc.**, v. 260, n.3, p. 675-678, 1993.
- [24]Yamaoka, H.; Shigeyama, T.; Shemi, A. Formation of double neutron star system and asymmetric supernova explosions. **Ap. J.**, v. 267, n. 2, p. 433-438, 1993.
- [25]Kormendy, J., et al. Hubble Space Telescope spectropic evidence for a $2 \times 10^9 M_{\odot}$ black hole in NGC 3115. **Ap. J.**, v. 459, p. L57-L60, Mar. 1996.
- [26]Maucelli, E. **Data analysis of the Allegro gravitational wave detector**. Baton Rouge, Louisiana. 134 p. Ph. D. (Dissertation in Physics and Astronomy). Louisiana State University, 1997.

- [27]Barker, K., Chanmugam, G., Johnson, W., Tohline, J. E. Millisecond pulsar as candidates for the detectability of continuous gravitational waves. In: Backers, D. C.; Fruchter, A. E.; Tavani, M. ed. **Millisecond pulsars: a decade of surprise**. San Francisco: ASP Conf. Series, 1994.
- [28]Verbunt, F. Waiting for LISA: binaries with orbital periods less than $\sim 10^4$ s. **Class. Quantum Grav.**, n. 14, n. 6, p. 1417-1423, Jun. 1997.
- [29]Miranda, O. D.; Araújo, J. C. N.; Aguiar, O. D. Is there a signature in gravitational waves from structure formation of the Universe? In: Gravitational waves: Edoado Amaldi Conference, 3., 1999, Pasadena. **Proceedings**. Pasadena: AIP, p. 94-97.
- [30]Vachaspati, T.; Vilenkin, A. Gravitational radiation from cosmic strings. **Phys. Rev. D**, v. 31, n. 12, p. 3052–3058, June 1985.
- [31]Weber, J. A. Detection and Generation of Gravitational Waves. **Phys. Rev.**, v. 117, n. 1, p. 306-313, Jan. 1960.
- [32]Amaldi, E. The Search for Gravitational Wave. In: Shapiro, M. M., Wefel, J. P ed. **Cosmic gamma-rays and related astrophysics**. Dordrecht: D. Reidel., p. 563-607, 1989.
- [33]Gertsenshtein, M. E., Pustovoit, R. L. On detection of low frequency gravitational waves. **Sov. Phys. - JETP**, v. 16, p. 433-435, 1962.
- [34]Weber, J. A. Evidence for discovery of gravitational radiation. **Phys. Rev. Letters**, v. 22, n. 24, p. 1320-1324, June 1969.
- [35]Weber, J. A. New gravitational radiation experiments. **Phys. Rev. Letters**, v. 31, n. 12, p. 779-783, Set. 1973.
- [36]Thorne, K. S.; Caves, C. M., Sandberg, V. D., Zimmermann, M. The quantum limit for gravitational waves detector and methods of circumventing it. In: Sources of gravitational radiation: Battelle Seattle Workshop, Seattle, 1979. **Proceedings**. Cambridge: University Press, p. 49-68.
- [37]Misner, C.; Thorne, K. S.; Wheeler, J. A. **Gravitation**. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973.
- [38]Paik, H. J.; Wagoner, R. V. Calculation of the absorption cross section for a cylindrical gravitational wave antenna. **Phys. Rev. D**, v. 13, n. 10, p. 2694–2699, May. 1976.

