



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-12539-TDI/1001**

**TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS  
ENVOLVENDO ÓRBITAS DO TIPO HALO**

Gislaine de Felipe

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia  
Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando  
Bertachini de Almeida Prado e Cristian Beaugé, aprovada em 19 de março de 2004.

521.3

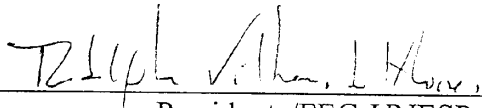
FELIPE, G.

Transferências orbitais envolvendo órbitas do tipo halo /  
G. Felipe. – São José dos Campos: INPE, 2004.  
222p. – ( INPE-12539-TDI/1001 ).

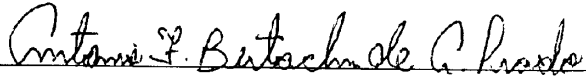
1.Transferências de órbitas. 2.Órbita de Rendezvous.  
3.Mecânica orbital. 4.Manobra orbital. 5.Problemas de três  
corpos. I.Título.

Aprovado(a) pela Banca Examinadora em cumprimento a requisito exigido para a obtenção do Título de **Doutor(a) em Engenharia e Tecnologia Espacial/Mecânica Espacial e Controle.**

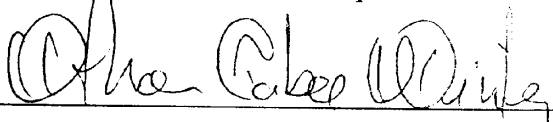
Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

  
Presidente/FEG-UNESP


Dr. Antonio Fernando Bertachini de A. Prado

  
Orientador/INPE, SJCampos-SP


Dr. Othon Cabo Winter

  
Membro da Banca/INPE, SJCampos-SP

Dra. Ana Paula Marins Chiaradia

  
Membro da Banca/Convidada - UNITAU

Dra. Maria Cecília F.P.S. Zanardi

  
Membro da Banca/Convidada - FEG-UNESP

**Candidata: Gislaine de Felipe**

São José dos Campos, 19 de março de 2004.



Nunca desencoraje ninguém que continuamente faz progresso, não importa quão devagar.  
(Platão)

Um jovem que pensa poder orientar-se sem auxílio de gente experiente é como um cego  
guiado por outro cego.  
(Anônimo)

Nem tudo o que dá certo é certo.  
(David Capistrano)

As idéias geniais são aquelas que nos espantamos de não ter tido antes.  
(Noel Claraso)

Tentar e falhar é, pelo menos, aprender. Não chegar a tentar é sofrer a inestimável perda do  
que poderia ter sido.  
(Geraldo Eustáquio)

Experiência não é o que acontece com um homem; é o que um homem faz com o que lhe  
acontece.  
(Aldous Huxley)

Nossas dúvidas são traidoras e nos fazem perder o bem que podemos conquistar, se não  
fosse o medo de tentar.  
(William Shakespeare)

Quando você tem que fazer uma escolha e você não a faz, isto já é uma escolha.  
(Anônimo)



À Felicia A. J. Velludo, uma avó maravilhosa e companheira em todos os momentos,  
dedico





## **AGRADECIMENTOS**

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) que possibilitou a realização deste trabalho, através da Divisão de Mecânica Espacial e Controle.

À FAPESP pela confiança depositada financiando esta pesquisa.

Aos membros da Banca Examinadora pelas importantes sugestões nas apresentações preliminar e final desta Tese, em especial a Cristian Beaugé.

Ao Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado que além de orientar, continuou despertando minha vontade em seguir os caminhos da pesquisa ajudando sempre com dedicação e amizade, para que se tornasse possível este e muitos outros trabalhos, mesmo em momentos difíceis.

A meus pais, que sempre me apoiaram e compreenderam, nunca deixando que eu desistisse ou desanimasse mediante as dificuldades enfrentadas.

Aos amigos e professores que, em todas as fases da minha vida, compartilharam de minhas alegrias e tristezas, cada um com sua particular ajuda, contribuindo direta ou indiretamente para a minha formação e confecção dos trabalhos.

À Família Velludo que sempre me deu incentivo em todos os momentos deste trabalho.

Ao Leonildo Sales do Santos pela sincera amizade e força mesmo estando distante fisicamente.

A todos que, de alguma forma duvidaram que este trabalho pudesse se realizar, pois, sem saber, me incentivavam cada vez mais.



## RESUMO

Nas atividades espaciais, é de grande importância o estudo das trajetórias que os veículos espaciais devem seguir para completar uma missão. No presente trabalho, estudam-se as manobras orbitais envolvendo órbitas Halo para vários sistemas de primários. Para realizar este estudo utiliza-se o método de Lindstedt-Poincaré para a determinação das órbitas e o método de Lambert para as transferências envolvidas, tanto para as transferências com tempo livre como para as manobras de rendez-vous. Para exemplificar as técnicas desenvolvidas uma missão completa no sistema Terra-Lua envolvendo o problema restrito de três corpos é calculada em detalhes. Ainda estudam-se neste trabalho as mesmas manobras para o problema restrito bi-circular de quatro corpos. A seguir, um modelo propulsado de *swing-by* é desenvolvido e a sua eficiência em transferir um veículo entre uma órbita de estacionamento em torno da Terra até uma órbita Halo no sistema Terra-Sol utilizando um *swing-by* com a Lua é medida.



## **TRANSFERS INVOLVING ORBITS OF TYPE HALO**

### **ABSTRACT**

In space activities, it is of great importance the study of trajectories that the space vehicles should follow to complete a mission. In the present work, maneuvers involving Halo orbits for several systems of primary are studied. To accomplish this study the method of Lindstedt-Poincaré is used for the determination of the orbits and the method of Lambert is used for the transfers involved in both cases for the transfers with free time for the rendez-vous maneuvers. To exemplify the techniques developed here a complete mission in the Earth-Moon system involving the restricted three bodies problem is calculated in details. It is still studied in this work the same maneuvers for the restricted bi-circular problem of four bodies. To proceed, a propelled model for the swing-by is studied and its efficiency in transferring a spacecraft from a parking orbit around the Earth to a Halo orbit in the Earth-Sun system using a swing-by with the Moon is measured.



## SUMÁRIO

	<u>Pág</u>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	
<b>LISTA DE TABELAS</b>	
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	
<b>CAPÍTULO 1 – APRESENTAÇÃO</b> .....	29
1.1 – Introdução.....	29
1.2 - Objetivos do Trabalho.....	30
1.3 – Organização do Trabalho.....	33
<b>CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	35
<b>CAPÍTULO 3 - O PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS</b> .....	43
3.1 - O Problema Restrito de Três Corpos.....	43
3.2 - Equações de Movimento.....	43
3.3 - Os Pontos Lagrangianos.....	48
<b>CAPÍTULO 4 - DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS PERIÓDICAS AO REDOR DOS PONTOS LAGRANGIANOS</b> .....	51
<b>CAPÍTULO 5 - DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS DO TIPO HALO</b> .....	59
5.1 – Equações de Movimento.....	59
5.2 - O Método de Lindstedt-Poincaré.....	61
5.3 - Resultados da Determinação de Órbitas Halo.....	63
5.4 - Comparação com Simulações Numéricas.....	66
5.5 - Variação do Parâmetro de massa nas famílias de órbitas Halo.....	70

5.6 – Conclusões.....	75
<b>CAPÍTULO 6 - MANOBRAS ORBITAIS ENVOLVENDO ÓRBITAS HALO.....</b>	<b>77</b>
6.1 – Introdução.....	77
6.2 - Transferência de Hohmann.....	78
6.2.1 - Velocidade no Apogeu e Perigeu da Órbita.....	80
6.2.2 – Resultados para a transferência de Hohmann.....	82
6.3 - O Problema de Lambert.....	83
6.4 – Transferências entre órbitas do tipo Halo.....	86
6.5 – Manobra a partir da Terra até uma órbita tipo Halo no sistema Terra-Sol.....	101
6.6 – Manobra a partir da Lua até uma órbita tipo Halo.....	104
6.7 – Conclusões.....	106
<b>CAPÍTULO 7 - MANOBRAS ORBITAIS DE RENDEZVOUS ENVOLVENDO ÓRBITAS DO TIPO HALO.....</b>	<b>107</b>
7.1 – Introdução.....	107
7.2 – O método de rendez-vous.....	108
7.3 – Resultados.....	110
7.4 – Conclusões.....	112
<b>CAPÍTULO 8 - APLICAÇÕES DE MANOBRAS ORBITAIS - Missão completa no sistema Terra-Lua.....</b>	<b>113</b>
8.1 - Introdução.....	113
8.2 – A missão completa Terra-Halo-Halo-Terra.....	114
8.3 – Resultados para a dinâmica de três corpos.....	117
8.4 – Hipóteses para a missão.....	123



8.5 – Conclusões.....	129
<b>CAPÍTULO 9 - O PROBLEMA RESTRITO DE QUATRO CORPOS.....</b>	<b>131</b>
9.1 – Introdução.....	131
9.2 - Modelagem Matemática.....	132
9.3 – Transferências entre as órbitas Halo do sistema Sol-Terra.....	136
9.4 – Rendez-vous entre as órbitas Halo do sistema Sol-Terra.....	142
9.5 – Transferências entre a Terra e as órbitas Halo e entre as órbitas Halo do sistema Terra-Lua.....	145
9.6 - Captura Gravitacional.....	148
9.6.1 - Resultados para Captura gravitacional.....	150
9.7 – Conclusões.....	152
<b>CAPÍTULO 10 - A MANOBRA ASSISTIDA POR GRAVIDADE PROPULSADA.....</b>	<b>155</b>
10.1 - Descrição matemática da manobra gravitacionalmente assistida em duas dimensões para manobra swing-by padrão.....	156
10.2 - A manobra swing-by propulsada.....	162
10.3 – Resultados para o modelo de dois corpos.....	166
10.4 – Swing-by propulsado em três dimensões.....	175
10.5 – Equações analíticas do swing-by propulsado em três dimensões.....	176
10.6 – Resultados para o swing-by propulsado.....	183
10.7 – Expansões para o swing-by propulsado.....	196
10.8 - Estimativa de economia de consumo de combustível devido ao swing-by.....	201
10.9 – Conclusões .....	205

<b>CAPÍTULO 11 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES FINAIS</b> .....	207
11.1 – Conclusões.....	207
11.2 – Sugestões para extensão deste trabalho.....	212
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	213

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
3.1 - Sistema de coordenadas para o problema restrito-circular-plano de três corpos	45
3.2 – Localização dos pontos Lagrangianos.....	49
4.1 – Sistema de referência para a determinação de órbitas em torno de $L_2$ .....	51
4.2 – Evolução de $x(t)$ com o tempo.....	55
4.3 – Trajetórias para condições iniciais que eliminam os termos exponenciais.....	56
4.4 – Evolução de frequência do movimento plano e fora do plano em função de $\beta$	57
5.1 - Órbitas Halo no sistema Terra-Lua em torno de $L_1$ e $L_2$ (3-D).....	64
5.2 – Órbitas Halo no sistema Terra-Sol em torno de $L_1$ e $L_2$ (3-D).....	65
5.3 – Frequência das órbitas Halo em função de $\beta$ para o sistema Terra-Lua e Sol– Terra em $L_1$ .....	65
5.4 - Amplitude na direção $x$ ( $\alpha$ ) da órbita Halo como uma função de $\beta$ para o sistema Terra-Lua (esquerda) e sistema Sol-Terra (direita) em $L_1$ .....	66
5.5 - Diferença entre as duas órbitas (analítica e numérica) como função do tempo.	67
5.6 - Trajetórias analíticas e numéricas para $\beta = 0,01; 0,08, 0,16; 0,32; 0,64; 0,90...$	70
5.7 – Visão tridimensional para órbitas Halo no sistema Sol-Júpiter em torno de $L_1$ e $L_2$ .....	72
5.8 – Visão tridimensional para órbitas Halo no sistema Sol-Saturno em torno de $L_1$ e $L_2$ .....	73
5.9 – Famílias de órbitas halo nos sistemas Sol-Saturno e Sol-Júpiter em torno de $L_1$ e $L_2$ .....	73

5.10 – Órbitas Halo em torno de $L_1$ para diferentes sistemas.....	74
5.11 - Órbitas Halo em torno de $L_2$ para diferentes sistemas.....	75
6.1- Esquema da Transferência de Hohmann.....	79
6.2 - Transferência entre órbitas concêntricas, coplanares e circulares.....	81
6.3 –Transferência de Hohmann no sistema Terra-Lua.....	82
6.4 - Geometria do “Problema de <i>Lambert</i> com Mínimo Delta-V” .....	84
6.5 – Transferência entre uma órbita de estacionamento em torno da Terra até uma órbita Halo.....	85
6.6 - Órbitas Halo com $\beta = 0,008$ e $\beta = 0,01$ , utilizadas para uma transferência orbital em torno de $L_1$ .....	87
6.7 - Órbitas Halo com $\beta = 0,008$ e $\beta = 0,20$ , utilizadas para uma transferência orbital em torno de $L_1$ .....	88
6.8- Órbitas Halo com $\beta = 0,008$ e $\beta = 0,01$ , utilizadas para uma transferência orbital em torno de $L_2$ .....	88
6.9 - Órbitas Halo com $\beta = 0,008$ e $\beta = 0,20$ , utilizadas para uma transferência orbital em torno de $L_2$ .....	89
6.10 – Distância vs magnitude dos pontos lagrangianos.....	91
6.11 – Esquema da manobra de transferência da Terra para órbita Halo.....	103
8.1 - Geometria do problema.....	116
8.2 - Órbitas Halo que mostram os pontos utilizados para as transferências.....	118
9.1 – Geometria do problema restrito de quatro corpos.....	133
9.2 – Trajetórias com $C3 = 0,0$ .....	151
9.3 – Trajetórias com $C3 = -0,1$ .....	151

9.4 – Trajetórias com $C3 = -0,2$ .....	152
10.1 - A manobra <i>Swing-by</i> e algumas de suas variáveis.....	157
10.2 - Soma de vetores velocidade.....	159
10.3 - Vetores velocidade.....	160
10.4 – A Geometria da manobra swing-by propulsada.....	163
10.5 – Soma de vetores velocidade.....	165
10.6 – Resultados para o sistema Sol-Júpiter para $\psi = 270^\circ$ .....	168
10.7 – Resultados para o sistema Sol-Júpiter para $\psi = 90^\circ$ .....	169
10.8 – Resultados para o sistema Sol-Saturno para $\psi = 270^\circ$ .....	170
10.9 – Resultados para o sistema Sol-Saturno para $\psi = 90^\circ$ .....	171
10.10 - Eficiência para o sistema Sol- Saturno.....	173
10.11 - Eficiência para o sistema Sol- Júpiter.....	174
10.12 – O swing-by propulsado em três dimensões.....	176
10.13 – Resultados das simulações para o caso plano ( $\beta = \gamma = 0^\circ$ ).....	192
10.14 – Resultados das simulações.....	194
10.15 – Diferenças entre o swing-by propulsado e as expansões de primeira ordem.	200
10.16 – Diferenças entre o swing-by propulsado e as expansões de segunda ordem.	201
10.17 – Esquema da transferência com a manobra swing-by.....	202
10.18 – Variação da velocidade no impulso aplicado utilizando o swing-by.....	204
10.19 – Variação da velocidade total com o uso do swing-by.....	204



## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
5.1 - Condições iniciais para a determinação numérica das órbitas Halo.....	68
5.2 – Sistemas e seus parâmetros.....	71
6.1 - Posição e velocidade, no sistema girante, para os pontos das órbitas Halo em L <sub>1</sub> .....	90
6.2 - Posição e velocidade, no sistema girante, para os pontos das órbitas Halo em L <sub>2</sub> .....	90
6.3 - Distância dos pontos lagrangianos L <sub>1</sub> e L <sub>2</sub> magnitude da velocidade.....	91
6.4 - Transferências de mínimo consumo em torno de L <sub>1</sub> .....	93
6.5 - Transferências de mínimo consumo em torno de L <sub>2</sub> .....	97
6.6 – Transferências entre a Terra e as órbitas Halo.....	104
6.7 – Transferências entre a Lua e as órbitas Halo.....	105
7.1- Rendez-vous de mínimo consumo em torno de L <sub>1</sub> .....	110
8.1 - Posição e velocidade, no sistema girante, para os quatro pontos das órbitas Halo.....	119
8.2 – Transferências entre a Terra e as órbitas Halo no sistema Terra-Lua.....	120
8.3 – Transferências entre as diferentes órbitas Halo no sistema Terra-Lua.....	121
8.4 – Transferências entre as órbitas Halo e a Lua no sistema Terra-Lua.....	122
8.5 – Rendez-vous da Lua a Halo no sistema Terra-Lua.....	122
8.6 – Rendez-vous entre Halos no sistema Terra-Lua.....	123
9.1 - Transferências de mínimo consumo em torno de L <sub>1</sub> com modelagem de quatro corpos para a transferência.....	137

9.2 – Comparação entre as dinâmicas para a transferência entre órbitas Halo.....	139
9.3 – Rendez-vous de mínimo consumo em torno de $L_1$ .....	141
9.4 – Comparação entre as dinâmicas utilizando a técnica de rendez-vous.....	144
9.5 - Transferências entre a Terra e órbitas Halo para a dinâmica de quatro corpos com $\alpha = -110^\circ$ .....	146
9.6 – Comparação entre as dinâmicas para transferência da Terra para Halos.....	147
9.7 - Transferências entre órbitas Halo para a dinâmica de quatro corpos com $\alpha =$ $110^\circ$ .....	147
9.8 – Comparação entre as dinâmicas para transferência entre Halos no sistema Terra-Lua.....	148
10.1 - Máximos valores da variação de energia.....	195



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Latinos

$C$	- Momento angular
$C^-$	- Momento angular antes do encontro
$C^+$	- Momento angular depois do encontro
$C_z$	- Componente Z do momento angular
$e$	- Excentricidade
$E$	- Energia
$E^-$	- Energia antes do encontro
$E^+$	- Energia depois do encontro
$G$	- constante gravitacional
$i$	- Inclinação da órbita
$J$	- Constante Jacobiana
$m_1$	- Massa real do corpo primário
$m_2$	- Massa real do corpo secundário
$m_3$	- Massa real do terceiro corpo
$M_1$	- Corpo primário
$M_2$	- Corpo secundário
$M_3$	- Corpo terciário
$n$	- Velocidade angular dos primarios
$O_0$	- Órbita inicial
$O_1$	- Órbita intermediária
$O_2$	- Órbita final
$P$	- Ponto de máxima aproximação
$P_1$ e $P_2$	- Pontos da órbita de transferência
$\vec{r}$	- Raio-vetor
$r_1$	- Distância do veículo espacial de $M_1$
$r_2$	- Distância do veículo espacial de $M_2$
$r_3$	- Distância do veículo espacial de $M_2$

$R$	- Raio
$R_a$	- Raio do apogeu
$R_c$	- Raio da órbita circular
$R_{c1}$	- Raio da órbita do veículo alvo
$R_{c2}$	- Raio da órbita do veículo interceptador
$R_{ct}$	- Raio da órbita circular de transferência
$R_p$	- Raio do perigeu
$t$	- Tempo
$t_i$	- Órbita intermediária
$T$	- Tempo da passagem pelo perigeu
$\vec{v}$	- Vetor velocidade
$V_a$	- Velocidade no apogeu
$V_p$	- Velocidade no perigeu
$V_{xi}, V_{yi}, V_{zi}$	- Velocidade inicial do veículo espacial
$\vec{V}_2$	- Velocidade de $M_2$ relativa a $M_1$
$\vec{V}_i, \vec{V}_o$	- Vetores velocidade do veículo espacial relativas a $M_1$ antes e depois do encontro;
$\vec{V}_\infty^-, \vec{V}_\infty^+$	- Vetores velocidade do veículo espacial relativas a $M_2$ antes e depois do encontro;
$x_1, y_1$	- Posição de $M_1$
$x_2, y_2$	- Posição de $M_2$
$X_i, Y_i, Z_i$	- Posição inicial do veículo espacial

### **Gregos**

$\alpha$	- Ângulo entre a linha de projeção do perigeu no plano x-y e a linha que conecta os dois primários
$\beta$	- Ângulo fora do plano da posição do periapse
$\beta_c$	- Ângulo que o veículo viaja entre os dois primeiros impulsos

$\gamma$	- Ângulo entre a velocidade no perigeu e a interseção entre o plano horizontal que passa pelo perigeu e plano perpendicular a $R_p$ que contém $V_p$
$\delta$	- Metade do ângulo de curvatura (o ângulo entre $\vec{V}_\infty^-$ e $\vec{V}_\infty^+$ )
$\Delta\alpha$	- Ângulo entre os planos orbitais
$\Delta C$	- Variação em momento angular
$\Delta E$	- Variação em energia
$\Delta t$	- Variação de tempo para a transferência
$\Delta V$	- Variação de velocidade obtida através do uso de um propulsor
$\Delta V_D$	- Diferença entre a variação de velocidade bi-impulsiva e tri-impulsiva
$\Delta V_{bi}$	- Variação da velocidade na transferência bi-impulsiva
$\Delta V_{tri}$	- Variação da velocidade na transferência tri-impulsiva
$\theta$	- Anomalia verdadeira
$\lambda$	- Ângulo entre os vetores $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$
$\lambda_f$	- Ângulo entre os vetores $\vec{V}_0$ e $\vec{V}_2$
$\mu$	- Constante gravitacional (398600,64 km <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> para a Terra)
$\sigma$	- Ângulo de transferência da manobra bi-impulsiva ou tri-impulsiva
$\Psi$	- Ângulo entre a linha periapse e a linha $M_1 - M_2$ em uma manobra plana
$\phi$	- Direção do impulso aplicado
$\Omega$	- Potencial
$\omega$	- Frequência do movimento linear no plano
$\omega_a$	- Velocidade angular do primário
$\nu$	- Frequência do movimento fora do plano

### Índices inferiores

a	- Apogeu
c	- Circular
p	- Perigeu
1, i	- Inicial
2, f	- Final



## CAPÍTULO 1

### APRESENTAÇÃO

#### 1.1- Introdução

A presente tese visa apresentar uma série de estudos relativos à determinação de órbitas Halo (definidas no contexto do problema restrito de três corpos), sua extensão a problemas físicos mais realistas e, fundamentalmente, sua aplicação a problemas concretos da dinâmica espacial. Dentre estas aplicações, estudaremos problemas de transferências orbitais envolvendo este tipo de soluções, e sua importância no projeto de missões espaciais de baixo custo.

As órbitas Halo são soluções exatas que existem no problema restrito circular de três corpos. Este modelo físico, embora simples, é bastante estudado na literatura e possui uma grande variedade de aplicações práticas. Também serve como uma primeira aproximação a sistemas físicos mais realistas, cuja complexidade muitas vezes dificulta sua análise.

Dentro das soluções possíveis no problema restrito de três corpos, as órbitas Halo têm grande importância teórica e prática. Tratam-se de órbitas periódicas tri-dimensionais em torno de algum dos pontos colineares Lagrangianos. Sendo assim, esta classe de órbita possui a característica de estar centrada em torno de um ponto onde não existe um corpo com massa.

Uma aplicação importante é a economia de combustível gerada por uma missão lunar que utiliza a órbita Halo para manter equipamentos necessários na transferência entre a Terra e a Lua, mas que não são necessários em órbita lunar. Este equipamento não teria que ser colocado e retirado da órbita lunar, o que geraria uma economia de combustível. Porém, para essa estratégia obter o efeito desejado, é preciso resolver o problema de transferência entre a Terra e a órbita Halo e entre a órbita Halo e a Lua de maneira a

minimizar o combustível com o tempo final livre de restrições. Sendo assim, a missão completa incluiria as seguintes fases:

- 1) lançamento do veículo espacial, a partir de uma órbita de estacionamento em torno da Terra a 7000 km do centro da Terra até uma órbita do tipo Halo em torno do ponto Lagrangiano;
- 2) lançamento de um sub-veículo espacial que contenha os equipamentos que serão utilizados na Lua até uma órbita lunar;
- 3) retorno da órbita lunar para a órbita Halo, após a realização da missão (sendo assim a técnica de rendez-vous também é estudada e incluída na missão);
- 4) retorno da órbita Halo até uma órbita de estacionamento em torno da Terra. Este trabalho pretende realizar esta missão, mapeando os valores dessa manobra, envolvendo três órbitas Halo de uma mesma família.

Como foi mencionado no início, as órbitas Halo são soluções exatas do problema de três corpos, mas nada garante sua existência ou mesmo utilidade em sistemas físicos mais realistas. Para analisar este ponto, outro objetivo da presente tese é trabalhar com um modelo mais geral chamado de “problema restrito bi-circular de quatro corpos”, e comparar a dinâmica deste sistema com os resultados anteriores. O modelo com quatro corpos não só é mais realista, mas também oferece a possibilidade de uso deste corpo extra durante a manobra para gerar uma economia de combustível. Como de exemplo, é possível realizar um swing-by na Lua para atingir uma órbita Halo no sistema Terra-Sol.

## **1.2 - Objetivos Particulares do Trabalho**

Pretende-se com este trabalho atingir os seguintes objetivos:

- 1) Determinação de órbitas do tipo Halo para diversos sistemas de primários. Este trabalho já existe na literatura, mas novos sistemas de primários serão estudados, como Sol-Júpiter, Sol-Saturno, etc. As órbitas aqui mostradas

podem ser utilizadas para o estudo do espaço interplanetário e/ou servir como base para a exploração dos planetas exteriores do sistema solar;

- 2) Estudo, formulação e resolução do problema restrito de três corpos para o caso de transferências entre duas órbitas do tipo Halo com tempo fixo e mínimo consumo de combustível, incluindo a técnica de rendez-vous com tempo fixo. A razão para este estudo é completar a literatura existente, toda ela concentrada em manobras com mínimo consumo de combustível e tempo livre. O problema com tempo fixo muitas vezes aparece como uma necessidade para uma missão em particular em casos onde se deseja encontrar um outro veículo espacial, observar algum fenômeno físico ou simplesmente reduzir a duração total de uma missão. Sendo assim, este método fornece a possibilidade de construir tabelas com o custo da missão e a duração da mesma, permitindo uma maior flexibilidade na escolha da manobra ideal;
- 3) Projeto e determinação de uma missão completa saindo da Terra, indo até uma órbita do tipo Halo e a seguir indo até a Lua, cuja volta inclui a técnica de rendez-vous. A razão do estudo de uma missão deste tipo é mostrar novas possibilidades de exploração da Lua com menor custo de combustível. Uma missão deste tipo também aumenta os resultados científicos obtidos, pois o veículo espacial que permanece na órbita Halo pode estudar uma faixa importante do espaço entre a Terra e a Lua.
- 4) Estudo do aproveitamento da energia gravitacional da Lua para uma transferência entre uma órbita de estacionamento em torno da Terra até uma órbita Halo no sistema Terra-Sol, incluindo uma passagem próxima pela Lua (swing-by) para ganhar energia com relação à Terra. Uma missão realizada com estes conceitos também oferece uma dupla vantagem: economia de combustível na viagem até a órbita Halo e a observação da Lua de uma proximidade grande.

- 5) Determinação e utilização do modelo bi-circular de quatro corpos para compará-lo com algumas manobras obtidas na dinâmica de três corpos. A razão deste estudo é oferecer um modelo mais próximo da realidade e também utilizar o quarto corpo disponível como forma de economizar combustível e tempo para a missão.

As contribuições deste trabalho são as seguintes:

- 1) Mostrar um estudo detalhado da bibliografia disponível no momento sobre o problema em questão;
- 2) Implementar um método de determinação de órbitas do tipo Halo e utilizá-los primeiramente nos sistemas Terra-Lua e Terra-Sol. Medir a precisão deste método, tarefa esta que ainda não foi encontrada na literatura. A seguir, foram obtidas várias órbitas do tipo Halo para outros sistemas de primários (Sol-Júpiter, Sol-Saturno, Sol-Mercúrio, Sol-Vênus, Sol-Marte, Sol-Urano, Sol-Plutão). Estas órbitas possuem aplicações em pesquisas interplanetárias e ainda não tinham sido obtidas na literatura. A seguir, este trabalho é generalizado para medir o efeito do parâmetro gravitacional nas órbitas do tipo Halo;
- 3) Propor um método para resolução de manobras orbitais baseado na discretização das órbitas Halo em um certo número de pontos e a conseqüente aplicação do método de Lambert, utilizado dentro do problema restrito de três corpos para cada par de pontos possíveis.
- 4) Implementar o problema restrito bi-circular de quatro corpos com o objetivo de se obter manobras mais realistas e medir o efeito do quarto corpo e ainda utilizar a captura gravitacional como outra forma de economia de combustível;
- 5) Estudar a manobra assistida por gravidade propulsada em três dimensões para se investigar a possibilidade de se obter economia de combustível utilizando a manobra swing-by na Lua em órbita de estacionamento em torno da Terra até uma órbita Halo no sistema Terra-Sol, incluindo uma



passagem próxima pela Lua (swing-by) para ganhar energia com relação à Terra. Esta tarefa inclui o desenvolvimento analítico do swing-by propulsado em três dimensões, que não foi encontrado na literatura.

### **1.3 - Organização do Trabalho**

Este trabalho está dividido em onze capítulos, os quais foram subdivididos em seções para facilitar a consulta. A seguir são detalhados os conteúdos desses capítulos.

**Capítulo 1** - Apresenta uma introdução a este trabalho, abrange os objetivos do mesmo e detalha cada um dos capítulos seguintes.

**Capítulo 2** – Apresenta uma rápida descrição do trabalho. Apresenta ainda uma Revisão Bibliográfica, apresentando alguns dos trabalhos mais relevantes na área.

**Capítulo 3** – Apresenta uma descrição do problema restrito de três corpos. Apresenta ainda a determinação dos pontos Lagrangianos.

**Capítulo 4** – Apresenta a determinação das órbitas periódicas ao redor dos pontos Lagrangianos.

**Capítulo 5** – Apresenta a determinação numérica das órbitas do tipo Halo através do método de Lindstedt-Poincaré e as compara com a determinação semi-analítica. As órbitas do tipo Halo são determinadas para vários sistemas de primários.

**Capítulo 6** – Apresenta as manobras orbitais possíveis utilizando a transferência de Hohmann e o método de Lambert com mínimo consumo envolvendo as órbitas do tipo Halo. Dentre elas estudam-se as transferências da Terra para Halo, entre as Halos, das Halos para Lua e vice-versa.

**Capítulo 7** - Apresenta ainda a técnica de rendez-vous aplicada as órbitas do tipo Halo. O sistema de primários utilizado é o Sol-Terra.

**Capítulo 8** – Apresenta uma missão utilizando as órbitas do tipo Halo como estacionamento para ida de um veículo espacial da Terra para a Lua e sua volta. O sistema de primários utilizado é o Terra-Lua.

**Capítulo 9** – Apresenta a dinâmica do problema restrito bi-circular de quatro corpos e a comparação com o sistema restrito de três corpos. Apresenta ainda uma breve descrição de captura gravitacional e sua utilização.

**Capítulo 10** – Apresenta uma descrição analítica detalhada e da manobra assistida por gravidade propulsada em três dimensões.

**Capítulo 11** – Apresenta uma conclusão geral dos capítulos apresentados neste trabalho.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Em 1967, Szebehely publica um livro sobre Mecânica Celeste com título “Theory of Orbits”, onde descreve conceitos e equações relativas ao problema restrito de três corpos (Szebehely, 1967). Este livro torna-se uma das referências mais utilizadas até o momento.

Em 1968, Farquhar introduziu o termo “Halo” em sua tese de Doutorado, quando realiza estudos sobre a exploração do lado oculto da Lua através das famílias de órbitas tridimensionais periódicas ao redor dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  no sistema Terra-Lua. Farquhar ainda notou que estas órbitas formavam auréolas (Halos) quando visualizadas da Terra (Farquhar, 1968).

Em 1969, o mesmo autor estuda diversas missões para os pontos de equilíbrio  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ , utilizando as órbitas do tipo Halo e escreve sobre a influência da Lua na localização dos pontos de equilíbrio no sistema Sol-Terra (Farquhar, 1969, 1970a, 1970b). Em 1971, Farquhar utiliza as órbitas do tipo Halo para o projeto de futuras missões lunares (Farquhar, 1971). Em 1972, estuda a possibilidade da inserção e exploração de uma estação Lunar em uma órbita do tipo Halo (Farquhar, 1972).

Em 1973, Farquhar e Kamel usam o método de Lindstedt-Poincaré para produzir soluções analíticas para órbitas quase-periódicas em  $L_2$  (as primeiras determinações explícitas de órbitas Halo e Lissajous, que são exemplos de órbitas quase-periódicas ao redor dos pontos de equilíbrio) (Farquhar e Kamel, 1973). No mesmo ano, Breakwell publica a investigação feita sobre o controle dos satélites em órbitas do tipo Halo (Breakwell, 1973).

Em 1974, Damario e Edelbaum estudam as trajetórias de três corpos com mínimo impulso (Damario e Edelbaum, 1974).

Em 1975, Pu e Edelbaum utilizam métodos computacionais de dois e três impulsos para otimizar combustível das trajetórias para quatro corpos (Sol-Terra-Lua-satélite). O programa é desenvolvido para missão que planeja estudos onde a Terra, Sol e Lua podem ter uma significativa influência na transferência destas trajetórias. (Pu e Edelbaum, 1975).

Em 1977, na *Spaceflight Mechanics Conference*, Heuberger mostra a utilização da órbita do tipo Halo como órbita de estacionamento para a missão *International Sun-Earth Explorer-C* (ISEE-C). Os propósitos da missão foram: (1) investigar relações solar-terrestres nos limites externos da magnetosfera da Terra; (2) examinar a estrutura do vento solar em detalhe perto da Terra, assim como a onda de choque que forma-se na interface entre o vento solar e a magnetosfera da Terra; (3) investigar os mecanismos que operam nas folhas de protoplasma; e, (4) continuar a investigação de raios cósmicos e emissões de chamas solares na região interplanetária perto de 1 unidade astronômica (Heuberger, 1977). Ainda em 1977, Farquhar e outros desenvolvem missões utilizando órbitas do tipo Halo ao redor do ponto de equilíbrio  $L_1$  no sistema Sol-Terra (Farquhar *et al.*, 1977).

Em 1978, lança-se a missão ISEE-3, que foi a primeira a inserir um veículo espacial em uma órbita instável do tipo Halo ao redor do ponto de equilíbrio  $L_1$  (interno ao sistema Sol-Terra). A ISEE-3 utiliza aproximações sucessivas do método de Lindsted-Poincaré com soluções de terceira ordem como aproximações iniciais.

Em 1979, Dunham apresenta na *Astrodynamics Specialist Conference* os planos de contingência para os pontos de equilíbrio na missão ISEE-3 e publica-os no Relatório Técnico da *Computer Sciences Corporation* (Dunham, 1979). Breakwell e Brown publicam resultados sobre as famílias de órbitas periódicas em três dimensões utilizando o sistema Terra-Lua, no problema restrito de três corpos (Breakwell e Brown, 1979).

Em 1980, Richardson publica um trabalho sobre construção analítica de órbitas periódicas ao redor dos pontos colineares utilizando uma expansão do potencial

gravitacional em polinômios de Legendre (Richardson, 1980a). Esta expansão torna-se uma ferramenta analítica muito importante e será a base da grande maioria das determinações posteriores de órbitas Halos. No mesmo ano, ele apresenta uma descrição das manobras e trajetórias utilizadas na missão ISEE-3 (Richardson, 1980b). Finalmente, apresenta também uma formulação lagrangiana para a determinação de órbitas do tipo Halo (Richardson, 1980c). Farquhar e outros publicam vários trabalhos envolvendo manobras e trajetórias ao redor dos pontos Lagrangianos (Farquhar *et al*, 1980).

Entre os anos de 1981 a 1984, Howell também estuda estas trajetórias e procura por famílias de órbitas do tipo Halo para uma faixa completa de massas no problema restrito de três corpos circular. Publicou os efeitos da excentricidade sobre o sistema de corpos primários na estabilidade de cada órbita Halo e determinou famílias de órbitas quase-Halos analiticamente, comparando-as com os resultados das integrações numéricas (Howell, 1981, 1983, 1984; Howell e Breakwell, 1982 e 1984).

Em 1984, Hecler publica o projeto para a missão SOHO (*Solar Heliospheric Observatory*) para estudar os efeitos do Sol na Terra. Esta missão consiste em um satélite a ser lançado e injetado em uma órbita do tipo Halo no ponto  $L_1$  do sistema Sol-Terra. Com ele, os cientistas pretendem estudar a área interna do Sol, sua atmosfera exterior e a origem do vento solar. Alguns destaques dos resultados da missão incluem a descoberta de tornados na superfície do Sol e uma recente viagem para o lado oposto ao Sol, tornando-se possível observar eventos de atividade solar antes de chegarem na Terra (Hecler, 1984).

Em 1985, Popescu determina as transferências ótimas entre pontos Lagrangianos (Popescu, 1985).

Em 1986, Simó e colaboradores estudam as órbitas quase-periódicas Halo (as quase-Halos, são órbitas que não fecham para formar um período, porém ficam confinadas ao

redor de uma órbita periódica) como órbitas de estacionamento usando manifolds<sup>(\*)</sup> (Simó *et al.*, 1986).

Ainda em 1986, Rodriguez-Canabal publica um artigo sobre as técnicas de manutenção do Observatório Solar e Heliosférico - SOHO ao redor das órbitas do tipo Halo (Rodriguez-Canabal, 1986).

Em 1987, Simó e seus colaboradores estendem o trabalho anterior para definir um local ótimo das órbitas quase-periódicas Halo como órbita de estacionamento, visando estimar sua importância para a economia de combustível (Simó *et al.*, 1987). Belbruno faz uma tentativa de utilizar uma trajetória de captura pelo ponto de Lagrange em uma transferência Terra-Lua, porém o início da transferência não ocorre na Terra, e sim em regiões próximas à Terra. Na realidade, as transferências ocorrem entre regiões próximas da Terra e próximas da Lua (Belbruno, 1987).

Em 1990, Pernicka e Howell estudam as trajetórias ao redor dos pontos de equilíbrio no sistema Sol-Terra e consideraram órbitas de Lissajous (órbitas quase-periódicas) como parte do planejamento da trajetória e podem permanecer além da região do disco solar quando vistos da Terra. Este esforço envolve a determinação numérica de trajetórias de Lissajous, porém isto nunca viola o vínculo da direção das manobras, perpendiculares ao plano da eclíptica. (Pernicka e Howell, 1990). Belbruno e Miller publicam as trajetórias de captura balística com a preocupação em reduzir o consumo de combustível num problema de transferência orbital entre dois corpos (Belbruno e Miller, 1990a, 1990b).

Em 1991, Farquhar estuda o swing-by Lunar para as órbitas do tipo Halo (Farquhar, 1991). Bond e outros apresentam o ponto de equilíbrio  $L_1$  como uma importante opção para a exploração do lado oculto da Lua, pois utilizam a órbita Halo como órbita de

---

<sup>(\*)</sup> Termo matemático para uma superfície de dimensão arbitrária. Famílias de “manifolds” (ou “variedades”, em português) de uma dimensão são linhas, curvas no espaço, círculos, ou hélices. Famílias de “manifolds” de duas dimensões são um plano, uma esfera, os toros, e os cilindros. Em nosso contexto, o interesse em “manifolds” são as superfícies compostas de trajetórias e órbitas.

estacionamento para os veículos espaciais, onde os suprimentos envolvidos na missão podem ser deixados na órbita Halo, sem a necessidade de leva-los até a Lua (Bond *et al.*, 1991). O grupo de Barcelona (Gómez *et al.*, 1991a, 1991b) estuda os refinamentos semi-analíticos da teoria das órbitas do tipo Halo e a influência da Lua na transferência da Terra para órbitas Halos.

