

CAPTURA GRAVITACIONAL TEMPORÁRIA E SUA RELAÇÃO COM A VELOCIDADE RELATIVA ENTRE OS CORPOS

Rosana Ap. N. Araujo¹, Othon C. Winter², Antônio F. B. de A. Prado³

¹ UNESP, Guaratinguetá, Brasil, rosana.nog@ig.com.br

² UNESP, Guaratinguetá, Brasil, ocwinter@feg.unesp.br

³ INPE, São José dos Campos, Brasil, prado@dem.inpe.br

Resumo: Neste trabalho é feito o estudo numérico da captura gravitacional temporária, com o objetivo de mostrar a relação desta com a velocidade relativa entre os corpos. O procedimento adotado é o da simulação numérica do Problema Restrito de Três Corpos, onde é feito um acompanhamento da energia do problema de dois corpos, resultando em uma equação para o cálculo do “Raio de Captura” em função da velocidade relativa e das massas envolvidas.

Palavras-Chaves: 1. Captura gravitacional.

1. INTRODUÇÃO

Podemos encontrar na mecânica celeste diversos problemas que envolvem o fenômeno da captura gravitacional, que por tratar-se de um fenômeno temporário (ver, por exemplo, Hopf 1930) é chamado de captura gravitacional temporária, ou seja, o termo “temporário”, vem sugerir que não se trata de uma condição permanente, que após algum tempo (não importa o quanto), ele acaba escapando).

Uma definição para a captura gravitacional temporária diz que se a energia do problema de dois corpos de uma partícula relativa a um corpo celeste é inicialmente positiva (movimento hiperbólico) e depois passa a ser negativa (movimento elíptico) podemos a considerar que houve uma captura (Yamakawa 1992). Várias outras definições são encontradas, como por exemplo em Heppenheimer (1975) que associa o caso de captura com a passagem da partícula pelo ponto Lagrangiano interior (L_1).

O mecanismo de captura possui aplicações em diversos ramos da mecânica celeste. Um exemplo, é a importante aplicação em técnicas de manobras com veículos espaciais com o propósito de realizar transferências orbitais fazendo uso da interação gravitacional, resultando na redução do consumo de combustível, (Belbruno (1987,1990,1992), Krish (1991), Krish et al. (1992), Miller e Belbruno (1991), Belbruno e Miller (1990,1993), Yamakawa et al. (1992,1993)) e conseqüentemente na diminuição do custo da missão.

A captura gravitacional já foi usada também para justificar a existência dos satélites irregulares nos planetas gigantes (Peale 1999), sendo que futuramente mostrou-se que neste problema o acréscimo de massa de Júpiter faz com

que esta captura se tornasse permanente (satélites) (Vieira Neto, Winter e Tokoyama, 2004).

Na literatura podemos encontrar vários outros problemas que envolvem o fenômeno da captura gravitacional temporária, o que justifica o interesse em um entendimento cada vez maior deste fenômeno.

Com este objetivo, neste trabalho apresentamos um estudo numérico da captura gravitacional temporária, em que nos concentramos em analisar o quanto a variação da velocidade relativa entre os corpos envolvidos, é determinante para a existência de tal mecanismo, e apresentamos uma formulação matemática que permite calcular em função desta velocidade, a distância com a qual corpo será capturado (Raio de Captura).

2. METODOLOGIA

Consideramos um sistema formado por três corpos, sendo que um desses corpos (partícula P) possui massa desprezível, de modo que ela sofre influência dos dois outros corpos mas não os perturba. Consideramos também

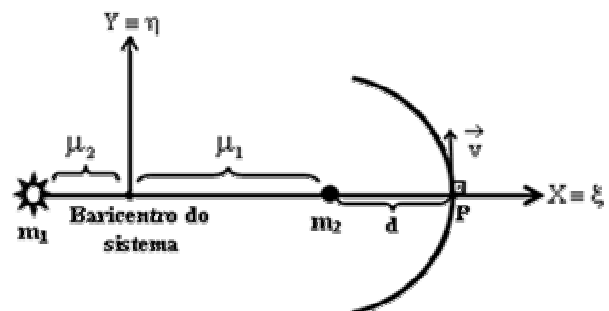


Fig. 1 . Condições Iniciais

que a órbita da Planeta é circular. Trata-se portanto do Problema Circular Restrito de Três Corpos.