- [39]Coccia, E.; Lobo, J. A.; Ortega, J. A. Propose gravitational wave observatory based on solid elastic sphere. **Phys. Rev. D**, v. 52, n. 6, p. 3735-3738, Sep. 1995.
- [40]Lobo, J. A. Multiple mode gravitational wave detection with a spherical antenna. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 316, p. 173-194, Mar. 2000.
- [41]Lobo, R. L. What can we learn about gravitational wave physics with an elastic spherical antenna. **Phys. Rev. D**, v. 52, n. 2, p. 591-604, July 1995.
- [42]Lobo, R. L. The multiple-resonator problem in a spherical GW antenna: its general solution and new interesting layouts. **Europhysics Letters**, v. 35, n. 4, p. 253-258, Aug, 1996.
- [43]Johnson, W. W.; Merkowitz, S. M. Truncated icosahedral gravitational wave antenna. **Phys. Rev. Letters** , v. 70, n. 16, p. 2367-2370, Apr. 1993.
- [44]Merkowitz, S. M.; Johnson, W. W. Deconvolving the information from a imperfect spherical gravitational wave antenna. **Europhysics Letters**, v. 41, n. 4, p. 355-360, Feb. 1998.
- [45]Merkowitz, S. M. Solution of the inverse problem for a spherical gravitational wave antenna. **Phys. Rev. D**, v. 58, art. 062002, Sep. 1998.
- [46]Merkowitz, S. M.; Lobo, J. A.; Serrano, M. A. Errors on the inverse problem for a noisy spherical gravitational wave antenna. **Class. Quantum Grav.**, v. 16, n. 10, Nov. 1999.
- [47]Stevenson, T. R. **Influence of asymmetries on the sensitivity of a spherical gravitational wave detector**. Maryland: University of Maryland, 1996. 25 p.
- [48]Stevenson, T. R. Limits on the sensitivity of spherical gravitational wave detectors and on the accuracy of reconstructed signals. **Phys. Rev. D**, v. 56, n. 2, p. 564-587, July 1997.
- [49]Wagoner, R. V.; Paik, H. J. Multi-mode detection of gravitational waves by a sphere. In: Academia Nazionale dei Lincei International Symposium on Experimental Gravitation, Pavia, Italia, 1976. **Proceedings**. London: World Scientific, 1977, p. 257-266.
- [50]Forward, R. L. Multidirectional, multipolarization antennas for scalar and tensor gravitational radiation. **Gen. Rel. and Grav.**, v. 2, n. 2, p. 149-159, 1971.
- [51]Ashby, N.; Deritlein, J. Gravitational Wave Reception by a Sphere. **Phys. Rev. D**, v. 12, n. 2, p. 336-349, July 1975.

- [52]Heinbockel, J. H. **Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics**. [online] Old Dominion University Department of Mathematics and Statistics, 1996. <<http://www.math.odu.edu/~jhh/counter2.html>>, Nov. 2001.
- [53]Jackson, J. D. **Classical Eletrodinamics**. New York: John Wiley & Sons, 1962.
- [54]Harry, G. M.; Stevenson, T. R.; Paik, H. J. Detectability of gravitational wave events by spherical resonant-mass antennas. **Phys. Rev. D**, v. 54, n. 4, p. 2409-2420, Aug. 1996.
- [55]Magalhães, N. S.; Johnson, W. W.; Frajuca, C.; Aguiar, O. D. Determination of astrophysical parameters from the spherical gravitational wave detector data. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 274, p. 670-678, 1995.
- [56]Aguiar, O. D.; Andrade, L. A.; Filho, L. C.; Costa, C. A.; de Araujo, J. C. N.; de Rey Neto, E. C.; de Souza, S. T.; Fauth, A. C.; Frajuca, C.; Frossati, G.; Furtado, S. R.; Furtado, V. G. S.; Magalhães, N. S.; Marinho Jr., R. M.; Matos, E. S.; Meliani, M. T.; Melo, J. L.; Miranda, O. D.; Oliveira Jr., N. F.; Ribeiro, K. L.; Salles, K. B. M.; Stelatti, C.; Velloso Jr., W. F. The status of the Brazilian spherical detector. **Class. Quantum Grav.**, v. 19, n.7, p. 1949-1953, Apr. 2002.
- [57]Norllet, H. P. Quasinormal modes: the characteristic “sounds” of black holes and neutron stars. **Class. Quantum Grav.**, v. 16, p. 159-216, Dec. 1999.
- [58]Anderson, N.; Araújo, M.E.; Schutz, B.F. Generalized Bohr-Sommerfeld formula for Schwarzschild black hole normal modes. **Class. Quantum Grav.** , v. 10, p 757-765, 1993.
- [59]Friedman, J.L.; Ipser, J.R.; Parker, L. Implications of a Half-Millisecond Pulsar. **Phys. Rev. Letters**, v. 62, n. 26, p. 3015-9, 1989.
- [60]Haensel, P.; Lasota, J.P.; Zdunik, J.L. Maximum redshift and minimum rotation period of neutrons stars. In: Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology, 19.,Paris, 1998, **Proceedings**. Singapore: World Scientific, 2000, p. 187-201.
- [61]Nakamura,T.; Sasaki, M.; Tanaka, T., Thorne, K.S. Gravitational waves from coalescing black hole MACHO binaries. **Ap. J.** , v. 487, L139-L142, 1997.
- [62]Scott, R. B. **Cryogenic Engineering**. Princeton: Van Nostrand, p. 333, 1963.