Em 1992, surgem outros trabalhos de aplicação de órbitas Halo. Gingis analisa a navegação das missões nos pontos de equilíbrio no sistema Terra-Lua (Gingis, 1992). Pernicka, Henry e Chan estudam a utilização das órbitas do tipo Halo para estabelecer uma linha de comunicação entre a Terra e Marte (Pernicka *et al.*, 1992). Hinday e Howell estudam as transferências entre órbitas em torno dos pontos de equilíbrio do problema elíptico (Hinday e Howell, 1992).

Em 1993, Jones e Bishop estudam o rendez-vous entre órbitas estáveis e pequenos raios de órbitas translunares (Jones e Bishop, 1993). A extensão deste trabalho a grandes amplitudes é feita por Stalos e colaboradores (Stalos *et al.*, 1993). Gómez e outros estudaram as transferências da Terra para as órbitas do tipo Halo ao redor do ponto de equilíbrio  $L_1$  e transferências entre as órbitas Halo no Sistema Solar (Gómez *et al.*, 1993a, 1993b). Howell e Pernicka estudam um método de manutenção orbital (*Station Keeping*) das trajetórias nos pontos de equilíbrio (Howell e Pernicka, 1993). Howell e Hinday estendem o trabalho de 1992 para a utilização de tempo livre (Howell e Hinday, 1993).

Ainda em 1993, Prado, em sua tese de doutorado, publica estudos sobre transferências ótimas e swing-bys no problema de dois e três corpos (Prado, 1993). Belbruno e Miller descobrem a existência de órbitas de estacionamento ao redor da Terra e da Lua que utilizam 80% de consumo de combustível quando comparadas à manobra clássica de Hohmann (Belbruno e Miller, 1993). Entretanto, o tempo de viagem aumenta de 5 dias (manobra clássica) para 5 meses na transferência de Belbruno. Apesar disto, porém estas trajetórias podem ser utilizadas com o objetivo de transferir equipamentos da Terra para Lua sem a presença de seres humanos.

Em 1994, Jones e Bishop estudam manobras de rendez-vous e navegações para órbitas Halo Translunares (Jones e Bishop, 1994). Howell, Mains e Barden também estudam transferências entre as órbitas de estacionamento para as órbitas Halo do sistema Sol-Terra (Howell *et al.*, 1994).

Em 1995, Popescu e Cardos estudam o domínio das condições iniciais para classes de órbitas Halo periódicas. Os resultados são concentrados na aplicação numérica (Popescu e Cardos, 1995).

Em 1996, Prado publica um artigo sobre swing-by propulsado, onde é aplicado um impulso no plano da manobra. A dinâmica utilizada para a obtenção das equações é dada pela aproximação de cônicas conjugadas (Prado, 1996a, 1996b). O mesmo autor também publica sobre manobras de rendez-vous (Prado, 1996c). Cielaszyk e Wie apresentam um método simples, iterativo e numérico para a determinação e controle de órbitas Halo no problema restrito de três corpos circular (Cielaszyk e Wie, 1996).

Em 1997, Starchiville e Melton apresentam na *Astrodynamics Specialist Conference* as trajetórias ótimas de baixo impulso para Terra-Lua nas órbitas Halo em  $L_2$  (Starchiville e Melton, 1997). Gómez e seu grupo estudam as órbitas Lissajous ao redor das órbitas Halo (Gómez *et al.*, 1997).

Em 1998, Andreu publica sua tese de doutorado sobre o problema quasi-bicircular, fazendo reduções à variedade central e continuação numérica (Andreu, 1998; Andreu, e Simo, 1999.).

De 1998 a 2001, o grupo de Barcelona destaca-se na área de transferências e aplicações de órbitas do tipo Halo, publicando quatro volumes contendo toda a dinâmica e desenvolvimento das missões próximas aos pontos de equilíbrio, onde utilizam as órbitas do tipo Halo e estudam o modelo envolvendo quatro corpos (Gómez *et al.*, 1998, 2000, 2001a, 2001b, 2001c, 2001d).



Em 1999, Vieira Neto, com base no trabalho de Yamakawa (1992), publica sua tese de doutorado sobre um estudo numérico da captura gravitacional temporária utilizando o problema restrito de três corpos (Vieira Neto, 1999).

Em 2000 são feitos os primeiros trabalhos de determinação analítica, numérica e transferências de órbitas do tipo Halo no INPE (Felipe *et al.*, 2000a, 2000b, Corrêa *et al.*, 2000 ).

Também em 2000, Prado apresenta na *International Astronautical Federation* uma descrição analítica para manobras swing-by em três dimensões (Prado, 2000). Corrêa e colaboradores fazem a determinação numérica através de um parâmetro de arco das famílias de órbitas Halo na vizinhança dos pontos  $L_1$  e  $L_2$  no sistema Terra-Lua. Concluiu-se que a família referente ao ponto  $L_1$  aproxima-se em órbitas quase verticais próximo da Lua, enquanto que a família de  $L_2$  termina em colisão com a Lua (Corrêa *et al.*, 2000).

Em 2001, Felipe, *et al.*, publicam a determinação analítica de órbitas do tipo Halo pelo método de Lindstedt-Poincaré e as transferências de mínimo consumo em órbitas do tipo Halo, incluindo a possibilidade de variação do Parâmetro de Massa nas Famílias de Órbitas Halo e um estudo inicial sobre Missões Lunares com uso de órbitas de estacionamento do tipo Halo (Felipe *et al.*, 2001a, 2001b, 2001c). Koon e colaboradores estendem o trabalho de Belbruno e Miller (1993) para a utilização do problema restrito de quatro corpos Sol-Terra-Lua-veículo espacial e estudam as conexões entre as variedades de  $L_1$  e  $L_2$  do sistema Terra-Lua com as variedades de  $L_1$  do sistema Terra-Sol (Koon *et al.*, 2001)

Em 2001 e 2002, Corrêa estuda as transferências orbitais visando a obtenção de órbitas que forneçam mínimo consumo de combustível. O método utilizado foi o de Lambert. O ponto da órbita Halo que fornece o consumo ótimo é o ponto onde a velocidade da órbita Halo é máxima, o extremo inferior da amplitude em  $z$ . Também estuda as

manobras de rendez-vous para um veículo que parte de uma órbita de estacionamento ao redor da Terra em direção a um ponto da órbita Halo. (Corrêa *et al.*, 2001, 2002a, 2002b).

Em 2002, Felipe *et al.*, publicam trabalhos sobre manobras de controle de um veículo espacial em órbitas do tipo Halo para o sistema Sol-Júpiter, transferência entre órbitas do tipo Halo no sistema Terra-Lua; swing-by propulsado em duas dimensões utilizando órbitas do tipo Halo, e também determinam o swing-by analítico propulsado em três dimensões no problema restrito de três corpos (Felipe *et al.*, 2002a, 2002b, 2002c, 2002d).

Estuda-se ainda um tópico sobre Captura Gravitacional, baseado em Yamakawa (1992), que publica em sua tese de doutorado as transferências entre trajetórias com captura gravitacional no problema restrito de três corpos. Um apêndice de sua tese menciona as equações analíticas para o problema bi-circular de quatro corpos (Yamakawa, 1992).

Em 2003, Felipe, *et al.*, utilizam as equações analíticas do problema restrito bi-circular de quatro corpos em três dimensões para aplicações em captura gravitacional e comparação com o problema restrito de três corpos para as manobras orbitais (Felipe *et al.*, 2003).

## CAPÍTULO 3

### O PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

#### 3.1 - O Problema Restrito de Três Corpos

No problema restrito de três corpos, supõe-se que existem dois corpos de massas finitas  $M_1$  e  $M_2$  e deseja-se estudar o movimento de um terceiro corpo de massa negligenciável, que orbita o sistema formado pelos dois outros corpos (Szebehely, 1967; Marchal, 1990). É um caso particular, porém extremamente importante e mais rico em aplicações práticas do que o problema geral dos três corpos.

#### 3.2 - Equações de Movimento

Escrevem-se as equações de movimento de um sistema geral de três corpos (as três massas são finitas). Sejam  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  as posições baricêntricas das três massas envolvidas e  $m_1, m_2,$  e  $m_3$  os valores das respectivas massas. Sendo assim, têm-se:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1 &= -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{-\vec{r}_3 + \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + Gm_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_3 &= -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3}\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde  $G$  é a constante universal de gravitação.

A seguir, faz-se a descrição do problema restrito-plano-circular de três corpos. Ele pode ser formulado como: "Deseja-se conhecer o movimento de um corpo  $M_3$ , de massa negligenciável, em torno de um sistema composto por  $M_3$  e duas outras massas finitas  $M_1$  e  $M_2$ . Assume-se que apenas forças gravitacionais atuem no sistema, que as órbitas

de  $M_1$  e  $M_2$  em torno do centro de massa sejam circulares e que  $M_3$  se mova apenas no plano das órbitas de  $M_1$  e  $M_2$ ".

Efetua-se a aproximação  $m_3 \rightarrow 0$  nas duas primeiras equações (3.1). Feito isto, resta:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (3.2)$$
$$\ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

A terceira equação permanece inalterada. A transformação do sistema de equações (3.1) para o sistema de equações (3.2) nos dá o importante fato de que agora o sistema pode ser completamente resolvido para os corpos  $M_1$  e  $M_2$ . A solução é dada pelo problema de dois corpos.

Trabalha-se com essa última equação e obtém-se resultados mais adequados. Assume-se que as órbitas circulares de  $M_1$  e  $M_2$  tenham raios  $a$  e  $b$ , respectivamente, como mostra a Figura 3.1.

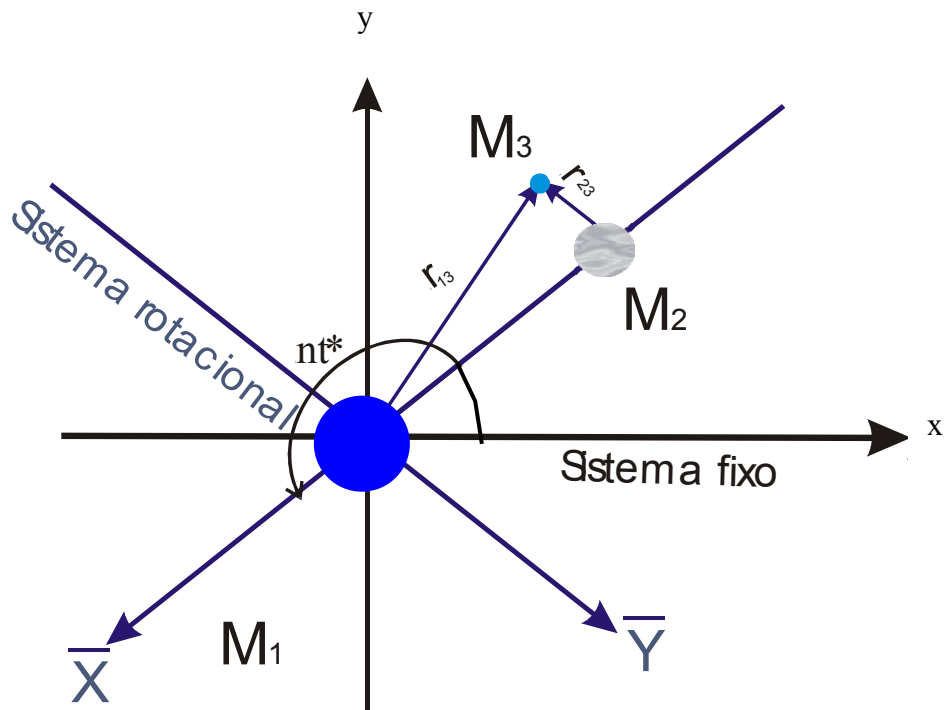


FIGURA 3.1 - Sistema de coordenadas para o problema restrito-circular-plano de três corpos.

Na Figura 3.1 os eixos  $x$ - $y$  formam um sistema de coordenadas fixo (inercial); e os eixos  $\bar{X}$  -  $\bar{Y}$  um sistema que gira com velocidade angular  $n$  de forma a acompanhar o movimento de  $M_1$  e  $M_2$  e  $t^*$  é o tempo. Em outras palavras,  $M_1$  e  $M_2$  ficam fixos neste último sistema de referência. Observar que o sistema encontra-se invertido apenas por analogia ao sistema de Szebehely, 1967.

Para simplificar as equações de movimento é interessante o uso de quantidades adimensionais. Para isso definem-se as seguintes grandezas:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\bar{X}}{L}; y = \frac{\bar{Y}}{L}; t = nt^*; \\
 r_1 &= \frac{r_{13}}{L}; r_2 = \frac{r_{23}}{L}; \\
 \mu_1 &= \frac{m_1}{m}; \mu_2 = \frac{m_2}{m}; \Omega_a = \frac{\Omega}{L^2 n^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

onde:

$$\Omega = \frac{n^2}{2}(\bar{X}^2 + \bar{Y}^2) + G\left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}}\right)$$

$m_1$  = massa do corpo  $M_1$ ;

$m_2$  = massa do corpo  $M_2$ ;

$L$  = distância entre os dois primários;

$n$  = velocidade angular dos dois primários;

$m$  = massa total do sistema ( $m_1 + m_2$ );

$r_{13}$  = distância entre o corpo primário e o corpo sem massa (veículo espacial);

$r_{23}$  = distância entre o corpo secundário e o corpo sem massa (veículo espacial).

Com isso as equações de movimento do corpo  $M_3$ , no sistema adimensional, onde  $G = 1$ , ficam:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y \\ \Omega &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \\ \mu &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\end{aligned}\tag{3.4}$$

Onde:

$\Omega_x$  = derivada de  $\Omega$  em relação a  $x$

$\Omega_y$  = derivada de  $\Omega$  em relação a  $y$

E a integral de Jacobi (uma constante do problema restrito de três corpos =  $J$ ) fica:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - J\tag{3.5}$$

Note que, ao escolher o sistema adimensional acima, ficam implícitas as seguintes regras:

- 1) a unidade de distância é a distância entre  $M_1$  e  $M_2$ ;
- 2) a unidade de massa é  $m = m_1 + m_2$ ;
- 3) a velocidade angular do movimento de  $M_1$  e  $M_2$  é unitária;
- 4) a constante gravitacional passa a ser  $G = 1$ ;
- 5) o período do movimento angular de  $M_1$  e  $M_2$  tem um valor igual a  $2\pi$ .

Podemos também definir  $\mu$  como sendo a massa do menor primário. A massa do maior primário será então  $\mu_1 = 1 - \mu$ . Com isso tem-se:

$$\Omega = \frac{(x^2 + y^2)}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

$$r_1^2 = (x - \mu)^2 + y^2 \tag{3.6}$$

$$r_2^2 = (x + 1 - \mu)^2 + y^2$$

Existem diferentes formas de definir a função  $\Omega$  e as constantes de integração. Vários sistemas são mostrados em Szebehely (1967), pág. 449.

Para a versão em três dimensões desse problema, têm-se as seguintes equações de movimento (Szebehely, 1967):

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - (1 - \mu) \frac{x + \mu}{r_1^3} - \mu \frac{x - 1 + \mu}{r_2^3}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - (1 - \mu) \frac{y}{r_1^3} - \mu \frac{y}{r_2^3} \tag{3.7}$$

$$\ddot{z} = -(1 - \mu) \frac{z}{r_1^3} - \mu \frac{z}{r_2^3}$$

onde:

$$r_1^2 = (x - \mu)^2 + y^2 + z^2$$

$$r_2^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2$$

### 3.3 - Os Pontos Lagrangianos

Os pontos Lagrangianos são os chamados pontos de equilíbrio do problema restrito de três corpos. São pontos para os quais a equação  $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0$  é satisfeita. Olhando as Equações (3.4) vê-se que uma partícula colocada num ponto de equilíbrio com velocidade inicial nula irá permanecer nesse ponto indefinidamente. Efetuam-se então as derivadas:

$$\begin{aligned}\Omega_x &= x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} = 0 \\ \Omega_y &= y \left( 1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0 \\ \Omega_z &= z \left( \frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0\end{aligned}\tag{3.8}$$

Observam-se os seguintes fatos:

- a) quando  $z = 0$ , a terceira equação é satisfeita e podemos concentrar nossa análise nas demais equações. Quando  $z \neq 0$  não é possível satisfazer as três equações, logo não existem pontos de equilíbrio fora do plano;
- b) quando  $y = 0$  a segunda equação fica satisfeita, e a primeira equação se transforma em uma equação em  $x$ . Resolve-se essa equação e obtém-se os três pontos de equilíbrio colineares ( $L_1, L_2, L_3$ ), cujas posições dependem do valor de  $\mu$ . As posições aproximadas estão mostradas na Figura 3.2. Diferentes autores usam diferentes formas de nomear esses três pontos com os nomes  $L_1, L_2, L_3$  e a



escolha feita aqui é baseada na ordem em que as curvas de velocidade atingem os pontos Lagrangianos.

- c) quando  $y \neq 0$ , o único modo de satisfazer a segunda equação é fazer  $r_1 = r_2 = 1$ . Essa solução também satisfaz a primeira equação, fornecendo mais dois pontos de equilíbrio (chamados de  $L_4$  e  $L_5$ ), que são os pontos triangulares, pois junto com  $M_1$  e  $M_2$  formam triângulos equiláteros.

Não existindo mais nenhuma solução para essa dupla de equações, o número total de pontos de equilíbrio é cinco.

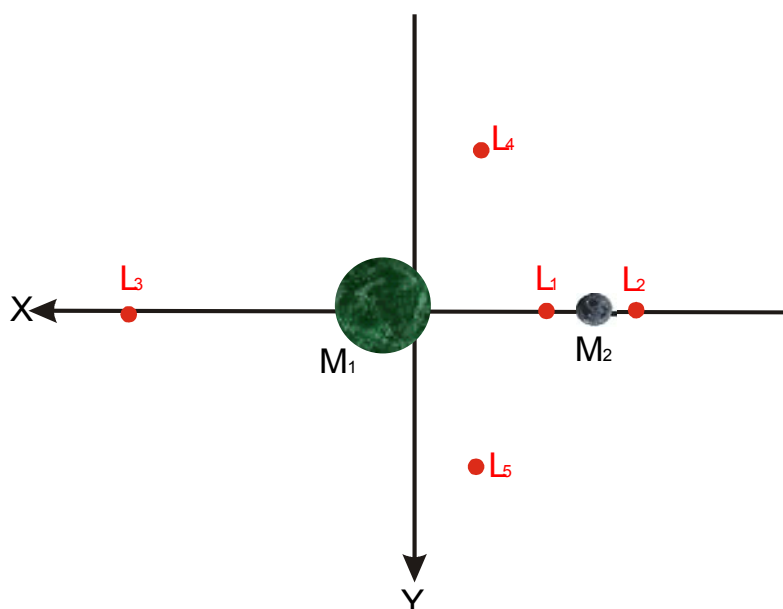


FIGURA 3.2 – Localização dos pontos Lagrangianos.

Os pontos Lagrangianos possuem diversas aplicações do ponto de vista da Astronáutica. O ponto que existe entre os dois primários ( $L_1$ ) pode ser utilizado como um nodo para a exploração do corpo secundário. No sistema Terra-Lua, isso equivale a usá-lo como uma "órbita de estacionamento" para uma viagem da Terra até a Lua (Bond *et al*, 1991). Assim procedendo, pode-se obter uma economia de combustível por não ter sido necessário inserir e retirar da Lua uma grande parte da massa que foi lançada da Terra.

O ponto Lagrangiano  $L_2$ , que fica atrás do corpo secundário, pode ser utilizado como um ponto para estacionamento de um satélite para transmissão contínua entre a Terra e a face oculta da Lua. Colocado em uma órbita em torno desse ponto, um satélite poderia ver a Terra e a face oculta da Lua sem interrupção (Farquhar, 1969).

Os pontos Lagrangianos triangulares,  $L_4$  e  $L_5$ , são candidatos a abrigarem estações orbitais inteiras no espaço. A estabilidade desses dois pontos faz com que o consumo de combustível necessário à manutenção de um veículo espacial nesta posição do espaço seja mínimo.

## CAPÍTULO 4

### DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS PERIÓDICAS AO REDOR DOS PONTOS LAGRANGIANOS

Para a determinação de órbitas ao redor dos pontos Lagrangianos, primeiramente deve-se transferir o sistema de coordenadas para o ponto Lagrangiano desejado. Como exemplo tem-se o ponto  $L_2$ , como representado pela Figura 4.1.

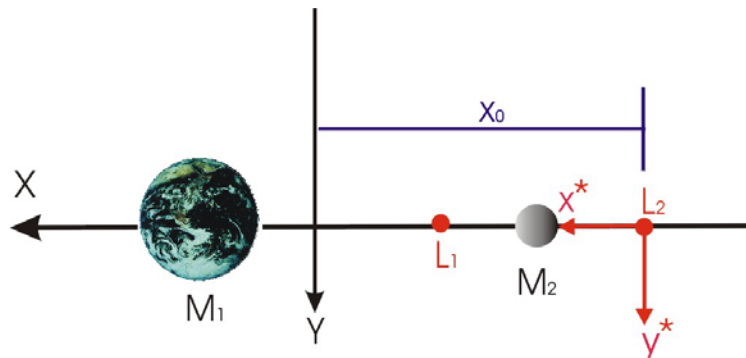


FIGURA 4.1 – Sistema de referência para a determinação de órbitas em torno de  $L_2$ .

As equações de movimento para o sistema são iguais as do problema restrito circular de três corpos, porém observa-se agora o deslocamento das coordenadas para o ponto  $L_2$ .

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= 2\dot{y} + (x_0 + x) - \frac{(1-\mu)(x_0 + x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x_0 + x - (1+\mu))}{r_2^3} \\
 \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \\
 \ddot{z} &= -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde:

$$\mu = m_2 / (m_1 + m_2);$$

$$r_1^2 = (x_0 + x - \mu)^2 + y^2 + z^2;$$

$$r_2^2 = (x_0 + x + 1 - \mu)^2 + y^2 + z^2$$

$x_0$  = ordenada do ponto  $L_2$

Pela Figura 4.1, têm-se que:  $x^* = x + x_0$  e  $y^* = y$ . O sistema, em função das derivadas da função Omega, fica:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \Omega_y \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \Omega_z \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\text{onde o potencial agora é: } \Omega = \frac{1}{2}((x_0 + x)^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (4.3)$$

Faz-se uma expansão em série de Taylor ao redor dos pontos lagrangianos em  $x$ ,  $y$ , e  $z$  para separar a parte linear da parte não linear ao redor de  $L_2$ :

$$\begin{aligned} \Omega_{\hat{x}} &= \Omega_{\hat{x}}|_0 + \Omega_{\hat{x}\hat{x}} \cdot \hat{x} + \Omega_{\hat{x}\hat{y}} \cdot \hat{y} + \Omega_{\hat{x}\hat{z}} \cdot \hat{z} + O(\hat{x}^2, \hat{y}^2, \hat{z}^2) \\ \Omega_{\hat{y}} &= \Omega_{\hat{y}}|_0 + \Omega_{\hat{y}\hat{x}} \cdot \hat{x} + \Omega_{\hat{y}\hat{y}} \cdot \hat{y} + \Omega_{\hat{y}\hat{z}} \cdot \hat{z} + O(\hat{x}^2, \hat{y}^2, \hat{z}^2) \\ \Omega_{\hat{z}} &= \Omega_{\hat{z}}|_0 + \Omega_{\hat{z}\hat{x}} \cdot \hat{x} + \Omega_{\hat{z}\hat{y}} \cdot \hat{y} + \Omega_{\hat{z}\hat{z}} \cdot \hat{z} + O(\hat{x}^2, \hat{y}^2, \hat{z}^2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  são os deslocamentos em relação a  $L_2$ . Dessa forma utiliza-se a parte linear e desconsidera-se a parte não linear:

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{x}} - 2\dot{\hat{y}} &= \Omega_{\hat{x}\hat{x}} \cdot \hat{x} + O(\hat{x}^2, \hat{y}^2, \hat{z}^2) \\ \ddot{\hat{y}} + 2\dot{\hat{x}} &= \Omega_{\hat{y}\hat{y}} \cdot \hat{y} + O(\hat{x}^2, \hat{y}^2, \hat{z}^2) \\ \ddot{\hat{z}} &= \Omega_{\hat{z}\hat{z}} \cdot \hat{z} + O(\hat{x}^2, \hat{y}^2, \hat{z}^2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

com  $\Omega_{\hat{x}\hat{x}}$ ,  $\Omega_{\hat{y}\hat{y}}$ ,  $\Omega_{\hat{z}\hat{z}}$  constantes.

Tem-se um sistema separável, no caso linear, cuja solução para a variável  $\hat{z}(t)$  é:  $\hat{z}(t) \approx \exp^{\lambda t}$ . Aplica-se essa solução na terceira das equações (4.5):  $\lambda^2 \exp^{\lambda t} = \Omega_{zz} \cdot \exp^{\lambda t}$ . O que implica em:  $\lambda^2 = \Omega_{zz}$ . A solução desta equação é dada por:  $\lambda = i\sqrt{-\Omega_{zz}} = i v$ .

Desta forma  $\hat{z}(t) = A_z \exp^{ivt}$ , onde  $A_z$  é a amplitude em z.

Aplica-se as condições iniciais, para  $t = 0$ , e tem-se as seguintes soluções:

$$\hat{z}(t=0) = A_z \exp^{iv0} = \text{Re} \{ A_z \} \text{ e } \dot{\hat{z}}(t=0) = iv A_z \exp^{iv0} = -v \text{Im} \{ A_z \}.$$

Analisa-se o movimento no plano XY:

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{x}} - 2\dot{\hat{y}} &= \Omega_{xx} \cdot \hat{x} \\ \ddot{\hat{y}} + 2\dot{\hat{x}} &= \Omega_{yy} \cdot \hat{y} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Coloca-se o sistema na forma matricial: 
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{y}} \\ \ddot{\hat{x}} \\ \ddot{\hat{y}} \end{pmatrix}}_{\zeta} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{xx} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \Omega_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix}}_M \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{y}} \end{pmatrix}}_{\zeta}, \text{ onde M é}$$

uma constante. No Capítulo 5 de Szebehely, 1967, encontra-se que a solução deste sistema é dada por:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sum_{j=1}^4 A_j \exp^{\lambda_j t} = \xi \\ \hat{y} &= \sum_{j=1}^4 B_j \exp^{\lambda_j t} = \eta \\ \dot{\hat{x}} &= \dot{\xi} \\ \dot{\hat{y}} &= \dot{\eta} \end{aligned} \tag{4.7}$$

e seus autovalores reais e imaginários são:  $\lambda_1 = \Lambda_1^{1/2}$ ,  $\lambda_2 = -\lambda_1$ ,  $\lambda_3 = i \Lambda_2^{1/2}$ ,  $\lambda_4 = -\lambda_3$   
 com:  $\Lambda_1 = -\beta_1 + (\beta_1^2 + \beta_2)^{1/2} > 0$  e  $\Lambda_2 = \beta_1 + (\beta_1^2 + \beta_2)^{1/2} > 0$ , onde:  
 $\beta_1 = 2 - (1/2)(\Omega_{\hat{x}\hat{x}} + \Omega_{\hat{y}\hat{y}})$  e  $\beta_2 = -\Omega_{\hat{x}\hat{x}} \cdot \Omega_{\hat{y}\hat{y}}$ .

Dessa forma é feita a substituição dos autovalores na solução da equação diferencial e, definindo,  $\omega = \Lambda_2^{1/2}$ , obtém-se um novo sistema em função das frequências:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= A_1 \exp^{\lambda_1 t} + A_2 \exp^{-\lambda_1 t} + A_3 \exp^{i\omega t} + A_4 \exp^{-i\omega t} \\ \hat{y}(t) &= B_1 \exp^{\lambda_1 t} + B_2 \exp^{-\lambda_1 t} + B_3 \exp^{i\omega t} + B_4 \exp^{-i\omega t}\end{aligned}\tag{4.8}$$

Estuda-se o movimento na coordenada  $\hat{x}(t) = A_1 \exp^{\lambda_1 t} + A_2 \exp^{-\lambda_1 t} + A_3 \exp^{i\omega t} + A_4 \exp^{-i\omega t}$ . O movimento total fica instável causando um espiralamento ao redor de  $L_2$ , como visto na figura 4.2. A Figura 4.2a mostra o comportamento do sistema quando  $A_1 \neq 0$  e  $A_2 = A_3 = A_4 = 0$ . Nota-se que  $x(t)$  cresce exponencialmente e  $\hat{x}(t)$  decresce exponencialmente. A Figura 4.2b mostra o comportamento do sistema quando  $A_2 \neq 0$  e  $A_1 = A_3 = A_4 = 0$  e a Figura 4.2c mostra o comportamento quando  $A_1 = A_2 = 0$ ,  $A_3 \neq 0$  e  $A_4 \neq 0$ . Nota-se que  $\hat{x}(t)$  apresenta um comportamento oscilatório sem tender a zero ou a infinito. A Figura 4.2d mostra o sistema no caso mais geral, onde todos os  $A_i \neq 0$ . O resultado é uma combinação dos anteriores, com  $\hat{x}(t)$  tendendo ao infinito quando o tempo cresce. A Figura 4.2e mostra esse resultado em forma de trajetória de uma partícula sujeita as condições iniciais genéricas  $A_i \neq 0$ . Note que a partícula descreve uma espiral que escapa do ponto  $L_2$ . A mesma situação ocorre para os demais pontos lagrangianos

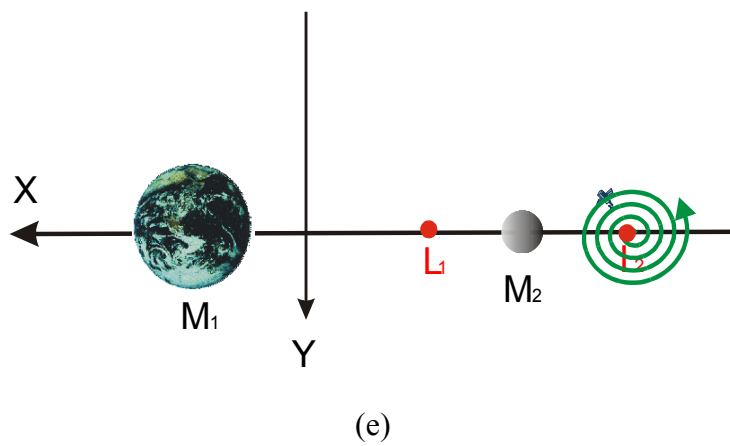
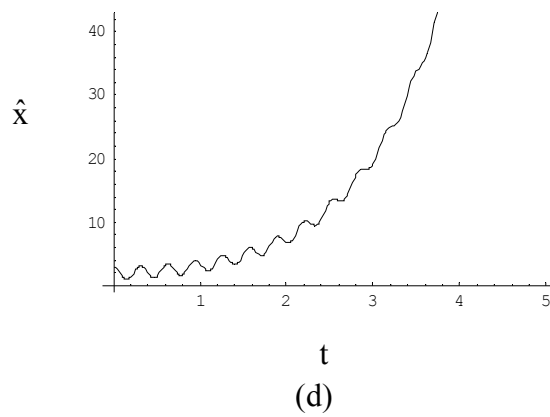
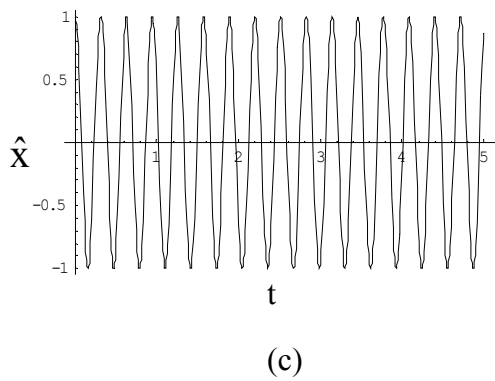
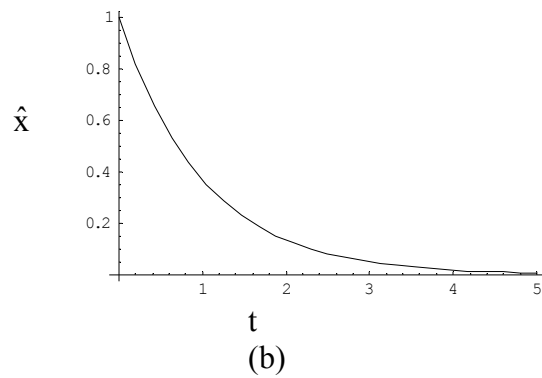
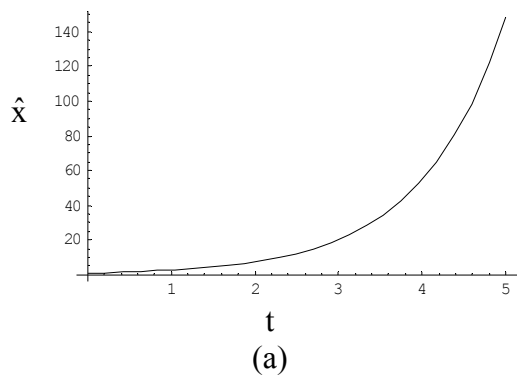


FIGURA 4.2 – Evolução de  $\hat{x}(t)$  com o tempo para diversos valores das condições iniciais.

Para anular a componente exponencial de tal forma que o movimento fique estável precisa-se de condições iniciais tais que eliminem os termos devidos aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Para que isso aconteça, é preciso que a solução satisfaça:  $(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \dot{\hat{x}}_0, \dot{\hat{y}}_0) = (\hat{x}_0, 0, 0, -K_1 \hat{x}_0)$ , onde  $K_1$  é uma constante de proporcionalidade. Assim a solução no plano x-y fica:  $\hat{x}(t) = A_x \exp^{i\omega t}$ ,  $\hat{y}(t) = A_y \exp^{i\omega t}$  com movimentos periódicos com diferentes amplitudes, formando uma elipse ao redor do  $L_2$ . A Figura 4.3a ilustra este fato.

Analisa-se o movimento completo em três dimensões, e nota-se que as frequências dos movimentos no plano e fora do plano são diferentes, fazendo com que as órbitas não fiquem periódicas no plano x-z, que é a visão das trajetórias a partir da Terra. Essas trajetórias ficam quase-periódicas (eclipsadas ao redor da Lua, no caso de sistema Terra-Lua), conforme mostrado na Figura 4.3b.

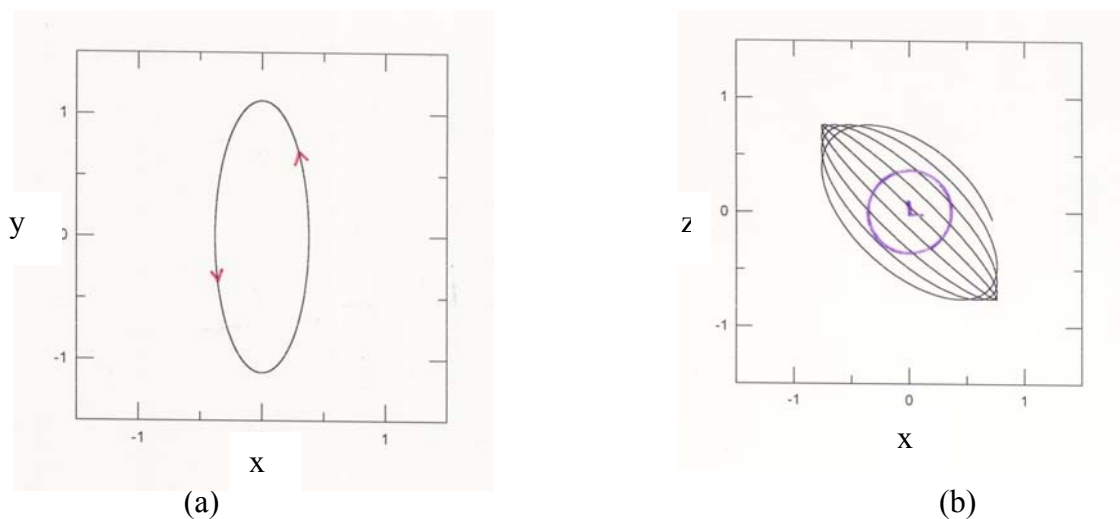


FIGURA 4.3 – Trajetórias para condições iniciais que eliminam os termos exponenciais.

Só é possível obter uma solução periódica no sistema não linear em uma situação onde as frequências sejam iguais. Essas trajetórias são denominadas de órbitas do tipo Halo.



A Figura 4.4 mostra a evolução das duas frequências  $\omega$  (movimento no plano) e  $\nu$  (movimento fora do plano) em função da amplitude linear em  $z$  ( $\beta$ ). Nota-se que existe um ponto onde  $\omega = \nu$ , que geram as chamadas órbitas do tipo Halo.

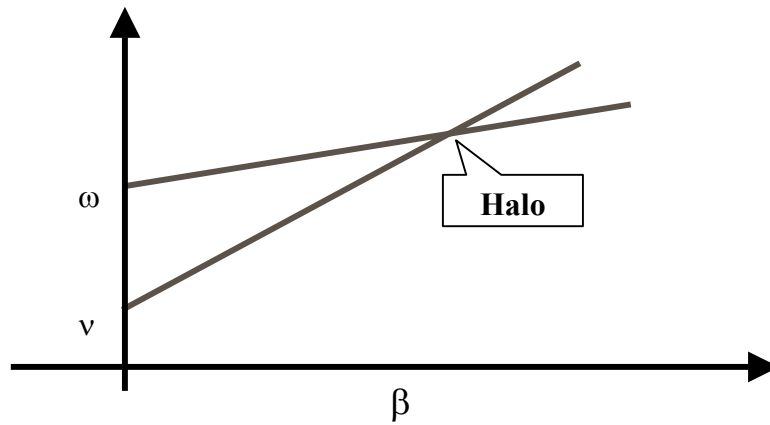


FIGURA 4.4 – Evolução de frequência do movimento plano e fora do plano em função de  $\beta$ .



## CAPÍTULO 5

### DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS DO TIPO HALO

#### 5.1 – Equações de Movimento

Para a determinação de órbitas do tipo Halo no problema restrito circular de três corpos utiliza-se um método analítico clássico conhecido como método de Lindstedt-Poincaré. Sua vantagem principal em relação a outras aproximações analíticas é a simplicidade e alta precisão.

Considera-se a vizinhança dos pontos colineares. O maior interesse está em órbitas periódicas. Introduce-se uma transformação de coordenadas  $(x,y,z)$  para novas variáveis centradas ao redor dos pontos lagrangianos  $L_i (x^*, y^*, z^*)$ . As equações que executam essa transformação são dadas por:

$$\begin{aligned}x &= -\gamma_i x^* + \mu + A \\y &= -\gamma_i y^* \\z &= \gamma_i z^*,\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde  $x^* = x + x_0$ ,  $y^* = y$ ,  $z^* = z$ ,  $\gamma_i$  é a distância de  $L_i$  para o primário mais próximo,  $A = -1 + \gamma_1$  para  $L_1$  e  $A = -1 - \gamma_2$  (para  $L_2$ ). Em termos destas novas variáveis, as equações de movimento podem ser escritas como (veja Szebehely, 1967):

$$\begin{aligned}
\ddot{x}^* - 2\dot{y}^* &= x^* - (1-\mu)\frac{(x^* - \mu)}{r_1^3} - \mu\frac{(x^* + 1 - \mu)}{r_2^3} \\
\ddot{y}^* + 2\dot{x}^* &= y^* - \frac{(1-\mu)}{r_1^3}y^* - \frac{\mu}{r_2^3}y^* \\
\ddot{z}^* &= -\frac{(1-\mu)}{r_1^3}z^* - \frac{\mu}{r_2^3}z^*
\end{aligned} \tag{5.2}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\mu &= m_2/(m_1 + m_2) \\
r_1^2 &= (x^* - \mu)^2 + y^{*2} + z^{*2} \\
r_2^2 &= (x^* + 1 - \mu)^2 + y^{*2} + z^{*2}
\end{aligned}$$

Desenvolvem-se as condições não lineares no lado direito, expandindo-as como funções dos polinômios de Legendre  $P_n$ . Assim:

$$\frac{1}{\sqrt{(x^* - a)^2 + (y^* - b)^2 + (z^* - c)^2}} = \frac{1}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n\left(\frac{ax^* + by^* + cz^*}{D\rho}\right) \tag{5.3}$$

com  $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$  e  $\rho^2 = x^{*2} + y^{*2} + z^{*2}$ , sendo que a, b, e c são os pontos onde a expansão é feita.

