



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

INPE-14602-PUD/180

**ESTUDO DE ESTABILIDADE NO MOVIMENTO ORBITAL DE SATÉLITES  
ARTIFICIAIS CONSIDERANDO FORÇAS GRAVITACIONAIS E NÃO  
GRAVITACIONAIS**

Jorge Kennety Silva Formiga  
Rodolpho Vilhena de Moraes

Exame de Qualificação apresentado no dia 22 de novembro de 2006 no Curso da  
Engenharia e Tecnologias Espaciais/Divisão de Mecânica e Controle.

INPE  
São José dos Campos  
2007





MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14602-PUD/180**

**ESTUDO DE ESTABILIDADE NO MOVIMENTO ORBITAL DE SATÉLITES  
ARTIFICIAIS CONSIDERANDO FORÇAS GRAVITACIONAIS E NÃO  
GRAVITACIONAIS**

Jorge Kennety Silva Formiga  
Rodolpho Vilhena de Moraes

Exame de Qualificação apresentado no dia 22 de novembro de 2006 no Curso da  
Engenharia e Tecnologias Espaciais/Divisão de Mecânica e Controle.

INPE  
São José dos Campos  
2007

## **RESUMO**

O estudo da estabilidade do movimento orbital de satélites artificiais perturbado por forças gravitacionais e não gravitacionais é realizada. Primeiramente escreveremos as equações do movimento na forma canônica generalizada que depois será colocada na forma normal usando o método de Lie-Hori. A análise da estabilidade do sistema será feita pelo teorema de Kovalev e Savechenko para a realização do estudo.



# STABILITY ANALYSIS OF THE ORBITAL MOTION OF ARTIFICIAL SATELLITES CONSIDERING GRAVITATIONAL AND NO GRAVITATIONAL PERTURBATIONS

## ABSTRACT

The study of the stability of the orbital motion of artificial satellites disturbed by gravitational and no gravitational forces is accomplished. Firstly the equations of motion are written in an extended canonical and then, using the Hori-Lie, method put in a normal form. The stability of the system is analyzed by the theorem of Kovalev and Savechenko.



## SUMÁRIO

Pág.

### LISTA DE FIGURAS

<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</b> .....	<b>11</b>
1.1 Motivação .....	12
<b>CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>13</b>
2.1 Método de Hori para sistemas canônicos .....	13
2.1.1 Teorema de Lie em transformadas canônicas .....	13
2.1.2 Nova teoria na dinâmica de transformação .....	16
2.2 Método de Hori para sistemas não canônicos .....	20
2.3 Estabilidade de sistemas de equações lineares .....	23
2.3.1 Sistemas dinâmicos .....	23
2.3.2 Sistema Hamiltoniano .....	24
2.3.3 Classificando pontos de equilíbrio. ....	25
2.3.3.1 Estabilidade dos pontos de equilíbrio.....	27
2.3.3.2 Transição entre os pontos de equilíbrio.....	32
2.3.4 Órbitas periódicas e ciclos limites.....	33
2.3.5 Estabilidade Segundo Liapunov .....	35
2.3.6 Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz .....	36
2.3.6.1 Aplicação do método de Routh-Hurwitz ao movimento rotacional.....	38
2.3.6.2 Análise da Estabilidade para um Conjunto de Pontos de Equilíbrio.....	42
<b>CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA E APLICAÇÃO</b> .....	<b>45</b>
3.1 Teorema de Estabilidade de Kovalev e Savchenko.....	45
3.2 Procedimento para o estudo da estabilidade.....	46
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>53</b>
<b>APÊNDICE A</b> .....	<b>55</b>
A.1 Plotar diagrama de fase.....	55





## LISTA DE FIGURAS

2.1-Representação geométrica de vetores .....	27
2.2 -Diagrama de fase para $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ .....	28
2.3 Nodo impróprio estável para $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ .....	28
2.4-Diagrama de fase para $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ .....	29
2.5- Diagrama de fase para $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , reais.....	29
2.6- Diagrama de fase para $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , $\alpha < 0$ , $\beta > 0$ .....	30
2.7- Diagrama de fase para $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , $\alpha > 0$ , $\beta > 0$ . .....	30
2.8- Diagrama de fase para $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$ .....	30
2.9- Diagrama de fase para $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ .....	31
2.10-Diagrama de fase para $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ .....	31
2.11- Diagrama de fase para $\lambda_1 = 0$ , $\lambda_2 > 0$ .....	32
2.12- Diagrama de fase para oscilador harmônico e pêndulo não-amortecido. ....	32
2.13 -Classificação geral para sistemas lineares.....	33
2.14- Círculo limite para equação de van der Pol $x'' + (x^2-1)x' + x = 0$ .....	34
2.15- Parâmetros da estabilidade de Liapunov .....	36



## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

A teoria de estabilidade de sistemas de Equações diferenciais vem sendo desenvolvido desde o início do século passado com Poincaré, Liapunov, Kolmogorov, e tem aumentado significativamente nas ultimas décadas como pode ser visto em diversas publicações (Duboshin, 1959; Kovalev e Savchenko, 1975; Chudenko, 1980, Cabette, 2004). Uma considerável parte deste trabalho será realizada através de um problema prático, especialmente em problema de dinâmica de órbitas.

O objetivo deste trabalho é estudar a estabilidade do movimento orbital de satélites artificiais considerando forças gravitacionais e não gravitacionais. Para isto faremos uma abordagem geral da teoria utilizada. Inicialmente analisaremos o método de Hori para sistemas canônicos e não-canônico, em que é baseado no teorema de Lie (1888), que será aplicado á teoria geral das perturbações. O método Hori para sistemas canônicos será utilizado na normalização da Hamiltoniana onde todas as fórmulas estão na forma de invariantes canônicas, em virtude dos parêntesis de Poisson, e as perturbações de qualquer quantidade, embora se elas sejam elementos ou coordenadas, é determinado por uma fórmula simples e explícita. A aplicação do método se faz para casos onde a parte não perturbada da Hamiltoniana depende de uma variável angular bem como ás variáveis momentum. A teoria geral para sistemas não-canônicos é desenvolvida a partir da teoria para sistemas canônicos.

No que se refere ao estudo de estabilidade dos sistemas de Equações diferenciais para sistemas lineares e não lineares é apresentada uma classificação geral dos sistemas lineares bem como uma a abordagem de alguns métodos para o estudo de sistemas de Equações. Alguns teoremas e método serão aplicados á casos específico, em dinâmica de atitude; de modo a obter uma visão geral da aplicação deste trabalho para sistemas não-canônicos.

O teorema da Estabilidade de Kovalev e Savchenko introduzida no capítulo 3, é uma próxima etapa a ser realizada, já que através do método apresentado no capítulo 2 foi possível normalizar a Hamiltoniana. Esta forma normal da Hamiltoniana foi obtida com o auxílio de subrotinas desenvolvidas no software MATHEMATICA. Procedimentos necessários para este estudo são apresentados para realização de algumas etapas, entre elas, a determinação de algumas variáveis que importantes para condições de estabilidade do teorema.

## 1.1 Motivação

Devido ao grande avanço da tecnologia espacial, em especial, na exploração espacial através de satélites e sondas, o estudo das regiões de estabilidades do seu movimento orbital em torno da Terra se faz necessário. Este estudo é muito importante, para manobras orbitais ótimas. Regiões de estabilidade ou instabilidade podem ser utilizadas, por exemplo, para missões em que se deseje que uma nave permaneça nas vizinhanças de uma determinada região por um certo tempo (com consumo de mínimo de combustível) ou que seja transferida para uma outra região (com consumo mínimo de combustível)

É sabido que, para estudo do movimento orbital de um satélite artificial considerando forças gravitacionais, em particular o geopotencial, é possível aplicar métodos canônicos para se obter soluções aproximadas. No entanto, neste trabalho, estamos interessados em estudar a estabilidade no movimento orbital considerando forças não-gravitacionais. Com o intuito de mostrar a aplicabilidade do método de Hori para sistemas não canônicos consideraremos, para efeito prático, o arrasto atmosférico, embora já é sabido que o sistema é instável. Após o desenvolvimento da teoria para este estudo, onde teremos um sistemas não canônico, uma proposta para um trabalho completo é considerarmos como força não gravitacional a pressão de radiação solar.

## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo uma fundamentação teórica das teorias abordadas para o presente estudo e apresentada. Inicialmente o método de Hori para sistemas canônicos e não canônicos, baseado no teorema de Lie (1888), é abordada bem como uma aplicação do método para sistemas não canônico ao geopotencial considerando o arrasto atmosférico. Um estudo geral sobre estabilidade em sistemas lineares também é apresentado.

#### 2.1 Método de Hori para sistemas canônicos

O método Hori para sistemas canônicos é utilizado na normalização da Hamiltoniana onde todas as fórmulas estão na forma de invariantes canônicas, em virtude dos parêntesis de Poisson, e as perturbações de qualquer quantidade, embora elas sejam elementos ou coordenadas, é determinado por uma fórmula simples e explícita.

##### 2.1.1 Teorema de Lie em transformadas canônicas

Seja  $\xi_j, \eta_j$  um conjunto de  $2n$  variáveis e  $f(\xi, \eta), S(\xi, \eta)$  seja funções arbitrárias de  $\xi_j$  e  $\eta_j$ . Define-se operadores  $D_s^n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) por:

$$D_s^0 f = f \quad (2.1)$$

$$D_s^1 f = \{f, S\} \quad (2.2)$$

$$D_s^{n-1} f = D_s^{n-1} \{f, S\} \quad (2.3)$$

para  $n \geq 2$ , onde  $\{f, s\} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial x}$ , representa os parêntesis de Poisson.

O teorema de Lie diz que o conjunto de  $2n$  variáveis de  $x_j$  e  $y_j$  definidas pela Equação(Hori,1966):

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_s^n f(\xi, \eta) \quad (2.4)$$

é canônica se a série da Equação (2.4) converge, sendo  $\varepsilon$  um pequeno parâmetro independente de  $\xi_j$  e  $\eta_j$ . De fato, introduzindo o parâmetro  $\tau$  através do sistema de Equações diferenciais,

$$\frac{d\xi_j}{d\tau} = \frac{\partial S}{\partial \eta_j} \quad (2.5)$$

$$\frac{d\eta_j}{d\tau} = -\frac{\partial S}{\partial \xi_j} \quad (2.6)$$

Substituindo as Equações (2.5) e (2.6) na Equação (2.4) e usando as relações definidas nas Equações (2.1), (2.2) e (2.3), obtemos:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^n f}{d\tau^n} = f(\xi(\tau + \varepsilon), \eta(\tau + \varepsilon)), \quad (2.7)$$

em que

$$x = \xi(\tau + \varepsilon) \quad (2.8)$$

$$y = \eta(\tau + \varepsilon) \quad (2.9)$$

As Equações (2.8) e (2.9) mostram que  $x_j$  e  $y_j$  são os mesmos valores de  $\xi_j(\tau)$  e  $\eta_j(\tau)$  quando o parâmetro  $\tau$  é acrescido de  $\varepsilon$ . Logo  $x_j$  e  $y_j$  são variáveis canônicas se  $\xi$  e  $\eta$  também são.