- [63]de Waard, A.; Gottardi L.; Frossati, G. MiniGRAIL progress report 2001 - the first cooldown. **Class. Quantum Grav.**, v. 19, n.7, p. 1935-1941, Apr. 2002.
- [64]Richard, J. P. A multimode antenna for the detection of short pulses of gravitational waves. In: Marcel Grossman Meeting, 2., Trieste, Italy, 1979. **Proceedings**. Amsterdam: North Holland, 1982, p. 324-343.
- [65]Saulson, P. R. Thermal Noise in Mechanical Experiments. **Phys. Rev. D**, v. 42, n. 8, p. 2437-2445, Oct. 1990.

APÊNDICE A

ALGORITMOS

Este apêndice apresenta os principais algoritmos desenvolvidos para solucionar o problema proposto.

A.1. parametros.mws

Este algoritmo calcula o valor dos parâmetros físicos da esfera, seguindo a metodologia apresentada na Seção 4.1. Os valores obtidos são utilizados no modelo do detector. O algoritmo é compatível com Maple V versão 5.0#

```
> restart:with(linalg):
#Raio da esfera a temperatura ambiente
> Ri:=0.325:
#Raio do furo
> Rfi:=0.01:
#Volume a temperatura ambiente descontando-se o furo
> Vi := evalf(4*Pi/3*Ri^3-Pi*Rfi^2*Ri):
#Densidade a temperatura ambiente
> rhoi:= 8e3:
#Massa
> ms := rhoi*Vi:
#Contração linear do Cu94%Al6% de 300-4K
> e:= (339*.94+431*.06)*10^(-5):
#Raio da esfera a 4K
> R:= Ri*(1-e):
#Volume a 4K
> V:= evalf(4*Pi/3*R^3):
#Densidade a 4K
> rho:= ms/V:
#Módulo de Young a 4K
```

```

> E:= .1303e12:
#Razão Poissônica
> nu := 0.364:
#Coeficiente de Lamé
> mu := E/2/(1+nu):
#Coeficiente de Lamé
> lambda := E*nu/((1-2*nu)*(1+nu)):
#Vetor Normal
> q:=sqrt(rho*omega0^2/(lambda + 2*mu)):
#Vetor Longitudinal
> k:=sqrt(rho*omega0^2/mu):
#Mudança de Coordenadas (Cartesianas->Esféricas)
> x:= r*cos(phi)*sin(theta):
> y:= r*sin(phi)*sin(theta):
> z:= r*cos(theta):
#Harmônicos Esféricos
> Y:=array(1..5):
> Y[1]:= sqrt(15/(16*Pi))*(x^2-y^2)/r^2:
> Y[2]:= sqrt(15/(16*Pi))*(2*x*y)/r^2:
> Y[3]:= sqrt(15/(16*Pi))*(2*y*z)/r^2:
> Y[4]:= sqrt(15/(16*Pi))*(2*x*z)/r^2:
> Y[5]:= sqrt(15/(16*Pi))*(3*z^2-r^2)/(sqrt(3)*r^2):
#Gradiente dos Harmônicos Esféricos
> gY:=array(1..5,1..3): u := [r, theta, phi]:
> for i from 1 to 5 do:
> g:=grad(Y[i],u,coords=spherical):
> gY[i,1]:=g[1]:
> gY[i,2]:=g[2]:
> gY[i,3]:=g[3]:
> od:
#Definição da funções de Bessel esféricas
> j2:=convert(series((3/t^3-1/t)*sin(t)-3*cos(t)/t^2,t,14), polynom):
> j2qr(r):=evalf(eval(j2,t=q*r)):
> j2kr(r):=evalf(eval(j2,t=k*r)):
> dj2qr(r) := simplify(diff(j2qr(r),r)):