O instante inicial ($t=0$) é aquele no qual a partícula, o Sol e planeta estão alinhados. Neste instante os eixos dos sistemas de coordenadas inercial (ξ, η) e girante (X, Y) coincidem e a distância d na qual a partícula passa do planeta é chamado de “parâmetro de aproximação”. A figura a seguir ilustra essa configuração:

Por uma questão prática assumimos que a passagem da partícula se dá após o planeta, como ilustrado na Fig (1), mas o resultado obtido com esta condição é válido para passagens ocorrendo em outros pontos, já que o parâmetro

de aproximação d sempre será muito menor que a distância Sol-Planeta, e, portanto, a força gravitacional Sol-Partícula será praticamente constante.

Para a análise do problema é necessário o cálculo das energias inicial e final da partícula em relação ao Sol e em relação ao planeta que é a energia do problema de dois corpos dada por:

$$E = \frac{1}{2} v_{ps}^2 - \frac{\mu_{sol}}{r_{sol}} \quad (1)$$

para o problema Sol-Partícula, onde:

v_{ps} : é a velocidade da partícula em relação ao Sol, no sistema inercial.

r_{sol} : é a distância da partícula ao Sol.

Analogamente, para o problema Planeta-Partícula:

$$E = \frac{1}{2} v_{pp}^2 - \frac{\mu_{plan}}{r_{plan}} \quad (2)$$

onde:

v_{pp} : é a velocidade da partícula em relação ao planeta no sistema inercial.

r_{plan} : é a distância da partícula ao planeta.

As velocidades da partícula em relação ao Sol (v_{ps}) e em relação ao planeta (v_{pp}) são:

$$v_{pp} = \sqrt{(\xi - \xi_{plan})^2 + (\eta - \eta_{plan})^2} \quad (2)$$

$$v_{ps} = \sqrt{(\xi - \xi_{sol})^2 + (\eta - \eta_{sol})^2} \quad (3)$$

Sendo (ξ, η) , $(\xi_{plan}, \eta_{plan})$, (ξ_{sol}, η_{sol}) , as componentes das velocidades da partícula, do planeta e do Sol, respectivamente, no sistema inercial.

O método consiste em:

- Fixar a razão de massa
- Fixar a velocidade relativa (Planeta-Partícula)
- Variar o parâmetro de aproximação (d)
- Para cada valor de d analisar, graficamente através da variação das energias do problema de dois corpos, se houve captura. O valor de d para o qual não há mais captura é considerado o Raio de Captura para partículas com a velocidade fixada anteriormente.

Tal condição pode ser melhor entendida com os gráficos a seguir. Neles a velocidade relativa fixada foi $v_{pp}=0,0040$, e a razão de massa igual a $1,0 \times 10^{-7}$. O gráfico mostrado na figura 1 foi feito para o parâmetro de aproximação $d=0,00308$

Observa-se na figura 2 que a partícula está orbitando o planeta, ou seja, está temporariamente capturada.

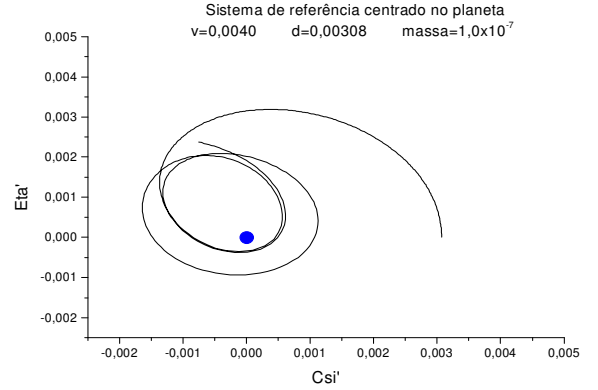


Fig. 2. Trajetória da partícula em um sistema planetocêntrico que mostra que a partícula foi capturada. O ponto azul representa o planeta.