Depois de alguns cálculos diretos (Richardson, 1980a) escreve-se as equações de movimento para a partícula de menor massa em séries de potências das coordenadas, como:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}^* - 2\dot{y}^* - (1 + 2c_2)x^* &= \sum_{n \geq 2} (n+1)c_{n+1} T_n(x^*, y^*, z^*) \\
\ddot{y}^* + 2\dot{x}^* + (c_2 - 1)y^* &= y^* \sum_{n \geq 2} c_{n+1} R_{n-1}(x^*, y^*, z^*) \\
\ddot{z}^* + c_2 z^* &= z^* \sum_{n \geq 2} c_{n+1} R_{n-1}(x^*, y^*, z^*)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

onde os coeficientes  $c_n$  são dados por:  $c_n(\mu) = \frac{1}{\gamma_i^3} \left( (\pm 1)^n \mu + (-1)^n \frac{(1-\mu)\gamma_i^{n+1}}{(1 \mp \gamma_i)^{n+1}} \right)$  e o sinal superior é usado para  $L_1$  e o inferior para  $L_2$ . Obtém-se as funções  $R_n(x^*, y^*, z^*)$  e  $T_n(x^*, y^*, z^*)$  pelas relações de recorrência seguintes:

$$\begin{aligned} R_n &= -\frac{2n+2}{n+2} T_n + \frac{2n+3}{n+2} x^* R_{n-1} - \frac{2n+1}{n+2} \rho^2 R_{n-2} \\ T_n &= \frac{2n-1}{n} x^* T_{n-1} - \frac{n-1}{n} \rho^2 T_{n-2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

com os valores iniciais  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = x^*$  e  $R_0 = 1$ ;  $R_1 = -3x^*$ .

A Equação (5.4) constitui a expressão final na vizinhança do ponto de equilíbrio  $L_i$  para o movimento de uma partícula de massa desprezível. Nota-se que o lado direito contém somente termos não lineares e que a expansão em polinômios de Legendre Eq. (5.3) só é convergente para valores de  $\rho < 1$ . Isto constitui um limite para os possíveis valores das amplitudes das órbitas Halo determinados por esta aproximação; e é um dos pontos negativos do método escolhido.

## 5.2 - O Método de Lindstedt-Poincaré

Provavelmente, entre as várias técnicas de perturbação aplicadas ao problema de determinação de órbitas do tipo Halo, a mais simples e mais direta é o método de Lindstedt. Ao contrário de outras aproximações, não requer conhecimento extenso dos métodos de perturbações Hamiltonianos ou o desenvolvimento e uso de softwares complexos de cálculo algébrico. Embora o tamanho das fórmulas possa parecer incômodo a princípio, elas são muito facilmente entendidas e, uma vez que se sabe a base do método, pode-se reproduzi-lo e entendê-lo com pouca dificuldade.

A idéia básica do método é mostrada a seguir. A partir do sistema linearizado e zerando todos os membros da direita da Equação (5.4), determina-se a solução linear como:

$$\begin{aligned} x^* &= \alpha \exp^{i\omega_0 t} \\ y^* &= \kappa \alpha \exp^{i\omega_0 t} \\ z^* &= \beta \exp^{iv_0 t} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Onde:

$\omega_0, v_0$  são as frequências de movimento linear planar e fora do plano;

$\alpha, \beta$  são as amplitudes (em notação complexa) no eixo x e z, respectivamente.

$\kappa$  é uma constante que relaciona a amplitude no eixo y com a amplitude no eixo x.

Sabe-se que a inclusão de termos não lineares (como por exemplo, o lado direito da Equação (5.4)) renderá uma solução que conterà contribuições de ambos os movimentos lineares no plano, como também o movimento linear no eixo z. Assim, escreve-se a solução geral como uma série de Fourier do tipo:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \sum_{i,j,k,l} \begin{pmatrix} x_{i,j,k,l} \\ y_{i,j,k,l} \\ z_{i,j,k,l} \end{pmatrix} \alpha^i \beta^j \exp^{\sqrt{-1}(k\omega + lv)t} \quad (5.7)$$

em termos dos novos coeficientes complexos  $x_{i,j,k,l}, y_{i,j,k,l}, z_{i,j,k,l}$ . Supõem-se expansões semelhantes para os coeficientes no lado direito. Obtém-se os valores dos coeficientes da Equação (5.7) introduzindo estas séries nas equações diferenciais originais, identificando os termos de iguais potências em  $\alpha$  e  $\beta$  e resolvendo as equações algébricas resultantes. As novas frequências (também afetada pelos termos não lineares) podem ser obtidas como série de potências das amplitudes lineares  $\alpha, \beta$  na forma:

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{i,j} \omega_{i,j} \alpha^i \beta^j \\ v &= \sum_{i,j} v_{i,j} \alpha^i \beta^j\end{aligned}\tag{5.8}$$

onde:  $\omega_{0,0} = \omega_0, v_{0,0} = v_0$ .

As soluções gerais quasi-periódicas, com  $\omega \neq v$ , são chamadas de órbitas de Lissajous e são de importância prática limitada, dado que elas cruzam periodicamente a linha de visão entre os dois primários. Consideram-se as órbitas halo como um caso particular das trajetórias de Lissajous ( $\omega = v$ ). Infelizmente, órbitas periódicas, embora presentes no sistema não linear, não existem no sistema linear. Assim, ao utilizar o método de Lindstedt-Poincaré, tem-se que reformular o sistema de equações originais (Eq. (5.4)). Isto pode ser realizado introduzindo uma nova função  $\Delta$  e reescrevendo as equações diferenciais como:

$$\begin{aligned}\ddot{x}^* - 2\dot{y}^* - (1 + 2c_2)x^* &= \sum_{n \geq 2} (n+1)c_{n+1} T_n(x^*, y^*, z^*) \\ \ddot{y}^* + 2\dot{x}^* + (c_2 - 1)y^* &= y^* \sum_{n \geq 2} c_{n+1} R_{n-1}(x^*, y^*, z^*) \\ \ddot{z}^* + (c_2 - \Delta)z^* &= z^* \sum_{n \geq 2} c_{n+1} R_{n-1}(x^*, y^*, z^*)\end{aligned}\tag{5.9}$$

Expande-se a função  $\Delta$  em série de potências das amplitudes, na forma  $\Delta = \sum_{i,j} \Delta_{i,j} \alpha^i \beta^j$ . Os termos lineares  $\Delta_{1,0}, \Delta_{0,1}$  são agora escolhidos para gerar uma órbita periódica no sistema linear. As condições de alta-ordem  $\Delta_{i,j}$  são finalmente escolhidas para garantir  $\Delta = 0$  (Gomez *et al.*, 1998; Andreu e Simó, 1999; Gomez *et al.* 2000).

### 5.3 - Resultados da Determinação de Órbitas Halo

Implementa-se e aplica-se o método de Lindstedt-Poincaré inicialmente aos sistemas Terra-Lua e Sol-Terra. Em cada sistema geram-se várias órbitas Halo para valores diferentes da amplitude linear  $\beta$ . A Figura 5.1 mostra a visão tridimensional para o

sistema Terra-Lua. A Figura 5.2 mostra as mesmas visões no sistema Sol-Terra. Os valores usados para  $\beta$  variaram de 0,1 a 0,9 em passos de 0,1. A Figura 5.3 mostra a variação da frequência não-linear  $\omega$  como uma função de  $\beta$ . Nota-se que o período das órbitas Halo é muito sensível com respeito a esta amplitude, embora existam regiões com valores quase constantes.

O valor da amplitude é significativamente mais alto para o sistema Terra-Lua que para o sistema Sol-Terra. A Figura 5.4 mostra a amplitude na direção x, denominada de  $\alpha$ , como função da amplitude na direção z, denominada de  $\beta$ , para os sistemas considerados.

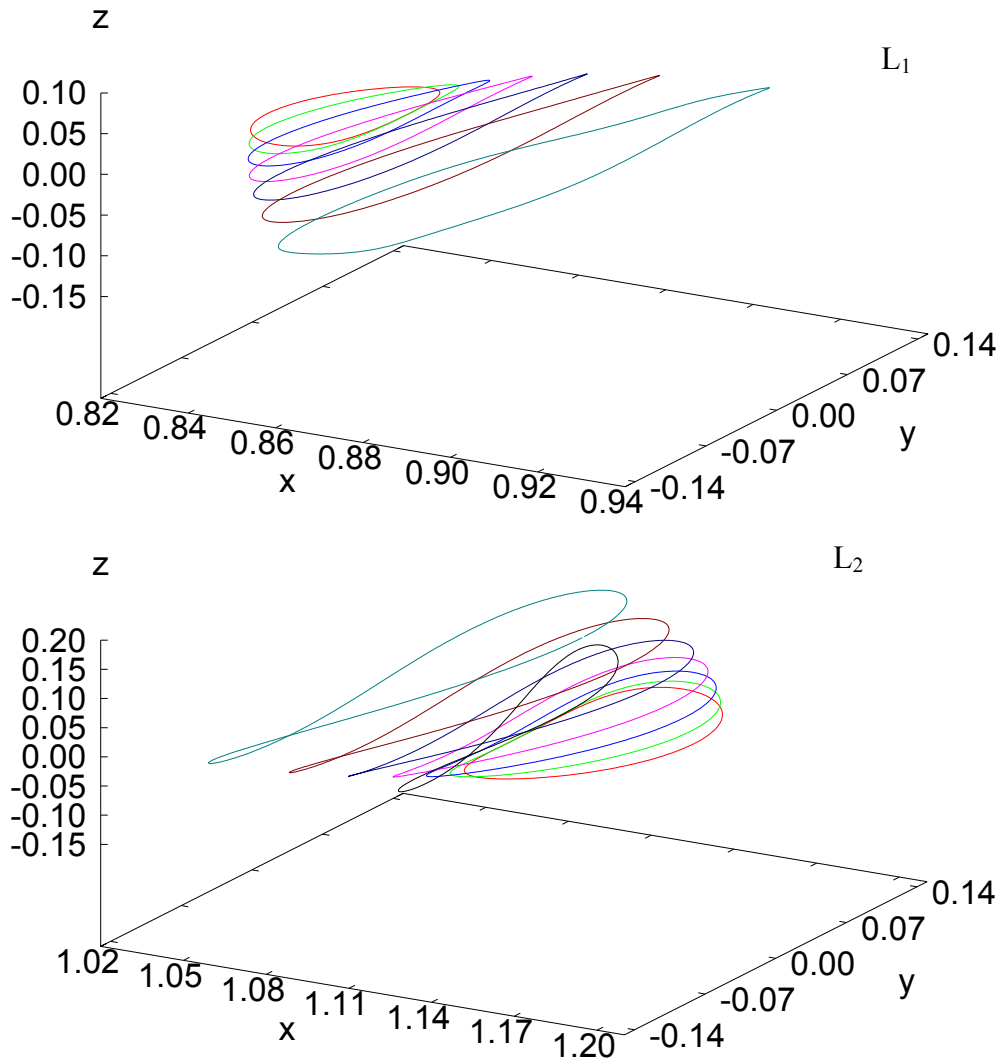


FIGURA 5.1 - Órbitas Halo no sistema Terra-Lua em torno de  $L_1$  e  $L_2$  (3-D).



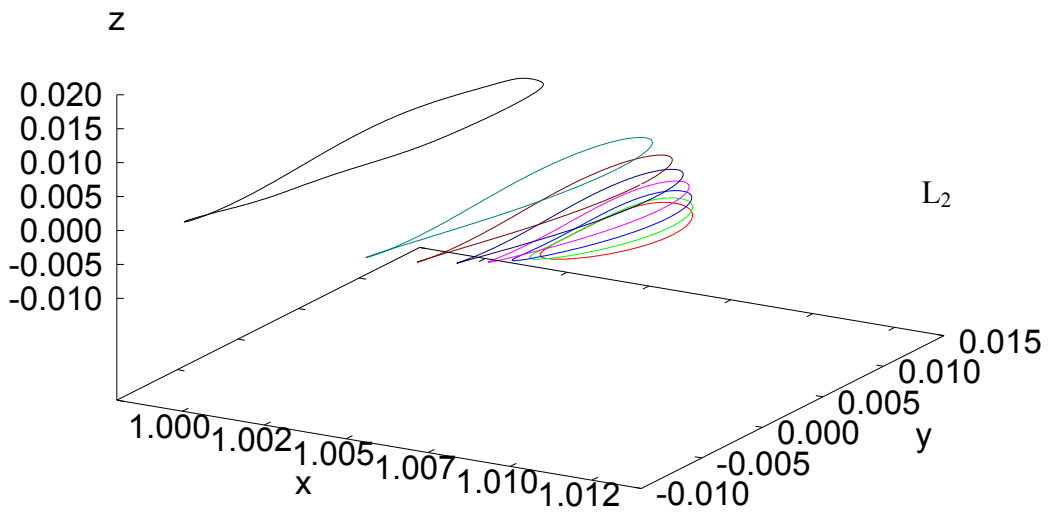
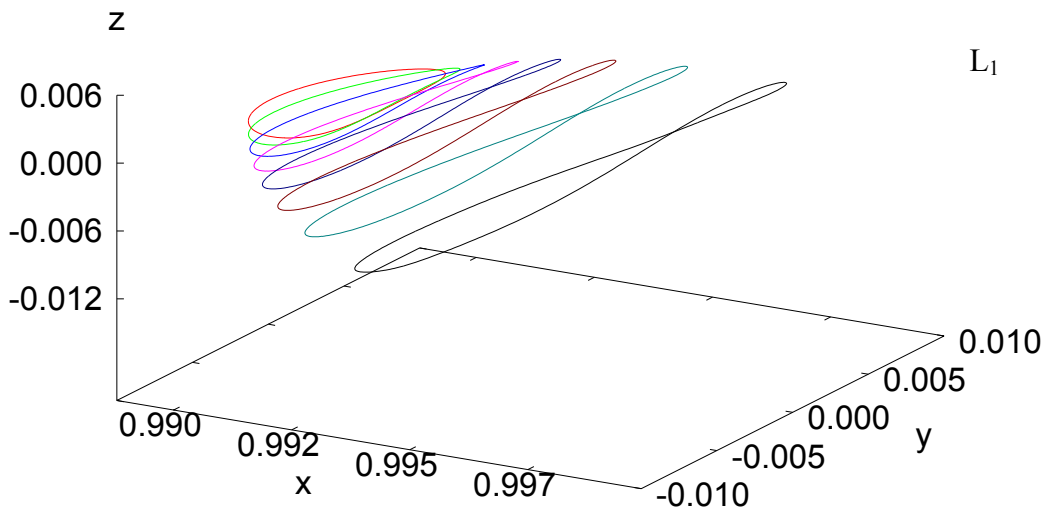


FIGURA 5.2 – Órbitas Halo no sistema Terra-Sol em torno de  $L_1$  e  $L_2$ .(3-D).

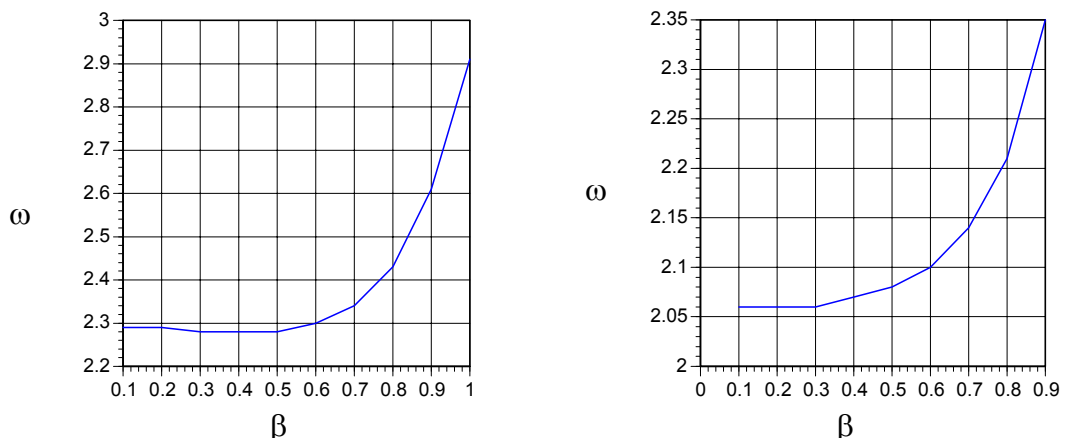


FIGURA 5.3 – Frequência das órbitas Halo em função de  $\beta$  para o sistema Terra-Lua e Sol-Terra em  $L_1$ .

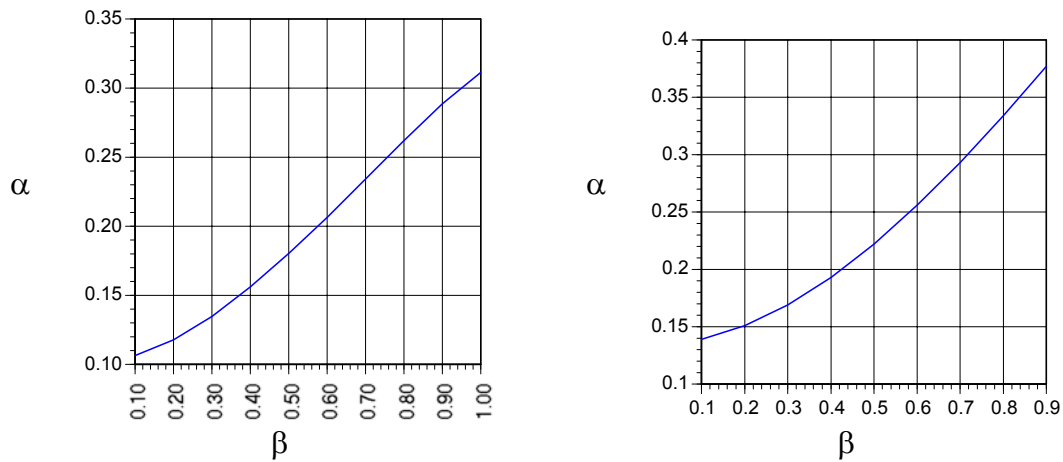


FIGURA 5.4 - Amplitude na direção x ( $\alpha$ ) da órbita Halo como uma função de  $\beta$  para o sistema Terra-Lua (esquerda) e sistema Sol- Terra (direita) em  $L_1$ .

Outra característica visível nos resultados mostrados é que no sistema Sol-Terra as trajetórias são mais próximas uma das outras que no sistema Terra-Lua. Este fato acontece porque a massa da Lua (no sistema de Terra-Lua) relativa à massa total do sistema é maior que a massa da Terra (no sistema de Sol-Terra) e como uma consequência do campo gravitacional mais forte nas trajetórias.

#### 5.4 - Comparação com Simulações Numéricas

Na presente seção, determinam-se várias soluções com a aproximação analítica e conferem-se estes resultados com a integração numérica exata do problema restrito de três corpos. São mostrados os resultados desta comparação nas Figuras 5.5 e 5.6 para valores diferentes de  $\beta$  para o sistema Sol-Terra. Para efetuar essa comparação, as condições iniciais das órbitas geradas pela estimacão analítica foram utilizadas na integração numérica, como mostrado na Tabela 5.1. A Figura 5.5 mostra a diferença entre as duas órbitas, como função do tempo. Esta diferença é calculada a cada instante de tempo por:

$$\delta = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 + \delta v_x^2 + \delta v_y^2 + \delta v_z^2} \quad (5.10)$$

onde  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  são as diferenças nas componentes do vetor de posição entre a trajetória dada pela aproximação analítica e a trajetória dada pela integração numérica e  $\delta v_x$ ,  $\delta v_y$ ,  $\delta v_z$  são as diferenças nas componentes do vetor velocidade entre as mesmas trajetórias. A Figura 5.6 mostra ambas as órbitas sobrepostas como função do tempo. Em alguns casos, as órbitas estão muito próximas e é difícil notar a diferença visualmente. As órbitas na cor verde representam a órbita analítica, enquanto as outras cores que estão sobrepostas representam as órbitas numéricas. Cada figura mostra uma família de órbitas gerada pelas mesmas condições iniciais, mas integradas por períodos diferentes de tempo. Os números escritos à direita do gráfico representam o tempo de integração de cada trajetória, em unidades canônicas (uma unidade canônica de tempo é definida de tal forma que o período da órbita seja  $2\pi$ ). Utiliza-se este procedimento para determinar o tempo necessário para que a órbita numérica seja destruída.

Vê-se claramente que a precisão do método analítico diminui para valores maiores de  $\beta$ . Isto é esperado, porque o tamanho das contribuições não lineares é uma função direta da amplitude. Entretanto, até mesmo para valores médios ou grandes para a amplitude a aproximação obtida pelo método de Lindsted-Poincaré é muito boa. A Figura 5.5 traz como contribuição à medida qualitativa exata da precisão do método analítico.

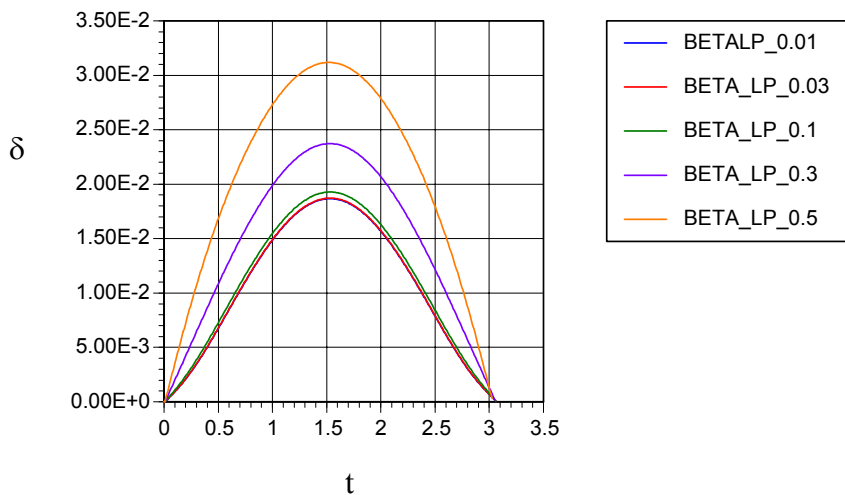


FIGURA 5.5 - Diferença entre as duas órbitas (analítica e numérica) como função do tempo.

TABELA 5.1 - Condições Iniciais para a Determinação Numérica das Órbitas Halo.

$\beta$	x	y	z	V <sub>x</sub>	V <sub>y</sub>	V <sub>z</sub>
0,001	0,99157554734	0,0	9,0149765894E-06	0,0	-9,6249693186E-03	0,0
0,080	0,99163263281	0,0	7,1958795106E-04	0,0	-9,8215128808E-03	0,0
0,160	0,99180293191	0,0	1,4296614307E-03	0,0	-1,0399300193E-02	0,0
0,320	0,99247762574	0,0	2,7858992324E-03	0,0	-1,2581597747E-02	0,0
0,640	0,99541222292	0,0	4,9302278628E-03	0,0	-2,0992270858E-02	0,0
0,900	1,00165070150	0,0	4,2713112045E-03	0,0	-3,9239020331E-02	0,0

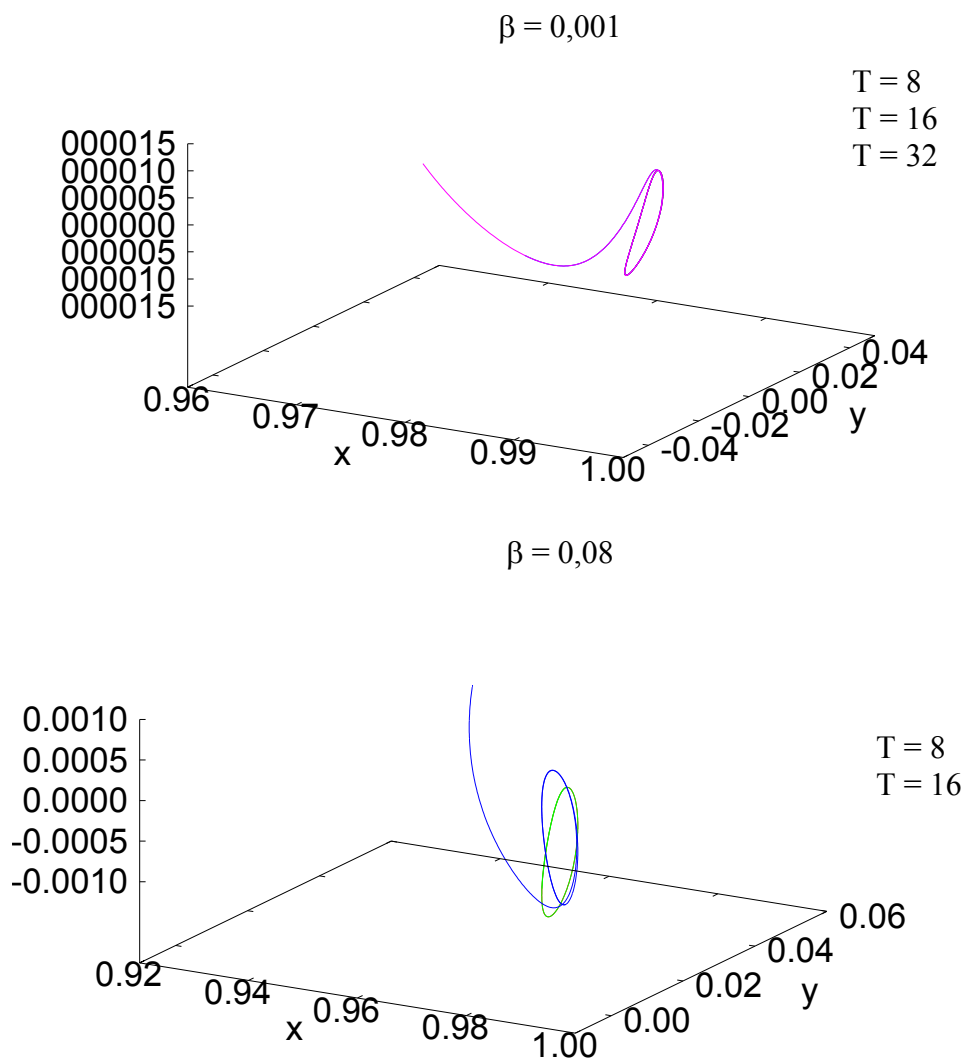


FIGURA 5.6 – Trajetórias análticas e numéricas para  $\beta = 0,01; 0,08; 0,16; 0,32; 0,64; 0,90$ .

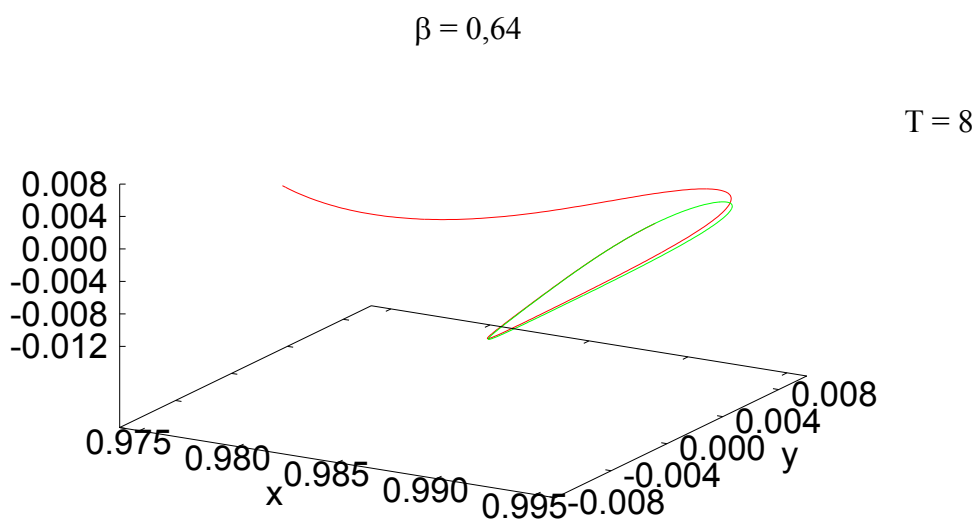
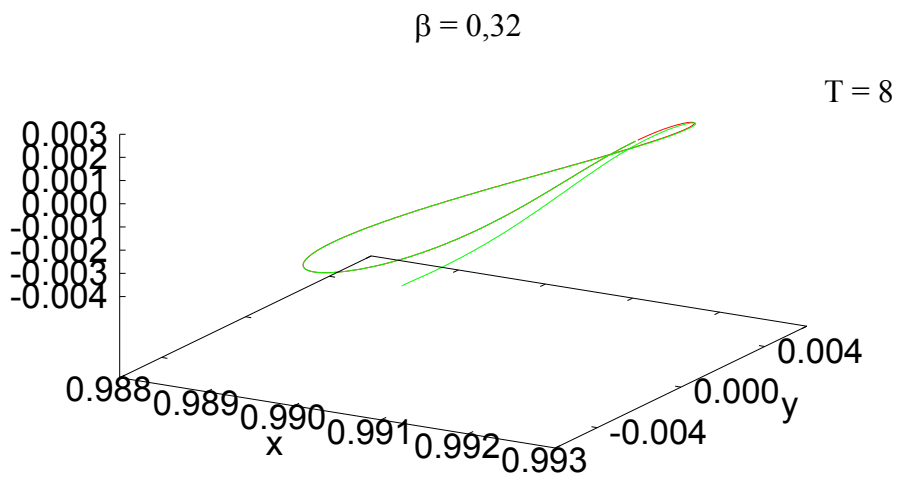
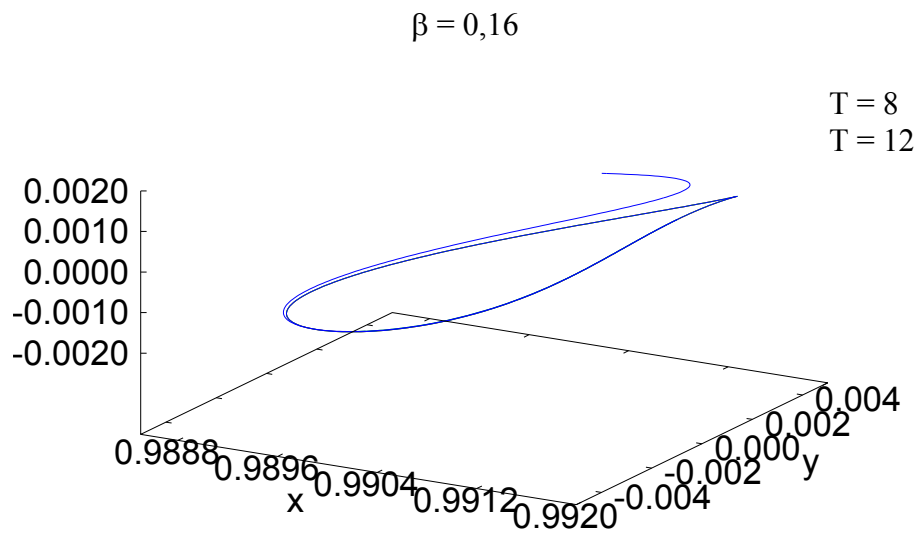


FIGURA 5.6 – (Continuação) (Continua).

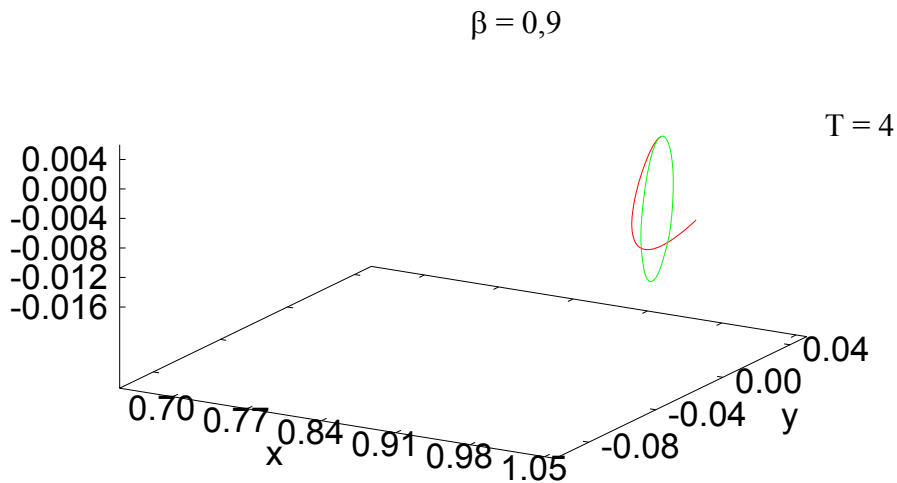


FIGURA 5.6 – ( Conclusão ).

É importante ter em mente que estas órbitas periódicas são instáveis. Assim sendo, qualquer discrepância nas condições iniciais faz com que o erro cresça exponencialmente com o tempo. Por isto, a proximidade entre as soluções analíticas e numéricas para três revoluções completas é mais do que suficiente. Estes testes de precisão não foram encontradas na literatura para comparação.

### 5.5 - Variação do Parâmetro de Massa nas Famílias de Órbitas Halo

Determinam-se agora as famílias de órbitas do tipo Halo para outros sistemas de primários. Para os casos reais do sistema solar (Sol-Jupiter, Sol-Saturno, etc.) essa tarefa não foi realizada na literatura.

Para realizar essa tarefa deve-se especificar o sistema de primários através do parâmetro gravitacional  $\mu$  (razão das massas dos dois primários) e, a partir daí, utilizar o método descrito na seção anterior. Obtem-se então órbitas Halo para diversos sistemas em torno dos pontos Lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$ . Em cada sistema geram-se várias órbitas Halo para valores diferentes da amplitude linear  $\beta$ .

Efetuem-se então as determinações para sistemas reais do Sistema Solar. A Tabela 5.2 abaixo mostra os sistemas utilizados e seu respectivo parâmetro de massa. Para as determinações utilizam-se valores entre 0,01 e 0,08 para a amplitude linear na direção z, com incremento de 0,04 entre valores sucessivos.

TABELA 5.2 – Sistemas de Primários e seus Parâmetros.

$\mu$	Sistema
$3,040423398 \times 10^{-6}$	Sol-Terra
0,012150	Terra-Lua
$9,5387537 \times 10^{-4}$	Sol-Jupiter
$2,85795941 \times 10^{-4}$	Sol-Saturno
$1,66013799106 \times 10^{-7}$	Sol- Mercúrio
$2,44783386513 \times 10^{-6}$	Sol-Venus
$3,22714933125 \times 10^{-7}$	Sol- Marte
$4,3552109843 \times 10^{-5}$	Sol-Urano
$7,69257194456 \times 10^{-9}$	Sol-Plutão

A seguir generaliza-se o valor do parâmetro de massa para cobrir os valores 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 e 0,5.

Para o parâmetro  $\beta$  (amplitude linear na direção z) utilizam-se valores entre 0,01 e 0,9, em intervalos de 0,02. O método não convergiu para valores maiores que 0,9 devido as restrições, já citadas anteriormente, quanto a amplitude  $\beta$ , pois existe um aumento muito grande na parte não-linear desprezada na formulação do método.

A Figura 5.7 mostra a visão tridimensional para trajetórias no sistema Sol-Júpiter em torno de  $L_1$  e  $L_2$ . A Figura 5.8 mostra a mesma visão no sistema Sol-Saturno. Os valores usados para  $\beta$  variaram de 0,1 a 0,9. A Figura 5.9 representa as famílias de órbitas no sistema Sol-Júpiter e Sol-Saturno para  $L_1$  e  $L_2$ , mostradas em função dos parâmetros  $x_{max}$  e  $z_{max}$ . Esta forma de representar gera uma economia de espaço para identificação de famílias completas, e foi anteriormente utilizada em Howell (1984b).

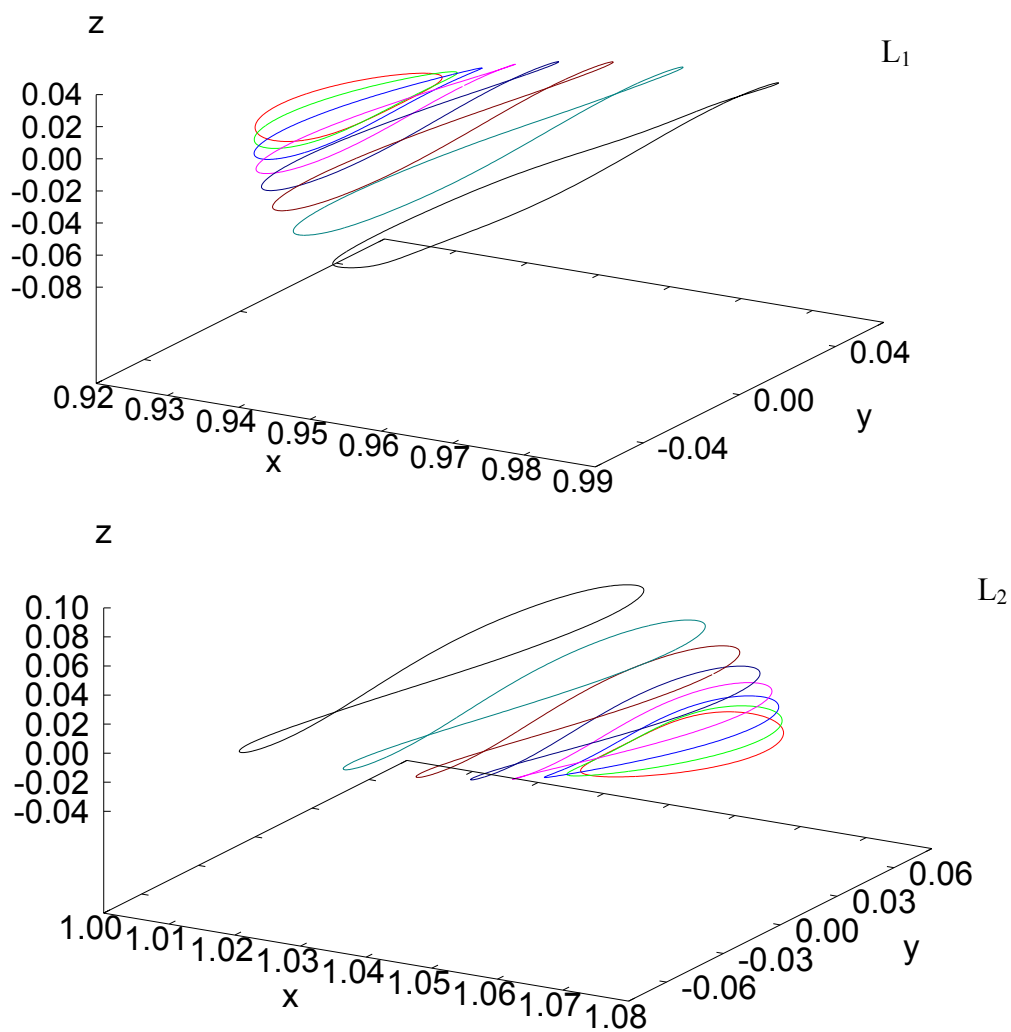


FIGURA 5.7 – Visão tridimensional para órbitas Halo no sistema Sol-Júpiter em torno de L<sub>1</sub> e L<sub>2</sub>.