```

```

> dj2kr(r) := simplify(diff(j2kr(r),r)):
> drj2kr(r) := simplify(diff(r*j2kr(r),r)):
> dj2qrr(r) := simplify(diff(j2qr(r)/r,r)):
> dj2krr(r) := simplify(diff(j2kr(r)/r,r)):
#Parâmetro de movimento radial
> alpha (r) := simplify(c*R*dj2qr(r)+6*d*R/r*j2kr(r)):
#Parâmetro de movimento tangencial
> beta (r) := simplify(c*j2qr(r)+d*drj2kr(r)):
#Fator Chi
> chi (r):= simplify(evalf(sqrt(3/5/Pi)*(c*j2qr(r)+ 3*d*j2kr(r)))):
#Função Característica Psi_m
> psi:=matrix(5,3,[]):
> dJac:=det(jacobian([x,y,z],[r,theta,phi])):
> for i from 1 to 5 do:
>  psi[i,1]:=simplify(alpha(r)*Y[i]):
>  psi[i,2]:=simplify(beta(r)*R*gY[i,2]):
>  psi[i,3]:=simplify(beta(r)*R*gY[i,3]):
#Normalização
> u:=vector(3,[psi[i,1],psi[i,2],psi[i,3]]):
> p:=simplify(dotprod(u,u,'orthogonal')):
> p:=simplify(int(p*dJac,phi=0..2*Pi)):
> p:=simplify(int(p,theta=0..Pi)):
> N[i]:=int(p,r=0..R):
> od:
#Condições de contorno
> cc1:=simplify(eval(c*((6/r^2-k^2/2)*j2qr(r)-2/r*dj2qr(r))+6*d*dj2krr(r) ,r=R)):
> cc2:=simplify(eval(c*dj2qrr(r)+d*((5/r^2-k^2/2)*j2kr(r)-1/r*dj2kr(r)) ,r=R)):
#Determinação de omega0, c e d
> sol:=solve({N[1]=V,cc1=0,cc2=0,omega0>0}):
#Impressão dos Resultados
> printf("Massa da Esfera = %A kg\n",ms);
> printf("Raio da Esfera a 4K = %A m\n",R);
> printf("Densidade a 4K = %A kg/m^3\n",rho);
> for i from 1 to nops([sol]) do:
>  printf("\n#####\n");

```

```

> printf("Solução %A\nc = %A\nd = %A\n",i,subs(sol[i],c),subs(sol[i],d));
> printf("Frequência dos modos a 4K = %A Hz\n",evalf(subs(sol[i],omega0)/2/Pi));
> printf("alfa(R) = %A\n",eval(alpha(r),[r=R,c=subs(sol[i],c),d=subs(sol[i],d),omega0=subs(sol[i],omega0)]));
> printf("beta(R) = %A\n",eval(beta(r),[r=R,c=subs(sol[i],c),d=subs(sol[i],d),omega0=subs(sol[i],omega0)]));
> printf("chi(R) = %A\n",eval(chi(r),[r=R,c=subs(sol[i],c),d=subs(sol[i],d),omega0=subs(sol[i],omega0)]));
> printf("** Erros **\n");
> for j from 1 to 5 do:
> printf("N[%d]-V = %A\n",j,eval(N[j]-V,[c=subs(sol[i],c),d=subs(sol[i],d),omega0=subs(sol[i],omega0)]));
> od;
> printf("C. Contorno 1 = %A\n", eval(cc1,[c=subs(sol[i],c),d=subs(sol[i],d),omega0=subs(sol[i],omega0)]));
> printf("C. Contorno 2 = %A\n", eval(cc2,[c=subs(sol[i],c),d=subs(sol[i],d),omega0=subs(sol[i],omega0)]));
> od;

```

A.2. parametros.m

%Este algoritmo funciona como uma biblioteca, a qual é acessada pelos demais algoritmos do modelo. O algoritmo é compatível com Matlab versão 5.3.

```

R = .32388; % raio da esfera em m, a 4K
ms = 1149.53; % massa da esfera em kg (descontado o furo)
V = 4/3*pi*R^3; % massa da esfera em kg
rho = 8077.52;% densidade média da esfera em kg/m^3, a 4K
%fFr = [3158.2,3159.6,3168.5,3170.9,3174.3]; %frequências dos modos medidas pelo Frossati
f0 = 3171.1*ones(1,5); %frequência dos modos calculada
omega0 = f0*2*pi; % frequências angulares
alfaR = 2.8622; % parâmetro de movimento radial, alfa(R)
chi = 0.6014; % fator chi (R)
meff = 5/6*(chi/2)*V*rho; % massa efetiva da esfera em kg
mR2 = 0.01; % massa do segundo ressonador em kg
mR1 = sqrt(meff*mR2); % massa do primeiro ressonador em kg