O próximo passo, de acordo com o método adotado e explicado anteriormente, é manter a mesma velocidade, mas agora a partícula estará um pouco mais distante do que no caso anterior. O gráfico a seguir foi feito para $d=0,00309$.

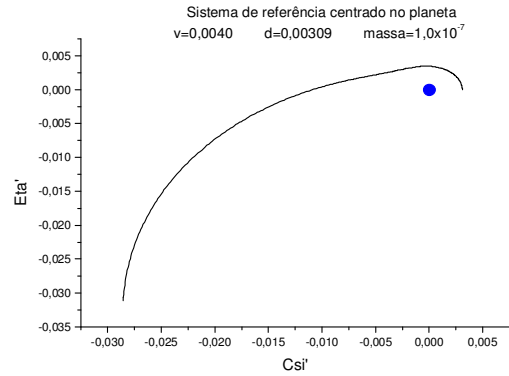


Fig. 3. Trajetória da partícula em um sistema planetocêntrico que mostra que a partícula não foi capturada. O ponto azul representa o planeta

Os gráficos da energia do problema de dois corpos da partícula em relação ao planeta reforçam este resultado:

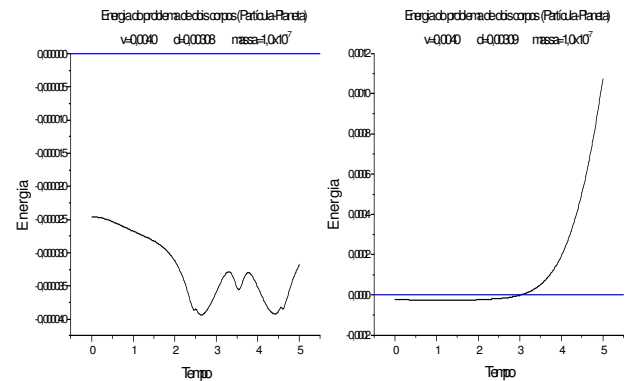


Fig. 4. Gráficos da variação da energia do problema de dois corpos, feitos para a velocidade relativa $V_{pp}=0,0040$ e para dois valores do parâmetro de aproximação: $d=0,00308$ e $d=0,00309$.

O gráfico da esquerda corresponde à partícula cuja trajetória é mostrada na figura 2. A linha azul localizada na energia igual a zero, mostra que durante todo o tempo de integração a energia da partícula em relação ao planeta permaneceu negativa, o que significa que ela desenvolveu seu movimento em uma órbita fechada ao redor do planeta, confirmando portanto que ela foi capturada.

O gráfico da direita corresponde à partícula da figura 3. Com a energia do problema de dois corpos predominantemente positiva, tem-se a confirmação de que a partícula realizou uma passagem (órbita aberta), não tendo sido portanto capturada.

Deste exemplo conclui-se que em um sistema com razão de massa igual a $1,0 \times 10^{-7}$, uma partícula com $v_{pp}=0,0040$ será capturada se passar a uma distância $d=0,00308$ deste, e não será capturada se essa distância for $d=0,00309$. Esse valor de d passa a ser considerado o Raio de Captura ($R_c=0,00309$) para a partícula com essa velocidade.

O Raio de Captura é escrito em termos de Raios de Hill, o qual fornece a esfera de influência dos corpos celeste. Essa unidade mostrou-se adequada por relacionar distâncias com as massas, se aplicando muito bem ao problema aqui estudado.

Esse procedimento descrito em detalhes pode ser aplicado para um número indeterminado de condições iniciais (diferentes massas, velocidades relativas e d). Neste trabalho adotamos dois limitantes, a velocidade e o valor de d .

Os resultados que serão apresentados a seguir são válidos para velocidades relativas sempre positivas, e para d maiores que 0,5 Raio da Hill. Tal limitação se justifica por estarmos interessados em estudar apenas órbitas prógradas, e, além disso, o limite adotado para d é suficiente para garantir sua aplicabilidade.