A substituição  $f(\xi, \eta) = \xi_j$  e  $\eta_j$  na Equação (2.4) nos dá:

$$x_j = \xi_j + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_s^{n-1} \frac{\partial S}{\partial \eta_j} \quad (2.10)$$

$$y_j = \eta_j - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_s^{n-1} \frac{\partial S}{\partial \xi_j} \quad (2.11)$$

Supondo:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_S^n f(p, q) \quad (2.12)$$

definimos outra transformação canônica  $\zeta_j \rightarrow q_j$ ,  $\eta_j \rightarrow p_j$  com a função  $S^* = S^*(p, q)$ . A transformação  $x_j \rightarrow q_j$ ,  $y_j \rightarrow p_j$  torna-se:

$$f(x, y) = \sum \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} D_{S^*}^m D_{S(p,q)}^{n-m} f(q, p) \quad (2.13)$$

Expandindo até a terceira ordem de  $\varepsilon$  temos:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(p, q) + \varepsilon \{f, S + S^*\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{f, S + S^*\}, S + S^*\} + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \{f, \{S, S^*\}\} + \frac{\varepsilon^3}{6} \{\{\{f, S + S^*\}, S + S^*\}, S + S^*\} + \\ & + \frac{\varepsilon^3}{6} \{\{f, 2S + S^*\}, \{S, S^*\}\} + \frac{\varepsilon^3}{6} \{\{f, \{S, S^*\}\}, S + 2S^*\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

na qual foi usada a lei de comutação entre os operadores  $D_S$  e  $D_{S^*}$ :

$$D_{S^*} D_S - D_S D_{S^*} = D_{\{S, S^*\}} \quad (2.15)$$

As Equações (2.10) e (2.11) podem ser comparadas com uma forma mais comum de transformação canônica:

$$x_j = \xi_j + \varepsilon \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y_j} \quad (2.16)$$

$$y_j = \eta_j - \varepsilon \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x_i} \quad (2.17)$$

onde a determinação da função  $\tilde{S}$  é uma função arbitrária do conjunto de variáveis  $\xi_j$  e  $\eta_j$ . As Equações (2.16) e (2.17) são as relações entre o novo e o antigo sistema de coordenadas.

Nas Equações (2.16) e (2.17),  $\varepsilon$  não é necessariamente pequeno. Entretanto, se  $\varepsilon$  for pequeno, as relações definidas nas Equações (2.16) e (2.17) podem ser resolvidas por um método de aproximações sucessivas, então  $x_j, y_j$  podem ser expressos explicitamente



em termos de  $\xi_j, \eta_j$ . O resultado é dado pelas Equações (2.10) e (2.11) se considerarmos que as duas funções  $S(\xi, \eta)$  e  $\tilde{S}(\xi, \eta)$ , isto é  $[\tilde{S}(\xi, y)]_{y \rightarrow \eta}$  são relacionados pela Equação:

$$S = \tilde{S} + \frac{\varepsilon}{2} \sum \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta_j} + \frac{\varepsilon^2}{12} \sum \sum \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \eta_j \partial \eta_k} + 4 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta_j} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \eta_j \partial \xi_k} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta_j} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta_k} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (2.18)$$

### 2.1.2 Nova teoria na dinâmica de transformação

Considere um sistema dinâmico com as seguintes Equações do movimento:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_j} \quad (2.19)$$

$$\frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_j} \quad (2.20)$$

com a Hamiltoniana.

$$F(x, y) = F_0(x, y) + \sum_{k=1} F_k(x, y) \quad (2.21)$$

onde  $F_k$  possui um fator  $\varepsilon^k$ . Assumimos que  $F$  não depende do tempo explicitamente e que o sistema possui solução se  $\varepsilon = 0$ . Seja  $S(\xi, \eta)$  a função geratriz de uma transformação canônica  $x_j \rightarrow \xi_j, y_j \rightarrow \eta_j$ .  $S_k$  é desenvolvível em séries de potência na forma:

$$\varepsilon S(\xi, \eta) = \sum_{k=1} S_k(\xi, \eta) \quad (2.22)$$

onde  $S_k$  possui um fator  $\varepsilon^k$ .

Desde que  $F$  não dependa do tempo, a Hamiltoniana pode ser escrita como:

$$\sum_{k=0} F_k(x, y) = \sum_{k=0} F^*(\xi, \eta) \quad (2.23)$$

Aplicando a expansão da Equação (2.4) no lado esquerdo da Equação acima:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} F_k^*(\xi, \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_s^n \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x, y) = \\
&= \left( \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x, y) \right) + \left( \varepsilon D_s^1 \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x, y) \right) + \left( \frac{\varepsilon^2}{2!} D_s^2 \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x, y) \right) + \\
&+ \left( \frac{\varepsilon^3}{3!} D_s^3 \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x, y) \right) + \dots
\end{aligned} \tag{2.24}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
F_0^* + F_1^* + F_2^* + \dots &= (F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \dots) \\
&+ \varepsilon \{F_0 + F_1 + F_2 + \dots, S_1 + S_2 + S_3\} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \{F_0 + F_1 + F_2 + \dots, S_1 + S_2 + S_3\} + \dots \\
&= (F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \dots) + \varepsilon \{F_0, S_1\} + \varepsilon^2 [\{F_0, S_2\} + \{F_1, S_1\} + \frac{1}{2} \{\{F_0, S_1\}, S_1\}] + \dots
\end{aligned}$$

Lembrando que as funções  $F_k$  e  $S_k$  trazem  $\varepsilon^k$  implícito e igualando os termos de mesma ordem de  $\varepsilon$  em ambos os lados, temos:

-ordem 0

$$F_0^* = F_0 \tag{2.25}$$

-ordem 1

$$F_1^* = F_1 + \{F_0, S_1\} \tag{2.26}$$

-ordem 2

$$F_2^* = F_2 + \{F_0, S_2\} + \{F_1, S_1\} + \frac{1}{2} \{\{F_0, S_1\}, S_1\} \tag{2.27}$$

-ordem 3

$$\begin{aligned}
F_3^* &= F_3 + \{F_0, S_3\} + \{F_1, S_2\} + \{F_2, S_1\} + \frac{1}{2} \{\{F_0, S_1\}, S_2\} + \\
&+ \frac{1}{2} \{\{F_0, S_2\}, S_1\} + \frac{1}{2} \{\{F_1, S_1\}, S_1\} + \frac{1}{6} \{\{\{F_0, S_1\}, S_1\}, S_1\}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

ou ainda podemos adotar a seguinte recorrência substituindo as Equações acima seqüencialmente:

-ordem 0

$$F_0 = F_0^* \quad (2.29)$$

-ordem 1

$$\{F_0, S_1\} + F_1 = F_1^* \quad (2.30)$$

-ordem 2

$$F_2^* = F_2 + \{F_0, S_2\} + \frac{1}{2}\{F_1 + F_1^*, S_1\} \quad (2.31)$$

-ordem 3

$$F_3^* = F_3 + \{F_0, S_3\} + \frac{1}{2}\{F_1 + F_1^*, S_2\} + \frac{1}{2}\{F_2 + F_2^*, S_1\} + \frac{1}{12}\{\{F_1 - F_1^*, S_1\}, S_1\} \quad (2.32)$$

Introduzindo o parâmetro  $t^*$  de forma que:

$$\frac{d\xi_j}{dt^*} = \frac{\partial F_0}{\partial \eta_j} \quad (2.33)$$

$$\frac{d\eta}{dt^*} = -\frac{\partial F_0}{\partial \xi_j} \quad (2.34)$$

cuja a solução se for conhecida é dada por:

$$\xi_i = \xi_i(t^* + C_1, C_2, \dots, C_{2n}) \quad (2.35)$$

$$\eta_i = \eta_i(t^* + C_1, C_2, \dots, C_{2n}) \quad (2.36)$$

onde  $C_1, C_2, \dots, C_{2n}$  são constantes de integração, que podemos inverter na forma:

$$\begin{aligned} t^* + C_1 &= \varphi_1(\xi, \eta), \\ C_2 &= \varphi_2(\xi, \eta), \dots \\ C_{2n} &= \varphi_{2n}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (2.37)$$

A forma geral do algoritmo de Hori é dada por:

$$\{F_0, S_n\} + \psi_n = F_n^* \quad (2.38)$$

onde  $\psi$  é determinada a partir das ordens anteriores de  $n$ .

Observemos que:

$$\{F_0, S_n\} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial F_0}{\partial \xi_i} \frac{\partial S_n}{\partial \eta_i} - \frac{\partial F_0}{\partial \eta_i} \frac{\partial S_n}{\partial \xi_i} \right] = \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{d\eta_j}{dt^*} \frac{\partial S_n}{\partial \eta_i} - \frac{d\xi_j}{dt^*} \frac{\partial S_n}{\partial \xi_i} \right] = -\frac{dS_n}{dt^*} \quad (2.39)$$

e (2.38) torna-se:

$$\frac{dS_n}{dt^*} = \psi_n - F_n^* \quad (2.40)$$

Aplicando o procedimento de média:

$$F_n^* = \langle \psi_n \rangle_{t^*} \quad (2.41)$$

$$S_n = \int [\psi_n - \langle \psi \rangle_\tau] dt^* \quad (2.42)$$

O procedimento acima corresponde a obter uma nova Hamiltoniana livre do parâmetro auxiliar  $\tau$ . Como consequência temos as novas Equações canônicas:

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial F^*(\xi, \eta)}{\partial \eta_j} \quad (2.43)$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial F^*(\xi, \eta)}{\partial \xi_i} \quad (2.44)$$

Desta forma:

$$0 = \frac{d}{dt^*} F^*(\xi, \eta) = \{F^*, F_0^*\} = -\{F_0^*, F^*\} = -\frac{d}{dt} F_0^*(\xi, \eta) \quad (2.45)$$

e temos como nova integral primeira:

$$F_0^*(\xi, \eta) = const \quad (2.46)$$

e

$$F^*(\xi, \eta) = const \quad (2.47)$$

Nós podemos reduzir a ordem das Equações de movimento (2.19) e (2.20) com o uso da transformação canônica  $x_j, y_j \rightarrow \xi_j, \eta_j$ . O algoritmo de determinação de  $F_k^*$  e  $S_k$  é:

-ordem 0:

$$F_0^* = F_0 \quad (2.48)$$

-ordem 1:

$$F_1^* = F_{1\text{sec}} \quad (2.49)$$

$$S_1 = \int F_{1\text{per}} dt^* \quad (2.50)$$

-ordem 2:

$$F_2^* = F_{2\text{sec}} + \frac{1}{2} \{F_1 + F_1^*, S_1\} \quad (2.51)$$

$$S_2 = \int \left( F_{2\text{sec}} + \frac{1}{2} \{F_1 + F_1^*, S_1\}_{\text{per}} \right) dt^* \quad (2.52)$$