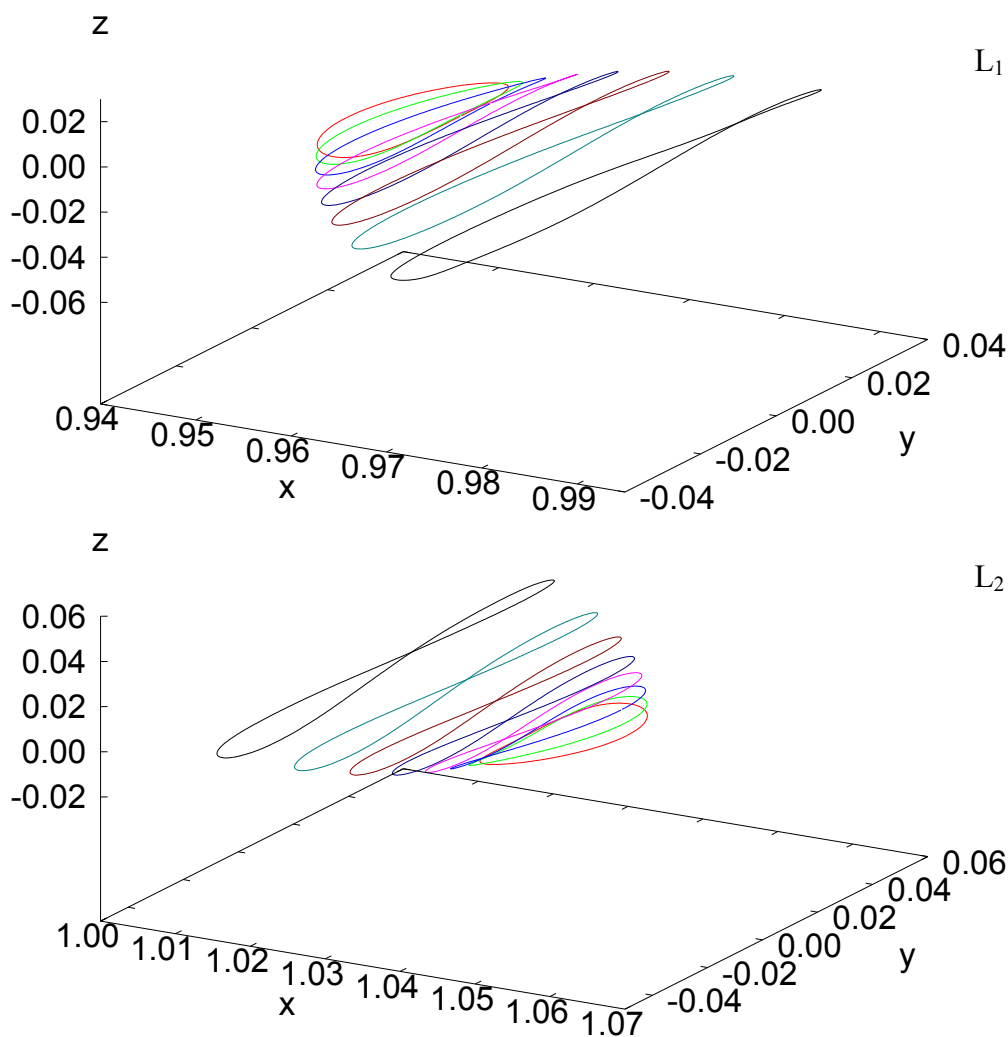


FIGURA 5.8 – Visão tridimensional para órbitas Halo no sistema Sol-Saturno em torno de  $L_1$  e  $L_2$ .

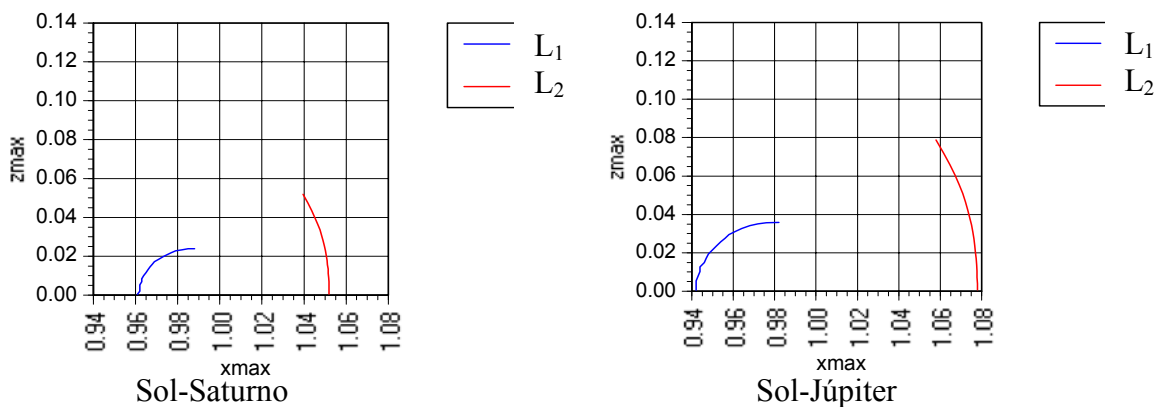


FIGURA 5.9 – Famílias de órbitas Halo nos sistemas Sol-Saturno e Sol-Júpiter em torno de  $L_1$  e  $L_2$ .

A seguir mostram-se órbitas do tipo Halo para os diversos sistemas em um mesmo gráfico simulados em função de  $x_{max}$  e  $z_{max}$  para os pontos  $L_1$ , como visto na Figura 5.10, e  $L_2$  e na Figura 5.11.

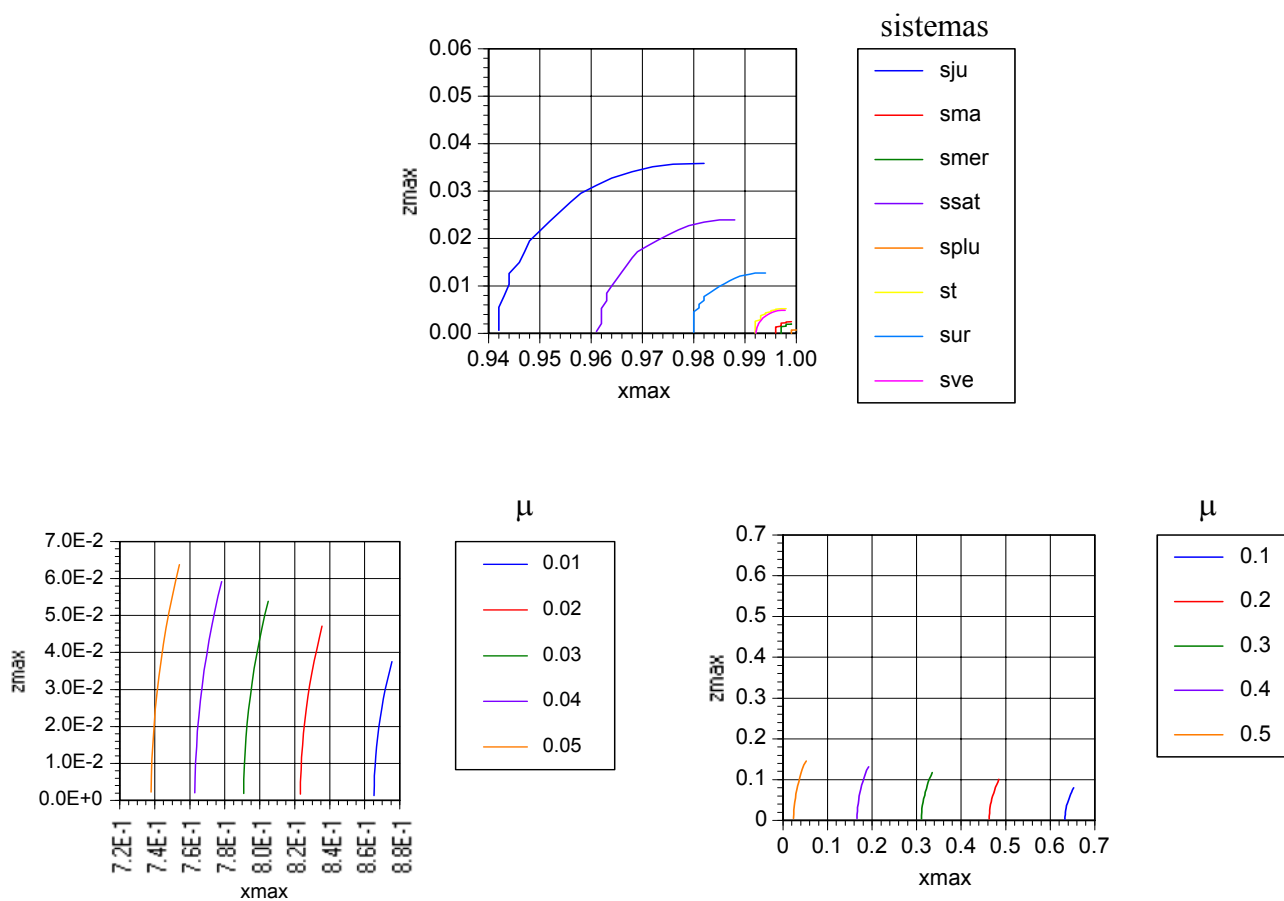


FIGURA 5.10 – Órbitas Halo em torno de  $L_1$  para diferentes sistemas.

A legenda indica os valores de  $\mu$ , onde:

- Sju = sistema Sol-Júpiter
- Sma = sistema Sol-Marte
- Smer = sistema Sol-Mercúrio
- Ssat = sistema Sol-Saturno
- Splu = sistema Sol-Plutão
- St = sistema Sol-Terra
- Sur = sistema Sol-Urano
- Sve = sistema Sol-Venus

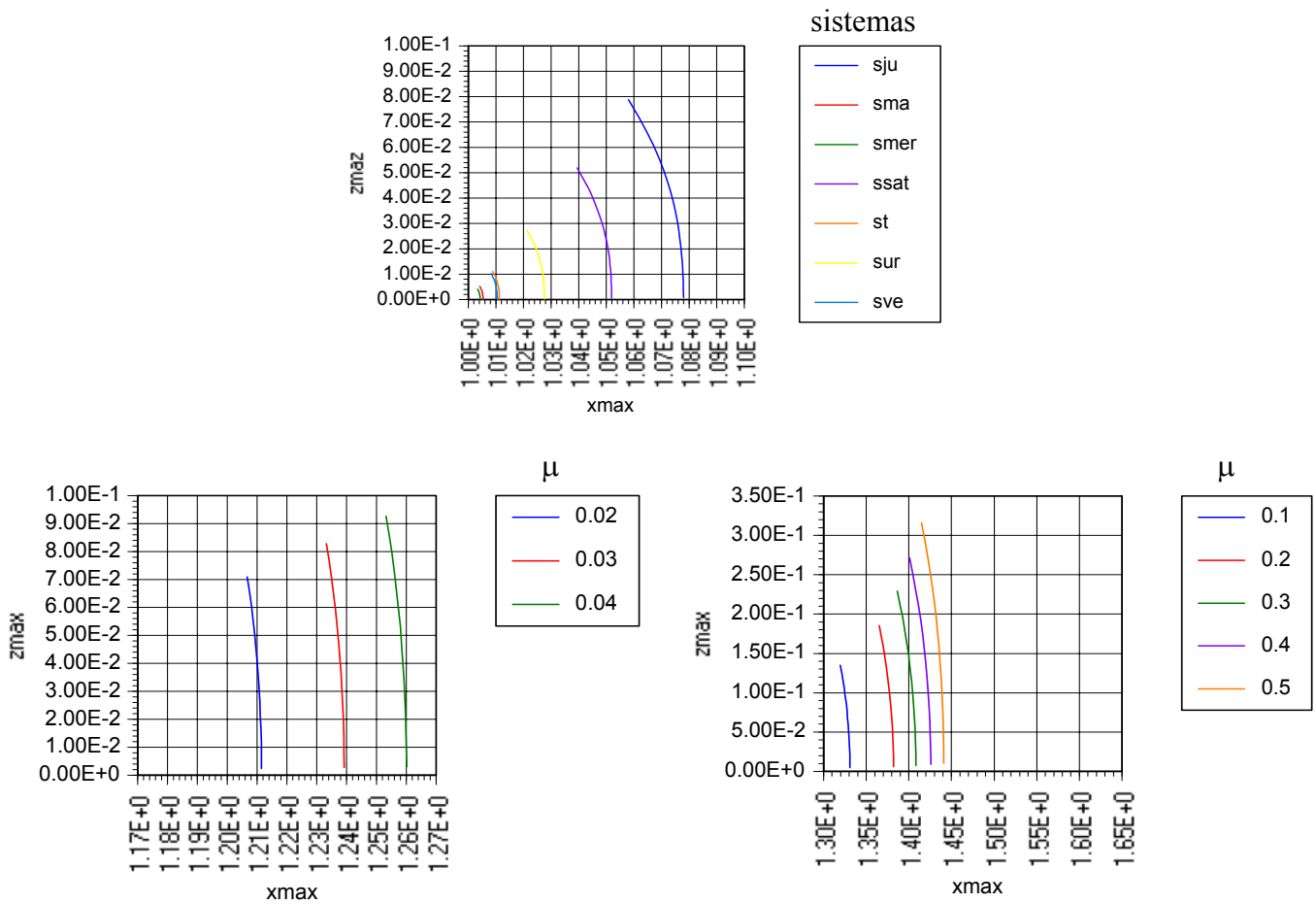


FIGURA 5.11 - Órbitas Halo em torno de  $L_2$  para diferentes sistemas.

## 5.6 – Conclusões

O método de Lindsted-Poincaré foi aplicado com sucesso para a obtenção de órbitas do tipo Halo em sistema de primários formados pelo Sol e cada um de seus planetas do Sistema Solar. Estes resultados são novos na literatura e as órbitas encontradas podem ser utilizadas em missões interplanetárias de pesquisa científica e como base para missões aos planetas do sistema solar exterior. A forma de apresentação utilizada ( $z_{max}$  vs  $x_{max}$ ) é bastante eficiente em termos de economia de espaço. Howell (1984b) produziu resultados equivalentes para alguns valores de  $\mu$  e estudou a estabilidade das órbitas obtidas. Os resultados aqui obtidos generalizam esses resultados e são similares

quando os mesmo valores são utilizados. Ainda são úteis para as missões interplanetárias.

## CAPÍTULO 6

### MANOBRAS ORBITAIS ENVOLVENDO ORBITAS HALO

#### 6.1 – Introdução

Fazer uma transferência de órbita é transladar um veículo espacial de um ponto para outro no espaço entre órbitas diferentes.

A transferência torna-se necessária quando ocorrem erros nos parâmetros nominais da órbita do satélite, na sua injeção, fazendo com que o mesmo seja colocado em uma trajetória diferente da pré-estabelecida. Ou ainda, esta transferência pode estar prevista na própria missão; pois às vezes é mais fácil colocar o satélite em uma órbita intermediária e depois transferi-lo para uma órbita desejada, do que colocá-lo diretamente na órbita pretendida.

O interesse em fazer uma otimização de manobras de transferência se baseia no consumo de combustível e/ou no tempo gasto para a realização das mesmas.

Depois de encontrar um conjunto de condições iniciais  $(x, y, z, V_x, V_y, V_z)$  que permite que o veículo espacial entre em uma órbita Halo ao redor dos pontos Lagrangianos, é necessário considerar o problema de manobras orbitais, tanto entre duas órbitas do tipo Halo, como entre uma órbita de estacionamento em torno da Terra até uma órbita do tipo Halo, uma órbita do tipo Halo até a Lua e ainda promover o encontro de veículos espaciais.

Existe uma grande quantidade de trabalhos na literatura que abordam esse tópico, conforme mostrado na revisão bibliográfica do Capítulo 2. A grande maioria delas aborda o problema de transferência com tempo livre e com o objetivo de minimizar o consumo de combustível requerido pela manobra. Neste capítulo será considerado o problema de transferir um veículo espacial entre duas órbitas do tipo Halo, com o

objetivo de minimizar o combustível consumido, mas com o tempo da manobra fixo. Esse vínculo adicional de tempo fixo muda a abordagem a ser utilizada e se constitui em uma nova abordagem do problema. Para estudar esta questão será utilizado o Problema de Lambert dentro do problema restrito de três corpos (Gooding, 1990; Prado e Broucke, 1996), que é descrito abaixo, juntamente com alguns conceitos básicos necessários a apresentação deste trabalho.

## 6.2 - Manobras Orbitais

Manobras orbitais são as tarefas de transferência e correções nos elementos orbitais para se colocar e/ou manter um veículo espacial em uma órbita especificada.

Para se transferir um satélite para uma órbita circular em uma altitude elevada, pode-se lançá-lo primeiramente em uma órbita mais baixa (ao alcance do lançador) e depois transferi-lo para órbitas mais altas. Existem diversas formas para atingir esse objetivo, a mais conhecida delas sendo a Transferência de Hohmann (ver Figura 6.1) (Hohmann, 1925).

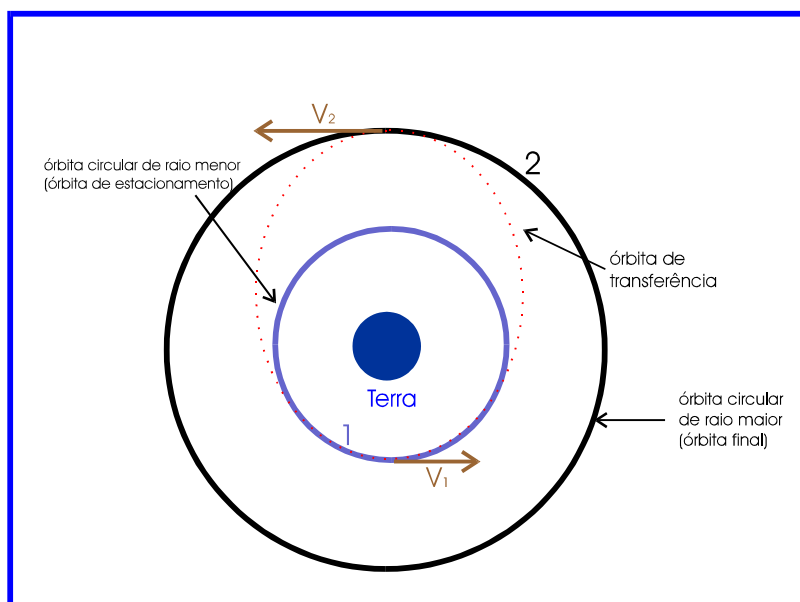


FIGURA 6.1- Esquema da Transferência de Hohmann.

Essa transferência é feita com dois acréscimos na velocidade em pontos específicos e se aplica a uma transferência entre uma órbita circular de raio menor para uma órbita circular de raio maior. Com dois decréscimos na velocidade pode-se fazer uma transferência de uma órbita circular de raio maior para uma de raio menor.

Algumas considerações e simplificações que são feitas na versão básica desta manobra:

- trataremos de órbitas concêntricas: o centro de atração será sempre o mesmo ponto de massa;
- utilizaremos inicialmente as órbitas coplanares, que são órbitas (inicial e final) que se encontram no mesmo plano;
- adotaremos, motores com impulso de curta duração (instantâneos); onde podemos ignorar a variação do vetor posição do veículo espacial com relação ao centro da Terra durante as eventuais mudanças de direção e magnitude da velocidade.

### 6.2.1 - Velocidade no Apogeu e Perigeu da Órbita

Nas transferências do tipo de Hohmann, ocorrem incrementos de velocidade no apogeu e perigeu das órbitas consideradas. Lembrando que existem transferências a serem realizadas entre órbitas circulares, observamos também a velocidade do veículo na órbita circular. Para o cálculo destes incrementos, vê-se o valor da velocidade nesses pontos.

Velocidade no perigeu:

$$V_p^2 = \frac{\mu_g}{R_p} (1 + e) \quad (6.1)$$

onde:

$R_p$  corresponde ao raio do perigeu

$\mu_g$  corresponde a constante gravitacional

e corresponde a excentricidade

Velocidade no apogeu:

$$V_a^2 = \frac{\mu_g}{R_a}(1-e) \quad (6.2)$$

onde:

$R_a$  corresponde ao raio do apogeu

Velocidade circular:

$$V_c^2 = \frac{\mu_g}{R_c} \quad (6.3)$$

onde:

$R_c$  corresponde ao raio da órbita circular

A Figura 6.2 ilustra uma transferência do tipo de Hohmann entre duas órbitas circulares, concêntricas e coplanares.

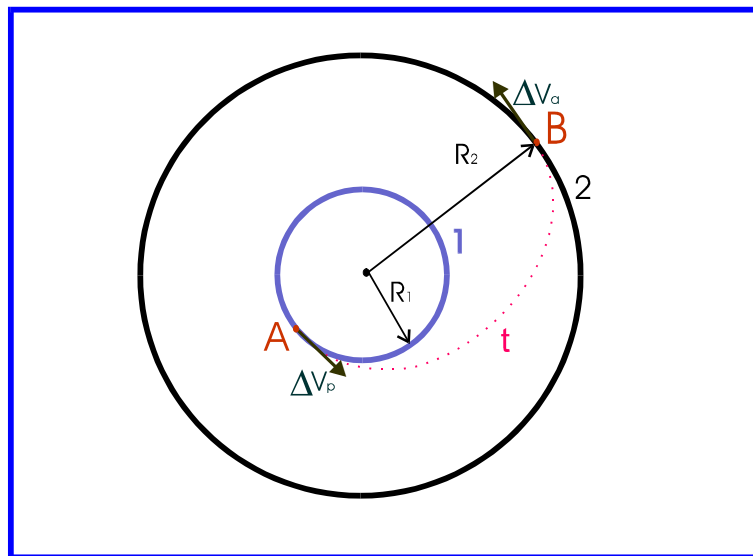


FIGURA 6.2 - Transferência entre órbitas concêntricas, coplanares e circulares.

Como visto na Figura 6.2, a transferência ótima entre órbitas circulares e coplanares é uma semi-elipse que tangencia com seu apogeu e perigeu as duas órbitas circulares. Os



impulsos ocorrem nos pontos A e B. No ponto A da órbita interna (1) a velocidade é aumentada tangencialmente por um impulso de magnitude  $\Delta V_p$ , colocando o satélite em uma órbita elíptica (t) tal que seu apogeu coincida com o ponto B da órbita externa (2). Neste ponto um segundo impulso tangencial  $\Delta V_a$  ajustará o satélite à órbita final desejada.

Os valores dos impulsos são dados por:

$$\Delta V_p = \sqrt{\frac{\mu_g}{R_1}} \left\{ (1+e)^{1/2} - 1 \right\} \quad (6.4)$$

$$\Delta V_a = \sqrt{\frac{\mu_g}{R_2}} \left\{ 1 - (1-e)^{1/2} \right\} \quad (6.5)$$

O incremento total da velocidade é dado por:

$$\Delta V = |\Delta V_p| + |\Delta V_a| \quad (6.6)$$

O tempo total gasto durante a transferência é dado por:

$$t = \frac{\pi (R_1 + R_2)^{3/2}}{2 (2\mu_g)^{1/2}} \quad (6.7)$$

### 6.2.2 – Resultados para a Transferência de Hohmann

Para posterior comparação com os resultados obtidos, efetua-se uma transferência de Hohmann entre uma órbita de estacionamento ao redor da Terra de 7000 km de altitude até uma outra órbita de estacionamento a 1960 Km de altitude ao redor da Lua no sistema Terra-Lua (ver Fig. 6.3). A unidade de distância no sistema Terra-Lua é 384400 km, logo os raios das órbitas inicial e final para a transferência de Hohmann em unidades canônicas são:  $R_1 = 0,01821$ ,  $R_2 = 1,0182$  e o parâmetro gravitacional é  $\mu_g = 0,9879$ .

Desta forma obtém-se os seguintes valores de consumo:  $\Delta V_a = 0,8004$ ,  $\Delta V_p = 3,2959$  e  $\Delta V_t = 3,7593$  e tempo de transferência  $t = 0,836$  (todos em unidades canônicas).

Como o sistema encontra-se em unidades canônicas, faz-se a conversão destas unidades para unidades do sistema internacional. Para isto, utiliza-se as seguintes relações: Unidade de distância = 384400 km; Unidade de tempo = 4,34 dias; Unidade de velocidade = 1,023 km/s. Desta forma o consumo total é dado por  $\Delta V_t = 3,8457639$  km/s e tempo de transferência  $t = 3,62824$  dias.

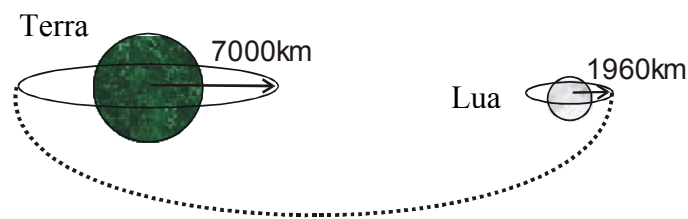


FIGURA 6.3 –Transferência de Hohmann no sistema Terra-Lua.

Observa-se que nesta transferência despreza-se a atração gravitacional da Lua na órbita de transferência.

### 6.3 – O Problema de Lambert

O problema de Lambert original é um dos mais importantes e populares tópicos em Mecânica Celeste.

Alguns autores importantes trabalharam com este problema, tentando encontrar melhores maneiras para resolver as dificuldades numéricas envolvidas. O problema original é definido como: “*uma órbita kepleriana ao redor de um dado campo gravitacional de força deve ser encontrada conectando dois pontos dados ( $P_1$  e  $P_2$ ) em um dado tempo  $\Delta t$* ”.

Esta seção mostra uma nova formulação, um pouco diferente da original, mas também com muitas aplicações importantes. Este novo problema é chamado “Problema de

Lambert com mínimo Delta-V” e é formulado como segue (Prado, 1993; Prado e Broucke, 1996):

*“uma órbita kepleriana ao redor de um dado centro de força gravitacional deve ser encontrada conectando dois pontos dados ( $P_1$  que pertence a uma órbita inicial e  $P_2$  que pertence a uma órbita final), de forma que o  $\Delta V$  (consumo de combustível) necessário para realizar a transferência seja mínimo”.*

Para ilustrar considera-se o problema fundamental, envolvendo órbitas keplerianas. Supõe-se que exista uma nave espacial em uma órbita kepleriana chamada  $O_0$  (órbita inicial). Deseja-se transferir essa nave espacial para a órbita kepleriana final  $O_2$ , que é coplanar com a órbita  $O_0$ . Para efetuar essa transferência, parte-se do ponto  $P_1$  ( $r_1, \theta_1$ ), onde é aplicado um impulso com magnitude  $\Delta V_1$  que tem um ângulo  $\phi_1$  com a direção transversa local. A órbita de transferência cruza a órbita final no ponto  $P_2$  ( $r_2, \theta_2$ ), onde é aplicado um impulso com magnitude  $\Delta V_2$ , que faz um ângulo  $\phi_2$  com a direção transversa local. Para definir o problema básico é necessário especificar o ângulo de posição ( $\theta_1$ ) do ponto de partida na órbita  $O_0$  ( $P_1$ ) e o ângulo de posição ( $\theta_2$ ) do ponto de chegada na órbita  $O_2$  ( $P_2$ ). Com esses dois valores dados e todos os elementos keplerianos das duas órbitas conhecidos, é possível determinar os raios-vetores  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  no início e no fim da transferência. Então, o problema é encontrar qual é a órbita de transferência que, conectando esses dois vetores e utilizando somente dois impulsos, requer o mínimo  $\Delta V$  para a manobra. O esquema da transferência e as variáveis utilizadas são mostrados na Figura 6.4.

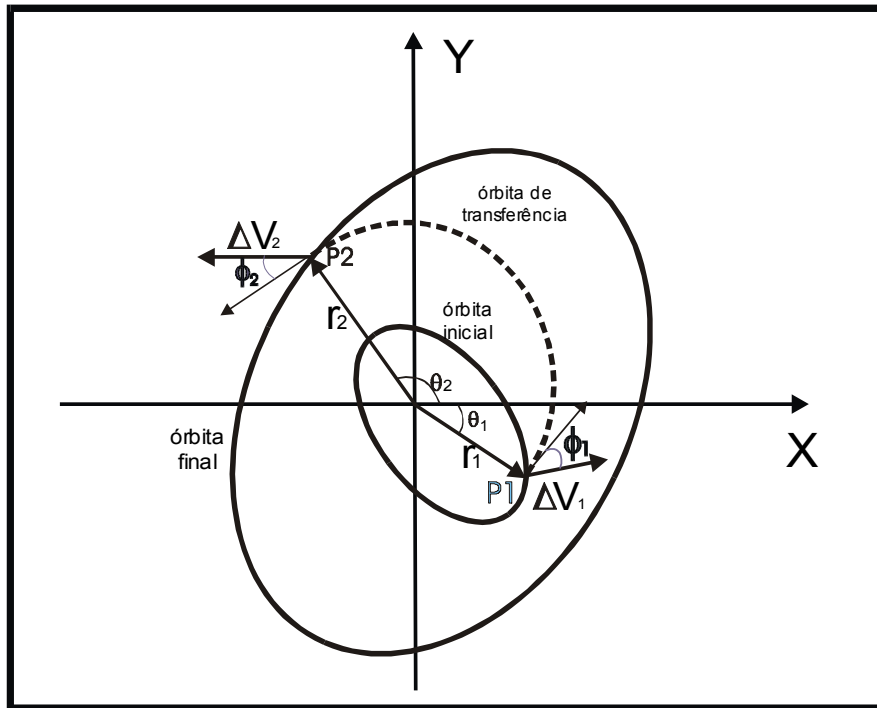


FIGURA 6.4 - Geometria do “Problema de *Lambert* com Mínimo Delta-V”.

Para resolver este problema, é utilizado o esquema proposto por Prado (1992) e obtém-se, analiticamente, uma equação para a primeira derivada da função  $\Delta V$ . A seguir utiliza-se um esquema numérico para a obtenção do zero da função obtida. Este esquema tem os seguintes passos:

- a) Arbitra-se uma velocidade inicial e, como o estado inicial é pré-fixado, o estado inicial completo é conhecido;
- b) Integram-se as equações de movimento até o instante de tempo final pré-fixado pelo tempo de transferência;
- c) Confere-se a posição final com os valores prescritos. Se há um acordo (diferença menor que um erro especificado permitido) a solução está encontrada e o processo numérico pode parar. Se não há nenhum acordo, um incremento na velocidade inicial é feito e o processo volta ao passo 2). O método que encontra o incremento na velocidade inicial é o método padrão do gradiente, como descrito em Press *et. al.*, 1989.

A Figura 6.5 ilustra as transferências entre uma órbita de estacionamento em torno da Terra e uma órbita halo utilizando o método de Lambert. O ponto inicial da da manobra é fixado como sendo o ponto da órbita inicial oposto a órbita Halo, pois este ponto fornece as transferências mais econômicas. A órbita Halo é discretizada em uma série de pontos e cada um destes pontos é combinado com o ponto inicial para solução do problema de Lambert.

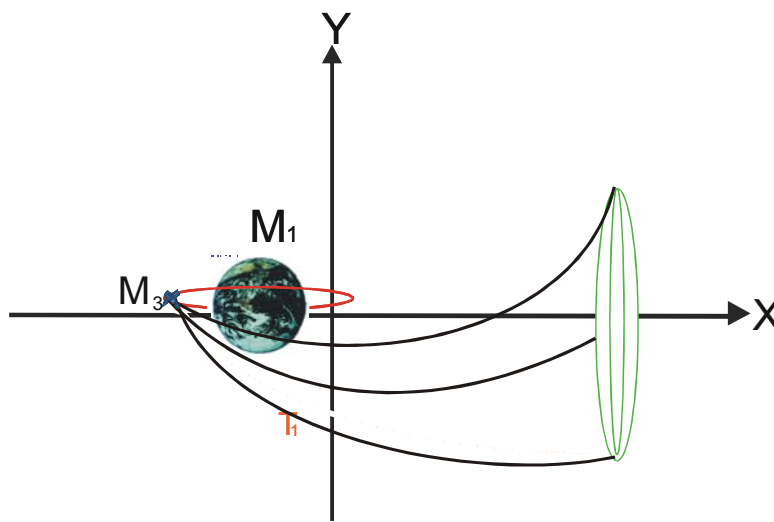


FIGURA 6.5 – Transferência entre uma órbita de estacionamento em torno da Terra até uma órbita Halo.

#### 6.4 – Transferências entre Órbitas do Tipo Halo

Existem diversas técnicas para o estudo da transferência entre órbitas do tipo Halo. No presente trabalho é proposto um novo método, com um enfoque de engenharia e fortemente baseado em técnicas numéricas. Para realizar as transferências com este método proposto, discretiza-se cada uma das órbitas do tipo Halo envolvidas em um certo número de pontos e, a seguir, estuda-se individualmente a transferência entre cada par de pontos que puder ser formado com um ponto pertencente a órbita inicial e um ponto pertencente a órbita final. Após esse conjunto de soluções ter sido obtido, escolhe-se a transferência de menor consumo. A partir desta informação obtêm-se todos

os outros parâmetros envolvidos, como as componentes dos impulsos, sua localização, etc.

Após simulações feitas com diversos números de pontos escolheu-se como sendo igual a oito, já que o mesmo mostrou uma boa relação entre custo (tempo de processamento) e benefício (precisão de solução), tendo em vista uma análise preliminar do problema. Este número pode ser aumentado para calcular uma manobra mais precisa, do ponto de vista de custo mínimo, embora exista um crescimento no tempo de execução do programa. Então, cada ponto da órbita inicial é combinado com cada ponto da órbita final. Para cada par de pontos, resolve-se o problema de Lambert (com a dinâmica do problema restrito de três corpos) para uma série de tempos de vôo. Lembrando que o problema de Lambert proposto aqui é uma variação do “problema de Lambert original” (formulado para a dinâmica de dois corpos), visto que utiliza-se a dinâmica de três corpos. Não existe nenhuma aproximação envolvida na solução desse problema na versão de três corpos, apenas resolve-se o problema de valor de contorno em dois pontos com essa dinâmica.

Listam-se as manobras que têm o menor consumo de combustível para cada par de pontos e que respeitem um vínculo de tempo fixo em uma tabela. Ao final das simulações, tem-se a tabela que fornece a manobra de menor consumo de combustível para a transferência global. As Figuras 6.6 a 6.9 mostram várias órbitas Halo discretizadas em oito pontos cada. Com essa visão coletiva nota-se o caráter tridimensional das órbitas. Para este estudo, foram geradas três órbitas Halo diferentes com o método de Lindstedt-Poincaré. Elas pertencem à mesma família ao redor do ponto Lagrangiano  $L_1$  e  $L_2$  no sistema Terra-Sol, onde  $\mu = 3,30404233398444176 \times 10^{-6}$ . A diferença entre elas é expressa por um único parâmetro, normalmente o parâmetro  $\beta$ , que representa a amplitude linear no eixo z. Em termos deste parâmetro, as órbitas simuladas apresentam os seguintes valores: 0,008; 0,010; 0,200. As figuras são mostradas de acordo com as transferências efetuadas. A Figura 6.6 representa a transferência de  $\beta = 0,008$  para  $\beta = 0,01$  e a Figura 6.7 representa a transferência de  $\beta =$

0,008 para  $\beta = 0,20$ , ambas em torno de  $L_1$ . As Figuras 6.8 e 6.9 representam as mesmas transferências para órbitas em torno de  $L_2$ .

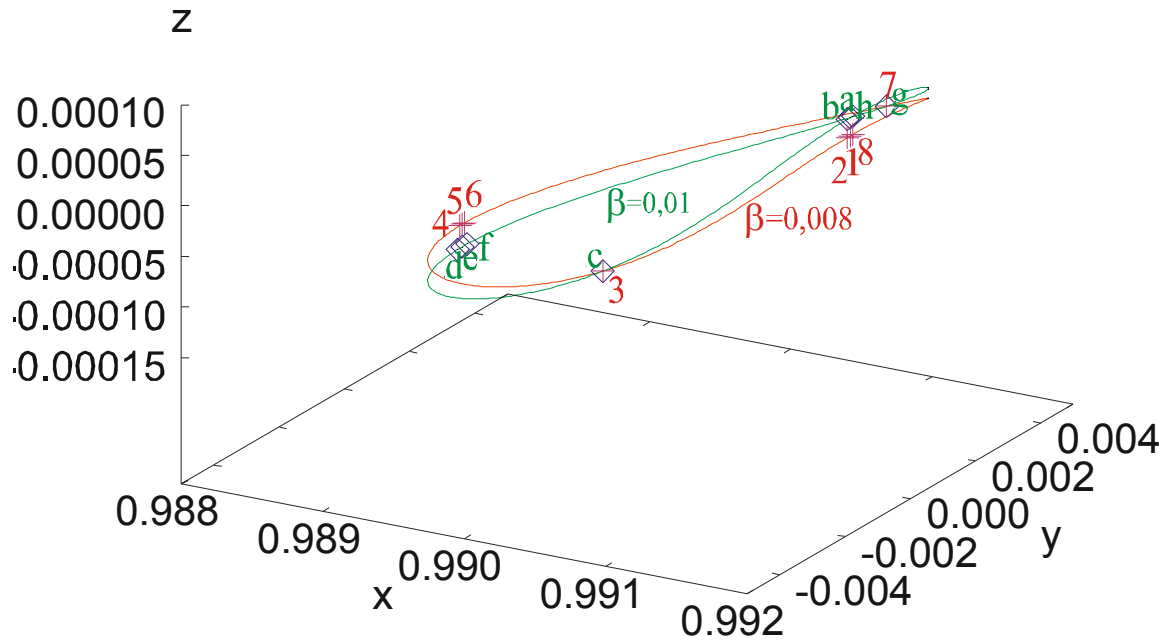


FIGURA 6.6 - Órbitas Halo com  $\beta = 0,008$  e  $\beta = 0,01$ , utilizadas para uma transferência orbital em torno de  $L_1$ .

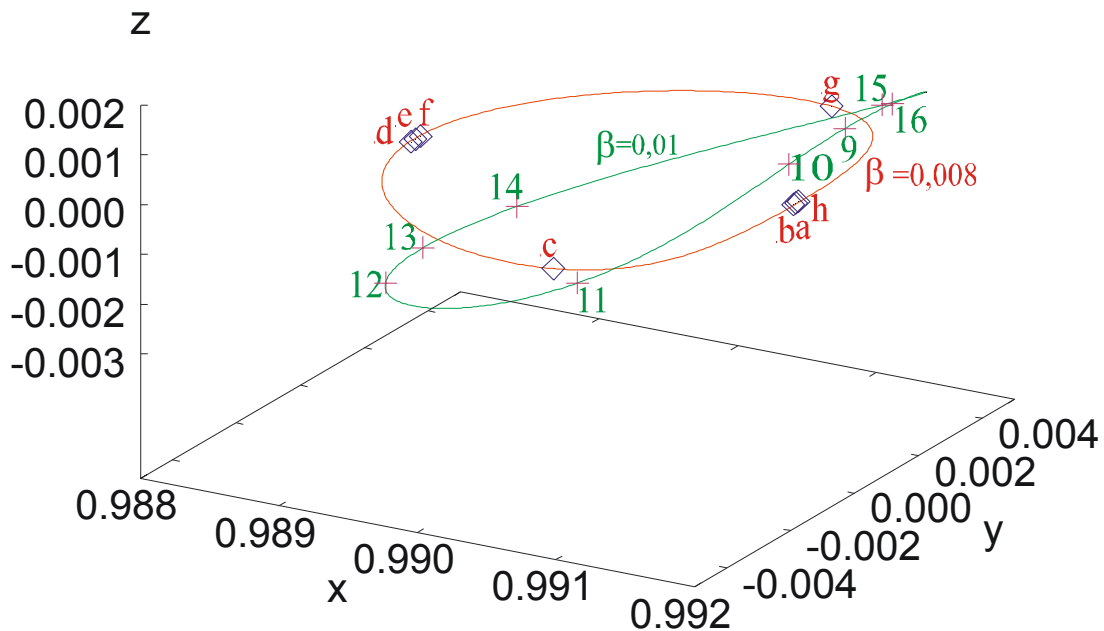


FIGURA 6.7 - Órbitas Halo com  $\beta = 0,008$  e  $\beta = 0,20$ , utilizadas para uma transferência orbital em torno de  $L_1$ .