3. RESULTADOS

Foram feitas simulações para doze razões de massa (10^{-1} a 10^{-12}), valores estes que abrangem as razões de massa encontradas no Sistema Solar, como no sistema Plutão-Charonte em que a razão de massa é da ordem de 10^{-1} , passando pelas razões de massa Sol-Planetas, e indo até às razões de massa extremamente pequenas, da ordem de 10^{-12} , como as que podem ser encontradas no sistema formado entre Saturno e seus satélites menores.

Para cada uma dessas razões de massa, obteve-se uma curva como a exemplificada na figura 5, que possibilitou através de um ajuste linear obter o Raio de Captura em função velocidade relativa (eq. 4)

$$R_c = A + B(V_{pp}) \quad (4)$$

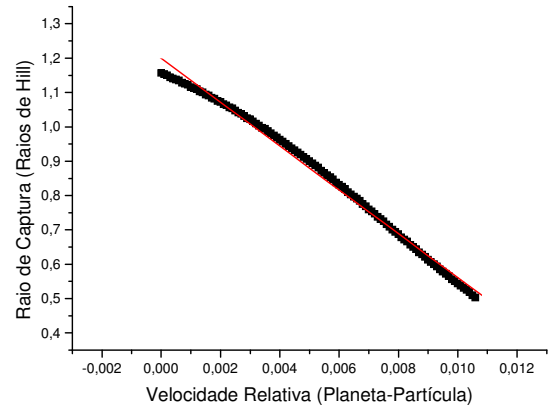


Fig. 5. Raio de captura em função da velocidade relativa (Planeta-Partícula), feito para massa= $1,0 \times 10^{-7}$

As curvas para todas as razões de massa são mostradas nas figuras 6 e 7.

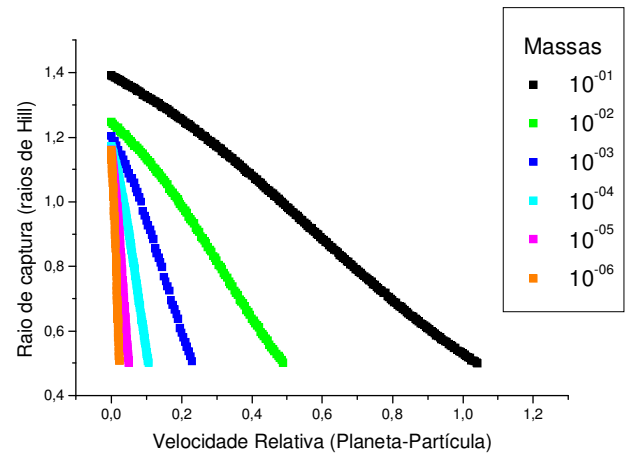


Fig. 6. Raio de Captura em função da velocidade relativa (Planeta-Partícula) feito para massas de $1,0.10^{-1}$ a $1,0.10^{-6}$

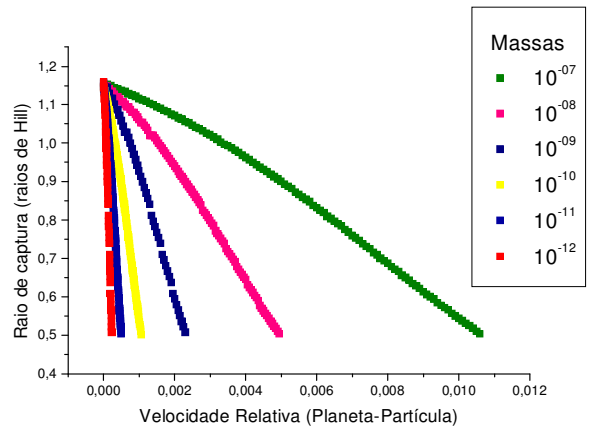


Fig. 7. Raio de Captura em função da velocidade relativa (Planeta-Partícula) feito para massas de $1,0 \times 10^{-7}$ a $1,0 \times 10^{-12}$

Cada uma dessas curvas fornece uma equação como a equação 4, sendo os seus respectivos coeficientes dados na tabela abaixo.