-ordem 3:

$$F_3^* = F_{3\text{sec}} + \frac{1}{12} \{ \{F_{1\text{per}}, S_1\}, S_1 \}_{\text{sec}} + \frac{1}{2} \{F_2 + F_2^*, S_1\}_{\text{sec}} + \frac{1}{2} \{F_1 + F_1^*, S_2\}_{\text{sec}} \quad (2.53)$$

$$S_3 = \int \left( F_{3\text{sec}} + \frac{1}{12} \{ \{F_{1\text{per}}, S_1\}, S_1 \}_{\text{sec}} + \frac{1}{2} \{F_2 + F_2^*, S_1\}_{\text{sec}} + \frac{1}{2} \{F_1 + F_1^*, S_2\}_{\text{per}} \right) dt^* \quad (2.54)$$

## 2.2 Método de Hori para sistemas não canônicos

A teoria geral de perturbações desenvolvida para solução de sistemas canônicos é generalizada para ser aplicada a sistemas não canônicos. Apresentaremos o algoritmo do método de Hori para sistemas não-canônicos até terceira ordem onde será utilizado, no capítulo 3, na normalização da Equação do problema de um satélite artificial perturbado pelo geopotencial e pelo arrasto atmosférico até ordem 1. Dessa forma, consideremos o seguinte sistema de Equações diferenciais dado por:

$$\frac{dz_j}{dt} = Z_j(z), \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.55)$$

e, uma transformação de variáveis  $z_j \rightarrow \xi_j$ , em que introduz-se um conjunto de  $n$  funções geratrizes  $T_j(\xi)$ . O novo sistema de Equações do movimento são:

$$\frac{d\xi_j}{dt} = Z_j^*(z), \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.56)$$

Através de mudanças de variáveis e introdução de alguns termos (HORI,1971) demonstra-se que:

$$Z_j^*(\xi) = Z_j(\xi) + \{Z, T\}_j + \frac{1}{2!} \{\{Z, T\}, T\}_j + \dots \quad (2.57)$$

em que os colchetes representam os parêntesis de Poisson.

Assumindo-se que  $Z_j, Z_j^*$  e  $T_j$  possam ser expandidos em séries de potências de um pequeno parâmetro:

$$\begin{aligned} Z_j &= Z_j^{(0)} + Z_j^{(1)} + Z_j^{(2)} + Z_j^{(3)} + \dots, \\ Z_j^* &= Z_j^{*(0)} + Z_j^{*(1)} + Z_j^{*(2)} + Z_j^{*(3)} + \dots \quad (j=1, \dots, m), \\ T_j &= T_j^{(1)} + T_j^{(2)} + T_j^{(3)} + \dots, \end{aligned} \quad (2.58)$$

em que,  $Z_j^{(n)}, Z_j^{*(n)}, T_j^{(n)}$  são da ordem de um pequeno parâmetro elevado à  $n$ -ésima potência, lembrando que  $T_j^{(0)}$  não aparece, pois  $T_j$  tem que ser da ordem do pequeno parâmetro.

Introduzindo-se o parâmetro  $\tau$ , através do sistema auxiliar de Hori:

$$\frac{d\xi_j}{d\tau} = Z_j^{*(0)}(\xi), \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.59)$$

cuja solução é conhecida: (2.60)

$$\xi_j = \xi_j(\tau + c_1, c_2, \dots, c_m), \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.61)$$

em que  $c_j$  são  $m$  constantes de integração em relação à  $\tau$ .

Tomando o desenvolvimento dado em (2.58) nas Equação (2.57) e igualando-se os termos de mesma ordem no pequeno parâmetro, obtemos:

-Ordem zero:

$$Z_j^0 = Z_j^{*(0)} \quad (2.62)$$

-Ordem um:

$$Z_j^{*(1)} = -\frac{dT_j^{(1)}}{d\tau} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(1)} + Z_j^{(1)}, \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.63)$$

-Ordem dois:

$$Z_j^{*(2)} = -\frac{dT_j^{(2)}}{d\tau} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(2)} + \frac{1}{2} \{Z^{(1)} + Z^{*(1)}, T^{(1)}\}_j + Z_j^{(2)} \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.64)$$

-Ordem três:

$$Z_j^{*(3)} = -\frac{dT_j^{(3)}}{d\tau} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(3)} + \frac{1}{2} \{Z^{(1)} + Z^{*(1)}, T^{(2)}\}_j + \frac{1}{2} \{Z^{(2)} + Z^{*(2)}, T^{(1)}\}_j + \frac{1}{12} \{ \{Z^{(1)} - Z^{*(1)}, T^{(1)}\}_j T^{(1)} \}_j + Z_j^{(3)} \quad (j=1, \dots, m), \quad (2.65)$$

e assim sucessivamente.

De forma geral, para uma ordem n temos:

$$Z_j^{*(n)} = -\frac{dT_j^{(n)}}{d\tau} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(n)} + \phi_j^{(n)}(\tau), \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.66)$$

Isto é, temos m Equações lineares não -homogêneas a coeficientes variáveis, dadas por:

$$\phi_j^{(n)}(\tau) - Z_j^{*(n)} = \frac{dT_j^{(n)}}{d\tau} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(n)}, \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.67)$$

com  $2m$  incógnitas que são  $T_j^{(n)}$  e  $Z_j^{*(n)}$ , os  $\phi_j^{(n)}$  e  $\frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta}(\tau)$  são funções conhecidas de  $\tau$ .

Este sistema de Equações diferenciais deve ser resolvido determinando-se  $Z_j^*$  que é puramente secular de tal forma que  $T_j^{(n)}$  não possua termos seculares ou seculares mistos em  $\tau$ , como é usual em teoria de perturbação, para que a teoria seja formalmente válida para um intervalo de tempo ilimitado.

### **2.3 Estabilidade de sistemas de Equações lineares**

A palavra estabilidade é definida em mecânica onde se caracteriza o equilíbrio de um corpo rígido. O equilíbrio é chamado estável se o corpo retorna a posição inicial após ter sido movido ligeiramente de sua posição de repouso. Se o corpo, depois que um leve deslocamento, é movido uma nova posição, seu ponto de equilíbrio é chamado de instável.

Nesta seção, um enfoque ao estudo da estabilidade de sistemas de Equações diferenciais para sistemas lineares e não lineares é apresentada. Inicialmente é apresentada uma classificação geral dos sistemas lineares bem como uma abordagem de alguns métodos para o estudo da estabilidade de sistemas de Equações. Alguns teoremas e método serão aplicados á casos específico, em dinâmica de atitude; por exemplo, de modo a obter uma visão geral do estudo.

#### **2.3.1 Sistemas dinâmicos**

Um sistema dinâmico é aquele que evolui ou muda com o tempo. As Equações diferenciais que regem o movimento de sistemas dinâmicos são geralmente complexas e não possuem solução exata, principalmente quando se trata de Equações não lineares. Existem processos de linearização do sistema a partir dos quais é possível a utilização de métodos da teoria linear para estudar a estabilidade de sistemas não lineares nas vizinhanças de pontos de equilíbrio do sistema linear. No processo de linearização pode-se analisar o comportamento do sistema na vizinhança de movimentos conhecidos,



sendo que a solução do sistema pode ser constante ou variar como o tempo. Ponto fixo ou solução de equilíbrio são denominações dadas para soluções constantes, enquanto solução dinâmica é a denominação dada para soluções que variam com o tempo.

Um sistema dinâmico contínuo descrito por um conjunto de Equações diferenciais ordinárias é autônomo se o tempo não aparece explicitamente nas Equações, isto é:

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.68)$$

sendo que  $f$  não depende explicitamente do tempo  $t$ , e por isso o sistema é dito invariante no tempo, independente do tempo ou estacionário.

Um sistema dinâmico é não-autônomo quando depende explicitamente do tempo, isto é:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (2.69)$$

sendo que  $f$  depende explicitamente de  $t$ , por isso, o sistema é freqüentemente chamado de campo vetorial. O vetor  $x$  é chamado vetor de configuração porque descreve a posição do sistema e o espaço  $\mathbb{R}^n$  em que o sistema evolui é chamado de espaço de configuração.

Uma projeção da solução sobre o espaço de configuração  $n$ -dimensional é chamada de trajetória ou órbita e representam a evolução das soluções com o tempo. O conjunto de todas as trajetórias ou órbitas é chamado de diagrama de fase.

### 2.3.2 Sistema Hamiltoniano

Sejam dois conjuntos de variáveis  $q_i \in \mathbb{R}^n$  e  $p_i \in \mathbb{R}^n$ . Um sistema Hamiltoniano é definido por um sistema de Equações diferenciais do tipo:

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.70)$$

sendo  $q_i, p_i$  respectivamente as coordenadas generalizadas e os momentos generalizados do sistema e  $H$  uma função escalar denominada de Hamiltoniana, que pode depender ou não explicitamente do tempo.

Os pontos de equilíbrio dos sistemas dinâmicos (2.68), (2.69) ou sistema Hamiltoniano (2.70) são determinados quando o lado direito destas Equações se anulam.

Os tipos de pontos de equilíbrio de um sistema de Equações diferenciais podem ser determinados através da linearização das Equações dinâmicas, (2.68) ou (2.69), ou Equações Hamiltonianas, (2.70), em torno desses pontos de equilíbrio. Considerando o caso bidimensional ( $n=2$ ), para cada solução encontrada, casos diferentes de combinações de autovalores são obtidos.

### 2.3.3 Classificando pontos de equilíbrio.

Para classificação dos pontos de equilíbrio, consideremos um sistema linear dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \in R^n, \mathbf{A} \in \{\mathbf{A}\}_{mat} \quad (2.71)$$

onde, particularmente temos,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Pelo teorema da existência e unicidade, existe uma solução linearmente independente da forma,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}e^{\lambda t} \quad (2.75)$$

onde

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \quad (2.76)$$

Dessa forma, da Equação (2.75) temos que

$$\dot{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{s}e^{\lambda t} \quad (2.77)$$

Substituindo a Equação (2.71) na Equação (2.77), obtemos

$$(A - \lambda I)\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (2.78)$$

Onde I é a matriz identidade. Notemos da Equação (2.76) que a Equação (2.78) é igual a zero se e somente se,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.79)$$

ou

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.80)$$

Assim obtemos a Equação característica dada por

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (2.81)$$

Portanto  $\lambda_1, \lambda_2$  são os *autovalores* da matriz A,  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1$  e  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_2$  são os pares de *autovetores* correspondentes a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respectivamente. Contanto que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  a solução da Equação (2.109) será:

$$\mathbf{x} = C_1 \mathbf{s}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{s}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.82)$$

Em particular, para condição inicial  $\mathbf{x}_0$  podemos escrever como uma combinação linear de autovetores como mostra a FIGURA 2.1.