```

```

omegaR =[omega0(1,1) omega0];

%Localização dos Ressonadores

phi = [1.047197551, -1.047197551, 3.141592654, -2.094395103, 0, 2.094395103];
theta = [.6523581399, .6523581399, .6523581399, 1.382085796, 1.382085796, 1.382085796];
ord = [4,6,5,2,3,1];
phi = phi(ord);
theta = theta(ord);

%Mudança de coordenadas

x = R*cos(phi).*sin(theta);
y = R*sin(phi).*sin(theta);
z = R*cos(theta);

%Matriz modelo

B(1,:) = sqrt(15/(16*pi))*(x.^2-y.^2)./R^2;
B(2,:) = sqrt(15/(16*pi))*(2*x.*y)./R^2;
B(3,:) = sqrt(15/(16*pi))*(2*y.*z)./R^2;
B(4,:) = sqrt(15/(16*pi))*(2*x.*z)./R^2;
B(5,:) = sqrt(15/(16*pi))*(3*z.^2.-R^2)./(sqrt(3)*R^2);

%Transposta da matriz modelo

BT = B';

```

A.3. f_2modos.m

```

% Este algoritmo calcula as frequências dos modos acoplados %

parametros.m;
nm = 5;

```

```

F=zeros(17,7);
F(1:5,1)=omega0/(2*pi);

for i=1:5;
    fprintf(fid,'%f %f %f\n',F(i,1),inic,fim);
end;
ks = ms*omega0.^2; % constante de mola da esfera

for nR=1:6
    kR1 = mR1*omegaR(1:nR).^2; % constante de mola do primeiro ressonador
    kR2 = mR2*omegaR(1:nR).^2; % constante de mola do segundo ressonador

    gama = [(1/sqrt(ms))*eye(nm,nm) zeros(nm,nR) zeros(nm,nR)
            zeros(nR,nm) (1/sqrt(mR1))*eye(nR,nR) zeros(nR,nR)
            zeros(nR,nm) zeros(nR,nR) (1/sqrt(mR2))*eye(nR,nR)];

    M = [ms*eye(nm,nm) zeros(nm,nR) zeros(nm,nR)
        mR1*alfaR*B(:,1:nR)' mR1*eye(nR,nR) zeros(nR,nR)
        mR2*alfaR*B(:,1:nR)' mR2*eye(nR,nR) mR2*eye(nR,nR)];

    K = [diag(ks) -kR1(ones(nm,1),:).*alfaR.*B(:,1:nR) zeros(nm,nR)
        zeros(nR,nm) diag(kR1) -diag(kR2)
        zeros(nR,nm) zeros(nR,nR) diag(kR2)];

    M = gama*M;
    K = gama*K;
    [U,D] = eig(inv(M)*K);
    freqs = (sqrt(diag(D)))/(2*pi);
    for i=1:length(freqs)
        F(i,nR+1)=freqs(i);
    end;
end;

```

A.4. amp_2modos.m

% Este algoritmo modela o comportamento do detector frente a um sinal em força gravitacional efetiva, introduzida pelo arquivo de dados **sinal.dat**, e imprime os gráficos representativos %

parametros;

b=alfaR*sqrt(mR1/ms);

a=sqrt(mR2/mR1);

I = sqrt(-1);

x = 2*pi/3*(a^2/b+3/2/pi*b);

y = 2*pi/3*(a^2/b^2*(b^2-2*pi/3)-1);

z = -4*pi^2/9*a^2/b;

s1 = 36*y*x-108*z-8*x^3;

s2 = 12*y^3-3*y^2*x^2-54*y*x*z+81*z^2+12*z*x^3;

s3 = (s1+12*sqrt(s2))^(1/3);

ck(1) = real(1/6*(s3^2-12*y+4*x^2-2*x*s3)/s3);

ck(2) = real(1/3*(-1-I*sqrt(3))*x^2/s3-1/3*x+(1+I*sqrt(3))*y/s3+1/12*s3*(-1+I*sqrt(3)));

ck(3) = real(1/3*(-1+I*sqrt(3))*x^2/s3-1/3*x-(-1+I*sqrt(3))*y/s3+1/12*s3*(-1-I*sqrt(3)));

dk = 3/2/pi*b/a*(ck.^2-2*pi/3+b*ck);

nk = sqrt(1./(1+3/2/pi*(ck.^2+dk.^2)));

lambdak = 1- 3/2/pi*b*ck;

omegak = sqrt(lambdak*mean(omega0)^2);

d1 = -1/2*[a+sqrt(a^2+4),a-sqrt(a^2+4)];

n1 = sqrt(1./(6*(1.+d1.^2)));

lambda1 = 1-a*d1;

omega1 = sqrt(lambda1.*mean(omega0)^2);