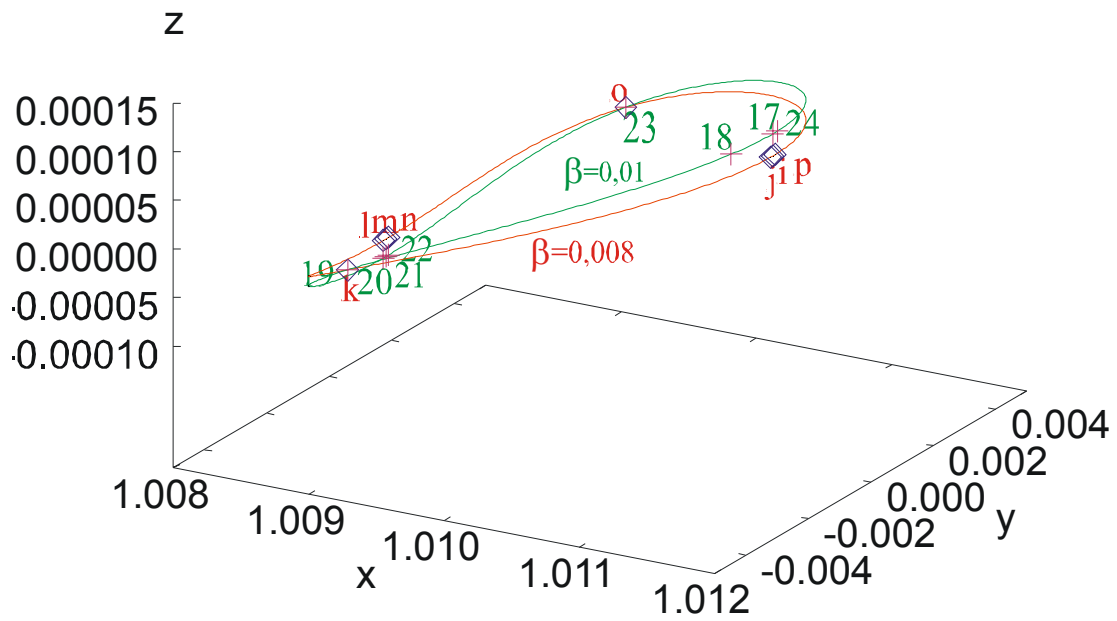


FIGURA 6.8 - Órbitas Halo com  $\beta = 0,008$  e  $\beta = 0,01$ , utilizadas para uma transferência orbital em torno de  $L_2$ .

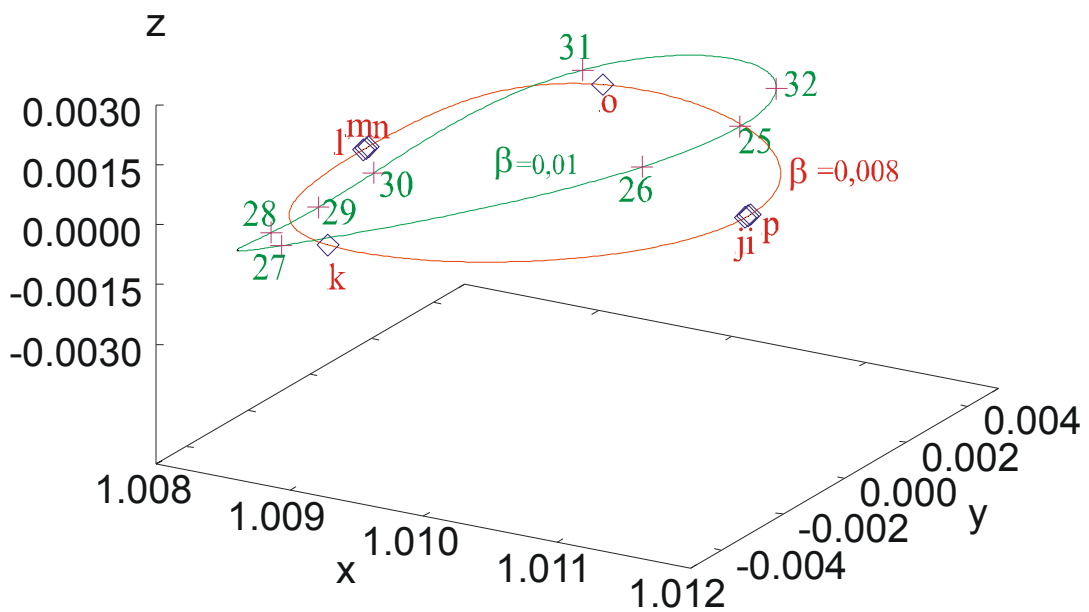


FIGURA 6.9 - Órbitas Halo com  $\beta = 0,008$  e  $\beta = 0,20$ , utilizadas para uma transferência orbital em torno de  $L_2$ .



As Tabelas 6.1 e 6.2 mostram a posição e a velocidade, no sistema girante, para os oito pontos nos quais as órbitas foram divididas e para todas as três órbitas em torno de  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente. Estas tabelas também definem a notação usada para os pontos. A Tabela 6.3 e a Figura 6.10 mostram a distância do ponto Lagrangiano  $L_1$  e  $L_2$  ( $|\vec{r}|$ ) e a magnitude da velocidade ( $|\vec{V}|$ ) para todos os pontos, para melhorar a visão física dessas órbitas. Desta tabela está claro que a velocidade é mais alta quando o veículo espacial está mais próximo ao ponto Lagrangiano e que não varia muito com a amplitude. Porém, por se tratar de uma órbita em torno de um ponto sem massa e muito sensível às variações de condições iniciais, é difícil obter uma interpretação física destes resultados.

TABELA 6.1 - Posição e Velocidade, no Sistema Girante, para os Pontos das Órbitas Halo em  $L_1$ .

$\beta = 0,008$	x	y	z	Vx	Vy	Vz
a	0,99157611030	0	7,2118220691E-5	0	-9,6269149130E-3	0
b	0,99157604311	-8,1827434372E-5	7,2102283998E-5	-1,5814435435E-5	-9,6250010426E-3	-3,7493990825E-6
c	0,99082984741	-4,3438887353E-3	-2,0340426003E-7	-2,6353265880E-3	-1,5022377792E-3	-1,6397255068E-4
d	0,98883151141	-7,5100967137E-5	-8,9375602017E-5	-6,9516289494E-5	8,8341013256E-3	-2,4451098846E-6
e	0,98883121594	0	-8,9385994441E-5	0	8,8354003082E-3	0
f	0,98883151141	7,5100967137E-5	-8,9375602017E-5	6,9516289494E-5	8,8341013256E-3	2,4451098846E-6
g	0,99082984741	4,3438887353E-3	-2,0340426003E-7	2,6353265880E-3	-1,5022377792E-3	1,6397255068E-4
h	0,99157604311	8,1827434372E-5	7,2102283998E-5	1,5814435435E-5	-9,6250010426E-3	3,7493990825E-6

$\beta = 0,01$	x	y	z	Vx	Vy	Vz
1	0,99157643199	0,0	9,0146638779E-5	0	-9,6280265845E-3	0
2	0,99157636477	-8,1836794906E-5	9,0126717336E-5	-1,5819645662E-5	-9,6261123754E-3	-4,6868895333E-6
3	0,99083004384	-4,3443156084E-3	-2,5664756240E-7	-2,6356404277E-3	-1,5022444661E-3	-2,0496625732E-4
4	0,98883243726	-1,5019209284E-4	-1,1168188213E-4	-1,3900515673E-4	8,8309342292E-3	-6,1119968314E-6
5	0,98883125547	0	-1,1173384041E-4	0	8,8361299318E-3	0
6	0,98883243726	1,5019209284E-4	-1,1168188213E-4	1,3900515673E-4	8,8309342292E-3	6,1119968314E-6
7	0,99083004384	4,3443156084E-3	-2,5664756241E-7	2,6356404277E-3	-1,5022444661E-3	2,0496625732E-4
8	0,99157636477	8,1836794907E-5	9,0126717336E-5	1,5819645662E-5	-9,6261123754E-3	4,6868895333E-6

$\beta = 0,2$	x	y	z	Vx	Vy	Vz
9	0,99192992635	0	1,7783072099E-3	0	-1,0822374249E-2	0
10	0,99189845706	-1,6166297970E-3	1,6477553087E-3	-4,3614804181E-4	-1,0101811974E-2	-1,6741788529E-3
11	0,99109840113	-4,7661092480E-3	1,2691638064E-5	-2,9014644864E-3	-1,8359362253E-3	-4,1127989147E-3
12	0,98908872943	-2,0516583648E-3	-2,0941140685E-3	-1,8106650439E-3	8,6966529872E-3	-1,5229743564E-3
13	0,98888353057	0	-2,2641394606E-3	0	9,5971956227E-3	0
14	0,98908872943	2,0516583648E-3	-2,0941140685E-3	1,8106650439E-3	8,6966529872E-3	1,5229743564E-3
15	0,99109840113	4,7661092480E-3	1,2691638064E-5	2,9014644864E-3	-1,8359362253E-3	4,1127989147E-3
16	0,99189845706	1,6166297970E-3	1,6477553087E-3	4,3614804181E-4	-1,0101811974E-2	1,6741788529E-3

TABELA 6.2 - Posição e Velocidade, no Sistema Girante, para os Pontos das Órbitas Halo em L<sub>2</sub>.

$\beta = 0,008$	x	y	z	V <sub>x</sub>	V <sub>y</sub>	V <sub>z</sub>
i	1,0112760569	0	9,0503500253E-5	0	-8,9518844699E-3	0
j	1,0112757472	-7,7146682426E-5	9,0493129379E-5	-7,1866973094E-5	-8,9505717123E-3	-2,4066539853E-6
k	1,0091609401	-4,4550697347E-3	-2,9300923292E-7	-2,6740451225E-3	1,6627436926E-3	-1,6293781469E-4
l	1,0084159580	-8,4402579216E-5	-7,2156160030E-5	-1,5030980827E-5	9,7920440945E-3	-3,7749851197E-6
m	1,0084158932	0	-7,2172428104E-5	0	9,7940174151E-3	0
n	1,0084159580	8,4402579216E-5	-7,2156160030E-5	1,5030980827E-5	9,7920440945E-3	3,7749851197E-6
o	1,0091609401	4,4550697347E-3	-2,9300923292E-7	2,6740451225E-3	1,6627436926E-3	1,6293781469E-4
p	1,0112757472	7,7146682426E-5	9,0493129379E-5	7,1866973094E-5	-8,9505717123E-3	2,4066539853E-6

$\beta = 0,01$	x	y	z	V <sub>x</sub>	V <sub>y</sub>	V <sub>z</sub>
17	1,0112760117	0	1,1313074951E-4	0	-8,9525845347E-3	0
18	1,0112157998	-1,0698756177E-3	1,1059866459E-4	-9,8990589823E-4	8,6967306848E-3	-4,1826564288E-5
19	1,0091607386	-4,4554881652E-3	-3,6383330214E-7	-2,6743535083E-3	1,6627561249E-3	-2,0367296588E-4
20	1,0084156343	-8,4411867609E-5	-9,0194046559E-5	-1,5036074498E-5	9,7931356066E-3	-4,7188764041E-6
21	1,0084155695	0	-9,0214382247E-5	0	9,7951092703E-3	0
22	1,0084156343	8,4411867609E-5	-9,0194046559E-5	1,5036074498E-5	9,7931356066E-3	4,7188764041E-6
23	1,0091607386	4,4554881652E-3	-3,6383330213E-7	2,6743535083E-3	1,6627561249E-3	2,0367296588E-4
24	1,0112747730	1,5428258374E-4	1,1307889891E-4	1,4370495840E-4	-8,9473337570E-3	6,0158877592E-6

$\beta = 0,2$	x	y	z	V <sub>x</sub>	V <sub>y</sub>	V <sub>z</sub>
25	1,0112174624	0	2,2927174767E-3	0	-9,6845085974E-3	0
26	1,0109870387	-2,1736378010E-3	2,1098704269E-3	-1,9276517899E-3	-8,7086075912E-3	-1,5553172020E-3
27	1,0089107854	-4,8825248563E-3	1,0430886076E-5	-2,9681504102E-3	1,8344237891E-3	-4,0892445841E-3
28	1,0080902798	-1,6604545216E-3	-1,6460408544E-3	-4,2486071648E-4	1,0231338714E-2	-1,6847028546E-3
29	1,0080594470	0	-1,7792743492E-3	0	1,0971472370E-2	0
30	1,0080902798	1,6604545216E-3	-1,6460408544E-3	4,2486071648E-4	1,0231338714E-2	1,6847028546E-3
31	1,0089107854	4,8825248563E-3	1,0430886076E-5	2,9681504102E-3	1,8344237891E-3	4,0892445841E-3
32	1,0109870387	2,1736378010E-3	2,1098704269E-3	1,9276517899E-3	-8,7086075912E-3	1,5553172020E-3

TABELA 6.3 - Distância aos Pontos Lagrangianos L<sub>1</sub> e L<sub>2</sub> e Magnitude da Velocidade.

Ponto	$ \bar{r} $	$ \bar{v} $
a	0,9915761129	9,6269149130e-3
B=h	0,9915760491	9,6250147648e-3
C=g	0,9908393693	3,0378531182e-3
D=f	0,9888315183	8,8343751745e-3
e	0,9888312199	8,8354003082e-3
1	0,9915764360	9,6280265845e-3
2=8	0,9915763722	9,6261265154e-3
3=7	0,9908395676	3,0337005981e-3
4=6	0,9888324549	8,8320302960e-3
5	0,9888312617	8,8361299318e-3
9	0,9919315204	1,0822374249e-2
10=16	0,9919011431	1,0248887993e-2
11=15	0,9911098610	5,3576368766e-3
12=14	0,9890930741	9,0127538505e-3
13	0,9888861225	2,2641394606e-3

Ponto	$ \bar{r} $	$ \bar{v} $
i	1,0112760609	8,9518844699e-3
J=p	1,0112757541	8,9508605525e-3
K=o	1,0091707737	3,1530592503e-3
L=n	1,0084159641	9,7920549032e-3
m	1,0084158957	9,7940174151e-3
17	1,0112760180	8,9525845347e-3
18=24	1,0112163718	8,7529873616e-3
19=23	1,0091705741	3,1556944236e-3
20=22	1,0084156418	9,7931482864e-3
21	1,0084155735	9,7951092703e-3
25	1,0112200615	9,6845085974e-3
26=32	1,0109915769	9,0539880273e-3
27=31	1,0089225996	5,3755882249e-3
28=30	1,0080929911	1,0377813942e-2
29	1,0080610172	1,0971472370e-2

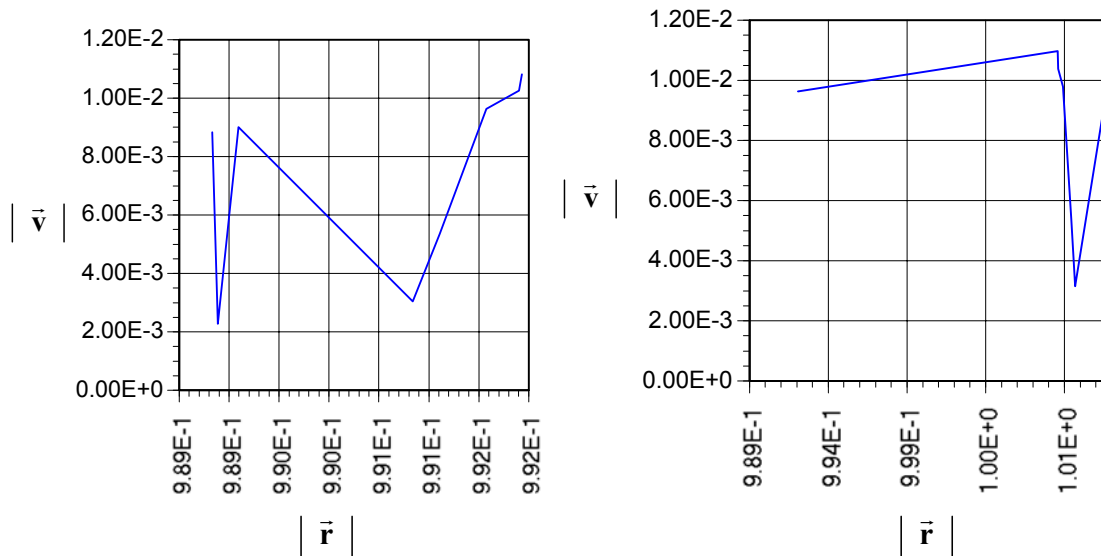


FIGURA 6.10 – Distância vs magnitude dos pontos Lagrangianos.

A seguir, aplica-se o procedimento anteriormente descrito e obtém-se as transferências de menor consumo de combustível com tempo fixo. Claro que este procedimento fornece uma aproximação da transferência com mínimo consumo, dado que o método utiliza uma discretização das duas órbitas envolvidas. Esta precisão aumenta com o número de pontos considerados nas órbitas.

Inicia-se, por exemplo, a transferência no ponto "a" da órbita inicial. Estuda-se as outras duas órbitas Halo determinadas como a órbita final da manobra. As Tabelas 6.4 e 6.5 mostram os resultados. O incremento de tempo usado para o problema de Lambert é 0,01. Os símbolos são os seguintes:  $T$  é o tempo de transferência, em unidades canônicas;  $\Delta V$  é o incremento total de velocidade (dos dois impulsos) requeridos para a transferência, também em unidades canônicas;  $\alpha_1$  é o ângulo entre a velocidade do veículo espacial quando este se encontra na órbita Halo inicial e sua velocidade no mesmo ponto quando está na órbita de transferência no ponto em que o primeiro impulso é aplicado;  $\alpha_2$  é o ângulo entre a velocidade do veículo espacial quando este se encontra na órbita Halo final e sua velocidade no mesmo ponto quando se encontra na órbita de transferência no ponto em que o segundo impulso é aplicado e  $\phi$  é o ângulo de

transferência, que é o ângulo que o veículo espacial viaja durante a transferência. Todos os ângulos são expressos em graus.

Os resultados mostram que a transferência mínima corresponde a trajetórias que têm valores menores para os ângulos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Esta regra é válida para todas as transferências. Este resultado é esperado pela física do problema e pela analogia com manobras clássicas. Ângulos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  pequenos equivalem a impulsos aplicados próximos a direção do movimento (impulsos tangentes). Estas direções são as de maior transferência de energia ao veículo espacial e aparecem nas clássicas transferências de Hohmann e bi-elíptica. Componentes de impulso em direções perpendiculares a direção do movimento do veículo espacial são menos eficientes. Para as Tabelas 6.4 e 6.5, os valores em negrito representam o mínimo valor de consumo para cada manobra entre as órbitas do tipo Halo.

TABELA 6.4 - Transferências de Mínimo Consumo em Torno de  $L_1$ .

a para:	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
1	1,35	0,018039848	67,392656560	67,358755502	0
2	1,34	0,018023788	63,654515711	71,105831803	42
<b>3</b>	<b>0,66</b>	<b>0,000082349</b>	<b>0,009165944</b>	<b>1,064893422</b>	<b>90</b>
4	1,22	0,010074701	31,261756295	23,734377179	143
5	1,53	0,000791697	2,607770271	2,292285778	180
6	1,54	0,001097286	3,440858578	2,933702580	233
7	0,96	0,017965278	123,59357043	8,851397651	90
8	1,35	0,018051652	71,235764984	63,591621440	42
a para:	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
9	0,80	0,021189389	83,236396823	72,156415838	0
10	0,33	0,015189462	46,364172584	52,857253338	45
<b>11</b>	<b>0,69</b>	<b>0,004810421</b>	<b>3,559535092</b>	<b>46,697004482</b>	<b>90</b>
12	1,05	0,011626443	36,951096913	38,651695940	135
13	1,06	0,015729067	59,055190996	45,733262306	180
14	0,91	0,019239568	88,573621863	49,375858473	225
15	0,96	0,022039046	127,352318388	54,061180658	90
16	1,00	0,022707035	106,430209828	59,130275219	44

(Continua).

TABELA 6.4 – ( Continuação).

<b>b para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
1	1,35	0,018051414	63,623582939	71,202071892	49
2	1,35	0,018034908	59,746675367	75,009898207	7
<b>3</b>	<b>0,65</b>	<b>0,000112519</b>	<b>0,011918083</b>	<b>1,320121290</b>	<b>41</b>
4	1,51	0,000648146	1,940579707	1,640530228	94
5	1,52	0,000655755	2,152704794	1,884266662	131
6	1,54	0,000864862	2,828777506	2,483209036	184
7	0,97	0,017883033	122,952395518	8,677441532	139
8	1,36	0,018061168	67,407097735	67,373155198	91
<b>b para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
9	0,83	0,021329543	82,544308524	73,594036949	49
10	0,33	0,015524984	47,483491186	54,838029325	4
<b>11</b>	<b>0,68</b>	<b>0,004818584</b>	<b>3,615534536</b>	<b>46,749544190</b>	<b>41</b>
12	1,05	0,011435148	36,481049983	37,550415641	87
13	1,07	0,015492780	58,276028598	44,242809387	131
14	0,93	0,019052676	87,779477828	47,713837979	177
15	0,97	0,021988635	126,735368935	54,029980740	139
16	1,01	0,022779595	105,616784958	60,233390186	93

<b>c para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
1	1,35	0,018051414	63,623582939	71,202071892	90
2	1,35	0,018034908	59,746675367	75,009898207	48
<b>3</b>	<b>0,65</b>	<b>0,000112519</b>	<b>0,011918083</b>	<b>1,320121290</b>	<b>0</b>
4	1,50	0,000589099	1,828873601	1,550006543	53
5	1,52	0,000655755	2,152704794	1,884266662	90
6	1,54	0,000864862	2,828777506	2,483209036	143
7	0,97	0,017883033	122,952395518	8,677441532	180
8	1,36	0,018061168	67,407097735	67,373155198	132
<b>c para</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
9	0,83	0,021329543	82,544308524	73,594036949	130
10	0,33	0,015524984	47,483491186	54,838029325	88
11	0,68	0,004818584	3,615534536	46,749544190	40
12	1,05	0,011435148	36,481049983	37,550415641	50
13	1,07	0,015492780	58,276028598	44,242809387	103
14	0,93	0,019052676	87,779477828	47,713837979	220
15	0,97	0,021988635	126,735368935	54,029980740	172
<b>16</b>	<b>0,65</b>	<b>0,000102064</b>	<b>0,010416351</b>	<b>1,020445453</b>	<b>176</b>

( Continua).

TABELA 6.4 - ( Continuação ).

<b>d para</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
<b>1</b>	<b>1,54</b>	<b>0,000942084</b>	<b>2,697674715</b>	<b>3,082156588</b>	<b>130</b>
2	1,54	0,001150028	3,131304590	3,618142646	88
3	0,87	0,016683005	119,404346628	25,667825166	40
4	1,45	0,016156727	76,538427078	55,704907351	13
5	1,44	0,016125319	69,319171676	62,399105257	50
6	1,77	1,292035341	110,385115801	99,645642254	103
7	1,77	1,293403300	110,096511700	85,177721047	220
8	1,77	1,289020622	110,167426466	80,106098672	172
<b>d para</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
9	1,77	1,288567725	110,198859871	80,030963828	82
10	1,77	1,285897678	110,246248081	70,850612102	85
<b>11</b>	<b>1,77</b>	<b>1,282890182</b>	<b>110,352402551</b>	<b>39,141367570</b>	<b>40</b>
12	1,77	1,289302429	110,362692679	90,563805647	6
13	1,77	1,292323954	110,310916655	99,647616382	50
14	1,77	1,295007963	110,237241665	108,276432010	96
15	1,77	1,297486105	110,062176670	130,834813496	220
16	1,77	1,291489227	110,147817508	89,243551326	174

<b>e para</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
1	1,52	0,000947570	2,183260588	2,684221486	180
2	1,54	0,001028735	2,946605892	3,367822074	138
3	0,88	0,016614429	118,875052535	24,129945914	90
4	1,45	0,016173430	73,193520157	59,290753555	37
5	1,44	0,016143576	65,998528557	65,998183928	0
6	1,44	0,016105189	58,799611193	72,656747212	53
<b>7</b>	<b>0,87</b>	<b>0,000065916</b>	<b>0,032021211</b>	<b>1,130538640</b>	<b>270</b>
8	1,52	0,000650766	1,875905324	2,134291774	222
<b>e para</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
9	1,11	0,014815765	50,076685179	47,173091443	180
10	0,96	0,018219081	79,318485411	55,983475219	135
11	0,89	0,020346444	119,719535705	61,570086651	90
12	1,06	0,020537847	102,340094875	63,699837598	44
13	0,93	0,018735718	78,932405088	74,953824578	0
14	0,46	0,013458101	44,331497280	53,034895010	46
<b>15</b>	<b>0,88</b>	<b>0,004816732</b>	<b>1,309893887</b>	<b>47,565288638</b>	<b>270</b>
16	1,14	0,010838302	30,085214149	38,336830397	224

( Continua ).

TABELA 6.4 – ( Continuação ).

f para	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
1	1,52	0,000690308	1,992558455	2,264599783	270
2	1,53	0,000852012	2,466100390	2,805994645	178
3	0,88	0,016541873	118,447277017	24,999185845	130
4	1,45	0,016188253	69,832605049	62,895866544	77
5	1,45	0,016159836	62,617201845	69,642164665	40
6	1,44	0,016122254	55,612241366	76,143737405	13
<b>7</b>	<b>0,86</b>	<b>0,000049205</b>	<b>0,016864558</b>	<b>0,870947916</b>	<b>310</b>
8	1,51	0,000599985	1,681543378	1,926556809	262
f para	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
9	1,11	0,014626629	49,519784235	46,155661975	220
10	0,97	0,018042309	78,585495027	54,784732151	175
11	0,90	0,020294468	119,211166137	61,085101084	130
12	1,07	0,020607106	101,606428188	64,728705927	84
13	0,94	0,018842245	78,552736356	76,812430972	40
14	0,47	0,013670288	45,056003506	54,535316975	6
<b>15</b>	<b>0,88</b>	<b>0,004817452</b>	<b>1,419978636</b>	<b>47,595916988</b>	<b>310</b>
16	1,13	0,010710754	29,804681777	37,736422548	264

g para	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
1	0,66	0,000080795	0,988779168	0,008267877	90
<b>2</b>	<b>0,67</b>	<b>0,000055258</b>	<b>0,819145765</b>	<b>0,004366481</b>	<b>132</b>
3	1,33	0,000240213	1,817276879	2,577116026	180
4	0,89	0,016466020	23,926988876	117,908039833	233
5	0,88	0,016615498	24,538687241	118,870940357	270
6	0,86	0,016750232	27,583631570	119,927295931	323
7	0,015	0,006084220	110,230692221	56,092654595	0
8	0,65	0,000110969	1,229260748	0,012566937	48
g para	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
9	0,65	0,004857594	47,960159042	3,720593159	90
<b>10</b>	<b>0,78</b>	<b>0,004691511</b>	<b>43,739634672</b>	<b>3,366690006</b>	<b>135</b>
11	1,30	0,004803737	18,573232078	22,440581295	180
12	0,97	0,019760718	60,497252263	106,056818297	226
13	0,86	0,020787182	73,184463773	117,458943005	270
14	0,72	0,020378393	92,886497946	130,519040752	316
15	0,25	0,010137168	109,475663258	50,089475703	0
16	0,51	0,005093073	51,015407992	4,973793509	46

( Continua ).

TABELA 6.4 – ( Conclusão ).

<b>h para</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
1	1,34	0,018024015	71,139490172	63,622543759	48
2	1,34	0,018006576	67,345077585	67,311219814	90
<b>3</b>	<b>0,67</b>	<b>0,000056766</b>	<b>0,006333421</b>	<b>0,866457511</b>	<b>138</b>
4	1,52	0,000741742	2,437202558	2,137924441	191
5	1,54	0,001023305	3,350643445	2,939184251	228
6	1,55	0,001406997	4,571902680	3,983544896	281
7	0,95	0,018040753	124,231322449	9,075394692	42
8	1,35	0,018035409	75,044673280	59,715655491	6
<b>h para</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
9	0,77	0,021036104	83,794158759	70,664507874	48
10	0,33	0,014859013	45,287590463	50,985635900	93
<b>11</b>	<b>0,70</b>	<b>0,004802952</b>	<b>3,505489103</b>	<b>46,649883321</b>	<b>138</b>
12	1,05	0,011819136	37,432362393	39,790076702	184
13	1,05	0,015960884	59,810932897	47,301624612	228
14	0,90	0,019418650	89,161690723	51,361903561	274
15	0,95	0,022082544	127,968600589	54,094119876	42
16	0,99	0,022627879	107,225569755	58,026730437	4

O valor sombreado representa o mínimo valor do consumo. O mínimo valor de consumo entre uma órbita do tipo Halo com  $\beta = 0,008$  e uma outra com  $\beta = 0,2$  ocorreu para uma transferência entre o ponto c da órbita inicial e o ponto 16 da órbita final.

Entre todas as manobras, o mínimo valor de consumo entre uma órbita do tipo Halo com  $\beta = 0,008$  e uma outra com  $\beta = 0,01$  ocorreu entre o ponto f da órbita inicial e o ponto 7 da órbita final.



TABELA 6.5 - Transferências de Mínimo Consumo em Torno de  $L_2$ .

<b>i para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
17	1,47	0,016296159	65,528119237	65,529519118	0
18	0,12	0,000388375	1,180823939	1,237970826	84
<b>19</b>	<b>0,89</b>	<b>0,000057628</b>	<b>0,025227237</b>	<b>0,964479754</b>	<b>90</b>
20	1,54	0,000639563	1,780061229	2,049022634	133
21	1,55	0,000759093	2,153874510	2,466275048	180
22	1,56	0,000967765	2,744243438	3,148127464	223
23	0,89	0,016772177	117,739147741	25,340831918	90
24	1,47	0,016325631	72,421300050	59,120592650	54

<b>i para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
25	0,93	0,018882870	78,694279705	74,838194319	0
26	0,47	0,013276901	42,860710706	51,740123745	46
<b>27</b>	<b>0,90</b>	<b>0,004765571</b>	<b>1,342365453</b>	<b>46,989267177</b>	<b>90</b>
28	1,16	0,010749843	29,206891599	37,638113635	136
29	1,14	0,014787811	48,863844774	46,459022651	180
30	0,98	0,018282084	78,161098299	55,490213713	225
31	0,91	0,020425682	118,590825418	61,133639995	90
32	1,09	0,020700504	101,993802564	62,789286840	46

<b>j para</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
17	1,47	0,016311886	62,297737105	69,015823102	40
18	0,11	0,000526459	1,268183559	1,334046476	44
<b>19</b>	<b>0,88</b>	<b>0,000044810</b>	<b>0,011085191</b>	<b>0,778956537</b>	<b>50</b>
20	1,53	0,000601926	1,608635841	1,874013363	93
21	1,54	0,000677731	1,892710223	2,174348696	140
22	1,55	0,000818251	2,323288869	2,660185406	183
23	0,90	0,016698030	117,204053869	23,892575750	130
24	1,48	0,016340560	69,286424816	62,482697808	94

<b>j para</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
25	0,97	0,018983496	77,914562142	76,414710646	40
26	0,47	0,013489709	43,559658042	53,216606431	6
<b>27</b>	<b>0,89</b>	<b>0,004766324</b>	<b>1,343894559</b>	<b>46,978827517</b>	<b>50</b>
28	1,16	0,010624089	28,922270956	36,992966033	96
29	1,14	0,014597444	48,306223794	45,474756875	140
30	0,99	0,018101562	77,417691803	54,305093012	185
31	0,92	0,020373509	118,077772539	60,714634697	130
32	1,09	0,020768178	101,414315968	64,111283654	86

( Continua ).

TABELA 6.5 – (Continuação).

k para	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
17	0,89	0,016773258	25,676512052	117,735218568	90
18	0,79	0,017464434	42,716630528	124,661032349	6
19	0,014	0,006313518	111,461295876	50,290915494	0
20	0,66	0,000122682	1,365289502	0,014829814	43
21	0,66	0,000093353	1,012696786	0,011088869	90
<b>22</b>	<b>0,67</b>	<b>0,000066913</b>	<b>0,840655300</b>	<b>0,007200855</b>	<b>133</b>
23	1,32	0,000281380	2,048160396	2,740059040	180
24	0,90	0,016620064	24,891085578	116,771111073	144

k para	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
25	0,88	0,020883673	73,085695140	116,248134520	90
26	0,73	0,020487122	93,700794861	129,985391164	44
27	0,26	0,010439921	113,581031728	52,316729525	0
28	0,51	0,005068140	50,447255535	4,885627361	46
29	0,65	0,004820035	47,022612414	3,659283739	90
<b>30</b>	<b>0,79</b>	<b>0,004643365</b>	<b>43,644314418</b>	<b>3,178084028</b>	<b>135</b>
31	1,27	0,005924788	12,803279734	53,740076837	180
32	0,98	0,019783875	58,897996568	104,704372546	136

l para	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
17	1,56	0,000968765	3,152572737	2,748936657	140
18	1,58	0,009991403	31,442407061	22,843561016	56
19	0,97	0,018270381	123,454855371	8,430650127	50
20	1,37	0,018311968	74,609177008	59,458128965	7
21	1,36	0,018301903	70,759836922	63,325589198	47
22	1,36	0,018285071	67,013101829	66,979893479	83
<b>23</b>	<b>0,67</b>	<b>0,000068398</b>	<b>0,008086970</b>	<b>0,901570535</b>	<b>230</b>
24	1,55	0,000915405	2,694070201	2,253046570	194

l para	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
25	1,07	0,015986535	58,994825762	46,435370011	140
26	0,92	0,019609981	89,007085316	50,684914059	94
27	0,92	0,022320921	127,429635410	54,089652212	50
28	1,01	0,022897596	106,780874100	57,486772439	4
29	0,79	0,021331455	83,372437715	70,455829875	40
30	0,33	0,014877743	44,456293892	50,226007251	85
<b>31</b>	<b>0,71</b>	<b>0,004754418</b>	<b>3,402667223</b>	<b>46,071414209</b>	<b>230</b>
32	1,06	0,011688238	36,359186338	38,951942748	186

( Continua).

TABELA 6.5 – ( Continuação ).

m para:	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
17	1,55	0,000764442	2,485419584	2,164398233	180
18	1,59	0,008634767	26,780319401	20,520725400	96
19	0,98	0,018192871	122,805222273	8,253933016	90
20	1,38	0,018327143	70,922615593	63,101609543	47
21	1,37	0,018316642	67,045809673	67,012581758	0
22	1,37	0,018301646	63,187704289	70,812699554	43
<b>23</b>	<b>0,66</b>	<b>0,000094855</b>	<b>0,010828031</b>	<b>1,093616015</b>	<b>270</b>
24	1,53	0,000642199	2,012477403	1,716062918	234

m para:	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
25	1,08	0,015748224	58,229075133	44,878297480	180
26	0,93	0,019427109	88,403008920	48,702320264	134
27	0,97	0,022204210	126,475751765	52,961873512	90
28	1,02	0,022975470	105,967821666	58,584253352	44
29	0,82	0,021485111	82,781816230	71,925181945	0
30	0,33	0,015219059	45,541276469	52,103410865	45
<b>31</b>	<b>0,70</b>	<b>0,004760721</b>	<b>3,456483680</b>	<b>46,087578594</b>	<b>270</b>
32	1,06	0,011494515	35,888911968	37,824572718	226

n para:	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
17	1,54	0,000647399	2,077832546	1,792251887	230
18	1,59	0,007228148	21,214017747	14,830185713	146
19	0,99	0,018108530	122,152177178	8,144844765	140
20	1,38	0,018335912	67,046256358	67,013008973	97
21	1,37	0,018326854	63,134367249	70,887629537	50
22	0,66	0,018311446	59,488344491	74,574905610	7
<b>23</b>	<b>1,52</b>	<b>0,000121112</b>	<b>0,012080159</b>	<b>1,272082473</b>	<b>320</b>
24	1,09	0,000600190	1,804978950	1,495590447	284

n para:	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
25	1,09	0,015505342	57,440888236	43,397899952	230
26	0,95	0,019236455	87,593557732	47,048927761	184
27	0,98	0,022150191	125,848451917	52,916122139	140
28	1,03	0,023046518	105,137310061	59,681934145	94
29	0,84	0,021625164	82,174369534	73,458372331	50
30	0,33	0,015565820	46,671085370	54,093411136	5
<b>31</b>	<b>0,69</b>	<b>0,004767640</b>	<b>3,512227012</b>	<b>46,109112603</b>	<b>320</b>
32	1,07	0,011301572	35,465425149	36,691550074	276

( Continua ).

TABELA 6. 5 – ( Conclusão ).

<b>o para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
17	0,89	0,000057883	0,970306098	0,023347894	90
18	1,01	0,000050418	0,865203215	0,012593324	174
19	1,78	0,000214177	1,547839469	2,335491378	180
20	0,99	0,018108158	8,508907934	122,143294409	223
21	0,98	0,018192472	8,629049354	122,796363658	270
22	0,97	0,018269957	8,814445747	123,446018833	313
23	0,00154	0,006279011	83,790823277	85,110750142	0
<b>24</b>	<b>0,87</b>	<b>0,000042389</b>	<b>0,748215945</b>	<b>0,006072820</b>	<b>36</b>

<b>o para</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
<b>25</b>	<b>0,89</b>	<b>0,004781275</b>	<b>50,966191670</b>	<b>1,397039654</b>	<b>90</b>
26	1,10	0,004795010	50,231368468	1,130125662	136
27	1,58	0,007609612	45,451992135	48,875841529	180
28	1,16	0,020237499	63,518215210	106,107403304	226
29	0,97	0,022050344	69,170868710	118,223789222	270
30	0,79	0,021666076	78,912918670	129,664822829	315
31	0,25	0,010191723	86,473336781	111,272668738	0
32	0,68	0,004879766	51,720119884	1,671130410	44

<b>p para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
17	0,009	0,005086376	16,347702929	16,343868936	40
18	0,13	0,000361013	1,105897258	1,154072970	124
<b>19</b>	<b>0,90</b>	<b>0,000075228</b>	<b>0,038769822</b>	<b>1,238107632</b>	<b>130</b>
20	1,55	0,000708225	2,008299065	2,300631729	173
21	1,56	0,000885130	2,511000038	2,878577744	220
22	1,56	0,001136145	2,925188760	3,450403824	263
23	0,88	0,016844135	118,271553787	26,822811613	50
24	1,47	0,016308733	75,620296311	55,678049873	14

<b>p para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
25	0,94	0,018768042	78,787786481	72,780679965	40
26	0,47	0,013066430	42,178712531	50,342761953	86
<b>27</b>	<b>0,91</b>	<b>0,004765357</b>	<b>1,340665008</b>	<b>47,004297817</b>	<b>130</b>
28	1,16	0,010878810	29,497512136	38,308152949	176
29	1,14	0,014978833	49,430962452	47,464559267	220
30	0,97	0,018458380	78,872017927	56,690115948	265
31	0,90	0,020475390	119,102542481	61,597446078	50
32	1,08	0,020629874	102,721124230	61,769737862	6

O valor sombreado representa o mínimo valor de consumo. O mínimo valor de consumo entre uma órbita do tipo Halo com  $\beta = 0,008$  e uma outra com  $\beta = 0,2$  ocorreu no ponto k da primeira órbita combinada com o ponto 30 da segunda órbita.