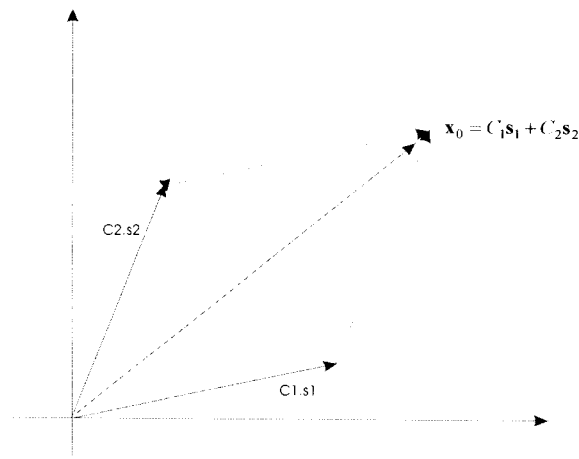


FIGURA 2.1-Representação geométrica de vetores

Os principais casos de acordo com o estudo dos autovalores são:

- i)  $\lambda_1, \lambda_2$  são reais e distintos.
  - a) No caso em que  $\lambda_1, \lambda_2$  têm o mesmo sinal, o ponto fixo é denominado **nó** ou **ponto nodal**. Se ambos os autovalores são positivos é definida uma **fonte**. Se ambos os autovalores são negativos é definido um **poço ou sumidouro**.
  - b) No caso em que  $\lambda_1, \lambda_2$  têm sinais opostos, o ponto de equilíbrio é denominado **Ponto de Sela**.
- ii)  $\lambda_1, \lambda_2$  são complexos conjugados.
  - a) Considerando  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , se  $\alpha \neq 0$  as trajetórias descrevem uma espiral em torno do ponto fixo chamado **foco**.
  - b) Se  $\alpha = 0$ , temos que  $\lambda_1, \lambda_2$  são imaginários puros. Este ponto fixo é chamado **centro**.
- iii)  $\lambda_1, \lambda_2$  são reais e iguais.

Neste caso, no plano de fase as órbitas são linhas retas através da origem e os pontos fixos também chamados de **nó próprio** ou **ponto nodal próprio**.

### 2.3.3.1 Estabilidade dos pontos de equilíbrio

Quando aplicamos uma pequena perturbação no sistema, de modo a afastá-lo de seu estado e sua solução sempre retorna ao ponto de equilíbrio, temos um **ponto de equilíbrio estável**. Caso contrário temos um **ponto de equilíbrio instável**. Uma maneira simples de identificar a estabilidade de um ponto é verificando de modo qualitativo os movimentos do sistema pelo diagrama de fase. Nos diagramas de fase da figuras a seguir, as flechas indicam o sentido da evolução temporal.

1) No caso do ponto de equilíbrio em que  $\lambda_1, \lambda_2$  são reais, distintos e mesmo sinal, temos que as trajetórias no plano de fase são parábolas e podem ser definidas como:

a) **Nó ou Nudo Estável** (sumidouro) quando  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , pois quando o sistema afasta do ponto ele retorna, como mostram as flechas no diagrama de fase:

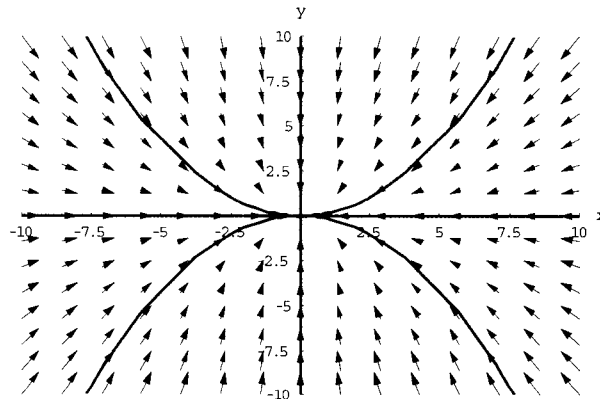


FIGURA 2.2 -Diagrama de fase para  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ .

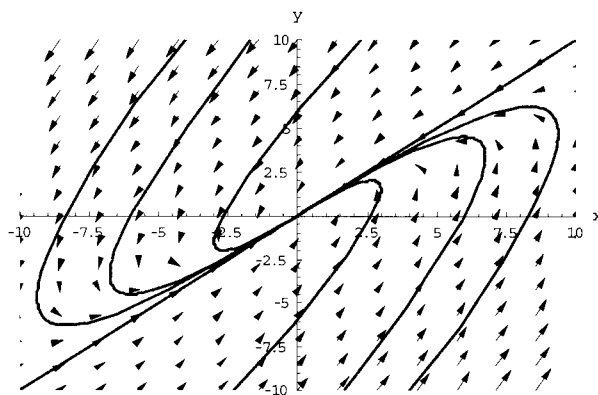


FIGURA 2.3 Nudo impróprio estável para  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ .

- c) **Nó ou Nodo Instável (fonte)** quando  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ , pois quando o sistema afasta do ponto ele não retorna, como mostram as flechas no diagrama de fase:

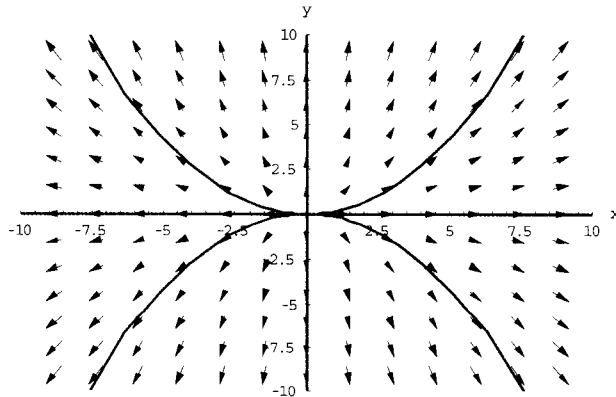


FIGURA 2.4-Diagrama de fase para  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ .

- 2) No caso do ponto de equilíbrio em que  $\lambda_1, \lambda_2$  são reais, distintos e sinais opostos, temos que as trajetórias no plano de fase são hipérbolas:

**Ponto de Sela** quando  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  é um ponto de equilíbrio sempre **instável**.

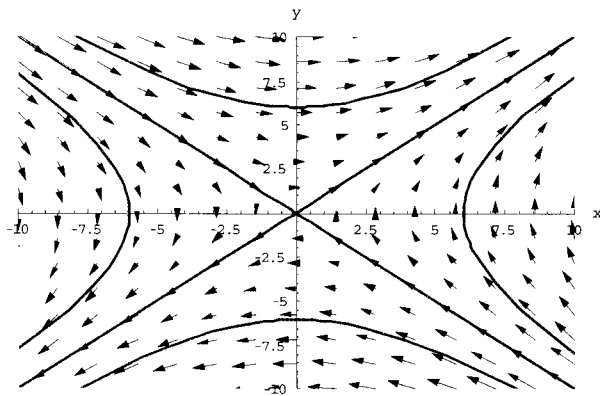


FIGURA 2.5- Diagrama de fase para  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , reais.

- 3) No caso do ponto de equilíbrio em que  $\lambda_1, \lambda_2$  são complexos conjugados, temos que as trajetórias no plano de fase são espirais:

- a) **Foco estável** quando  $\alpha < 0, \beta > 0$  a órbita espirala em direção ao centro, ou seja, ao ponto fixo.

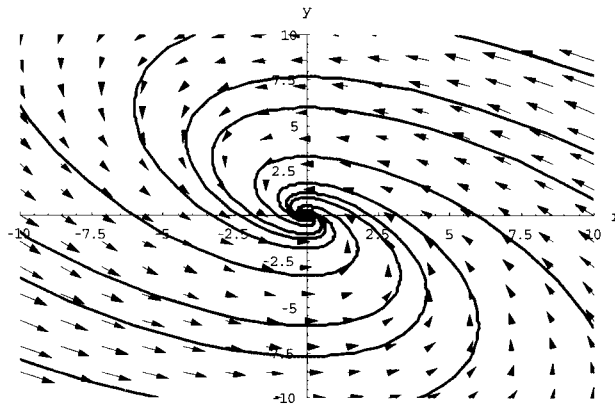


FIGURA 2.6- Diagrama de fase para  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ .

- b) **Foco instável** quando  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  a órbita se afasta do centro, ou seja, ao ponto fixo, espiralando para fora.

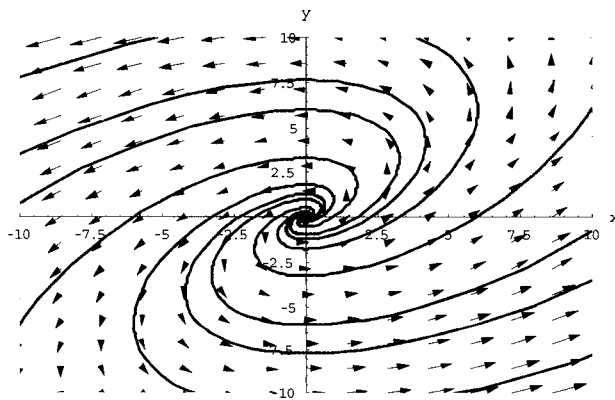


FIGURA 2.7- Diagrama de fase para  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ .

- c) **Centro** quando  $\alpha = 0$ , temos que  $\lambda_1, \lambda_2$  são imaginários puros.

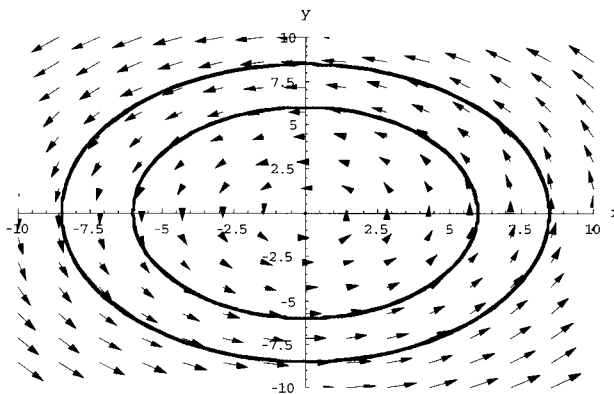


FIGURA 2.8- Diagrama de fase para  $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$ .

4) No caso do ponto de equilíbrio em que  $\lambda_1, \lambda_2$  são reais e iguais, temos que as trajetórias no plano de fase são retas através da origem:

a) **Nó ou Nodo Próprio Estável** quando  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  as retas convergem para o ponto fixo:

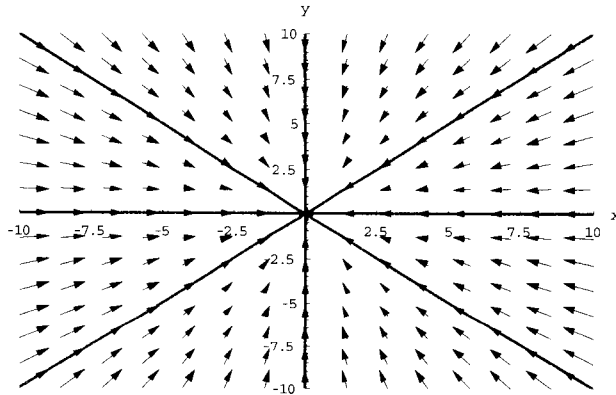


FIGURA 2.9- Diagrama de fase para  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ .

b) **Nó ou Nodo Próprio Instável** quando  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$  as retas divergem do ponto fixo:

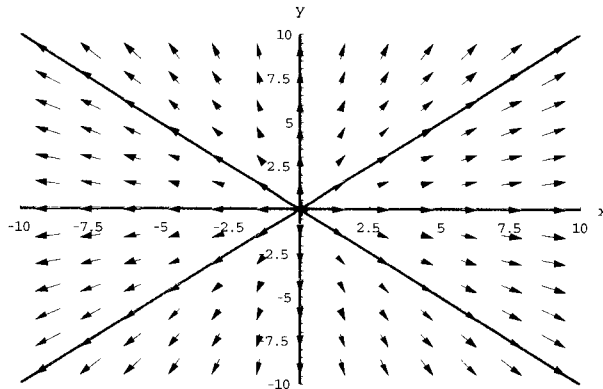


FIGURA 2.10-Diagrama de fase para  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ .

5) **Caso degenerado**: ocorre quando há um único autovalor constante e outro autovalor é zero.



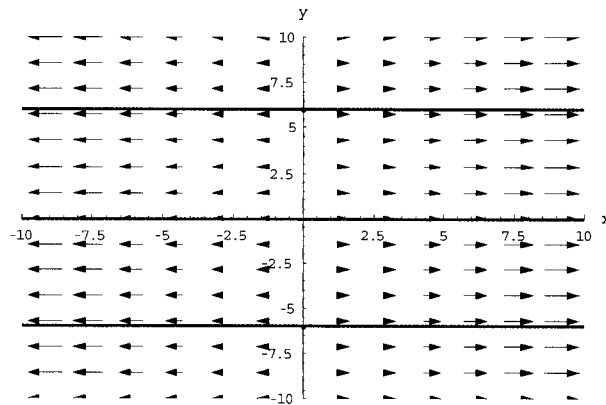


FIGURA 2.11- Diagrama de fase para  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ .

O estudo de estabilidade através do plano de fase pode ser observado na FIGURA 2.12 para o oscilador simples e para o pêndulo não-amortecido considerando diversas condições iniciais.

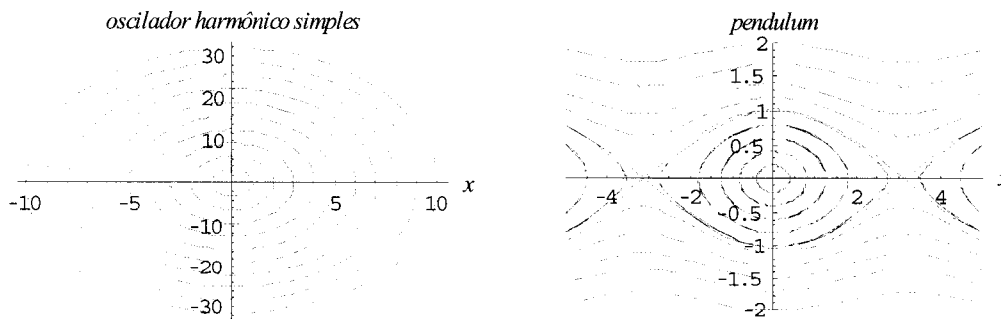


FIGURA 2.12- Diagrama de fase para oscilador harmônico e pêndulo não-amortecido.

### 2.3.3.2 Transição entre os pontos de equilíbrio

Os tipos de pontos de equilíbrios discutidos anteriormente podem ser classificados em termos de dois parâmetros do sistema. Através da Equação (2.89) temos que

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0 \tag{2.83}$$

Com

$$p = (a + b), \quad q = (ad - bc). \tag{2.84}$$

Então

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \quad \text{onde} \quad \Delta = p^2 - 4q$$

Uma classificação geral para diversos casos de pontos de estabilidade e apresentada na a FIGURA 2.13. O casos degenerados ocorrem em  $\Delta = 0$  e  $q = 0$ . Note que o centro constitui uma transição entre o espiral estável e o não estável: a existência de um centro depende de uma relação particular exata entre os coeficientes do sistema e portanto então uma característica bastante frágil. A conseqüência disto é que se a aproximação linear de um sistema não linear prediz um centro ele não será seguro concluir que o ponto de equilíbrio é verdadeiramente um centro, pois poderá ser um espiral estável ou instável. Este caso é típico e para ser estudado em bifurcações de sistemas.

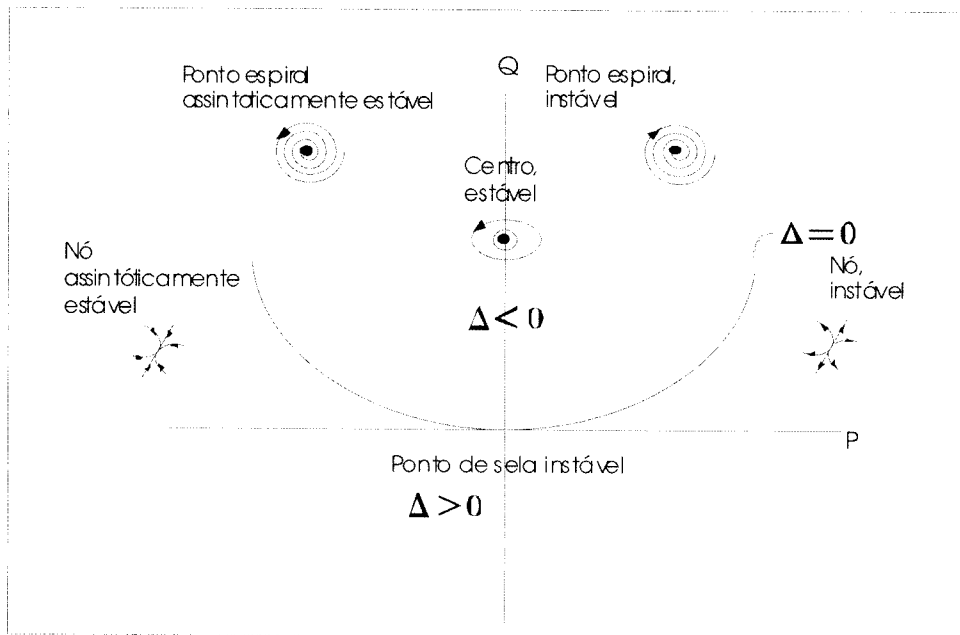


FIGURA 2.13 -Classificação geral para sistemas lineares.

### 2.3.4 Órbitas periódicas e ciclos limites

Nos sistemas não-lineares quando aparecer oscilações sustentadas de freqüência fixa e amplitude independente das condições iniciais, as oscilações são determinadas apenas pelas propriedades estruturais do sistema. Tais oscilações estão associadas a trajetórias fechadas no plano de fase, do tipo ciclo limite.

Os sistemas dinâmicos podem algumas vezes ter oscilações periódicas ou não. Uma solução periódica de um sistema autônomo corresponde a órbitas fechadas ou ciclos no espaço de fase. As órbitas fechadas no  $\mathbb{R}^2$  são soluções periódicas que não se interceptam devido à unicidade. Em um sistema dissipativo, tal órbita é também chamada de **ciclo limite**, pois se todas as trajetórias que principiam perto de uma trajetória fechada (do lado de dentro ou do lado de fora) espiralam para uma trajetória fechada quando  $t \rightarrow \infty$  e o ciclo limite é *assintoticamente estável*. Em virtude da trajetória limite ser uma órbita periódica, e não um ponto de equilíbrio, este tipo de estabilidade é denominado muitas vezes, *estabilidade orbital*. Se as trajetórias de um lado da trajetória fechada espiralam para ela enquanto do outro espiralam para longe dela quando  $t \rightarrow \infty$ , então o ciclo limite se diz *semi-estável*. Se as trajetórias dos dois lados da trajetória fechada espiralam para longe quando  $t \rightarrow \infty$ , então a trajetória fechada se diz *instável*. É possível também ter trajetórias fechadas das quais não se aproximam, nem se afastam, outras trajetórias; por exemplo, as soluções periódicas das Equações predador-presa. Neste caso a trajetória fechada é estável.

Um exemplo de ciclo limite pode ser observado na FIGURA 2.14, para Equação de van der Pol, realizada no MATHEMATICA 5.1 (código no anexo)

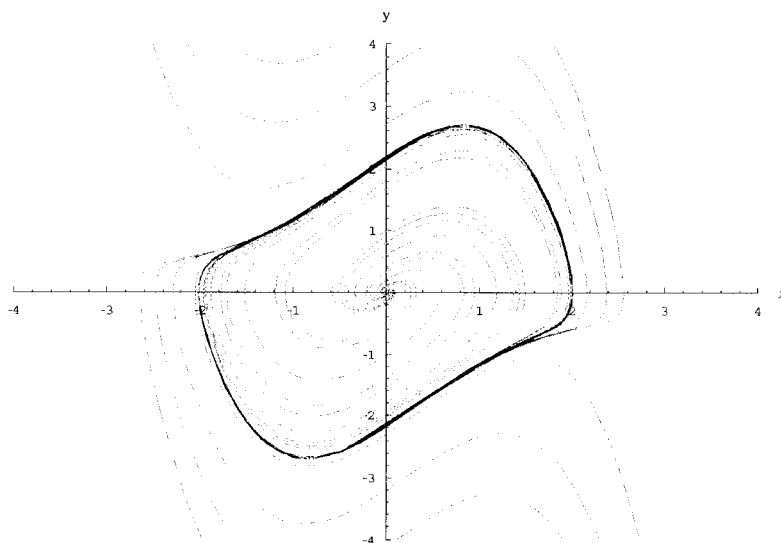


FIGURA 2.14- Ciclo limite para Equação de van der Pol  $x'' + (x^2 - 1)x' + x = 0$ .

A determinação dos ciclos-limites não é tarefa fácil a partir das soluções analíticas. As soluções numéricas, por outro lado, são sempre aproximadas e assim, mesmo quando indicam um ciclo-limite, deixam margem de incerteza. Alguns teoremas podem ser aplicados em situações como estas, como o critério de Bendixson e o Teorema de Poincaré-Bendixson que nos permite analisar a existência de ciclos limites no plano.

### 2.3.5 Estabilidade Segundo Liapunov

A análise de estabilidade de Liapunov fornece uma definição geométrica, observada na FIGURA 2.15, da estabilidade de um estado de equilíbrio. Seja um sistema de Equações diferenciais n-dimensional:

$$\dot{x} = F(x) \quad (2.85)$$

sendo  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Cujas soluções são determinadas pelas condições iniciais e é dada por  $\bar{x} = x(x_0, t)$ , cujo estado de equilíbrio é caracterizado por:

$$F(\bar{x}_0) = 0, \quad \bar{x}_0 = x(x_0, t_0) \quad (2.86)$$

Então a estabilidade pode ser definida segundo Liapunov da seguinte forma:

- a) Uma solução  $x(x_e, t)$  é **estável no sentido de Liapunov** se para qualquer número pequeno  $\varepsilon > 0$  existe um número  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que  $\|x_0 - x_e\| < \delta(\varepsilon)$  implica  $\|x(x_0, t) - x(x_e, t)\| < \varepsilon$ ,  $t_0 \leq t < \infty$ . A solução  $\bar{x} = x(x_0, t)$  permanece o tempo todo em um tubo fino em torno de  $x(x_e, t)$ .
- b) A solução  $x(x_e, t)$  é **instável** se ela não é estável, e para a instabilidade sempre existe algum  $\varepsilon > 0$ , e algum  $\delta$  numa vizinhança de  $x_e$ , para o qual  $x(x_0, t)$  deixa o tubo em qualquer momento.