% Leitura dos Dados

fid = fopen('sinal.dat','r');

dados = fscanf(fid,'%g %g %g %g %g %g',[6 inf]);

fclose(fid);

```

% Transferência dos dados

t = dados(1,:);
Fst = [dados(2,:);dados(3,:);dados(4,:);dados(5,:);dados(6,:)];
N = length(t);
for i=1:5
    Fsw(i,:) = fft(Fst(i,:),N);
end;
dt = t(2)-t(1);
omega = 2*pi*(0:N-1)/(N*dt);
for j=1:N;
    etaw = nk.^2./(omegak.^2 - omega(j)^2);
    sAw = sum(etaw.*lambdak);
    Aw(:,j) = 1/sqrt(ms)*sAw*Fsw(:,j);
    eta1 = n1(1)^2/(omega1(1)^2-omega(j)^2)+n1(2)^2/(omega1(2)^2-omega(j)^2);
    sq1w = sum(etaw.*ck.*lambdak)*eye(6,6);
    q1w(:,j) = 1/sqrt(mR1)*sq1w*BT*Fsw(:,j);
    sq2w = sum(etaw.*dk.*lambdak)*eye(6,6);
    q2w(:,j) = 1/sqrt(mR2)*sq2w*BT*Fsw(:,j);
end;

At = real(fft(Aw',N));
At = At';At(:,1) = 0;
q1t = real(fft(q1w',N));
q1t = q1t';q1t(:,1) = 0;
q2t = real(fft(q2w',N));
q2t = q2t';q2t(:,1) = 0;

%Normalização dos Valores
q1t = q1t/max(max(alfaR*BT*At));
q2t = q2t/max(max(alfaR*BT*At));

% Canais dos Modos

g = B*q2t;

```



```

%%% Plota os Gráficos %%%

close all

% Amplitudes dos modos

figNumber=figure( 'Name','Amplitudes dos modos normais', 'NumberTitle','off',. 'Visible','on');
set(figNumber);
cla
axis off
for i=1:5
    axes('position',[.1 (i/10-.08)*2 .8 .15])
    plot(t,At(i,:)/max(max(At)),'Color',[0 0 0]);
    xlim([0 .05])
    set(gca,'XTick',0:.01:.05)
    ylim([-1.1 1.1])
    text(-.005,0,num2str(i),'FontSize',14)
    axis off
end;

% Mode Channels

figNumber=figure( 'Name','"Mode Channels"', 'NumberTitle','off', 'Visible','on');
set(figNumber);
cla
axis off
for i=1:5
    axes('position',[.1 (i/10-.08)*2 .8 .15])
    plot(t,g(i,:)/max(max(g)),'Color',[0 0 0]);
    xlim([0 .05])
    set(gca,'XTick',0:.01:.05)
    ylim([-1.1 1.1])
    text(-.005,0,num2str(i),'FontSize',14)
    text(.051,0,[num2str(max(g(i,:)))], 'A','FontSize',7)
    axis off

```

```

end;

% Amplitudes nos 1º ressonadores

figNumber=figure( ...
    'Name','Amplitude de cada ressonador R1', ...
    'NumberTitle','off',...
    'Visible','on');
set(figNumber);
cla
axis off
for i=1:6
    axes('position',[.1 (i/10-.075)*1.67 .8 .10])
    plot(t,q1t(i:)/max(max(q1t)),'Color',[0 0 0]);
    xlim([0 .05])
    set(gca,'XTick',0:.01:.05)
    ylim([-1.1 1.1])
    text(-.005,0,num2str(i),'FontSize',14)
    text(.051,0,[num2str(max(q1t(i:)))], 'A','FontSize',7)
    axis off
end;

```

```

% Amplitudes nos 2º ressonadores

figNumber=figure( ...
    'Name','Amplitude de cada ressonador R2', ...
    'NumberTitle','off', 'Visible','on');
set(figNumber);
cla
axis off
for i=1:6
    axes('position',[.1 (i/10-.075)*1.67 .8 .10]);
    plot(t,q2t(i:)/max(max(q2t)),'Color',[0 0 0]);
    xlim([0 .05]);
    set(gca,'XTick',0:.01:.05);

```

```
ylim([-1.1 1.1]);  
text(-.005,0,num2str(i),'FontSize',14);  
text(.051,0,[num2str(max(q2t(i,:))),'A'],'FontSize',7)  
axis off;  
end;
```