Entre todas as manobras, o mínimo valor de consumo entre uma órbita do tipo Halo com  $\beta = 0,008$  e uma outra com  $\beta = 0,01$  ocorreu no ponto o da primeira órbita e no ponto 24 da segunda órbita.

Os resultados mostraram várias manobras que podem ser identificadas pelo tempo de transferência. Desta família, é possível encontrar a transferência de mínimo consumo. O comportamento geral das transferências mínimas é que os impulsos são aplicados tão próximos quanto possíveis da direção de movimento do veículo espacial nas órbitas Halo. O consumo aumenta com a diferença de amplitudes entre órbitas Halo envolvidas na transferência, com a exceção de órbitas com pequenas diferenças de amplitude, onde outros fatores podem dominar a escolha da manobra com mínimo consumo. Esses resultados podem ser usados por projetistas de missão para planejar missões que incluem transferências orbitais deste tipo.

## **6.5 – Manobras a partir da Terra até uma Órbita Halo no Sistema Terra-Sol**

Nesta seção, simulam-se as transferências orbitais no sistema Terra-Sol, onde o veículo espacial deve deixar a órbita da Terra a partir de um ponto localizado a 7000 km do centro da Terra (ver Fig. 6.11). O ponto final da transferência será um dos oito pontos de cada uma das três órbitas Halo mostradas na seção 6.4. Essa discretização é necessária para a utilização e solução do método de Lambert no problema restrito de três corpos para as órbitas Halo. Obtém-se o consumo de cada transferência, com o objetivo de encontrar a transferência com o menor consumo. Com as simulações executadas, temos uma tabela que mostra a manobra de mínimo consumo de combustível para a transferência completa.

Foram feitos estudos sobre o efeito da inclinação das órbitas de transferência Terra-Halo no consumo total de combustível, porém os resultados encontrados não foram muito

significativos. Isto se deve ao fato de que as órbitas escolhidas para o exemplo possuem baixa amplitude e sendo assim as órbitas de transferência possuem baixa inclinação.

A Figura 6.11 mostra um esquema para transferências deste tipo, onde o primeiro passo da manobra consiste na aplicação de um impulso que o retira de uma órbita de estacionamento em torno da Terra e o coloca em uma órbita de transferência entre a Terra e a órbita Halo. Esse primeiro impulso é dado por:

$$\Delta V_1 = \sqrt{(V_{S_x} - V_{t_{1x}})^2 + (V_{S_y} - V_{t_{1y}})^2 + (V_{S_z} - V_{t_{1z}})^2} \quad (6.6)$$

onde:

$V_{S_{x,y,z}}$  = componentes x, y, z da velocidade do veículo quando em órbita da Terra a 7000 km, imediatamente antes da aplicação do primeiro impulso;

$V_{t_{1x,y,z}}$  = componentes x, y, z da velocidade do veículo quando da inserção na trajetória  $T_1$ , imediatamente depois da aplicação do primeiro impulso;

$\Delta V_1$  = impulso total para inserção do veículo espacial na primeira órbita de transferência.

Para o segundo passo aplica-se um impulso para inserir o veículo espacial na órbita Halo, a partir da órbita de transferência  $T_1$ . Esse impulso é dado por:

$$\Delta V_2 = \sqrt{(V_{h_{1x}} - V_{t_{1fx}})^2 + (V_{h_{1y}} - V_{t_{1fy}})^2 + (V_{h_{1z}} - V_{t_{1fz}})^2} \quad (6.7)$$

onde:

$V_{t_{1fx,y,z}}$  = componentes x, y, z da velocidade do veículo na órbita  $T_1$  quando da sua chegada na órbita Halo, imediatamente antes da aplicação do segundo impulso;

$V_{h_{1x,y,z}}$  = componentes x, y, z da velocidade do veículo quando de sua inserção na órbita Halo, imediatamente após a aplicação do segundo impulso;

$\Delta V_2$  = impulso total para inserção do veículo espacial na órbita Halo.

Desta forma o consumo total ( $\Delta V$ ) é obtido, somando-se os consumos  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$ :

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (6.8)$$

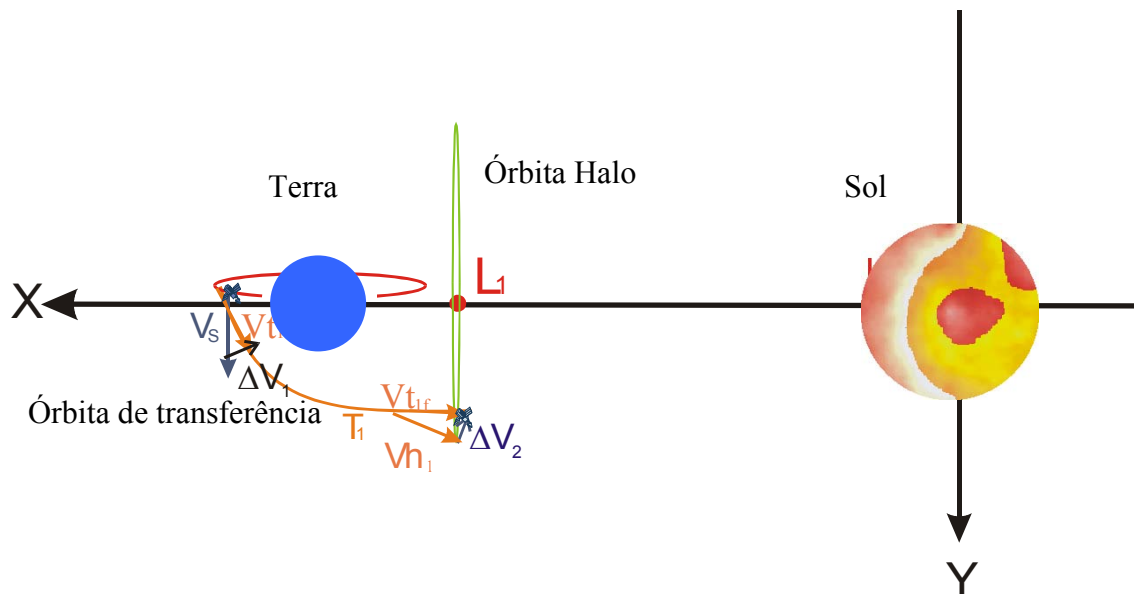


FIGURA 6.11 – Esquema da manobra de transferência da Terra para órbita Halo.

A Tabela 6.6 mostra os consumos para transferências entre um ponto em uma órbita ao redor da Terra com 7000 km de altitude e os pontos das órbitas Halo.

Os valores em **negrito** da Tabela 6.6 correspondem ao mínimo valor de consumo referente a cada manobra.

Nota-se que o valor **sombreado** representa o mínimo valor de consumo quando se deseja uma transferência de uma órbita de estacionamento localizada a 7000 km ao redor da Terra para qualquer uma das órbitas do tipo Halo obtidas neste Capítulo.

TABELA 6.6 – Transferências entre a Terra e as Órbitas Halo.

Da Terra para:	t	$\Delta v$
a	3,0	0,418349677
<b>b</b>	<b>3,0</b>	<b>0,418319149</b>
c	3,0	0,423562635
d	3,0	0,432409174
e	3,0	0,432431131
f	3,0	0,432451086
g	3,0	0,426146511
h	3,0	0,418383444
1	3,0	0,418349677
<b>2</b>	<b>3,0</b>	<b>0,418319208</b>
3	3,0	0,423562864
4	3,0	0,432386812
5	3,0	0,432432723
6	3,0	0,432470627
7	3,0	0,426146902
8	3,0	0,418383512
9	3,0	0,418452709
<b>10</b>	<b>3,0</b>	<b>0,418363662</b>
11	3,0	0,423604611
12	3,0	0,432804991
13	3,0	0,434181579
14	3,0	0,433915793
15	3,0	0,426348077
16	3,0	0,419622708

### 6.6 – Manobra a partir da Lua até uma Órbita Tipo Halo

Simulam-se as transferências orbitais onde o veículo espacial deve deixar a órbita da Lua a partir de um ponto localizado a 1960 km do centro da Lua. O ponto final da transferência será um dos oito pontos de cada uma das três órbitas Halo mostradas na seção 6.4.

Resolve-se o problema de Lambert para todas as transferências, como descrito anteriormente. A Tabela 6.7 mostra os resultados dos consumos obtidos para estas transferências.



TABELA 6.7 – Transferências entre a Lua e as Órbitas Halo.

<b>Da Lua para:</b>	<b>t</b>	<b><math>\Delta v</math></b>
a	1,7	0,047443483
b	1,7	0,047838633
c	2,0	0,034175769
<b>d</b>	<b>1,8</b>	<b>0,027808631</b>
e	1,8	0,027860390
f	1,8	0,027916782
g	1,3	0,059567288
h	1,6	0,048316145
1	1,6	0,048424149
2	1,6	0,048329438
3	2,0	0,034176640
<b>4</b>	<b>1,8</b>	<b>0,028065511</b>
5	1,8	0,028191340
6	1,8	0,028327209
7	1,3	0,059576870
8	1,6	0,048518158
9	1,2	0,064691318
10	1,2	0,058904008
<b>11</b>	<b>1,9</b>	<b>0,034666497</b>
12	1,3	0,040878246
13	1,3	0,045020993
14	1,3	0,050429683
15	1,2	0,065948251
16	1,1	0,068207850

Os valores em negrito da Tabela 6.7 correspondem ao mínimo valor de consumo referente a cada manobra.

Nota-se que o valor sombreado representa o mínimo valor de consumo quando se deseja uma transferência de uma órbita de estacionamento localizada a 1960 km ao redor da Lua para qualquer uma das órbitas do tipo Halo obtidas neste Capítulo.

## 6.7 – Conclusões

Foi proposto e desenvolvido um novo método para o cálculo de manobras orbitais envolvendo órbitas do tipo Halo. O método é baseado na discretização das órbitas Halo

em um certo número de pontos e a conseqüente aplicação do método de Lambert, utilizado dentro do problema restrito de três corpos para cada par de pontos possíveis. Com isso, obtêm-se famílias de trajetórias de transferências identificadas pelo tempo da manobra. Estes resultados são importantes em análise de missões, pois oferecem uma grande variedade de opções de trajetórias.

O problema de transferência envolvendo órbitas do tipo Halo com tempo fixo é pouco explorado na literatura. A única referência tratando de um problema similar é Correa et al (2002) porém, esta referência considera o sistema de primários Terra-Lua e mostra apenas transferências entre a Terra e as órbitas halo. Para este tipo de manobra o consumo mínimo se situa na faixa de 6 km/s a 7 km/s. No presente capítulo foi encontrado o valor de 12 km/s. Este fato é esperado, dado que, o sistema Terra-Sol aqui considerado, possui dimensões muito maiores a serem vencidas pelo veículo espacial e a Terra também possui uma massa real maior que a massa da Lua. Quando a comparação é feita em unidades canônicas, o consumo obtido no sistema Terra-Sol é menor, cerca de 0,41 contra cerca de 6. Isto é justificado pelo fato da Terra, no sistema Terra-Sol, ter uma massa relativa menor que a massa da Lua no sistema Terra-Lua. Este efeito gravitacional menor do primário colabora na redução do consumo, quando considerados os termos relativos.

## CAPÍTULO 7

### MANOBRAS ORBITAIS DE RENDEZ-VOUS ENVOLVENDO ÓRBITAS DO TIPO HALO

#### 7.1 – Introdução

Para ocorrer um encontro entre dois veículos espaciais (rendez-vous) é necessário que o instante de suas chegadas em um ponto pré-determinado no espaço seja o mesmo para os dois veículos considerados. O veículo a ser transferido chama-se “interceptor” e o veículo a ser interceptado chama-se “alvo”.

Muitos trabalhos nesse assunto foram publicados na literatura a partir da década de 60 até os dias atuais. Em geral, são estudados métodos impulsivos que executem a manobra desejada. Alguns dos trabalhos pioneiros nessa linha são: Billik e Roth (1967); Prussing (1969 e 1970); Gross e Prussing (1974). Trabalhos mais recentes considerando o mesmo modelo impulsivo e também a possibilidade de empuxo contínuo também existem na literatura. Entre eles podem ser destacados: Prussing (1969), Wolfsberger *et al* (1983); Prussing e Chiu (1986); Prussing (1988); Mirfakhraie (1990); Humi (1993); Lee e Cochran (1993); Lembeck e Prussing (1993); Mirfakhraie e Conway (1994); Shaohua *et al* (1994); Yuan e Hsu (1994); Pardis e Carter (1995), Tauer *et al* (1995); Stern e Fowler (1985); Yu (1995); Lopez e Mcinnes (1995).

Neste trabalho, será estudado o problema de rendez-vous envolvendo órbitas do tipo Halo baseado no método numérico (Prado, 1996), que pode resolver o problema sem as hipóteses simplificadoras utilizadas nos métodos analíticos.

## 7.2 – O método de Rendez-vous

As condições iniciais para resolver este problema são: as órbitas do alvo e do interceptador, incluindo a informação requerida para especificar suas posições nas órbitas e o tempo máximo de vôo para a manobra. A solução procurada é a transferência de órbita que satisfaça todas as condições iniciais e que necessite de um impulso total mínimo (a adição das magnitudes dos dois impulsos aplicados). Para obter a solução deste problema, é formulado e resolvido o Problema de Lambert (mostrado no Capítulo 6) associado com cada transferência particular. Com as soluções dadas por esta rotina computacional, é possível calcular a magnitude de todos os impulsos que devem ser aplicados. O método aqui exposto foi desenvolvido em Prado e Broucke (1996) e adaptado para órbitas do tipo Halo no presente trabalho.

Para a presente pesquisa, o modelo assumido para o controle do interceptador é uma manobra bi-impulsiva. O primeiro impulso é aplicado em um tempo  $t_0$ , de tal modo que o interceptador e o alvo se encontrem em  $t_f$ , quando o segundo impulso é aplicado com a intenção de colocar o interceptador na mesma órbita do alvo. O caso mais simples é o de uma transferência direta, onde o interceptador intercepta o alvo antes de fazer uma revolução completa ao redor do corpo atrator. Transferências onde uma ou mais revoluções são completadas pelo interceptador antes de se encontrar com o alvo também são possíveis. A questão considerada aqui é como (magnitude e direção) e quando executar esses dois impulsos para obter a manobra que tem o consumo de combustível total  $\Delta V$  mínimo. Para responder esta pergunta, foi utilizado o procedimento descrito a seguir.

As órbitas inicial e final são determinadas como uma condição do procedimento. A informação sobre a posição das espaçonaves em suas órbitas também é requerida e é dada. Então, os parâmetros seguintes são especificados: o tempo inicial da manobra  $t_0$ , um valor para o limite inferior do tempo de transferência ( $t_f - t_0$ ), um valor para o limite superior do mesmo tempo de transferência, um valor para o incremento do tempo de

transferência e o número de revoluções do interceptador antes de encontrar o alvo. Com esses parâmetros, aplica-se um algoritmo, cujas etapas são: (Prado, 1996).

- a) O valor do limite inferior para o tempo de transferência é considerado como sendo o tempo de transferência  $\Delta t$  da manobra;
- b) Utilizando-se as órbitas Halo determinadas pelo método de Lindsted-Poincaré, os elementos Cartesianos do interceptador no momento inicial da manobra  $t_0$  são calculados. Esta posição é chamada de  $\vec{r}_i$  e esta velocidade de  $\vec{v}_i$ ;
- c) Utilizando-se novamente órbitas Halo determinadas pelo método de Lindsted-Poincaré, os elementos Cartesianos do alvo no momento final da manobra  $t_f = t_0 + \Delta t$  são calculados. Esta posição é chamada de  $\vec{r}_f$  e esta velocidade de  $\vec{v}_f$ ;
- d) Assume-se um valor para o número de revoluções  $K$  do interceptador (número de órbitas completas que o interceptador realiza durante a manobra). Então, com  $\vec{r}_i$ ,  $\vec{v}_i$ ,  $\vec{r}_f$ ,  $\vec{v}_f$ ,  $\Delta t$  e  $K$ , têm-se todos os dados necessários para resolver o Problema de Lambert. A solução do Problema de Lambert (dentro da dinâmica dada pelo problema restrito de três corpos) fornece a órbita de transferência, o tempo de transferência e o  $\Delta V$  requerido, podendo ter nenhuma, uma ou duas soluções;
- e) Então, soma-se um passo de tempo para o tempo de transferência e retorna-se ao segundo passo com o novo tempo de transferência  $\Delta t$ .

Para estudar a manobra de rendez-vous ótima serão executadas várias simulações utilizando o algoritmo descrito acima. Todos os valores serão expressos em unidades canônicas e os ângulos em graus. As unidades canônicas são adimensionais.

### 7.3 – Resultados

Realizam-se manobras envolvendo as órbitas descritas na Tabela 6.1 com  $\beta = 0,008$  e  $\beta = 0,01$ . A Tabela 7.1 descreve os resultados dentro da dinâmica do problema restrito de três corpos para o sistema Sol-Terra-veículo espacial.

TABELA 7.1- Rendez-vous de Mínimo Consumo em torno de  $L_1$

a para:	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
2	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	0,021500889	167,531020658	12,495760052	42
3	0,6630323485682311	0,025462260	126,955697291	169,555798346	90
<b>4</b>	<b>1,513073821091602</b>	<b>0,002077639</b>	<b>3,593659927</b>	<b>5,958056515</b>	<b>143</b>
5	1,530074650542069	0,002179833	3,938414503	6,202651889	180
6	1,547075479992536	0,002400914	4,826906607	6,781118155	233
7	2,397116952515913	0,068707276	115,826667134	108,564560845	90
8	3,051648886358922	0,128747314	100,838576128	100,747082103	42

b para:	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
2	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	0,019724836	6,336605214	6,313821662	42
<b>3</b>	<b>0,6630323485682311</b>	<b>0,001454856</b>	<b>4,041920513</b>	<b>7,999182397</b>	<b>90</b>
4	1,513073821091602	0,001939987	4,543323206	5,647864440	143
5	1,530074650542069	0,002066808	5,002409316	6,019804007	180
6	1,547075479992536	0,002403674	6,242445425	7,004297927	233
7	2,397116952515913	0,068743424	116,200415450	108,673665484	90
8	3,051648886358922	0,128713041	100,899246178	100,751392047	42

c para:	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
2	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	1,029658505	129,134713431	169,600524105	42
<b>3</b>	<b>0,6630323485682311</b>	<b>0,012405477</b>	<b>74,701018074</b>	<b>129,827336985</b>	<b>90</b>
4	1,513073821091602	0,017954586	91,425462079	11,628279122	143
5	1,530074650542069	0,018202023	91,780856109	11,366251167	180
6	1,547075479992536	0,018459539	92,140492482	11,111208178	233
7	2,397116952515913	0,061276823	102,138256439	102,901866102	90
8	3,051648886358922	0,128956532	102,050236738	100,310690878	42

d para:	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
2	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	0,647429491	90,105688496	89,469519058	42
3	0,6630323485682311	0,019687244	126,499198397	58,463111034	90
<b>4</b>	<b>1,513073821091602</b>	<b>0,016679181</b>	<b>84,162787185</b>	<b>56,285642512</b>	<b>143</b>
5	1,530074650542069	0,016919548	76,125583869	66,846508213	180
6	1,547075479992536	0,017333593	68,632228550	77,502148564	233
7	2,397116952515913	0,048289449	124,758252982	80,880438617	90
8	3,051648886358922	0,123946374	74,461740834	99,950329076	42

( Continua ).

TABELA 7.1 – ( Conclusão ).

e para:	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
2	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	0,647692121	91,218277983	87,906043785	42
3	0,6630323485682311	0,019785328	126,201286513	57,880423071	90
4	1,513073821091602	0,016706242	79,660694140	61,080663876	143
<b>5</b>	<b>1,530074650542069</b>	<b>0,016961498</b>	<b>71,624030832</b>	<b>71,667060794</b>	<b>180</b>
6	1,547075479992536	0,017763850	81,668185694	66,718420494	233
7	2,397116952515913	0,048223004	124,423362081	80,875911352	90
8	3,051648886358922	0,048223004	124,423362081	80,875911352	42

f para:	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
2	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	0,648297086	92,328698127	86,344737342	42
3	0,6630323485682311	0,019884319	125,907590728	57,323762060	90
<b>4</b>	<b>1,513073821091602</b>	<b>0,016733135</b>	<b>75,134846788</b>	<b>65,914178555</b>	<b>143</b>
5	1,530074650542069	0,017003662	67,267485406	76,332778930	180
6	1,547075479992536	0,017461571	60,799462404	85,884086587	233
7	2,397116952515913	0,048154331	124,090467315	80,871355332	90
8	3,051648886358922	0,123838159	74,291465334	99,958037416	42

g para:	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
2	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	1,044775106	50,254993170	9,263151835	42
<b>3</b>	<b>0,6630323485682311</b>	<b>0,017893295</b>	<b>36,497217619</b>	<b>36,565430068</b>	<b>90</b>
4	1,513073821091602	0,032731491	126,743485109	125,335497188	143
5	1,530074650542069	0,033891805	126,782977741	126,063793501	180
6	1,547075479992536	0,035005214	126,818220410	126,750457041	233
7	2,397116952515913	0,060906966	109,960390650	114,504130017	90
8	3,051648886358922	0,122889122	94,564395685	100,863553816	42

h para:	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
2	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	0,038743915	4,183774562	4,240565610	42
<b>3</b>	<b>0,6630323485682311</b>	<b>0,001476024</b>	<b>4,222842423</b>	<b>9,940437029</b>	<b>90</b>
4	1,513073821091602	0,002016318	5,991854485	5,350605968	143
5	1,530074650542069	0,002197213	6,614137510	5,939897564	180
6	1,547075479992536	0,002745843	8,438686599	7,706401464	233
7	2,397116952515913	0,068768833	116,528805613	108,782206287	90
8	3,051648886358922	0,128686275	101,023305405	100,755774733	42

Os valores em negrito da Tabela 7.1 correspondem ao mínimo valor de consumo de combustível a partir de um dado ponto na órbita inicial referente a cada transferência.

O sombreado representa o mínimo valor de consumo de combustível dentre todas as manobras que ocorreu de uma órbita inicial do tipo halo com  $\beta = 0,008$  no ponto b para uma órbita final com  $\beta = 0,01$  no ponto 3.

#### **7.4 – Conclusões**

Um algoritmo numérico foi proposto e implementado com sucesso para resolver o problema de rendez-vous entre veículos espaciais que estão em duas órbitas Halo distintas.

O método é baseado na discretização das órbitas Halo e na solução do problema de Lambert entre pares de pontos, conforme o Capítulo 6.

O resultado obtido com esta manobra tem grande utilidade e pode ser aplicado a planejamentos de missões. Considera-se a possibilidade de uma missão Terra-Lua onde uma parte dos equipamentos fique estacionada em uma órbita Halo. Neste caso a manobra que levará o veículo espacial da Lua para órbita Halo será uma manobra de rendez-vous. Existe também a opção de transferir o veículo da Lua para uma órbita Halo qualquer (sem o vínculo de rendez-vous) e depois efetuar o encontro entre eles através do rendez-vous entre as Halos.

O único trabalho encontrado abordando o tópico de rendez-vous entre órbitas Halo é o de Jones e Bishop (1994). Porém, estuda apenas a fase final da manobra, de forma que não é possível uma comparação direta quanto aos consumos obtidos.

O valor de consumo encontrado para manobras de rendez-vous é sempre superior ao da manobra com tempo livre. Este resultado é esperado, dado que o rendez-vous acrescenta um vínculo a manobra, e isto restringe regiões permitidas a manobra em relação a manobra com tempo livre.



## CAPÍTULO 8

### APLICAÇÕES DE MANOBRAS ORBITAIS

- Missão completa no sistema Terra-Lua -

#### 8.1 - Introdução

Neste capítulo estuda-se uma missão completa para um veículo espacial viajar entre a Terra e a Lua, passando por uma órbita de estacionamento do tipo Halo em torno do ponto lagrangiano intermediário  $L_1$ . Uma aplicação usual para essa manobra é a economia de combustível gerada para uma missão lunar que utiliza a órbita Halo para manter equipamentos necessários na transferência entre a Terra e a Lua, mas que não são necessárias em órbita lunar. Este equipamento não tem que ser colocado e retirado da órbita lunar, o que pode gerar uma economia de combustível. Porém, para essa estratégia obter o efeito desejado, resolve-se o problema de transferência entre a Terra e a órbita Halo e entre a órbita Halo e a Lua de maneira a minimizar o combustível com o tempo final livre de restrições.

A principal motivação para este Capítulo é demonstrar a viabilidade de uma missão completa de uma órbita ao redor da Terra a uma órbita ao redor da Lua que oferece a possibilidade de uma economia de combustível devido à permanência de equipamentos na órbita Halo. Esta possibilidade foi mostrada em Belbruno e Miller (1993). A desvantagem deste tipo de manobra se faz com relação ao tempo da missão que passa de cinco dias (manobra de Hohmann) para cinco meses.

Utiliza-se a técnica do “Problema de Lambert”, descrita no Capítulo 6, para as manobras de transferência. Aplicações possíveis para essa manobra envolvem situações onde a passagem pela órbita Halo ocorra devido a uma necessidade da missão, tais como visitas a possíveis estações ou veículos espaciais ali colocados ou missões onde a economia de combustível seja compensadora. O requisito de vínculo temporal seria uma restrição adicional ao problema, devido a fatores tais como: presença de seres humanos no veículo

espacial, necessidade de uma manobra de rendez-vous com outros veículos espaciais, etc.

## 8.2 – A Missão Completa Terra-Halo-Halo-Terra

Para o primeiro passo da manobra completa aplica-se um impulso que retira o veículo espacial de uma órbita de estacionamento em torno da Terra e o coloca em uma órbita de transferência entre a Terra e a órbita Halo. Este primeiro impulso é dado por:

$$\Delta V_1 = \sqrt{(V_{S_x} - V_{t_{1ix}})^2 + (V_{S_y} - V_{t_{1iy}})^2 + (V_{S_z} - V_{t_{1iz}})^2} \quad (8.1)$$

onde:

$V_{S_{x,y,z}}$  = componentes x, y, z da velocidade do veículo quando em órbita da Terra a 7000 km, imediatamente antes da aplicação do primeiro impulso;

$V_{t_{1x,y,z}}$  = componentes x, y, z da velocidade do veículo quando da inserção na trajetória  $T_1$ , imediatamente depois da aplicação do primeiro impulso;

$\Delta V_1$  = impulso total para inserção do veículo espacial na primeira órbita de transferência.

Para o segundo passo aplica-se um impulso para inserir o veículo espacial na órbita Halo, a partir da órbita de transferência  $T_1$ . Este impulso é dado por:

$$\Delta V_2 = \sqrt{(V_{h_{1x}} - V_{t_{1fx}})^2 + (V_{h_{1y}} - V_{t_{1fy}})^2 + (V_{h_{1z}} - V_{t_{1fz}})^2} \quad (8.2)$$

onde:

$V_{t_{1fx,y,z}}$  = componentes x, y, z da velocidade do veículo na órbita de  $T_1$  quando da sua chegada na órbita Halo, imediatamente antes da aplicação do segundo impulso;

$V_{h_{1x,y,z}}$  = componentes x, y, z da velocidade do veículo quando de sua inserção na órbita Halo, imediatamente após a aplicação do segundo impulso;

$\Delta V_2 =$  impulso total para inserção do veículo espacial na órbita Halo.

Para o terceiro passo aplica-se um terceiro impulso para inserir o veículo espacial na trajetória de transferência  $T_2$ , que leva o veículo da órbita Halo até a Lua. O ponto de saída mais econômico não é o mesmo ponto de chegada da trajetória  $T_1$ , o que implica em uma espera na órbita Halo independente dos objetivos da missão. Sendo assim, o terceiro impulso é dado por:

$$\Delta V_3 = \sqrt{(Vh_{2x} - Vt_{2ix})^2 + (Vh_{2y} - Vt_{2iy})^2 + (Vh_{2z} - Vt_{2iz})^2} \quad (8.3)$$

onde:

$Vt_{2ix,y,z} =$  componentes x, y, z da velocidade do veículo na órbita de  $T_1$  quando da sua chegada na órbita Halo, imediatamente após a aplicação do terceiro impulso;

$Vh_{2x,y,z} =$  componentes x, y, z da velocidade do veículo quando na órbita Halo no instante da sua inserção na trajetória  $T_2$ , imediatamente antes da aplicação do terceiro impulso;

$\Delta V_3 =$  impulso total para inserção do veículo espacial na trajetória de transferência 2.

Para o último passo da viagem de ida até a Lua aplica-se um quarto impulso que insere o veículo espacial em sua órbita final ao redor da Lua. A magnitude desse quarto impulso é dada por:

$$\Delta V_4 = \sqrt{(VL_x - Vt_{2fx})^2 + (VL_y - Vt_{2fy})^2 + (VL_z - Vt_{2fz})^2} \quad (8.4)$$

onde:

$V_{t_{2f,x,y,z}}$  = componentes x, y, z da velocidade do veículo quando na trajetória  $T_2$  no instante de sua inserção em órbita lunar, imediatamente antes da aplicação do quarto impulso;

$V_{L_{x,y,z}}$  = componentes x, y, z da velocidade do veículo espacial quando em órbita da Lua a 1960 km, imediatamente após a aplicação do quarto impulso;

$\Delta V_4$  = impulso total para inserção do veículo espacial em órbita da Lua.

Desta forma o consumo total ( $\Delta V$ ) é obtido, somando-se os consumos:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 \quad (8.5)$$

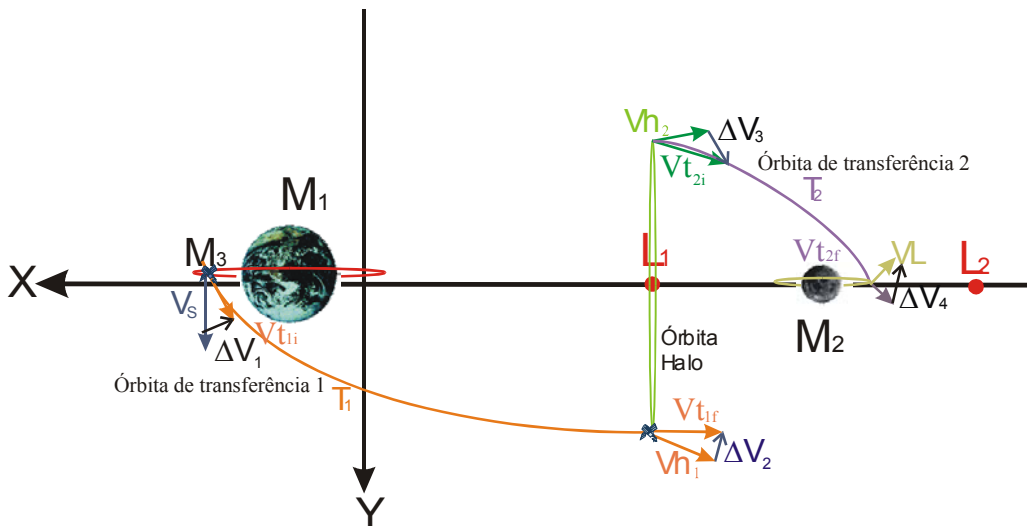


FIGURA 8.1 - Geometria do problema.

A Figura 8.1 ilustra a manobra completa para a viagem de ida até a Lua. Para a viagem de retorno até a Terra utiliza-se a mesma técnica para a transferência entre as órbitas Halo e a Terra e a técnica de rendez-vous descrita no Capítulo 6 para o encontro do subveículo espacial que deixa a órbita da Lua com o veículo espacial que se encontra na órbita Tipo Halo.

### 8.3 – Resultados para a Dinâmica de Três Corpos

Para as transferências orbitais deste capítulo assume-se que o veículo espacial deve deixar a órbita da Terra em um ponto localizado a 7000 km do centro da Terra. O ponto final da transferência será um de quatro pontos de cada uma das três órbitas Halo obtidas. Necessita-se desta discretização das órbitas Halo para a utilização e solução do método de Lambert. Devido ao fato do problema de Lambert não ter solução única, existe uma grande dificuldade em obter solução de menor consumo de combustível. Existem diversos mínimos locais e os métodos numéricos testados possuem grande dificuldade em obter os mínimos globais. Sendo assim, foi adicionado o vínculo de que a trajetória de transferência procurada pelo algoritmo numérico seja tangente ao movimento anterior na órbita de estacionamento em torno de Terra. Com isso, minimiza-se o impulso inicial da manobra e a busca da manobra de menor consumo se restringe às manobras do tipo Hohmann (impulsos tangentes). A seguir, obtém-se consumo de cada transferência, com o objetivo de encontrar a transferência com o menor consumo.

Uma discretização em um número maior de pontos da órbita Halo leva a uma precisão maior na busca do mínimo, porém com um maior esforço computacional em termos de tempo de processamento.

A seguir, estuda-se o consumo para transferências a partir dos pontos que pertencem a Halo até um ponto em uma órbita com 1960 km de altitude em torno da Lua. Utiliza-se a técnica de rendez-vous para o retorno da Lua até uma órbita Halo, devido à necessidade de se encontrar com o veículo que ficou nesta órbita. Para as transferências entre as órbitas Halo, os pontos foram escolhidos de um tal modo que o tempo que o veículo espacial gasta para viajar entre eles seja constante. A seguir, combina-se cada ponto da órbita inicial com cada ponto da órbita final. Para cada par de pontos, resolve-se o problema de Lambert para uma série de tempos de vôo. Então, a manobra de mínimo consumo de combustível para cada par de pontos é listada na Tabela 8.1.

Para este primeiro estudo, geram-se três órbitas Halo diferentes, com a aplicação do método de Lindstedt-Poincaré. Todas elas pertencem à mesma família ao redor do ponto lagrangiano  $L_1$ . A diferença entre elas é expressa pelo parâmetro  $\beta$ , que representa a amplitude linear no eixo  $z$ . Em termos deste parâmetro, as órbitas utilizadas neste estudo são: 0,001; 0,05, e 0,100. A Figura 8.2 mostra estas órbitas Halo, já discretizadas nos quatro pontos.

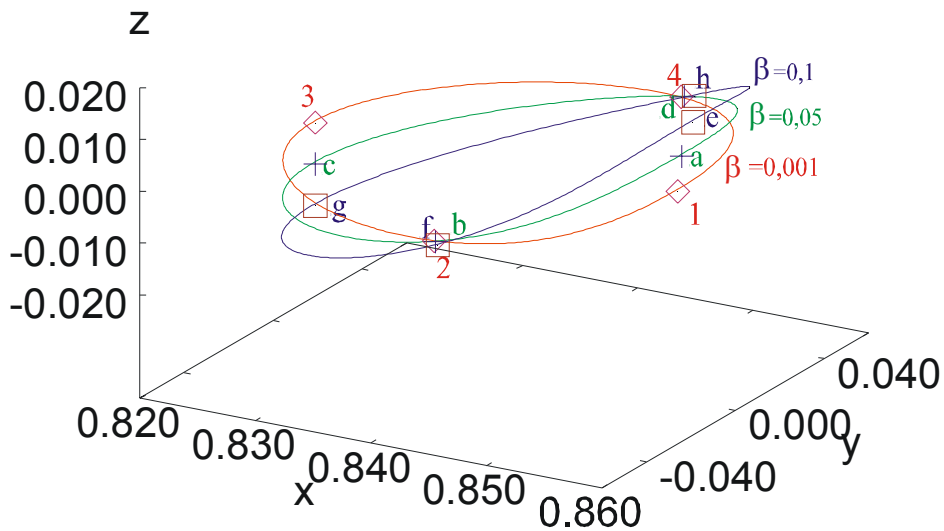


FIGURA 8.2 - Órbitas Halo que mostram os pontos utilizados para as transferências.

A Tabela 8.1 mostra a posição e a velocidade, no sistema girante, para os quatro pontos nos quais as órbitas foram discretizadas e para todas as três órbitas determinadas. Esta tabela também define a nomenclatura utilizada para os pontos.

TABELA 8.1 - Posição e Velocidade, no Sistema Girante, para os Quatro Pontos das Órbitas Halo.

Órbita HALO 1 ( $\beta = 0,001$ )

x	y	z	vx	vy	vz	ponto
0,8550346	0	$1,41181571 \times 10^{-4}$	0	-0,13357503945	0	1
0,8446384	$-5,555764 \times 10^{-2}$	$5,5244823 \times 10^{-7}$	$-3,5035189 \times 10^{-3}$	$-1,4193513 \times 10^{-2}$	$-3,430358 \times 10^{-4}$	2
0,8236527	0	$-1,6185533 \times 10^{-4}$	0	0,1261723	0	3
0,8446384	$5,555764 \times 10^{-2}$	$5,5244823 \times 10^{-7}$	$3,5035189 \times 10^{-2}$	$-1,4193513 \times 10^{-2}$	$3,4303582 \times 10^{-4}$	4

Órbita HALO 2 ( $\beta = 0,05$ )

x	y	z	vx	vy	vz	ponto
0,855364	0	$7,0536659 \times 10^{-3}$	0	-0,13499743	0	a
0,8448171	$-5,6101007 \times 10^{-2}$	$1,6340096 \times 10^{-5}$	$-3,5429034 \times 10^{-2}$	$-1,4204071 \times 10^{-2}$	$-1,7149859 \times 10^{-2}$	b
0,8236527	0	$-7,0536659 \times 10^{-3}$	0	0,13499743	0	c
0,8446384	$5,6101007 \times 10^{-2}$	$1,6340096 \times 10^{-5}$	$3,5429034 \times 10^{-2}$	$-1,4204071 \times 10^{-2}$	$1,7149859 \times 10^{-2}$	d

Órbita HALO 3 ( $\beta = 0,1$ )

x	y	z	vx	vy	vz	ponto
0,856353	0	$1,4075205 \times 10^{-2}$	0	-0,13919989	0	e
0,845349	$-5,7701918 \times 10^{-2}$	$-3,4341665 \times 10^{-5}$	$-3,659545 \times 10^{-2}$	$1,422379 \times 10^{-2}$	$-3,428782 \times 10^{-2}$	f
0,823642	0	$-1,623469 \times 10^{-2}$	0	0,13044728	0	g
0,845349	$5,7701918 \times 10^{-2}$	$3,4341665 \times 10^{-2}$	$3,659545 \times 10^{-2}$	$-1,422379 \times 10^{-2}$	$3,4287826 \times 10^{-2}$	h

A seguir, estuda-se a transferência entre as diferentes órbitas Halo. A Tabela 8.2 mostra os consumos para transferências entre um ponto em uma órbita ao redor da Terra com 7000 km de altitude e os pontos das órbitas Halo.

Para as tabelas deste capítulo as linhas em **negrito** representam os consumos mínimos entre cada órbita e a linha **sombreada** representa o valor de consumo mínimo dentre todas as manobras.

A Tabela 8.3 mostra o consumo para transferências entre as órbitas Halo e um ponto em uma órbita com 1960 km de altitude ao redor da Lua.

A Tabela 8.4 mostra os resultados obtidos para cada ponto da órbita assumida como inicial combinada com todos os quatro pontos da órbita assumida como final. As linhas **marcadas** representam as transferências com menor consumo, onde está registrado o tempo e o consumo de cada manobra.

A Tabela 8.5 representa os consumos do encontro do veículo espacial envolvendo a órbita da Lua e as órbitas do tipo Halo.

A Tabela 8.6 representa os consumos do encontro do veículo espacial entre as órbitas do tipo Halo.