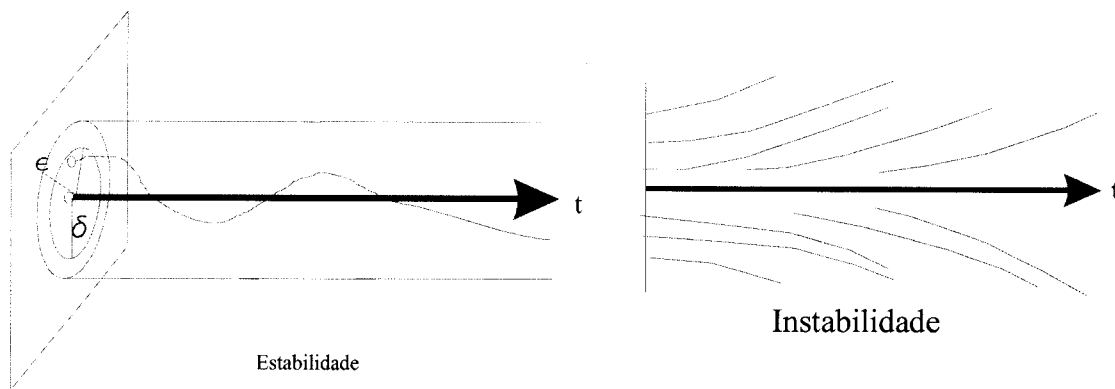


FIGURA 2.15– Parâmetros da estabilidade de Liapunov .

Das definições acima, nota-se que a estabilidade é uma dependência contínua e uniforme das condições iniciais que são locais. Existe um método para análise de estabilidade baseado em certas propriedades de funções especiais, denominadas funções de Liapunov e que permite estabelecer uma análise de estabilidade de caráter “global”. A principal dificuldade consiste na escolha de uma função conveniente.

O teorema KAM - Kolmogorov, Arnold, Moser (Boccaletti, D. and Pucacco, G., 1998) dá condições que devem ser verificadas para que um movimento que sofra pequenas perturbações possa preservar características do movimento antes de ser perturbado. Se o espaço de fase de um sistema com  $n$  graus de liberdade for integrável, as trajetórias dos pontos representativos devem permanecer em um toro  $n$ -dimensional definido por  $n$  constantes do próprio movimento. O teorema KAM estabelece que, sob condições convenientes, as perturbações não destroem o toro, mas apenas o deforma, permanecendo a trajetória em torno de superfícies  $n$ -dimensionais vizinhas do toro inicial. As condições são bastante restritivas, pois além de supor que as perturbações são pequenas, não podem ocorrer ressonâncias.

### 2.3.6 Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

É um método que fornece uma resposta direta sobre a questão da estabilidade de sistemas lineares baseado nos coeficientes da Equação de característica do sistema. É

particularmente útil para sistemas de alta-ordem porque não requer que as expressões polinomiais sejam fatorada.

Sem que resolver as raízes de fato, o método de Routh-Hurwitz pode ser usado para determinar quantas raízes terão partes reais positivas. Conseqüentemente, se a Equação polinomial for a Equação característica, este método pode ser usado para determinar a estabilidade do processo.

O procedimento do critério de estabilidade segue que (Ogata, 1998):

a) Escrever o polinômio característico da seguinte forma:

$$\Delta(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (2.87)$$

onde os coeficientes  $a_n$  pertence aos reais.

b) Se algum dos coeficientes é zero ou negativo, antes da presença de ao menos um coeficiente positivo, haverá uma raiz ou raízes imaginárias que tem partes reais positivas. Desta forma o sistema é **instável**.

Uma condição suficiente para se continuar o procedimento é que todos os coeficientes devam ser positivos.

c) Se todos os coeficientes são positivos, organize os coeficientes do polinômio característico na forma de um arranjo do tipo:

$$\begin{array}{l|llll} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ s^0 & d_{n-1} & & & \end{array} \quad (2.88)$$

Sendo que

$$b_{n-1} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - a_n(a_{n-3})}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad (2.89)$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \quad (2.90)$$

⋮

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix} \quad (2.91)$$

⋮

Os cálculos para os coeficientes continuam até que os coeficientes sejam iguais a zero. Para se obter os demais coeficientes seguem-se o mesmo padrão de multiplicação cruzada dos coeficientes como foi mostrado nas Equações (2.89), (2.90) e (2.91).

O critério assegura que o número de raízes com partes reais positivas são iguais ao número de mudança de sinal dos elementos da primeira coluna do arranjo de Routh. Dessa forma a condição necessária e suficiente para o sistema seja **estável**, é que todos os elementos da primeira coluna tenham o mesmo sinal.

### 2.3.6.1 Aplicação do método de Routh-Hurwitz ao movimento rotacional

A aplicação deste critério, é realizada no estudo do movimento rotacional de satélites artificiais, com as Equações do movimento dadas por

$$\begin{cases} \frac{dl_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_i}, \\ \frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial l_i}; \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.92)$$

em que:  $L_i, l_i$  são as variáveis de Andoyer e  $F$  é a Hamiltoniana do problema, que em termos das variáveis de Andoyer e de Delaunay, é expressa por (Zanardi, 1986):

$$F(L_1, L_2, L_3, l_2, l_3, L, G, H, l, g, h) = F_0(L, L_1, L_2) + F_1(L_1, L_2, L_3, l_2, l_3, L, G, H, l, g, h); \quad (2.93)$$

com  $L_1, L_2, L_3, l_2, l_3$  representando as variáveis de Andoyer e  $L, G, H, l, g, h$  representando as variáveis de Delaunay, é necessário uma linearização desta Equação em torno das condições de equilíbrio. Como já observado, a Hamiltoniana associada ao problema, dada por (2.93), independe da variável angular  $l_1$ , de modo que sua conjugada  $L_1$  permanece constante. Deste modo a análise da estabilidade do sistema é reduzido ao estudo de um sistema de quatro Equações diferenciais, associadas as variáveis de Andoyer  $L_2, L_3, l_2$  e  $l_3$ . O sistema linearizado então pode ser colocado na forma

$$\dot{v} = J P v \quad (2.94)$$

com  $v$  descrevendo o vetor de estado,  $P$  o Hessiano e  $J$  uma matriz simplética, sendo dadas por:

$$v = \begin{bmatrix} L_2 \\ L_3 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \quad (2.95)$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial L_2^2} = a_{11} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_2 \partial l_3} = a_{12} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_2 \partial L_2} = a_{13} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_2 \partial L_3} = a_{14} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial l_3 \partial l_2} = a_{21} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_3^2} = a_{22} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_3 \partial L_2} = a_{23} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_3 \partial L_3} = a_{24} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial l_2} = a_{31} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial l_3} = a_{32} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2^2} = a_{33} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial L_3} = a_{34} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial l_2} = a_{41} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial l_3} = a_{42} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial L_2} = a_{43} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3^2} = a_{44} \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

$$J = \begin{bmatrix} Z_2 & I_2 \\ -I_2 & Z_2 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

em que  $I_2$  é a matriz identidade de ordem 2,  $Z_2$  é uma matriz nula de ordem 2 e os coeficientes  $a_{ij}$  são obtidos utilizando a Hamiltoniana  $F$  dada em (2.93). Os elementos  $a_{ij}$  da Hessiana  $P$  são facilmente calculados mas envolvem muitos cálculos algébricos e estão apresentados no Apêndice A (Cabette et al., 2004).



A Equação característica associada a matriz JP do sistema (2.94) pode ser obtida por:

$$\text{Det} [ \text{JP} - \lambda \mathbf{I}_4 ] = 0 \quad (2.98)$$

sendo expressa da seguinte forma:

$$\alpha_0 \lambda^4 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_4 = 0 \quad (2.99)$$

em que

$$\alpha_0 = 1 \quad (2.100)$$

$$\alpha_2 = -a_{13}^2 + a_{44} a_{22} - 2a_{14} a_{23} + 2a_{12} a_{34} + a_{11} a_{33} - a_{24}^2 \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 = & -a_{11} a_{44} a_{23}^2 + a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} + a_{12}^2 a_{34}^2 - a_{14}^2 a_{22} a_{33} - a_{12}^2 a_{33} a_{44} + \\ & + 2a_{12} a_{13} a_{44} a_{23} + a_{11} a_{33} a_{24}^2 + 2a_{14} a_{12} a_{24} a_{23} - 2a_{14} a_{13} a_{24} a_{23} + \\ & + 2a_{13} a_{22} a_{14} a_{34} - 2a_{13} a_{12} a_{34} a_{24} + 2a_{11} a_{23} a_{24} a_{34} - a_{11} a_{22} a_{34}^2 + \\ & - a_{44} a_{22} a_{13}^2 + a_{24}^2 a_{13}^2 a_{14}^2 a_{23}^2. \end{aligned} \quad (2.102)$$

O polinômio característico (2.99) é uma função par, visto que os coeficientes  $\alpha_3$  e  $\alpha_1$  são nulos, assim se  $\lambda$  é uma raiz característica deste polinômio tem-se que  $-\lambda$  também é, com a mesma multiplicidade.

Para a Equação característica (2.99), associada ao movimento rotacional em estudo, a primeira linha da tabela de Routh é formada pelos coeficientes  $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4$ . A segunda linha seria formada pelos coeficientes  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$ , que são nulos. Como existe uma linha nula na tabela de Routh, é necessário a utilização de um polinômio auxiliar, formado a partir da derivada em relação a  $\lambda$ :

$$P(\lambda) = \alpha_0 \lambda^4 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_4 = 0 \quad (2.103)$$

$$\frac{dP(\lambda)}{d\lambda} = 4\alpha_0 \lambda^3 + 2\alpha_2 \lambda \quad (2.104)$$

Assim podemos construir a tabela a seguir:

$\lambda^4$	$\alpha_0$	$\alpha_2$	$\alpha_4$
$\lambda^3$	$4\alpha_0$	$2\alpha_2$	0
$\lambda^2$	$b_1$	$b_2$	0
$\lambda^1$	$c_1$	0	
$\lambda^0$	$d_1$		

em que:

$$b_1 = \frac{4\alpha_0\alpha_2 - \alpha_0 2\alpha_2}{4\alpha_0} = \frac{\alpha_2}{2} \quad (2.105)$$

$$b_2 = \frac{4\alpha_4\alpha_0 - \alpha_0 0}{4\alpha_0} = \alpha_4 \quad (2.106)$$

$$c_1 = \frac{b_1 2\alpha_2 - 4\alpha_0 b_2}{b_1} = \frac{2(\alpha_2^2 - 4\alpha_0\alpha_4)}{\alpha_2} \quad (2.107)$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 0}{c_1} = b_2 = \alpha_4 \quad (2.108)$$

Pelo critério de Routh todos os elementos da primeira coluna da tabela devem ter o mesmo sinal para que o sistema seja estável. No caso em estudo, o primeiro termo da primeira coluna  $\alpha_0 = 1$ , ou seja, é positivo. Logo para que o sistema seja estável é necessário que os demais termos da primeira coluna sejam maiores que zero, ou seja  $\alpha_0, b_1, c_1, d_1 > 0$ .