Tabela 1. Coeficientes da equação (4) para as diferentes razões de massa

Razão de Massa	A	B
$1,0 \times 10^{-1}$	1,424	-0,897
$1,0 \times 10^{-2}$	1,282	-1,573
$1,0 \times 10^{-3}$	1,232	-3,099
$1,0 \times 10^{-4}$	1,216	-6,572
$1,0 \times 10^{-5}$	1,209	-14,042
$1,0 \times 10^{-6}$	1,208	-29,847
$1,0 \times 10^{-7}$	1,199	-63,688
$1,0 \times 10^{-8}$	1,195	-136,532
$1,0 \times 10^{-9}$	1,201	-295,063
$1,0 \times 10^{-10}$	1,190	-630,978
$1,0 \times 10^{-11}$	1,195	-1363,655
$1,0 \times 10^{-12}$	1,201	-2942,123

Com esse resultado é possível obter uma única equação, que permite calcular o Raio de Captura em função não só da velocidade relativa, como também da razão de massa.

4. CONCLUSÕES

A realização deste trabalho permitiu a conclusão de que a velocidade relativa entre os corpos é um fator importante quando tratamos de captura gravitacional temporária.

Mostramos como este fenômeno se relaciona com a velocidade, e obtivemos equações para o cálculo do chamado Raio de Captura em função desta velocidade para diferentes razões de massa.

REFERÊNCIAS

[1] Belbruno, E.A., Lunar capture orbits, a method of constructing Earth-Moon trajectories and the lunar gas mission, in *Proceedings of the AIAA/DGLR/JSASS, 19th International Electric Propulsion Conference*, Vol. AIAA-87-1054. Colorado Springs, p.10, 1987

[2] Belbruno, E.A, Examples of the nonlinear dynamics of ballistic capture and escape in the Earth-Moon system, in *Proceedings of the AIAA Astrodynamics Conference*, Portland, Vol. AIAA-90-2896, 1990

[3] Belbruno, E.A, Ballistic Lunar Capture Transfer Using the Fuzzy Boundary and Solar Perturbations: a Survey, in *International Congress of SETI Sail and Astrodynamics*. Turin, Italy, 1992

[4] Belbruno, E.A and J.K.Miller, A Ballistic Lunar Capture for the Lunar Observer, Technical report, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, CA,1990

[5] Belbruno, E.A and J.K.Miller, Sun-Perturbed Earth-to-Moon Transfers With Ballistic Capture, *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **16**(4), 770-775, 1993.

[6] Heppenheimer, T.A. 1975, *Icarus*, 24, 172

[7] Hopf, E., Zwei satze uber den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegungen dynamischer Systeme, *Mathematische Annalen* 103, 710-719, 1930.

[8] Krish, V., *An Investigation Into Critical Aspects of a New Form of Low Energy Lunar Transfer, the Belbruno-Miller trajectories*, Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1991

[9] Krish, V.,E.A. Belbruno, and W.M.Hollister, An investigation into critical aspects of a new form of low energy lunar transfer, the Belbruno-Miller trajectories, in *AIAA/AAS Astrodynamics Conference*. Hilton Head Island, pp. 439-44, 1992

[10] Miller, J.K. and E.A.Belbruno, A method for the construction of a lunar transfer trajectory using ballistic capture, in *Proceedings of AAS/AIAA 1st Space Flight Mechanics Meeting*, Vol. AAS-91-100. San Diego, Univelt, 1991

[11] Peale, S.J. 1999, *ARA&A*, 37, 533

[12] Winter, O.C. and E.Vieira Neto, The effect of Jupiter's mass growth on satellite capture-Retrograde case, *Astronomy and Astrophysics* **414**, 727-734, 2004

[13] Yamakawa, H. 1992, PhD Thesis, University of Tokyo.