TABELA 8.2 – Transferências entre a Terra e as Órbitas Halo no Sistema Terra-Lua.

Da Terra pra Halo	t	$\Delta v$	Para Terra da Halo	t	$\Delta v$
1	1,5	0,989468170	1	1,5	0,988934623
2	1,6	1,254305096	2	1,4	1,253298050
3	1,5	1,228422645	3	1,5	1,227564215
4	4,5	1,169758074	4	3,9	4,386580178
a	1,5	0,988210419	a	1,5	0,987189139
b	1,6	1,252341424	b	1,4	1,251709287
c	1,5	1,229551750	c	1,5	1,228694321
d	1,4	1,250673612	d		Sem convergência
<b>e</b>	<b>1,5</b>	<b>0,984494785</b>	<b>e</b>	<b>1,5</b>	<b>0,983497375</b>
f	1,6	1,246591335	f	1,4	1,247055011
g	1,5	1,232882171	g	1,5	1,232027757
h	1,4	1,246032828	h	3,9	4,398280012

TABELA 8.3 – Transferências entre as Órbitas Halo e a Lua no Sistema Terra-Lua.

Para Lua da Halo	t	$\Delta v$	Da Lua pra Halo	t	$\Delta v$
1	1,1	0,525300723	1	1,1	0,525219888
2		Sem convergência	2	1,3	0,374734726
3	1,2	0,265352344	3	1,2	0,265202410
4	1,3	0,374592306	4	1,0	0,371368244
a	1,1	0,519728791	a	1,1	0,519838652
b		Sem convergência	b	1,3	0,375184078
c	1,2	0,267432268	c	1,2	0,267278068
d	1,3	0,375038032	d	1,0	0,369724158
e	1,1	0,503248037	e	1,1	0,503376304
f	1,0	0,364600573	f	1,3	0,376486086
<b>g</b>	<b>0,11</b>	<b>0,253146017</b>	g	1,2	0,273425700
h	6,1	1,051701219	<b>h</b>	<b>6,3</b>	<b>0,181703165</b>



TABELA 8.4 – Transferências entre as Diferentes Órbitas Halo no Sistema Terra-Lua.

De e para:	t	$\Delta v$
1	0,85	0,273686570
2	0,62	0,038531233
3	1,11	0,193891638
4	0,82	0,280661992
De f para:	t	$\Delta v$
1	0,82	0,281566563
2	1,41	0,103938697
3	0,75	0,038420900
4	1,41	0,061007747
De g para:	t	$\Delta v$
1	1,09	0,200032932
2	0,77	0,268996540
3	0,91	0,253167554
4	0,74	0,038510888
De h para:	t	$\Delta v$
1	0,64	0,038318003
2	1,26	0,042885496
3	0,78	0,267202707
4	1,32	0,100379591
De e para:	t	$\Delta v$
a	0,58	0,278320134
b	0,62	0,020549708
c	1,25	0,150105039
d	0,81	0,297181426
De f para:	t	$\Delta v$
a	0,81	0,297647158
b	0,12	0,104410746
c	0,75	0,020511341
d	1,43	0,062083455
De g para:	t	$\Delta v$
a	1,24	0,162766321
b	0,77	0,285457137
c	0,71	0,257150736
d	0,75	0,020568870
De h para:	t	$\Delta v$
a	0,65	0,020512544
b	1,26	0,050864117
c	0,78	0,284484371
d	0,11	0,100973691
De a para:	t	$\Delta v$
1	1,03	0,262335934
2	0,62	0,017919671
3	1,24	0,151801055
4	0,82	0,263582007
De b para:	t	$\Delta v$
1	0,82	0,263937309
2	0,75	0,083915128
3	0,75	0,017946219
4	1,5	0,029042611
De c para:	T	$\Delta v$
1	1,24	0,155990325
2	0,77	0,251301407
3	1,08	0,243324804
4	0,745	0,017946655
De d para:	t	$\Delta v$
1	0,63	0,017876647
2	1,25	0,017584569
3	0,77	0,250639145
4	0,65	0,082046492

De 1 para:	t	$\Delta v$
a	1,03	0,262335939
b	0,63	0,017876695
c	1,24	0,155990324
d	0,82	0,263937248
De 1 para:	t	$\Delta v$
e	0,85	0,273686580
f	0,64	0,038318047
g	1,09	0,200032945
h	0,82	0,281566522
De 2 para:	t	$\Delta v$
a	2,82	0,263582076
b	0,65	0,082047226
c	0,75	0,018003250
d	1,46	0,028360674
De 2 para:	t	$\Delta v$
e	0,82	0,280662052
f	1,32	0,100379785
g	0,74	0,038510893
h	1,41	0,061007929
De 3 para:	t	$\Delta v$
a	1,24	0,151801072
b	0,77	0,250639137
c	1,08	0,243324808
d	0,75	0,017946231
De 3 para:	t	$\Delta v$
e	1,11	0,193891663
f	0,78	0,267202718
g	0,91	0,253167559
h	0,75	0,038420914
De 4 para:	t	$\Delta v$
a	0,62	0,017919696
b	1,25	0,017584640
c	0,77	0,251301416
d	0,75	0,083913889
De 4 para:	t	$\Delta v$
e	0,62	0,038531253
f	1,26	0,042885454
g	2,39	1,046032490
h	1,41	0,103938115
De a para:	t	$\Delta v$
e	0,58	0,278320163
f	0,63	0,020512544
g	1,24	0,162766349
h	0,81	0,297647138
De b para:	t	$\Delta v$
e	0,81	0,297181476
f	0,113	0,100965826
g	0,75	0,020568875
h	1,43	0,062083624
De c para:	t	$\Delta v$
e	1,25	0,150105086
f	0,78	0,284484391
g	0,71	0,257150758
h	0,75	0,020511338
De d para:	t	$\Delta v$
e	0,62	0,020549726
f	1,26	0,050864102
g	0,77	0,285457143
h	0,123	0,104397009

TABELA 8.5 – Rendez-vous da Lua a Halo no Sistema Terra-Lua.

Da Lua pra Halo	t	$\Delta v$
1	Sem	convergência
2	0,624999090	1,449683579
3	1,371949222	1,378433578
4	2,118899355	1,607362233
a	Sem	convergência
b	0,624999090	1,451590397
c	<b>1,371949222</b>	<b>1,379516606</b>
d	2,118899355	1,606787048
e	Sem	convergência
f	0,624999090	1,457233569
g	1,371949222	1,382710346
h	2,118899355	1,605093726

TABELA 8.6 – Rendez-vous entre Halos no Sistema Terra-Lua.

De Halo 1 para	t	$\Delta v$
<b>b</b>	<b>0,624999090</b>	<b>0,018003916</b>
c	1,371949222	0,250932382
d	2,118899355	0,582090706
f	0,625304873	0,038677599
g	1,372620453	0,355653877
h	2,119936033	0,579663581
De Halo 2 para	t	$\Delta v$
b	0,624999090	0,185393928
c	1,371949222	0,292758509
<b>d</b>	<b>2,118899355</b>	<b>0,160383239</b>
f	0,625304873	0,192047007
g	1,372620453	0,307767330
h	2,119936033	0,164967928
De Halo 3 para	t	$\Delta v$
b	0,624999090	0,275857005
c	1,371949222	0,319743723
d	2,118899355	3,910289632
f	0,625304873	0,289655428
g	1,372620453	0,384669316
h	2,119936033	3,910961182
De Halo 4 para	t	$\Delta v$
b	0,624999090	0,257996278
c	1,371949222	0,520572358
d	2,118899355	0,946544511
f	0,625304873	0,265064705
g	1,372620453	0,546784028
h	2,119936033	0,946103885

Da Halo a para	t	$\Delta v$
f	0,625304873	0,020676104
g	1,372620453	0,257507881
h	2,119936033	0,575964064
Da Halo b para	t	$\Delta v$
f	0,625304873	0,194415600
g	1,372620453	0,303069899
<b>h</b>	<b>2,119936033</b>	<b>0,166642854</b>
Da Halo c para	t	$\Delta v$
f	0,625304873	0,303875659
g	1,372620453	0,428775483
h	2,119936033	3,912118964
Da Halo d para	t	$\Delta v$
f	0,625304873	0,267449955
g	1,372620453	0,558586891
h	2,119936033	0,946027489

Os resultados obtidos estão dentro do esperado. As manobras entre as órbitas do tipo halo possuem um consumo muito inferior às manobras que envolvem os primários, pois

a maior distancia dos pontos de aplicação dos impulsos em relação aos corpos com massa reduz a força gravitacional recebida. Quando se analisam as manobras que envolvem os primários, nota-se que a manobra de escape da Terra possui um consumo muito maior em relação à manobra que envolve a Lua, fato este, justificado pela massa da Terra ser de oitenta e uma vezes superior à da Lua.

#### **8.4 – Hipóteses para a Missão**

Para desenvolver a missão utilizam-se as tabelas anteriores para os valores de consumos das transferências e consideram-se algumas possibilidades, descritas esquematicamente abaixo:

Para a ida, consideramos seis possibilidades:

- a) Transferência de um veículo espacial de uma órbita ao redor da Terra para a órbita com  $\beta = 0,1$ . Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 0,984494785$  com tempo de transferência  $t = 1,5$ . Este veículo permanece nesta órbita, de onde um sub-veículo é lançado e realiza uma transferência desta órbita Halo com  $\beta = 0,1$  para a órbita ao redor Lua. Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 0,253146017$  com tempo de transferência  $t = 0,11$ . O consumo total obtido é  $\Delta V = 1,237640802$  com tempo total de transferência  $t = 1,61$ .
- b) Transferência de um veículo espacial de uma órbita ao redor da Terra para a órbita Halo com  $\beta = 0,05$ . Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 0,988210419$  com tempo de transferência  $t = 1,5$ . Este veículo permanece nesta órbita, de onde um sub-veículo é lançado e realiza uma transferência desta órbita Halo com  $\beta = 0,05$  para a órbita ao redor Lua. Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 0,267432268$  com tempo de transferência  $t = 1,2$ . O consumo total obtido é  $\Delta V = 1,255642687$  com tempo total de transferência  $t = 2,7$ .
- c) Transferência de um veículo espacial de uma órbita ao redor da Terra para a órbita com  $\beta = 0,001$ . Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 0,989468170$  com tempo de transferência  $t = 1,5$ . Este veículo permanece nesta órbita, de onde um sub-veículo é

lançado e realiza uma transferência desta órbita Halo com  $\beta = 0,001$  para a órbita ao redor Lua:  $\Delta V = 0,265352394$  com tempo de transferência  $t = 1,2$ . Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 1,254820514$  com tempo total de transferência  $t = 2,7$ .

**d)** Agora se consideram as transferências entre as órbitas Halo. Tem-se: Transferência do veículo espacial de uma órbita ao redor da Terra para a órbita Halo com  $\beta = 0,1$ . Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 0,984494785$  com tempo de transferência  $t = 1,5$ . Este veículo permanece nesta órbita. Realiza-se a transferência do sub-veículo desta órbita Halo com  $\beta = 0,1$  para a órbita do tipo Halo com  $\beta = 0,001$ . Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 0,03831800$  com tempo de transferência  $t = 0,64$ . Agora realiza-se a transferência do sub-veículo da órbita Halo com  $\beta = 0,001$  para órbita ao redor Lua. Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 0,265352344$  com tempo de transferência  $t = 1,2$ . O consumo total obtido é  $\Delta V = 1,288165129$  com tempo total de transferência  $t = 3,34$ .

**e)** Transferência do veículo espacial de uma órbita ao redor da Terra para a órbita Halo com  $\beta = 0,1$ . Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 0,984494785$  com tempo de transferência  $t = 1,5$ . Este veículo permanece nesta órbita. Realiza-se a transferência do sub-veículo desta órbita Halo com  $\beta = 0,1$  para a órbita Halo com  $\beta = 0,05$ . Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 0,020511341$  com tempo de transferência  $t = 0,75$ . Realiza-se a transferência do sub-veículo desta órbita Halo com  $\beta = 0,05$  para órbita ao redor Lua. Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 0,26732268$  com tempo de transferência  $t = 1,2$ . O consumo total obtido é  $\Delta V = 1,272328806$  com tempo total de transferência  $t = 3,45$ .

**f)** Transferência do veículo espacial de uma órbita ao redor da Terra para a órbita Halo com  $\beta = 0,05$ . Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 0,988210419$  com tempo de transferência  $t = 1,5$ . Este veículo permanece nesta órbita. Realiza-se a transferência do sub-veículo desta órbita Halo com  $\beta = 0,05$  para a órbita Halo com  $\beta = 0,001$ . Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 0,017584569$  com tempo de transferência  $t = 1,25$ . Realiza-se a transferência do sub-veículo desta órbita Halo com  $\beta = 0,001$  para órbita ao redor Lua. Nesta etapa o consumo obtido é  $\Delta V = 0,265202410$  com tempo de transferência  $t = 1,2$ . O consumo total obtido é  $\Delta V = 1,270977398$  com tempo total de transferência  $t = 3,95$ .

Concluiu-se que o consumo total mínimo para a viagem até a Lua corresponde à hipótese a.

Para a volta:

**a)** O veículo espacial encontra-se na órbita com  $\beta = 0,1$ . Efetua-se a manobra de rendez-vous entre a órbita de estacionamento ao redor da Lua e a órbita Halo com  $\beta = 0,1$ . Nesta etapa o consumo obtido é dado por  $\Delta V = 1,382710346$  com tempo de transferência  $t = 1,37$ . A seguir, efetua-se uma transferência da órbita Halo com  $\beta = 0,1$  para a órbita ao redor da Terra. Nesta etapa o consumo obtido é dado por  $\Delta V = 0,983497375$  com tempo de transferência  $t = 1,5$ . O consumo total obtido é  $\Delta V = 2,366207721$  com tempo total de transferência  $t = 2,87$ .

**b)** O veículo espacial encontra-se na órbita Halo com  $\beta = 0,05$ . Efetua-se a manobra de rendez-vous entre a órbita de estacionamento ao redor da Lua e a órbita Halo com  $\beta = 0,05$ . Nesta etapa o consumo obtido é dado por  $\Delta V = 1,379516606$  com tempo de transferência  $t = 1,37$ . A seguir, efetua-se a transferência da órbita Halo com  $\beta = 0,05$  para a órbita ao redor da Terra. Nesta etapa o consumo obtido é dado por  $\Delta V = 0,987189139$  com tempo de transferência  $t = 1,5$ . O consumo total obtido é  $\Delta V = 2,366705745$  com tempo total de transferência  $t = 2,87$ .

**c)** O veículo espacial encontra-se na órbita Halo com  $\beta = 0,001$ . Efetua-se a manobra de rendez-vous entre a órbita de estacionamento ao redor da Lua e a órbita Halo com  $\beta = 0,001$ . Nesta etapa o consumo obtido é dado por  $\Delta V = 1,378433578$  com tempo de transferência  $t = 1,37$ . A seguir, efetua-se a transferência da órbita Halo com  $\beta = 0,001$  para a órbita ao redor da Terra. Nesta etapa o consumo obtido é dado por  $\Delta V = 0,988934623$  com tempo de transferência  $t = 1,5$ . O consumo total obtido é  $\Delta V = 2,367368201$  com tempo total de transferência  $t = 2,87$ .

Agora analisaremos uma situação onde o sub-veículo espacial será transferido da órbita em torno da Lua para uma órbita tipo Halo diferente daquela em que o outro veículo

espacial se encontra. Desta forma, é feita a manobra de rendez-vous entre as órbitas Halo. A adição da manobra de rendez-vous acrescenta um consumo de combustível, porém economiza na substituição da manobra de rendez-vous por uma transferência normal entre a órbita em torno da Lua e a órbita Halo do veículo espacial.

**d)** Sendo assim, considera-se que o veículo espacial encontra-se na órbita Halo com  $\beta = 0,1$  e o sub-veículo encontra-se em uma órbita Halo com  $\beta = 0,001$ . Realiza-se a transferência da órbita ao redor da Lua para a órbita do tipo Halo com  $\beta = 0,001$ . Nesta etapa o consumo obtido é dado por  $\Delta V = 0,265202410$  com tempo de transferência  $t = 1,2$ . Realiza-se então a manobra de *rendez-vous* entre a Halo com  $\beta = 0,001$  e a Halo com  $\beta = 0,1$ . Nesta etapa o consumo obtido é dado por  $\Delta V = 0,038677549$  com tempo de transferência  $t = 0,62$ . Finalmente, realiza-se a transferência da Halo com  $\beta = 0,1$  para a órbita ao redor da Terra. Nesta etapa, o consumo obtido é dado por  $\Delta V = 0,983497375$  com tempo de transferência  $t = 1,5$ . O consumo total obtido é:  $\Delta V = 1,287377384$  com tempo total de transferência  $t = 2,32$ .

**e)** O veículo espacial encontra-se ainda na órbita Halo com  $\beta = 0,1$ , porém o sub-veículo encontra-se em uma Halo com  $\beta = 0,05$ . Realiza-se a transferência da órbita ao redor da Lua para a órbita do tipo Halo com  $\beta = 0,05$ . Nesta etapa o consumo obtido é dado por  $\Delta V = 0,26728068$  com tempo de transferência  $t = 1,2$ . Realiza-se então a manobra de *rendez-vous* entre a Halo com  $\beta = 0,05$  e a Halo com  $\beta = 0,1$ . Nesta etapa o consumo obtido é dado por  $\Delta V = 0,166642854$  com tempo de transferência  $t = 2,12$ . Finalmente, realiza-se a transferência da Halo com  $\beta = 0,1$  para a órbita ao redor da Terra. Nesta etapa, o consumo obtido é dado por  $\Delta V = 0,983497375$  com tempo de transferência  $t = 1,5$ . O consumo total obtido é  $\Delta V = 1,417203983$  com tempo total de transferência  $t = 4,82$ .

**f)** O veículo espacial agora encontra-se na órbita Halo com  $\beta = 0,05$  e o sub-veículo encontra-se em uma órbita Halo com  $\beta = 0,001$ . Realiza-se a transferência da órbita ao redor da Lua para a órbita do tipo Halo com  $\beta = 0,001$ . Nesta etapa o consumo obtido é dado por  $\Delta V = 0,265202410$  com tempo de transferência  $t = 1,2$ . Realiza-se então a manobra de *rendez-vous* entre a Halo com  $\beta = 0,001$  e outra com  $\beta = 0,05$ . Nesta etapa o

consumo obtido é dado por  $\Delta V = 0,018003916$  com tempo de transferência  $t = 0,62$ . Finalmente, realiza-se a transferência da Halo com  $\beta = 0,05$  para a órbita ao redor da Terra. Nesta etapa, o consumo obtido é dado por  $\Delta V = 0,987189138$  com tempo de transferência  $t = 1,5$ . O consumo total obtido é:  $\Delta V = 1,270395464$  com tempo total de transferência  $t = 3,32$ .

Conclui-se que o consumo total mínimo para a viagem de retorno a Terra corresponde à hipótese f.

Observa-se que o consumo mínimo da missão para a viagem de ida não corresponde ao consumo mínimo da missão para a viagem de volta. Têm-se duas considerações a serem feitas:

- 1) Calcula-se o mínimo consumo da ida com a volta correspondente (possibilidade a), cujo consumo total obtido é dado por  $\Delta V \text{ TOTAL} = 3,603815741$  com tempo de transferência  $t = 4,48$ .
- 2) Calcula-se o mínimo consumo da volta com a ida correspondente (possibilidade f), cujo consumo total obtido é dado por  $\Delta V \text{ TOTAL} = 2,541372862$  com tempo de transferência  $t = 7,27$ .

O menor valor de consumo corresponde ao item 2 cuja possibilidade admitida é a letra f. Desta forma calcula-se os valores para o consumo de combustível para esta manobra. Como o sistema encontra-se em unidades canônicas, faz-se a conversão destas unidades para unidades do sistema internacional. Para isto, utiliza-se as seguintes relações: Unidade canônica de distância = 384400 km; Unidade canônica de tempo = 4,34 dias; Unidade canônica de velocidade = 1,023km/s. Tem-se, então que o consumo total da viagem é dado por  $\Delta V \text{ TOTAL} = 2,59982446258$  km/s e o tempo total de transferência é dado por  $t = 31,40$  dias.

Para se obter uma visão em relação à economia em termos de valores de massa de combustível faz-se a conversão do impulso para variação de massa através da equação:

$$m_0 - m_f = m_0 \left( 1 - \exp\left(\frac{-\Delta V}{I_{sp} g_0}\right) \right) \quad (8.6)$$

onde:

$m_0$  = massa inicial do veículo espacial

$m_f$  = massa final do veículo espacial

$I_{sp}$  = impulso específico dado por 320s

$g_0$  = aceleração da gravidade da Terra =  $9,8\text{m/s}^2$

$\Delta V$  = impulso

Calcula-se apenas para a ida correspondente a hipótese f, por ser a situação de maior aplicação prática encontrada. Parte-se do princípio que deseja-se uma massa final de 100 kg em órbita da Lua. Utiliza-se os valores obtidos acima e os de  $\Delta V$  na parte da trajetória que corresponde a transferência da órbita Halo com  $\beta = 0,05$  para outra órbita Halo com  $\beta = 0,001$  somado a transferência desta última órbita Halo com  $\beta = 0,001$  para a órbita de estacionamento ao redor da Lua. O valor obtido para o impulso é  $\Delta V = 289,29 \text{ m/s}$ . A massa de combustível para esta parte do trajeto é 9,664 kg. Sendo assim, a massa que deverá atingir a órbita Halo será de 209,664 kg incluindo o combustível, a massa de 100 kg que ficará na órbita Halo e a massa de um sub-veículo de 100 kg que irá orbitar a Lua.

Com estes dados, obtém-se o valor de massa de combustível para a transferência de uma órbita ao redor da Terra para uma órbita Halo com  $\beta = 0,05$ . O valor do impulso é dado por 1010,933 m/s o que implica em uma massa de combustível de 79,7539 kg. Sendo assim, o consumo total será de  $79,7539 \text{ kg} + 9,664 \text{ kg} = 89,4179 \text{ kg}$  com  $t = 31,4$  dias.

Para comparação dos resultados, realizam-se os mesmos cálculos para obtenção da massa de combustível da manobra de Hohmann no Capítulo 6. O impulso total é dado por  $\Delta V_t = 3,8457639 \text{ km/s}$  e o tempo de transferência por  $t = 3,62824$  dias. Desta forma, a massa de combustível necessária seria de 240,869 kg.



## 8.5 – Conclusões

Em primeiro lugar, observa-se a grande economia gerada pela estratégia de transferir o sub-veículo da órbita em torno da Lua para uma órbita Halo sem impor a condição de rendez-vous, e apenas numa segunda etapa efetuar o encontro dos veículos espaciais. Esta conclusão é de grande importância para futuras análises de missões.

Comparando-se os resultados de consumo total obtido utilizando as órbitas Halo como estacionamento com a manobra de Hohmann no Capítulo 6, observa-se que a estratégia aqui sugerida possui um consumo menor. Nota-se ainda que a permanência do veículo espacial na órbita tipo Halo aumenta ainda mais a economia de combustível, conforme demonstrado no exemplo calculado. Este resultado é obtido devido a uma dinâmica mais realista utilizada, conforme citado por Belbruno e Miller, 1993. Nota-se, porém, que esta economia de combustível é obtida às custas de um tempo de transferência muito maior, de forma que a escolha da manobra ideal deve considerar estes dois fatores. A maneira mais adequada de se comparar estes resultados com a literatura é o balizamento com a transferência de Hohmann, feito ao longo do texto, dado que uma manobra exatamente igual não existe, calculada na literatura. Esta comparação mostra uma economia da ordem de 150 kg de combustível, o que justifica a utilização da manobra.



## CAPÍTULO 9

### O PROBLEMA RESTRITO DE QUATRO CORPOS

#### 9.1 – Introdução

Neste capítulo estuda-se o problema de obtenção de trajetórias de um veículo espacial no problema restrito bi-circular de quatro corpos. O sistema considerado é Sol-Terra-Lua-veículo espacial. Este tipo de problema tem muitas aplicações potenciais, tais como: a) utilizar o corpo adicional para reduzir o consumo de combustível em uma manobra e deslocar um veículo espacial da Terra a uma órbita do tipo Halo no sistema Sol-Terra e Terra-Lua. b) obter trajetórias de transferência de um veículo espacial de uma órbita de estacionamento ao redor da Terra para a Lua, usando o conceito de captura gravitacional.

Por captura gravitacional compreende-se um fenômeno onde uma partícula de massa infinitesimal muda sua energia de dois corpos ao redor de um dos primários de positivo para negativo. Esta captura é sempre temporária e, depois de certo tempo, a energia de dois-corpos volta para positivo e o veículo espacial deixa a vizinhança dos primários. Utiliza-se esta captura temporária para diminuir o consumo de combustível em uma missão que vai de um dos primários para outro, como por exemplo uma missão Terra-Lua. Nos resultados mostram-se gráficos que têm a informação básica para caracterizar estas órbitas, em particular, satisfazer as aplicações acima.

Comparam-se, neste capítulo, as transferências entre órbitas Halo no problema restrito bi-circular de quatro corpos com a dinâmica do problema restrito de três corpos. Note que as órbitas Halo inicial e final são obtidas com a modelagem dada pelo problema restrito de três corpos, enquanto que a manobra de transferência está sendo modelada pelo problema restrito bi-circular de quatro corpos. Ao considerar este modelo, é preciso levar em conta uma outra variável importante: o ângulo entre a Lua e o Sol no instante inicial ( $\alpha_0$ ). Esta variável define a posição do quarto corpo durante a manobra e é

decisiva para que o modelo de quatro corpos seja ou não vantajoso com relação ao modelo de três corpos. A idéia é obter uma trajetória mais precisa para a transferência e medir o efeito do quarto corpo no consumo de combustível. As órbitas Halo inicial e final, ainda que sofram o efeito do quarto corpo, serão corrigidas por manobras de manutenção, de tal forma que os pontos iniciais e finais da transferência serão os mesmos, independentemente do efeito do quarto corpo.

Para a inclusão do quarto corpo, o modelo dado pelo problema restrito de quatro corpos foi escolhido por ser um modelo simples e preciso o suficiente para os objetivos do presente trabalho.

A inclusão de modelagens mais complexas, como o problema quase-bicircular (Andreu, 1998) acrescenta uma grande complexidade ao problema, com aumento muito pequeno na precisão obtida.

## **9.2 - Modelagem Matemática**

No modelo aqui mostrado, tem-se que (veja a Figura 9.1):

- 1) A Terra e a Lua formam os dois primários, com ambos em órbitas circulares em torno do centro de massa comum;
- 2) O Sol é o terceiro corpo em órbita circular em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua e sua órbita é coplanar com a órbita da Lua;
- 3) Estuda-se o movimento de uma partícula de massa infinitesimal (S/C) que tem o seu movimento governado pela gravitação dos três corpos anteriormente descritos.

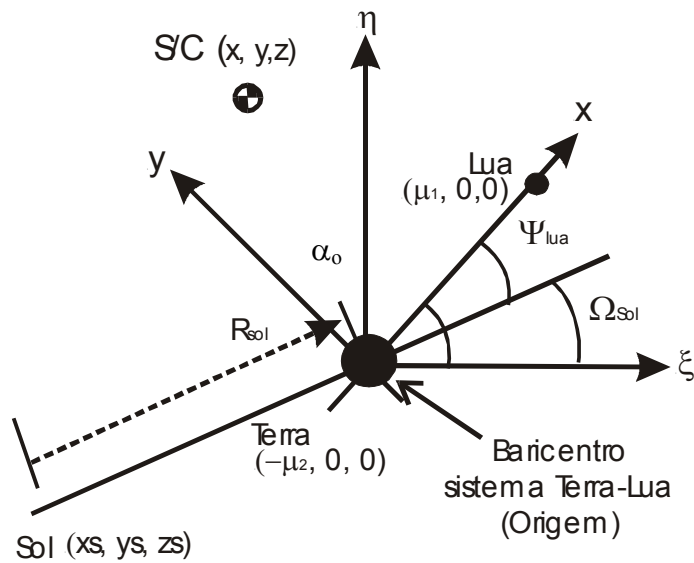


FIGURA 9.1 – Geometria do problema restrito de quatro corpos.

A Figura 9.1 ilustra esse sistema, onde  $(\xi, \eta, \zeta)$  e  $(x, y, z)$  representam a posição da partícula de massa infinitesimal com relação a um referencial inercial e a um referencial que gira fixo com os dois primários, respectivamente. O centro de massa do sistema Terra-Lua é a origem de ambos os sistemas de referência. As massas da Terra e da Lua são dadas por  $\mu_1 = 0,9878493317$  e  $\mu_2 = 0,0121506683$  e suas posições em relação ao referencial girante são dadas por  $(-\mu_2, 0, 0)$  e  $(\mu_1, 0, 0)$ , respectivamente.

Pode-se obter as equações de movimento utilizando a formulação Lagrangiana, conforme mostrado em Yamakawa (1992). Então, define-se a Lagrangiana do sistema como:

$$L = T - U \tag{9.1}$$

onde: T é a energia cinética e U a energia potencial do sistema, ambos dados por:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right) + \left( x \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} y \right) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2)
\end{aligned} \tag{9.2}$$

e

$$U = -\frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} - \mu_{\text{sol}} \left[ \frac{1}{r_{\text{sol}}} - \frac{xx_s + yy_s}{R_{\text{sol}}^3} \right] \tag{9.3}$$

Onde:

$r_1$ ,  $r_2$ , e  $r_{\text{sol}}$  = distâncias do veículo espacial em relação à Terra, Lua e Sol, respectivamente.

$R_{\text{sol}} = 389,1723985$  é a distância entre o Sol e a origem do sistema de coordenadas.  $(x_s, y_s, z_s)$  corresponde à posição do Sol com relação ao referencial girante.

$\mu_{\text{sol}} = 328900,48$  representa a constante gravitacional do Sol (massa do Sol multiplicada pela constante gravitacional universal).

Essas variáveis são dadas por:

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2 \tag{9.4}$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2 \tag{9.5}$$

$$\begin{aligned}
r_{\text{sol}}^2 &= (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 \\
&= (x + R_{\text{sol}} \cos \psi_{\text{lua}})^2 + (y - R_{\text{sol}} \sin \psi_{\text{lua}})^2 + z^2
\end{aligned} \tag{9.6}$$

onde  $\psi_{\text{lua}}$  corresponde ao ângulo que especifica a posição da Lua, conforme mostrado na Figura 9.1, e é dado por:

$$\Psi_{\text{lua}} = \alpha + (\omega_{\text{E-M}} - \Omega_{\text{sol}})t \quad (9.7)$$

onde:

$\alpha$  = ângulo de fase do Sol expresso por (direção anti-Sol)-(origem)-(Lua), que é equivalente a fase inicial da posição da Lua em um sistema fixo com a Terra e o Sol;

$\omega_{\text{E-M}}$  = velocidade angular do sistema Terra-Lua (= 1,00);

$\Omega_{\text{sol}}$  = velocidade angular do Sol em torno da origem (= 0,07480133).

Com a formulação Lagrangiana, as equações de movimento ficam:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x - \frac{\mu_{\text{sol}}}{R_{\text{sol}}^2} \cos \psi_{\text{lua}} &= -\frac{\delta U_n}{\delta x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y + \frac{\mu_{\text{sol}}}{R_{\text{sol}}^2} \sin \psi_{\text{lua}} &= -\frac{\delta U_n}{\delta y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\delta U_n}{\delta z} \end{aligned} \quad (9.8)$$

onde

$$U_n = -\frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} - \frac{\mu_{\text{sol}}}{r_{\text{sol}}} \quad (9.9)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\delta U_n}{\delta x} &= \frac{\mu_1}{r_1^3}(x + \mu_2) + \frac{\mu_2}{r_2^3}(x - \mu_1) + \frac{\mu_{\text{sol}}}{r_{\text{sol}}^3}(x + R_{\text{sol}} \cos \psi_{\text{lua}}) \\ \frac{\delta U_n}{\delta y} &= \frac{\mu_1}{r_1^3}(y) + \frac{\mu_2}{r_2^3}(y) + \frac{\mu_{\text{sol}}}{r_{\text{sol}}^3}(y - R_{\text{sol}} \cos \psi_{\text{lua}}) \\ \frac{\delta U_n}{\delta z} &= \frac{\mu_1}{r_1^3}(z) + \frac{\mu_2}{r_2^3}(z) + \frac{\mu_{\text{sol}}}{r_{\text{sol}}^3}(z) \end{aligned} \quad (9.10)$$

### 9.3 – Transferências entre as órbitas Halo do sistema Sol-Terra

Para realizar as transferências entre as órbitas Halo no problema restrito bi-circular de quatro corpos, utiliza-se o mesmo tipo de transferência do Capítulo 6 e as mesmas condições iniciais da Tabela 6.1, no sistema Terra-Sol, com ângulo de fase  $\alpha_0 = 0^\circ$ . As transferências são da órbita tipo Halo com  $\beta = 0,008$  para outra de  $\beta = 0,01$  no sistema Sol-Terra. Mostram-se os resultados na Tabela 9.1. Os símbolos são os seguintes:  $T$  é o tempo de transferência, em unidades canônicas;  $\Delta V$  é o incremento total de velocidade (dos dois impulsos) requeridos para a transferência também em unidades canônicas;  $\alpha_1$  é o ângulo entre a velocidade do veículo espacial quando este se encontra na órbita Halo inicial e sua velocidade no mesmo ponto quando está na órbita de transferência no ponto em que o primeiro impulso é aplicado;  $\alpha_2$  é o ângulo entre a velocidade do veículo espacial quando este se encontra na órbita Halo final e sua velocidade no mesmo ponto quando se encontra na órbita de transferência no ponto em que o segundo impulso é aplicado e  $\phi$  é o ângulo de transferência, que é o ângulo que o veículo espacial viaja durante a transferência. Todos os ângulos são expressos em graus.

Observa-se que as órbitas Halo inicial e final são obtidas com a modelagem dada pelo problema restrito de três corpos, enquanto que a manobra de transferência está sendo modelada pelo problema restrito bi-circular de quatro corpos. A idéia é obter uma trajetória mais precisa para a transferência e medir o efeito do quarto corpo no consumo de combustível. As órbitas Halo inicial e final, ainda que sofram o efeito do quarto corpo, serão corrigidas por manobras, de tal forma que os pontos iniciais e finais da transferência serão os mesmos, independentemente do efeito do quarto corpo.



TABELA 9.1. - Transferências de Mínimo Consumo em Torno de  $L_1$  com Modelagem de Quatro Corpos para a Transferência.

<b>a para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
1	0,007	0,020711761	18,821476253	161,219185654	0
<b>2</b>	<b>0,006</b>	<b>0,014827820</b>	<b>8,490116736</b>	<b>22,824261541</b>	<b>42</b>
3	0,062	0,141649564	2,926828245	31,270911044	90
4	0,051	0,145441878	40,870055084	42,153655335	143
5	0,051	0,145551880	42,356453420	41,541995863	180
6	0,051	0,145731393	43,898562335	40,984912247	233
7	0,067	0,156690569	56,892653556	121,435550231	90
8	0,014	0,032077350	7,985316051	176,300805628	42

<b>b para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
1	0,014	0,032083208	7,995551187	176,342209157	49
<b>2</b>	<b>0,007</b>	<b>0,020710168</b>	<b>18,831593135</b>	<b>161,257681617</b>	<b>7</b>
3	0,061	0,140416568	2,986040461	27,452646046	41
4	0,051	0,145410271	41,562869478	41,308864180	94
5	0,051	0,145593740	43,091711969	40,740649351	131
6	0,052	0,145845195	43,475235949	39,182890230	184
7	0,068	0,157973855	54,227067427	121,291772941	139
8	0,017	0,039173080	7,168832422	177,499415397	91

<b>c para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
1	0,064	0,160702827	135,080095821	172,482020704	90
2	0,063	0,159549625	141,162124204	172,486065662	48
<b>3</b>	<b>0,0005</b>	<b>0,006341512</b>	<b>76,650446392</b>	<b>109,442769724</b>	<b>0</b>
4	0,06	0,166898670	32,20015974	10,331967385	53
5	0,07	0,168544542	0,742749917	8,839433732	90
6	0,07	0,169783908	3,714232025	9,547607609	143
7	0,089	0,203657268	16,183178422	116,030953463	180
8	0,06	0,166027144	166,367588284	172,193027702	132

( continua ).

TABELA 9.1 – ( Continuação ).

d para	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
1	0,05	0,166638283	132,761809622	133,863819163	130
2	0,05	0,166635163	133,631173206	133,130338191	88
3	0,06	0,182659478	164,474417080	139,638884270	40
4	0,013	0,030531317	175,038238461	11,629304736	13
<b>5</b>	<b>0,006</b>	<b>0,015509038</b>	<b>31,697800039</b>	<b>11,085181416</b>	<b>50</b>
6	0,011	0,025733734	13,310004159	3,622317110	103
7	0,064	0,173357425	89,060375560	104,439806535	220
8	0,05	0,166661203	131,866565486	134,574026121	172

e para	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
1	0,048	0,166346725	130,738428697	130,747142591	180
2	0,048	0,166369481	131,655113130	129,916918105	138
3	0,065	0,181191575	165,050940013	159,033041458	90
4	0,016	0,037203107	176,946382240	9,845456195	37
<b>5</b>	<b>0,007</b>	<b>0,020139276</b>	<b>157,106223927</b>	<b>22,815964626</b>	<b>0</b>
6	0,009	0,020912242	19,628466798	5,389433317	53
7	0,063	0,172417152	86,572485802	104,163619310	270
8	0,048	0,166348540	129,794544073	131,551268079	222

f para	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
1	0,048	0,166292286	131,129571005	129,896166946	270
2	0,048	0,166344238	132,020808406	129,039765371	178
3	0,066	0,182023692	164,865730181	161,263070511	130
4	0,019	0,042502660	177,662731073	7,517168171	77
5	0,013	0,030528365	175,007025252	11,608194173	40
<b>6</b>	<b>0,006</b>	<b>0,015506218</b>	<b>31,665204236</b>	<b>11,100574456</b>	<b>13</b>
7	0,063	0,171551790	88,498876989	104,066062792	310
8	0,048	0,166264927	130,211896057	130,725740805	262

g para	T	$\Delta v$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi$
1	0,059	0,147194174	53,025327118	50,693411788	90
2	0,06	0,148360265	53,132332420	53,686658338	132
3	0,087	0,197102218	57,257352431	21,765787064	180
4	0,069	0,175266496	69,576559346	64,631857266	233
5	0,068	0,173549538	69,981663591	65,662489723	270
6	0,067	0,171783571	70,393330295	66,620757571	323
<b>7</b>	<b>0,0007</b>	<b>0,006482042</b>	<b>19,857540863</b>	<b>107,941528280</b>	<b>0</b>
8	0,059	0,146084553	52,984792960	55,582663995	48

( Continua ).

TABELA 9.1 – ( Conclusão ).

<b>h para</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
<b>1</b>	<b>0,006</b>	<b>0,014829763</b>	<b>8,485337429</b>	<b>22,839026514</b>	<b>48</b>
2	0,009	0,020753771	4,086526739	13,398642100	90
3	0,062	0,142894277	2,964596690	26,055030003	138
4	0,051	0,145512781	40,197875892	43,021867043	191
5	0,051	0,145549162	41,643024668	42,365486823	228
6	0,051	0,145654872	43,141665189	41,765992166	281
7	0,067	0,155455486	53,660438894	121,485305977	42
8	0,007	0,020706218	18,804082926	161,187963083	6

Comparam-se então as dinâmicas utilizadas, e unem-se as Tabelas 6.4 e 9.1. A partir daí, monta-se a Tabela 9.2, que contém esta comparação.

TABELA 9.2 – Comparação entre as Dinâmicas para a Transferência entre Órbitas Halo.