Assim as seguintes condições são necessárias :

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_4 > 0$$

$$\alpha_2^2 > 4\alpha_0\alpha_4$$

Então para o tipo de Equação característica em estudo, pelo critério de Routh temos que as condições devem ser satisfeitas para que o sistema seja **estável**.

### 2.3.6.2 Análise da Estabilidade para um Conjunto de Pontos de Equilíbrio

Consideram-se condições particulares para as variáveis de Andoyer e de Delaunay para um satélite simétrico de médio porte (Zanardi, 1986).

#### *Dados orbitais e geométricos*

$$\mu = 3,986003 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$I = 0,5533 \text{ rad}$$

$$e = 0,01617$$

$$a = 6,95964 \times 10^3 \text{ km}$$

$$M = 11550 \text{ kg}$$

$$A = B = 3,9499 \times 10^{-1} \text{ kg km}^2$$

$$C = 1,0307 \times 10^{-1} \text{ kg km}^2$$

#### *Variáveis de Andoyer e de Delaunay*

$$L_1 = 0$$

$$l_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$L_2 = 9,7307 \times 10^{-3} \text{ kg km}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$l_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$L_3 = -2,9956 \times 10^{-3} \text{ kg km}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$l_3 = 4,8244 \text{ rad}$$

$$I_2 = 1,8837 \text{ rad}$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$L = \sqrt{\mu a}$$

$$l = 0$$

$$G = L\sqrt{1-e^2}$$

$$g = 0$$

$$H = G \cos I$$

$$h = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Os pontos de equilíbrio para as Equações do movimento rotacional (2.92), assumido os valores:

$$L_1 = -5.16995 \times 10^{-04} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$l_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$L_2 = 7.51908 \times 10^{-04} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$l_2 = 7.85566 \times 10^{-01} \text{ rad}$$

$$L_3 = -5.40662 \times 10^{-04} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$l_3 = -5.54028 \times 10^{-01} \text{ rad}$$

Então a partir dos dados assumidos encontram-se os valores dos coeficientes  $\alpha_2$  e  $\alpha_4$  implementando-se numericamente as Equações, obtendo-se:

$$\alpha_2 = 6,32628 \times 10^{-4}$$
$$\alpha_4 = 7,90619 \times 10^{-10}$$

Deste modo as duas condições são satisfeitas pelo resultado obtido acima. Pode-se ainda observar que a Equação característica não possui coeficiente negativo na presença de coeficientes positivos ( $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_2 > 0$  e  $\alpha_4 > 0$ ).

Portanto pelo critério de Routh-Hurwitz, o sistema associado ao movimento rotacional de um satélite simétrico, sob a influência do torque de gradiente de gravidade, para este caso em particular é **estável**. Pela tabela de Routh para este caso:

Observa-se que não ocorrem mudanças de sinal na tabela de Routh, o que acarreta na condição de estabilidade absoluta para as condições aqui consideradas.



## CAPÍTULO 3

### METODOLOGIA E APLICAÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar o teorema principal responsável pela análise da estabilidade para sistema não-canônico conhecido como Teorema da Estabilidade de Kovalev e Savchenko (1975), bem como o procedimento necessário para possível estudo da estabilidade. Na literatura, o teorema da Estabilidade de Kovalev e Savchenko é aplicado quando se tem um sistema canônico normalizado. No presente estudo partiremos de um sistema não canônico normalizado pelo método de Hori para sistemas não canônicos em que consideraremos como perturbações o geopotencial e o arrasto atmosférico.

#### 3.1 Teorema de Estabilidade de Kovalev e Savchenko

Seja a Hamiltoniana  $H$  uma função analítica de coordenadas ( $\xi$ ) e momentos ( $\eta$ ) generalizados para um ponto  $P$ , com a forma normal desta Hamiltoniana representada por  $H^0$  e expressa como:

$$H^0 = \sum_{\nu=1}^2 \frac{\alpha_{\nu}^0}{2} R_{\nu} + \sum_{\nu,\mu=1}^2 \frac{\beta_{\nu\mu}^0}{4} R_{\nu} R_{\mu} + O_5, \quad (3.1)$$

com  $O_5$  indicando termos de ordem superior e

$$R_{\nu} = \xi_{\nu}^2 + \eta_{\nu}^2 \quad (3.2)$$

O movimento é Liapunov Estável se as seguintes condições são satisfeitas (Kovalev & Savchenko, 1975):

i) Os autovalores do sistema linear reduzido, associado à Hamiltoniana  $H$ , são imaginários puros  $\pm i\alpha_1^0$  e  $\pm i\alpha_2^0$ ;

ii) A condição

$$k_1\alpha_1^o + k_2\alpha_2^o \neq 0 \quad (3.3)$$

é válida para todo  $k_1$  e  $k_2$  inteiros satisfazendo a desigualdade

$$|k_1| + |k_2| \leq 4 \quad (3.4)$$

iii) O determinante  $D^o$  deve satisfazer a seguinte desigualdade:

$$D^o = -(\beta_{11}^o\alpha_2^{o2} - 2\beta_{12}^o\alpha_1^o\alpha_2^o + \beta_{22}^o\alpha_1^{o2}) \neq 0 \quad (3.5)$$

em que  $\beta_{\nu\mu}^o$  são os coeficientes de quarta ordem da Hamiltoniana,  $H^o$  dada por (3.1).

Este teorema é útil para investigar a estabilidade de rotações uniformes, para sistemas canônicos, de um corpo rígido com pontos de equilíbrio; que ao final será aplicado para analisar a estabilidade do movimento orbital de satélites artificiais sujeito a perturbações devido ao geopotencial e ao arrasto atmosférico. A demonstração deste teorema é realizada no artigo de Kovalev & Savchenko (1975), sendo que uma aplicação nele apresentada para um caso particular do movimento rotacional de corpos rígidos.

### 3.2 Procedimento para o estudo da estabilidade

Para a realização deste estudo, são necessárias algumas etapas:

#### 1° Etapa: Escrever o sistema não canônico na forma normal.

O teorema de Kovalev & Savchenko pede que se escreva o segundo membro Equação do movimento, em estudo, esteja em uma forma normal. Dessa forma aplicaremos método de Hori para sistemas não canônicos á Equações do movimento dadas por,

$$\begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \ell_i} + P_i = Z_j(L_j, \ell_j), \\ &, (j = 1,2,3) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\frac{d\ell_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L_i} - Q_i = Z_{j+3}(L_j, \ell_j)$$

em que  $L_j$  e  $l_j$  são as variáveis de Delaunay definidas por,

$$\begin{aligned} L_1 = L = \sqrt{\mu a} & & L_2 = G = \sqrt{\mu a(1-e^2)} & & L_3 = H = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i \\ \ell_1 = \ell = M & & \ell_2 = g = \omega & & \ell_3 = h = \Omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

e o potencial terrestre nas variáveis de Delaunay é dado por:

$$\begin{aligned} F = \frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{\mu^2 K_2}{L^6} & \left\{ \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G^2} \right) \left[ \frac{L^3}{G^3} + \left( 3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \cos \ell + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{9}{2} e^2 + \frac{7}{8} e^4 \right) \cos 2\ell + \dots \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Iremos representar a Hamiltoniana da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F &= H_0 + H_1 \\ F &= H_0 + H_{1S} + H_{1P} \end{aligned} \quad (3.9)$$

fazendo  $K_0 = H_0 + H_{1S} + H_{2s}$ , escrevemos a Hamiltoniana da seguinte forma:

$$F = K_0 + H_{1P} \quad (3.10)$$

e as componentes de arrastos  $P_i$  e  $Q_i$  são (Brouwer, 1961):

$$\begin{aligned} P_1 &= -AV \exp(-\alpha r) L \left( \frac{2a}{r} - 1 \right) & Q_1 &= -AV \exp(-\alpha r) \left( 2e \sin E + \frac{2}{e} \frac{L}{G} \operatorname{senf} \right) \\ P_2 &= -AV \exp(-\alpha r) G & Q_2 &= AV \exp(-\alpha r) \left( \frac{2}{e} \operatorname{senf} \right) \\ P_3 &= -AV \exp(-\alpha r) H & Q_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

consideremos:

$$Z_j = Z_j^{(0)} + Z_j^{(1)} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.12)$$

$$Z_{j+3} = Z_{j+3}^{(0)} + Z_{j+3}^{(1)}$$

em que  $Z_j^{(0)}$  e  $Z_{j+3}^{(0)}$  contém todos os termos seculares adotado do geopotencial,  $Z_j^{(1)}$  e

$Z_{j+3}^{(1)}$  contém termos devido ao geopotencial e ao arrasto atmosférico.



Do sistema auxiliar de Hori temos:

$$\frac{dL_j}{d\tau} = \frac{\partial F_0}{\partial(\ell, g, h)} = Z_j^{(0)} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.13)$$

$$\frac{d\ell_j}{d\tau} = -\frac{\partial F_0}{\partial(L, G, H)} = Z_{j+3}^{(0)}$$

em que L, G e H são constantes enquanto  $\ell$ , g e h são funções lineares em  $\tau$ . Temos:

$$\begin{aligned} Z_1^{(0)} &= 0 \\ Z_2^{(0)} &= 0 \\ Z_3^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$Z_4^{(0)} = \frac{\mu^2}{L^3} + 3 \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^4 G^3} \left( -\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) - \frac{3 \mu^6 J_4 a_e^2}{8 L^4 G^3} \left( \frac{3}{8} - \frac{15H^2}{4G^2} + \frac{35H^4}{8G^4} \right) \left( -\frac{15G^2}{2L^2} + \frac{15}{2} \right) \quad (3.15)$$

Considerando  $n_l = Z_4^{(0)}$ ,  $n_g = Z_5^{(0)}$  e  $n_h = Z_6^{(0)}$ , com isso temos:

$$\ell = n_l \tau + \ell_0 \quad (3.16)$$

$$g = n_g \tau + g_0 \quad (3.17)$$

$$h = n_h \tau + h_0 \quad (3.18)$$

em que  $\ell_0$ ,  $g_0$  e  $h_0$  são constantes de integração.

Seja a transformação:  $\ell_j, L_j \rightarrow \ell'_j, L'_j$ , por meio de 6 funções geratrizes

$T_k(\ell'_j, L'_j)(k = 1, \dots, 6; j = 1, 2, 3)$ , em que:

$$T_k(\ell'_j, L'_j) = T_k^{(1)} + T_k^{(2)} + T_k^{(3)} + \dots \quad (3.19)$$

As novas Equações do movimento são:

$$\frac{dL'_j}{dt} = Z_j^*, \quad \frac{d\ell'_j}{dt} = Z_{j+3}^*, \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.20)$$

com as novas funções sendo:

$$Z_j^*(L'_j, \ell'_j) = Z_j^{*(0)} + Z_j^{*(1)} + Z_j^{*(2)} + \dots \quad (3.21)$$

$$Z_{j+3}^*(L'_j, \ell'_j) = Z_{j+3}^{*(0)} + Z_{j+3}^{*(1)} + Z_{j+3}^{*(2)} + \dots,$$

Aplicando o algoritmo do método temos:

$$\frac{dT_j^{(1)}}{d\tau} - \sum_{k=1}^6 \frac{\partial Z_j^{(0)}(\tau)}{\partial \zeta_k} T_k^{(1)} = Z_j^{(1)} - Z_j^{*(1)}, \quad (j = 1, \dots, 6) \quad (3.22)$$

$\zeta_k$  representa o conjunto das novas variáveis ( $L'$ ,  $G'$ ,  $H'$ ,  $l'$ ,  $g'$ ,  $h'$ ). Dessa forma teremos que calcular:

-*Parte secular:*

$$Z_j^{*(1)} = \left\langle Z_j^{(1)} \right\rangle_{\tau} \quad (3.23)$$

e

$$Z_j^{(1)} = \left\langle Z_j^{(1)} + \sum_{k=1}^6 \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(1)} \right\rangle_{\tau}, \quad j = 4, 5, 6 \quad (3.24)$$

-*Parte periódica:*

$$T_j^{(1)} = \int (Z_j^{(1)} - Z_j^{*(1)}) d\tau, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.25)$$

e

$$T_j^{(1)} = \int (Z_j^{(1)} + \sum_{k=1}^6 \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(1)} - Z_j^{*(1)}) d\tau \quad (j = 4, 5, 6) \quad (3.26)$$

Para fazermos esses cálculos consideremos os  $P_i$  e  $Q_i$  desenvolvidos por Brouwer (1961) até a 4ª ordem na excentricidade. Calculando  $Z_j^{*(1)} = \left\langle Z_j^{(1)} \right\rangle_{\tau}$  temos,

$$Z_1^{*(1)} = Z_1^{(1)} = \frac{\partial H_{1s}}{\partial \ell} + P_{1s} \quad (3.27)$$

$$Z_1^{*(1)} = P_{1s}$$

pois  $H_1$  é puramente periódica

$$Z_1^{*(1)} = -A\mu \exp(-\alpha a) \left\{ 1 + \left( \frac{3}{4} + \alpha a + \frac{1}{4} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \left( \frac{21}{64} + \frac{3}{8} \alpha a + \frac{9}{32} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 + \frac{1}{64} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right\} \quad (3.28)$$

$$Z_2^{*(1)} = Z_2^{(1)} = \frac{\partial H_{1s}}{\partial g} + P_{2s} \quad (3.29)$$

$$Z_2^{*(1)} = P_{2s}$$

$$Z_2^{*(1)} = -A\mu \exp(-\alpha a) \frac{G}{L} \left\{ 1 + \left( \frac{3}{4} + \alpha a + \frac{1}{4} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \left( \frac{21}{64} + \frac{3}{8} \alpha a + \frac{9}{32} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 + \frac{1}{64} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right\} \quad (3.30)$$

$$Z_3^{*(1)} = Z_3^{(1)} = \frac{\partial H_{1s}}{\partial h} + P_{3s} \quad (3.31)$$

$$Z_3^{*(1)} = P_{3s}$$

$$Z_3^{*(1)} = -A\mu \exp(-\alpha a) \frac{H}{L} \left\{ 1 + \left( \frac{3}{4} + \alpha a + \frac{1}{4} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \left( \frac{21}{64} + \frac{3}{8} \alpha a + \frac{9}{32} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 + \frac{1}{64} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right\} \quad (3.32)$$

Calculando as funções geratrizes, da Equação (3.22) temos,

$$T_1^{(1)} = \int (Z_1^{(1)} - Z_1^{*(1)}) d\tau \quad (3.33)$$

$$T_1^{(1)} = \int \left( \frac{\partial H_{1p}}{\partial l} + P_1 - P_{1s} \right) d\tau \quad (3.34)$$

Assim,

$$T_1^{(1)} = \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{n_l L^6} \left( -\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) \left( 3e + \frac{27e^3}{8} \right) \cos \ell - \frac{\mu A e^{-\alpha a}}{n_l} \left[ -(3 + \alpha a)e + \left( \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \alpha a + \frac{7}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \right] \text{sen} \ell \quad (3.35)$$

$$T_2^{(1)} = \int (Z_2^{(1)} - Z_2^{*(1)}) d\tau \quad (3.36)$$

$$T_2^{(1)} = -\frac{\mu A e^{-\alpha a}}{n_l} \frac{G}{L} \left[ (1 + \alpha a)e + \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \right] \text{sen} \ell \quad (3.37)$$

$$T_3^{(1)} = \int \left( \frac{\partial H_{1p}}{\partial h} + P_1 - P_{1s} \right) d\tau \quad (3.38)$$

$$T_3^{(1)} = -\frac{\mu A e^{-\alpha a}}{n_l} \frac{H}{L} \left[ (1 + \alpha a)e + \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \right] \text{sen} \ell \quad (3.39)$$

Da Equação (3.24) temos

$$Z_4^{*(1)} = 0, Z_5^{*(1)} = 0, Z_6^{*(1)} = 0 \quad (3.40)$$

Da Equação (3.26), obtemos,

$$T_4^{(1)} = \frac{3\mu^2 k_2}{L^5} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3H^2}{2G^2} \right) \left[ \left( 3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \text{sen} \ell + \left( \frac{9}{4} e^2 + \frac{7}{4} e^4 \right) \text{sen} 2\ell \right] \quad (3.41)$$

$$T_5^{(1)} = \frac{\mu^2 k_2}{L^3} \left[ \frac{3H^2}{G^3} \left( 3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \text{sen} \ell + \frac{1}{2} \left( \frac{9}{2} e^2 + \frac{7}{2} e^4 \right) \text{sen} 2\ell \right] \quad (3.42)$$

$$T_6^{(1)} = \frac{3\mu^2 k_2}{L^3} \frac{H^2}{G^3} \left[ \left( 3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \text{sen} \ell + \left( \frac{9}{4} e^2 + \frac{7}{4} e^4 \right) \text{sen} 2\ell \right] \quad (3.43)$$

## 2° Etapa: Generalizar o teorema de Kovalev & Savchenko

Nesta etapa o teorema proposto será generalizado para forma não canônica, visto que o teorema foi desenvolvido apenas para sistemas canônicos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Boccaletti, D.; Pucacco, G. **Perturbative and geometrical methods. Vol.2**, Berlin: Springer-Verlag, 1998. 425 p.
- Brouwer, D.; Clemence. G.M. **Methods of celestial mechanics**. New York: Academic Press, 1961.
- Chudnenko, A. N. On the stability of uniform rotations of a rigid body around the principal axis. **PMM U.S.S.R.**, v. 44, n. , p. 174-179, July. 1980.
- Deprit, A. Canonical transformations depending on a small parameter. **Celestial Mechanics**, v. 1, n. , p. 12-30, set. 1969.
- Duboshin, G. N. On the stability of regular motions of artificial celestial bodies. **Astronomicheskii Zhurnal**, v. 36, n. 4, p. 723-733, July. 1959.
- Hahn W. **Stability of Motion**. New York: Spriger-Verlag Berlin Heidelberg, July. 1967. 446 p.
- Hori, G. I. Theory of general perturbations for non-canonical system. **Astronomical Society of Japan**, v. 23, n. 4, p. 567-587, april 1971.
- Hori, G. I. theory of general perturbations with unspecified canonical variables. **Astronomical Society of Japan**, v. 18, n. 4, p. 287, July. 1966.
- K. Ogata. **Engenharia de Controle Moderno**, 3º ed., Prentice-Hall do Brasil, Editora Afiliada. 193 – 197.
- Kovalev, A. M.; Savechenko, A., Stability of uniform rotations of a rigid body about a principal axis. **PMM Journal of applied mathematics and mechanics**, v. 39, n. 4, p. 650-660, July. 1975.
- Liapunov, A., M. **Stability motion**. New York: Academic Press Inc., July. 1966. 203 p.
- M. C. Zanardi. Study of the terms of coupling between rotational and translational Motions, **Celestial Mechanics**, v. 39, 1986, p. 147-158.

**3° Etapa: Determinação dos coeficientes do tipo  $\alpha_v^o$  e  $\beta_{v\mu}^o$  que permitam decidir a estabilidade do sistema**

De posse dessa Hamiltoniana escrita na forma normal serão determinados os coeficientes do tipo  $\alpha_v^o$  e  $\beta_{v\mu}^o$  referentes, respectivamente, aos termos de 2ª e 4ª ordem da Hamiltoniana.

**4° Etapa: Aplicação do novo teorema**

E assim foi verificada a estabilidade do sistema associado a Hamiltonina (3.8), através das três condições impostas pelo teorema enunciado no item 3.1 deste capítulo.



## APÊNDICE A

### A.1 Plotar diagrama de fase

```
a = -1; b = 1; c = 1; d = 0;
<<Graphics`Colors`;
xinicial = -10;
xfinal = 10;
yinicial = -10;
yfinal = 10;
xponto = a*x[t] + b*y[t];
yponto = c*x[t] + d*y[t];
tinicial = -10;
tfinal = 10;
Show[GraphicsArray[
{
  ParametricPlot[
    Evaluate[
      Join[
        {x[t], y[t]} /. NDSolve[{x'[t] == xponto, y'[t] == yponto, x[0] == 0, y[0] == #}, {x[t], y[t]},
          {t, tinicial, tfinal}][[1]] & /@ {Sequence@@Range[-5, 0, .9], Sequence@@Range[0, 5, .9]},
        {x[t], y[t]} /. NDSolve[{x'[t] == xponto, y'[t] == yponto, x[0] == 0, y[0] == #}, {x[t], y[t]},
          {t, tinicial, tfinal}][[1]] & /@Range[0, 1, .2]
      ]], {t, tinicial, tfinal}, PlotRange -> {{xinicial, xfinal}, {yinicial, yfinal}},
      PlotStyle -> Blue,
      DisplayFunction -> Identity,
      AxesLabel -> TraditionalForm /@ {x, "y"}
    ]]];
Clear[x, y, sol];
sol = DSolve[{x'[t] == xponto, y'[t] == yponto}, {x[t], y[t]}, t];
Funs = Table[{sol[[1, 1, 2]], sol[[1, 2, 2]]} /. {C[1] -> i, C[2] -> j}, {i, -6, 10, 6}, {j, -6, 10, 6}];
toplot = Flatten[Funs, 1]; Length[toplot];
graphone = ParametricPlot[Evaluate[toplot], {t, tinicial, tfinal},
  PlotRange -> {{xinicial, xfinal}, {yinicial, yfinal}}, PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.006]}},
  AxesLabel -> {"x", "y"}];
<<Graphics`PlotField`;
graphtwo = PlotVectorField[{a*x + b*y, c*x + d*y}, {x, xinicial, yfinal}, {y, yinicial, yfinal}];
Show[graphone, graphtwo];
```