<b>a para:</b>	<b><math>T_3</math></b>	<b><math>\Delta v_3</math></b>	<b><math>\Delta v_4</math></b>	<b><math>T_4</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
1	1,35	0,018039848	0,020711761	0,007	0
2	1,34	0,018023788	<b>0,014827820</b>	<b>0,006</b>	42
<b>3</b>	<b>0,66</b>	<b>0,000082349</b>	0,141649564	0,062	90
4	1,22	0,010074701	0,145441878	0,051	143
5	1,53	0,000791697	0,145551880	0,051	180
6	1,54	0,001097286	0,145731393	0,051	233
7	0,96	0,017965278	0,156690569	0,067	90
8	1,35	0,018051652	0,032077350	0,014	42

<b>b para:</b>	<b><math>T_3</math></b>	<b><math>\Delta v_3</math></b>	<b><math>\Delta v_4</math></b>	<b><math>T_4</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
1	1,35	0,018051414	0,032083208	0,014	49
2	1,35	0,018034908	<b>0,020710168</b>	<b>0,007</b>	7
<b>3</b>	<b>0,65</b>	<b>0,000112519</b>	0,140416568	0,061	41
4	1,51	0,000648146	0,145410271	0,051	94
5	1,52	0,000655755	0,145593740	0,051	131
6	1,54	0,000864862	0,145845195	0,052	184
7	0,97	0,017883033	0,157973855	0,068	139
8	1,36	0,018061168	0,039173080	0,017	91

( Continua ).

TABELA 9.2 – ( Continuação ).

<b>c para:</b>	<b>T<sub>3</sub></b>	<b>Δv<sub>3</sub></b>	<b>Δv<sub>4</sub></b>	<b>T<sub>4</sub></b>	<b>φ</b>
1	1,35	0,018051414	0,160702827	0,064	90
2	1,35	0,018034908	0,159549625	0,063	48
<b>3</b>	<b>0,65</b>	<b>0,000112519</b>	<b>0,006341512</b>	<b>0,0005</b>	<b>0</b>
4	1,50	0,000589099	0,166898670	0,06	53
5	1,52	0,000655755	0,168544542	0,07	90
6	1,54	0,000864862	0,169783908	0,07	143
7	0,97	0,017883033	0,203657268	0,089	180
8	1,36	0,018061168	0,166027144	0,06	132

<b>d para</b>	<b>T<sub>3</sub></b>	<b>Δv<sub>3</sub></b>	<b>Δv<sub>4</sub></b>	<b>T<sub>4</sub></b>	<b>φ</b>
<b>1</b>	<b>1,54</b>	<b>0,000942084</b>	0,166638283	0,05	130
2	1,54	0,001150028	0,166635163	0,05	88
3	0,87	0,016683005	0,182659478	0,06	40
4	1,45	0,016156727	0,030531317	0,013	13
5	1,44	0,016125319	<b>0,015509038</b>	<b>0,006</b>	50
6	1,77	1,292035341	0,025733734	0,011	103
7	1,77	1,293403300	0,173357425	0,064	220
8	1,77	1,289020622	0,166661203	0,05	172

<b>e para</b>	<b>T<sub>3</sub></b>	<b>Δv<sub>3</sub></b>	<b>Δv<sub>4</sub></b>	<b>T<sub>4</sub></b>	<b>φ</b>
1	1,52	0,000947570	0,166346725	0,048	180
2	1,54	0,001028735	0,166369481	0,048	138
3	0,88	0,016614429	0,181191575	0,065	90
4	1,45	0,016173430	0,037203107	0,016	37
5	1,44	0,016143576	<b>0,020139276</b>	<b>0,007</b>	0
6	1,44	0,016105189	0,020912242	0,009	53
<b>7</b>	<b>0,87</b>	<b>0,000065916</b>	0,172417152	0,063	270
8	1,52	0,000650766	0,166348540	0,048	222

<b>f para</b>	<b>T<sub>3</sub></b>	<b>Δv<sub>3</sub></b>	<b>Δv<sub>4</sub></b>	<b>T<sub>4</sub></b>	<b>φ</b>
1	1,52	0,000690308	0,166292286	0,048	270
2	1,53	0,000852012	0,166344238	0,048	178
3	0,88	0,016541873	0,182023692	0,066	130
4	1,45	0,016188253	0,042502660	0,019	77
5	1,45	0,016159836	0,030528365	0,013	40
6	1,44	0,016122254	<b>0,015506218</b>	<b>0,006</b>	13
<b>7</b>	<b>0,86</b>	<b>0,000049205</b>	0,171551790	0,063	310
8	1,51	0,000599985	0,166264927	0,048	262

( Continua ).

TABELA 9.2 – ( Conclusão ).

<b>g para</b>	<b>T<sub>3</sub></b>	<b>Δv<sub>3</sub></b>	<b>Δv<sub>4</sub></b>	<b>T<sub>4</sub></b>	<b>φ</b>
1	0,66	0,000080795	0,147194174	0,059	90
<b>2</b>	<b>0,67</b>	<b>0,000055258</b>	0,148360265	0,06	132
3	1,33	0,000240213	0,197102218	0,087	180
4	0,89	0,016466020	0,175266496	0,069	233
5	0,88	0,016615498	0,173549538	0,068	270
6	0,86	0,016750232	0,171783571	0,067	323
7	0,015	0,006084220	<b>0,006482042</b>	<b>0,0007</b>	0
8	0,65	0,000110969	0,146084553	0,059	48

<b>h para</b>	<b>T<sub>3</sub></b>	<b>Δv<sub>3</sub></b>	<b>Δv<sub>4</sub></b>	<b>T<sub>4</sub></b>	<b>φ</b>
1	1,34	0,018024015	<b>0,014829763</b>	<b>0,006</b>	48
2	1,34	0,018006576	0,020753771	0,009	90
<b>3</b>	<b>0,67</b>	<b>0,000056766</b>	0,142894277	0,062	138
4	1,52	0,000741742	0,145512781	0,051	191
5	1,54	0,001023305	0,145549162	0,051	228
6	1,55	0,001406997	0,145654872	0,051	281
7	0,95	0,018040753	0,155455486	0,067	42
8	1,35	0,018035409	0,020706218	0,007	6

Nota-se pelo sombreado da tabela acima, que existem situações onde o modelo de quatro corpos oferece uma transferência mais econômica que o modelo de três corpos, nos casos estudados no presente trabalho. A explicação para este fato tem que ser feita independentemente em cada caso. Em geral, a redução do tempo está relacionada a eliminação de trechos inteiros da trajetória (“loops”), gerando uma manobra direta entre dos dois pontos envolvidos. Este fenômeno ocorrerá nas próximas sessões deste trabalho. Estas situações ocorrem para um certo par de pontos e um tempo fixo. Um mínimo para a transferência não foi encontrado com  $\alpha_0 = 0^\circ$ . Como as transferências entre Halos estão em um patamar muito baixo de consumo, a otimização com relação a  $\alpha_0$  não é efetuada aqui. A transferência com o modelo de quatro corpos é sempre mais rápida que a equivalente em três corpos. Os valores em negrito correspondem ao valor mínimo de consumo de cada modelo.

#### 9.4 – Rendez-vous entre as Órbitas Halo do Sistema Sol-Terra

Para realizar esta manobra utiliza-se a técnica de rendez-vous descrita no Capítulo 6 e as mesmas órbitas para  $\beta = 0,001$  e  $\beta = 0,05$  dentro do sistema Sol-Terra. Aqui também utiliza-se a modelagem dada pelo problema restrito de três corpos, para a determinação das órbitas Halo enquanto que a manobra de transferência está sendo modelada pelo problema restrito bi-circular de quatro corpos. Os resultados são mostrados na Tabela 9.3.

TABELA 9.3 – Rendez-vous de Mínimo Consumo em Torno de  $L_1$ .

<b>a para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
2	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	0,018905235	6,434998463	79,157184217	42
3	0,6630323485682311	1,791500290	13,279046470	131,389207714	90
4	1,513073821091602	4,534901032	24,108362247	33,517725751	143
5	1,530074650542069	4,581444621	24,268398013	33,092590968	180
6	1,547075479992536	4,627334138	24,428119163	32,668723832	233
7	2,397116952515913	6,032923479	32,575366904	60,509768338	90
8	3,051648886358922	6,159507229	38,116914173	96,957071287	42

<b>b para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
2	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	0,021136526	13,028976751	167,021528759	42
3	0,6630323485682311	1,791504979	13,370136860	131,392435687	90
4	1,513073821091602	4,534890275	24,200821753	33,518877550	143
5	1,530074650542069	4,581433160	24,360870830	33,093726521	180
6	1,547075479992536	4,627321972	24,520605211	32,669843475	233
7	2,397116952515913	6,032884306	32,668386439	60,509166278	90
8	3,051648886358922	6,159460058	38,210170400	96,956729444	42

<b>c para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
2	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	1,029679835	129,306257761	169,778359052	42
3	0,6630323485682311	1,799008378	73,557821979	131,612517355	90
4	1,513073821091602	4,541794175	84,369837402	33,583158824	143
5	1,530074650542069	4,588300103	84,529874074	33,157012478	180
6	1,547075479992536	4,634151621	84,689607173	32,732157803	233
7	2,397116952515913	6,038075226	92,841658197	60,477310942	90
8	3,051648886358922	6,163952422	98,384914528	96,939062434	42

( Continua ).

TABELA 9.3 – ( Conclusão )

<b>d para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
2	8,500414725233725x10 <sup>-3</sup>	0,648112368	91,734367383	91,101741712	42
3	0,6630323485682311	1,806061730	166,779305053	131,588044494	90
4	1,513073821091602	4,549637401	156,236375610	33,534740347	143
5	1,530074650542069	4,596174884	156,078157601	33,109037562	180
6	1,547075479992536	4,642057571	155,920196965	32,684625771	233
7	2,397116952515913	6,046689190	147,817531175	60,507465667	90
8	3,051648886358922	6,172328359	142,286678944	96,957198671	42

<b>e para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
2	8,500414725233725x10 <sup>-3</sup>	0,648373642	92,844568075	89,537900408	42
3	0,6630323485682311	1,806046838	166,325488461	131,585123846	90
4	1,513073821091602	4,549627104	155,783933094	33,533684524	143
5	1,530074650542069	4,596165094	155,625727951	33,107996587	180
6	1,547075479992536	4,642048290	155,467780084	32,683599340	233
7	2,397116952515913	6,046697752	147,365617737	60,508018276	90
8	3,051648886358922	6,172339791	141,834976690	96,957512568	42

<b>f para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
2	8,500414725233725x10 <sup>-3</sup>	0,648975786	93,950546071	87,974151212	42
3	0,6630323485682311	1,806030134	165,871740525	131,582160460	90
4	1,513073821091602	4,549614880	155,331504213	33,532625240	143
5	1,530074650542069	4,596153378	155,173311611	33,106952271	180
6	1,547075479992536	4,642037083	155,015376198	32,682569681	233
7	2,397116952515913	6,046704501	146,913710327	60,508571253	90
8	3,051648886358922	6,172349534	141,383279472	96,957826380	42

<b>g para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
2	8,500414725233725x10 <sup>-3</sup>	1,044751995	50,429376954	9,433207541	42
3	0,6630323485682311	1,797854544	46,842981807	131,270786438	90
4	1,513073821091602	4,541636169	36,202482411	33,460886067	143
5	1,530074650542069	4,588207568	36,044322299	33,036463524	180
6	1,547075479992536	4,634124807	35,886460550	32,613296990	233
7	2,397116952515913	6,040457657	27,823024203	60,541235475	90
8	3,051648886358922	6,166890773	22,341185287	96,975360018	42

<b>h para:</b>	<b>T</b>	<b><math>\Delta v</math></b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\phi</math></b>
2	8,500414725233725x10 <sup>-3</sup>	0,038789548	3,161051138	6,202815784	42
3	0,6630323485682311	1,791501442	13,096601018	131,382780313	90
4	1,513073821091602	4,534932620	23,923087659	33,515424867	143
5	1,530074650542069	4,581477605	24,083096124	33,090322491	180
6	1,547075479992536	4,627368524	24,242790144	32,666487092	233
7	2,397116952515913	6,033011140	32,388948062	60,510971907	90
8	3,051648886358922	6,159610251	37,930012568	96,957754948	42

Comparam-se as dinâmicas unindo-se as tabelas 6.8 e 9.4. Constoi-se a Tabela 9.4 com os resultados desta comparação.

TABELA 9.4 – Comparação entre as Dinâmicas Utilizando a Técnica de Rendez-vous.

a para:	T <sub>3</sub>	Δv <sub>3</sub>	Δv <sub>4</sub>	T <sub>4</sub>	φ
2	8,500414725233725x10 <sup>-3</sup>	0,021500889	<b>0,018905235</b>	<b>8,500414725233725x10<sup>-3</sup></b>	42
3	0,6630323485682311	0,025462260	1,791500290	0,6630323485682311	90
4	1,513073821091602	0,002077639	4,534901032	1,513073821091602	143
5	<b>1,530074650542069</b>	<b>0,002179833</b>	4,581444621	1,530074650542069	180
6	1,547075479992536	0,002400914	4,627334138	1,547075479992536	233
7	2,397116952515913	0,068707276	6,032923479	2,397116952515913	90
8	3,051648886358922	0,128747314	6,159507229	3,051648886358922	42

b para:	T <sub>3</sub>	Δv <sub>3</sub>	Δv <sub>4</sub>	T <sub>4</sub>	φ
2	8,500414725233725x10 <sup>-3</sup>	0,019724836	<b>0,021136526</b>	<b>8,500414725233725x10<sup>-3</sup></b>	42
3	<b>0,6630323485682311</b>	<b>0,001454856</b>	1,791504979	0,6630323485682311	90
4	1,513073821091602	0,001939987	4,534890275	1,513073821091602	143
5	1,530074650542069	0,002066808	4,581433160	1,530074650542069	180
6	1,547075479992536	0,002403674	4,627321972	1,547075479992536	233
7	2,397116952515913	0,068743424	6,032884306	2,397116952515913	90
8	3,051648886358922	0,128713041	6,159460058	3,051648886358922	42

c para:	T <sub>3</sub>	Δv <sub>3</sub>	Δv <sub>4</sub>	T <sub>4</sub>	φ
2	8,500414725233725x10 <sup>-3</sup>	1,029658505	<b>1,029679835</b>	<b>8,500414725233725x10<sup>-3</sup></b>	42
3	<b>0,6630323485682311</b>	<b>0,012405477</b>	1,799008378	0,6630323485682311	90
4	1,513073821091602	0,017954586	4,541794175	1,513073821091602	143
5	1,530074650542069	0,018202023	4,588300103	1,530074650542069	180
6	1,547075479992536	0,018459539	4,634151621	1,547075479992536	233
7	2,397116952515913	0,061276823	6,038075226	2,397116952515913	90
8	3,051648886358922	0,128956532	6,163952422	3,051648886358922	42

d para:	T <sub>3</sub>	Δv <sub>3</sub>	Δv <sub>4</sub>	T <sub>4</sub>	φ
2	8,500414725233725x10 <sup>-3</sup>	0,647429491	<b>0,648112368</b>	<b>8,500414725233725x10<sup>-3</sup></b>	42
3	0,6630323485682311	0,019687244	1,806061730	0,6630323485682311	90
4	<b>1,513073821091602</b>	<b>0,016679181</b>	4,549637401	1,513073821091602	143
5	1,530074650542069	0,016919548	4,596174884	1,530074650542069	180
6	1,547075479992536	0,017333593	4,642057571	1,547075479992536	233
7	2,397116952515913	0,048289449	6,046689190	2,397116952515913	90
8	3,051648886358922	0,123946374	6,172328359	3,051648886358922	42

e para:	T <sub>3</sub>	Δv <sub>3</sub>	Δv <sub>4</sub>	T <sub>4</sub>	φ
2	8,500414725233725x10 <sup>-3</sup>	0,647692121	<b>0,648373642</b>	<b>8,500414725233725x10<sup>-3</sup></b>	42
3	0,6630323485682311	0,019785328	1,806046838	0,6630323485682311	90
4	<b>1,513073821091602</b>	<b>0,016706242</b>	4,549627104	1,513073821091602	143
5	1,530074650542069	0,016961498	4,596165094	1,530074650542069	180
6	1,547075479992536	0,017763850	4,642048290	1,547075479992536	233
7	2,397116952515913	0,048223004	6,046697752	2,397116952515913	90
8	3,051648886358922	0,048223004	6,172339791	3,051648886358922	42

( Continua ).



TABELA 9.4 – ( Conclusão ).

f para:	$T_3$	$\Delta v_3$	$\Delta v_4$	$T_4$	$\phi$
2	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	0,648297086	<b>0,648975786</b>	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	42
3	0,6630323485682311	0,019884319	1,806030134	0,6630323485682311	90
4	<b>1,513073821091602</b>	<b>0,016733135</b>	4,549614880	1,513073821091602	143
5	1,530074650542069	0,017003662	4,596153378	1,530074650542069	180
6	1,547075479992536	0,017461571	4,642037083	1,547075479992536	233
7	2,397116952515913	0,048154331	6,046704501	2,397116952515913	90
8	3,051648886358922	0,123838159	6,172349534	3,051648886358922	42

g para:	$T_3$	$\Delta v_3$	$\Delta v_4$	$T_4$	$\phi$
2	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	1,044775106	<b>1,044751995</b>	<b><math>8,500414725233725 \times 10^{-3}</math></b>	42
3	0,6630323485682311	0,017893295	1,797854544	0,6630323485682311	90
4	<b>1,513073821091602</b>	<b>0,032731491</b>	4,541636169	1,513073821091602	143
5	1,530074650542069	0,033891805	4,588207568	1,530074650542069	180
6	1,547075479992536	0,035005214	4,634124807	1,547075479992536	233
7	2,397116952515913	0,060906966	6,040457657	2,397116952515913	90
8	3,051648886358922	0,122889122	6,166890773	3,051648886358922	42

h para:	$T_3$	$\Delta v_3$	$\Delta v_4$	$T_4$	$\phi$
2	$8,500414725233725 \times 10^{-3}$	0,038743915	0,038789548	<b><math>8,500414725233725 \times 10^{-3}</math></b>	42
3	<b>0,6630323485682311</b>	<b>0,001476024</b>	1,791501442	0,6630323485682311	90
4	1,513073821091602	0,002016318	4,534932620	1,513073821091602	143
5	1,530074650542069	0,002197213	4,581477605	1,530074650542069	180
6	1,547075479992536	0,002745843	4,627368524	1,547075479992536	233
7	2,397116952515913	0,068768833	6,033011140	2,397116952515913	90
8	3,051648886358922	0,128686275	6,159610251	3,051648886358922	42

Nota-se pelo sombreado da tabela acima, que existem situações onde o modelo de quatro corpos oferece uma transferência mais econômica que o modelo de três corpos, mas como no caso anterior, estas situações ocorrem para um certo par de pontos e um tempo fixo. Um mínimo para a transferência não foi encontrado com  $\alpha_0 = 0^\circ$ . A transferência com o modelo de quatro corpos é sempre mais rápida que a equivalente em três corpos. Os valores em negrito correspondem ao valor mínimo de consumo de cada modelo.

### 9.5 – Transferências entre a Terra e as Órbitas Halo e entre as Órbitas Halo do Sistema Terra-Lua

Para realizar estas transferências entre a Terra e as órbitas Halo e entre as órbitas Halo no problema restrito bi-circular de quatro corpos, utilizam-se as órbitas Halo do sistema

Terra-Lua, com ângulo de fase  $\alpha_o = -110^\circ$ , cujas transferências envolvem a técnica e órbitas descritas no Capítulo 8 com  $\beta = 0,001$  e  $\beta = 0,05$ . O ângulo  $\alpha_o = -110^\circ$  foi escolhido por ser um ângulo onde a posição do quarto corpo influencia positivamente a manobra. Quando se varia o ângulo de partida do Sol, define-se a condição inicial, e com isso escolhe-se toda a trajetória da partícula, já que a trajetória total resulta de simples integração numérica das condições iniciais. Cada trajetória fica um certo tempo recebendo influências da força do quarto corpo à favor e contra a manobra de menor consumo. Por tentativas, descobrimos que o valor de  $\alpha = -110^\circ$  é um excelente valor para que a trajetória receba mais influências positivas do que negativas do quarto corpo. Estudar esse problema em detalhes é uma tarefa bastante complexa, dado que o sistema é extremamente não linear.

Mais uma vez a modelagem de quatro corpos se aplica à transferência apenas, e as órbitas Halo são obtidas com a modelagem dada pelo problema restrito de três corpos. Os resultados são mostrados na Tabela 9.6 para as transferências da Terra para Halo e as comparações entre as dinâmicas são feitas unindo as Tabelas 8.3 a 9.5.

TABELA 9.5 – Transferências entre a Terra e Órbitas Halo para a Dinâmica de Quatro Corpos com  $\alpha_o = -110^\circ$ .

Da Terra pra Halo	t	$\Delta v$
1	2,3	0,740188731
2	2,3	0,782322058
3	2,4	0,757433897
4	2,3	0,777329944
a	2,3	0,756397610
b	2,3	0,782415448
c	2,3	0,856672718
d	2,3	0,777615052
e	2,3	0,791766002
f	2,3	0,782691867
g	2,3	0,818629147
h	2,3	0,780429306

TABELA 9.6 – Comparação entre as Dinâmicas para Transferências da Terra para Halo.

Da Terra pra Halo	t	$\Delta v_3$	$\Delta v_4$	t
<b>1</b>	1,5	0,989468170	<b>0,740188731</b>	<b>2,3</b>
2	1,6	1,254305096	0,782322058	2,3
3	1,5	1,228422645	0,757433897	2,4
4	4,5	1,169758074	0,777329944	2,3
a	1,5	0,988210419	0,756397610	2,3
b	1,6	1,252341424	0,782415448	2,3
c	1,5	1,229551750	0,856672718	2,3
d	1,4	1,250673612	0,777615052	2,3
e	1,5	0,984494785	0,791766002	2,3
f	1,6	1,246591335	0,782691867	2,3
g	1,5	1,232882171	0,818629147	2,3
h	1,4	1,246032828	0,780429306	2,3

Para transferências entre Halos na dinâmica de quatro corpos temos a Tabela 9.7 e as comparações são feitas unindo parte das Tabelas 8.2 e 9.7 e são mostradas na Tabela 9.8.

TABELA 9.7 – Transferências entre a Terra e Órbitas Halo para a Dinâmica de Quatro Corpos com  $\alpha_0 = 110^\circ$ .

<b>1 para</b>	T	$\Delta v$
a	0,91	0,252083020
b	0,31	0,267558349
c	0,41	0,200952949
<b>d</b>	<b>0,81</b>	<b>0,129696230</b>
<b>2 para</b>	T	$\Delta v$
a	1,01	0,364370823
<b>b</b>	<b>0,031</b>	<b>0,097808501</b>
c	0,331	0,268748696
d	0,91	0,254221978
<b>3 para</b>	T	$\Delta v$
a	0,91	0,449301188
b	0,41	0,537537055
c	<b>0,21</b>	<b>0,292705923</b>
d	0,81	0,335062645
<b>4 para</b>	T	$\Delta v$
a	0,81	0,292287761
b	0,71	0,437175800
c	0,51	0,432217448
<b>d</b>	<b>0,11</b>	<b>0,125034489</b>

Os resultados sombreados mostram os mínimos valores de consumo obtidos e o negrito onde ocorreu a transferência de menor consumo. A melhor transferência é a do ponto 2 para o ponto b.

TABELA 9.8 – Comparação entre as Dinâmicas para Transferências entre Halos no Sistema Terra-Lua.

De 1 para:	$T_3$	$\Delta v_3$	$\Delta v_4$	$T_4$
a	1,03	0,262335939	0,252083020	0,91
b	<b>0,63</b>	<b>0,017876695</b>	0,266632032	0,31
c	1,24	0,155990324	0,200953107	0,41
d	0,82	0,263937248	0,129696230	0,81
De 2 para:	$T_3$	$\Delta v_3$	$\Delta v_4$	$T_4$
a	2,82	0,263582076	0,364370823	1,01
b	0,65	0,082047226	<b>0,097808501</b>	0,031
c	0,75	0,018003250	0,268748696	0,331
d	1,46	0,028360674	0,254221978	0,91
De 3 para:	$T_3$	$\Delta v_3$	$\Delta v_4$	$T_4$
a	1,24	0,151801072	0,449301188	0,91
b	0,77	0,250639137	0,537537055	0,41
c	1,08	0,243324808	0,292705923	0,21
d	0,75	0,017946231	0,335062645	0,81
De 4 para:	$T_3$	$\Delta v_3$	$\Delta v_4$	$T_4$
a	0,62	0,017919696	0,292287761	0,81
b	1,25	0,017584640	0,437175800	0,71
c	0,77	0,251301416	0,432217448	0,51
d	0,75	0,083913889	0,125034489	0,11

Nota-se pelo sombreado da tabela acima, que existem situações onde o modelo de quatro corpos oferece uma transferência mais econômica que o modelo de três corpos. A transferência com o modelo de quatro corpos é quase sempre mais rápida que a equivalente em três corpos. Os valores em negrito correspondem ao valor mínimo de consumo de cada modelo.

## 9.6 - Captura Gravitacional

O termo captura gravitacional significa que o veículo espacial se aproxima de um dos dois primários a partir de uma longa distância (finita ou não) e depois permanece próximo desse primário (mantém uma distância que não excede um valor finito pré fixado).

Isto significa que, depois de certo tempo da aproximação, o veículo espacial escapa da atração gravitacional do primário.

A razão deste estudo, no presente trabalho é que manobras como estas podem ser utilizadas para transferir um veículo espacial de uma órbita Halo para a Lua com uma manobra que inclua captura gravitacional. Outra justificativa é que a manobra entre a Terra e a Lua com captura gravitacional requer um consumo inferior ao da manobra de Hohmann, logo esta possibilidade tem que ser considerada.

Neste procedimento computacional as condições finais da integração são as condições de início para a captura gravitacional. Para a integração desta dinâmica é usado um passo negativo de tempo. Deste modo, Se o objeto se distancia do primário em um tempo limitado sem colisão, este objeto está em uma trajetória de escape gravitacional, logo em captura gravitacional no direto do tempo.

Para caracterizar se uma trajetória é de captura ou não, utiliza-se a definição de Yamakawa (1992). O parâmetro C3 é definido como a soma da energia cinética e da energia potencial do veículo espacial em relação a um dos primários:

$$C3 = V^2 - \frac{2\mu}{r} \quad (9.11)$$

onde:

V e r = velocidade e a distância do veículo espacial em relação à Lua.

Neste contexto, a variação de C3 é medida o tempo todo. Se o valor do parâmetro trocar de sinal de negativo (trajetória fechada) para positivo (trajetória aberta), considera-se então a trajetória de escape, com o tempo no sentido direto ocorre a captura gravitacional.

### 9.6.1 - Resultados para Captura Gravitacional

Para a integração das trajetórias utiliza-se o Runge Kutta 4 e o compilador Fortran Power Station 4.0. Calculam-se as condições iniciais com valores negativos de  $C3$  e com velocidade radial nula no perigeu. Então se monitora o valor de  $C3$  até que o valor negativo se transforme em positivo. Considera-se uma trajetória de captura gravitacional quando a troca de sinal ocorre num tempo menor que 50 dias e uma distância de 100.000 km a partir do centro da Lua. Esta distância é considerada a esfera gravitacional de influência da Lua (Yamakawa, 1992; Vieira-Neto, 1999). Os parâmetros da trajetória são:  $R_p$  (distância do perigeu) = 1838 km,  $V$  (velocidade relativa a Lua),  $\alpha$  (ângulo da posição do perigeu medido a partir da linha Terra-Lua, no sentido anti-horário, a partir do lado oposto à Terra),  $\beta$  (ângulo que define o ponto de escape da esfera de influência). São possíveis capturas diretas e capturas retrógradas.

As Figuras 9.3 a 9.5 mostram trajetórias no sistema Sol- Terra-Lua-veículo espacial com alguns ângulos de captura para diferentes valores de  $C3$ . Os ângulos de captura são:  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $315^\circ$ ,  $360^\circ$ .

A Figura 9.3 mostra trajetórias iniciando em  $C3 = 0$ , órbita parabólica com respeito a Lua, com diferentes valores de  $\alpha$  descritos na figura. A Figura 9.4 mostra equivalentes trajetórias iniciando em  $C3 = -0,1$  e a Figura 9.5 mostra os resultados para  $C3 = -0,2$ .

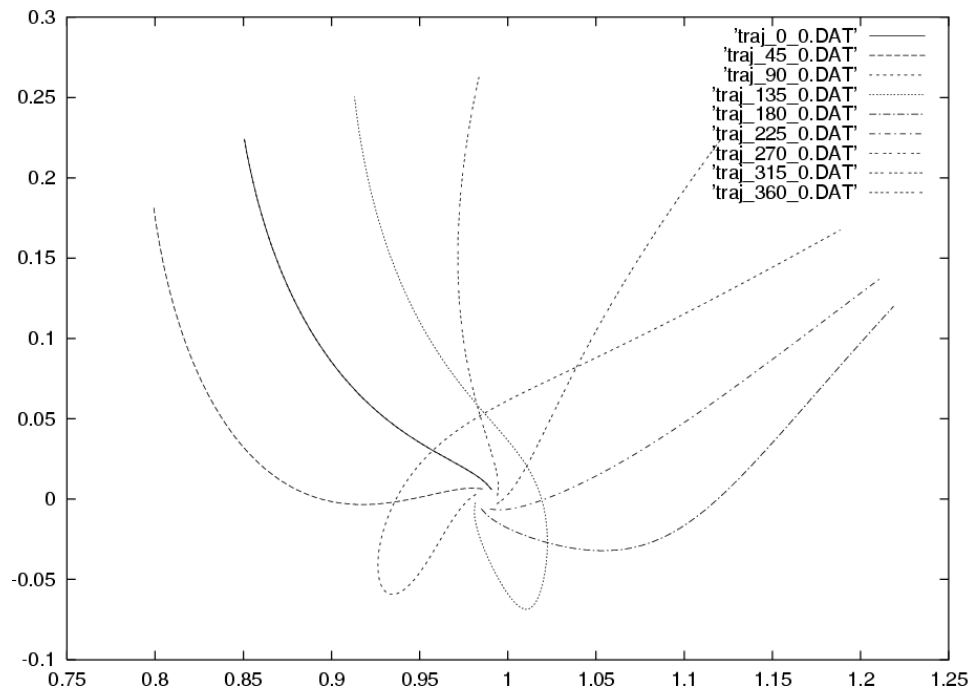


FIGURA 9.2 – Trajetórias com  $C3 = 0,0$ .

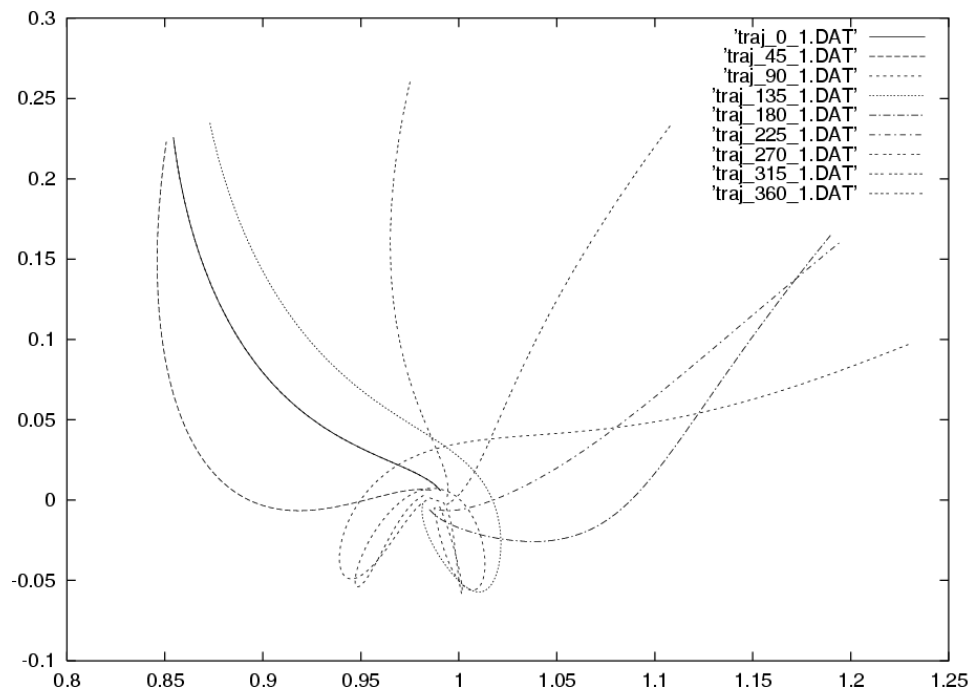


FIGURA 9.3 – Trajetórias com  $C3 = -0,1$ .

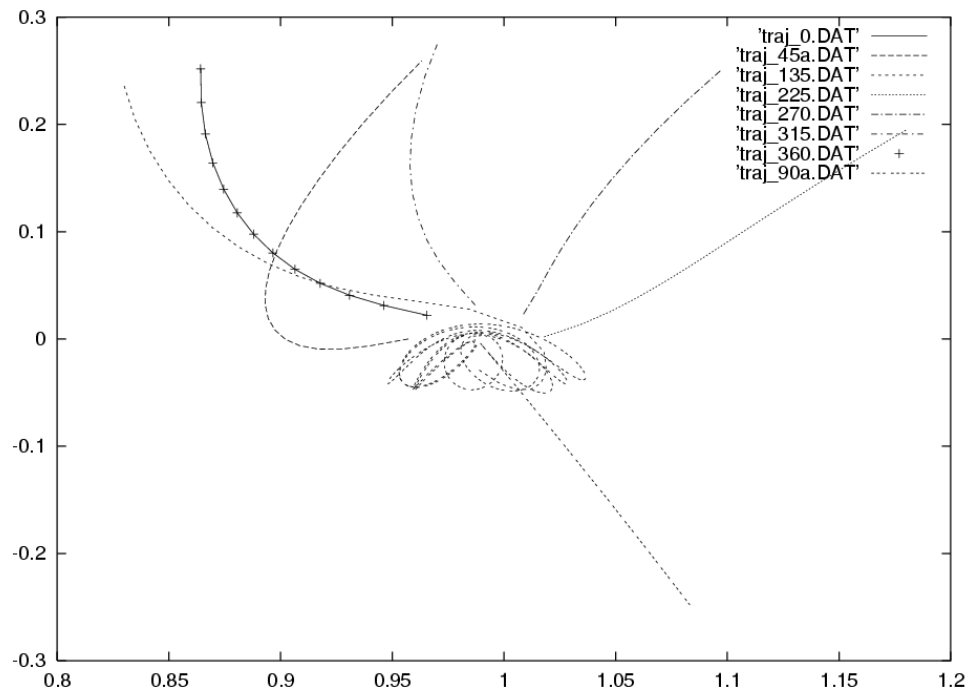


FIGURA 9.4 – Trajetórias com  $C3 = -0,2$ .

## 9.7 - Conclusões

Implementou-se e testou-se o problema restrito bi-circular de quatro corpos com sucesso. Algumas das manobras realizadas dentro do modelo dado pelo problema restrito de três corpos foram refeitas com este modelo. Ficou claro que os resultados de economia de combustível podem ser positivos ou negativos, dependendo da posição relativa do quarto corpo (ângulo  $\alpha$ ). Sendo assim, é necessário um estudo detalhado do problema em função desta variável. Para transferências entre órbitas em torno da Terra até as órbitas Halo no sistema Terra-Lua o valor ideal é  $\alpha = -110^\circ$ . Para transferências entre as órbitas Halo foram testados diversos valores de  $\alpha$  e o que forneceu um menor consumo é  $\alpha = 110^\circ$ . Para o sistema Terra-Sol não foi testado esta mudança de ângulo devido as Halos estarem em patamares baixos de consumo.



A seguir, foram encontradas trajetórias que terminaram em captura gravitacional, neste modelo, vindas de direções diferentes, com valores de ângulo de captura ( $\alpha$ ) diferentes.

Estes resultados mostram muito bem o potencial deste tipo de manobra dentro do modelo matemático testado e estudam-se formas de obtenção de economia de combustível devido a presença do quarto corpo.



## CAPÍTULO 10

### A MANOBRA ASSISTIDA POR GRAVIDADE PROPULSADA

A manobra swing-by é uma técnica muito utilizada para diminuir o consumo de combustível em missões espaciais. O modelo mais habitual para estudar esta manobra é dividir o problema em três fases dominadas pela Mecânica Celeste de dois-corpos. Outros modelos utilizados para estudar esta manobra são o Problema Restrito Circular de Três-Corpos (Felipe e Prado, 1999; Prado, 1999; Prado e Broucke, 1995a e 1995b; Prado, 1996a e 1996b; Broucke, 1988; Broucke e Prado, 1993; Prado, 1993) e o Problema Restrito Elíptico de Três-Corpos (Prado, 1997 e Felipe, 2000).

Neste capítulo, um tipo diferente de manobra swing-by é estudado, onde é permitido aplicar um impulso no veículo espacial durante seu momento de passagem mais próximo com o corpo celeste. Este tipo de manobra aumenta as alternativas disponíveis aos projetistas de missão para satisfazer as exigências de uma missão específica. São derivadas equações para a mudança em velocidade, energia e momento angular, como uma função dos três parâmetros independentes, descritos na manobra swing-by padrão. São adicionados dois outros parâmetros que pertencem a este modelo particular: a magnitude do impulso aplicado e o ângulo que este impulso faz com a velocidade do veículo espacial no instante da aplicação do impulso. Todas essas equações são derivadas assumindo que: a) a manobra pode ser modelada pelo modelo “*patched conics*” (uma série de órbitas de keplerianas); b) que o impulso é aplicado durante a passagem pelo periapse; c) que a velocidade do veículo espacial muda instantaneamente.

A inclusão deste estudo no presente trabalho tem o objetivo de investigar a possibilidade de obter economias de combustível através do uso de uma manobra de swing-by propulsada na Lua em uma órbita de estacionamento em torno da Terra e uma órbita Halo. Um estudo detalhado destas trajetórias escapa aos objetivos deste trabalho,

mas uma avaliação qualitativa das possíveis economias com uma manobra swing-by padrão e as vantagens da utilização do swing-by serão abordados.

### **10.1 - Descrição Matemática da Manobra Gravitacionalmente Assistida em Duas Dimensões para a Manobra Swing-by Padrão**

As manobras swing-by são descritas e classificadas utilizando o modelo dado pelo Problema Restrito Circular de Três-Corpos em duas e três dimensões. Assume-se que o sistema é formado por dois corpos principais que estão em órbitas circulares em torno do seu centro de massa e um terceiro corpo de massa desprezível que está se movendo sob a atração gravitacional dos dois primários.

A manobra completa é dividida em três partes distintas. Em todas elas o modelo simples de dois corpos é utilizado. Esta abordagem é usualmente chamada de *patched conics* e pode ser encontrada em diversos trabalhos disponíveis na literatura, tais como Broucke (1988) e Prado (1993).

É assumido que o sistema é formado por três corpos:  $M_1$ , um corpo primário;  $M_2$ , um planeta ou satélite de  $M_1$  que é um corpo menor em uma órbita kepleriana;  $M_3$ , um veículo espacial com massa desprezível ou uma partícula que está viajando em uma órbita genérica ao redor de  $M_1$ , quando se aproxima de  $M_2$ . Este encontro altera a órbita de  $M_3$  e este evento é chamado de uma Manobra swing-by. De acordo com as hipóteses do modelo assumido, as órbitas de  $M_1$  e  $M_2$  não se alteram. A Figura 10.1 descreve o evento e mostra algumas das variáveis envolvidas.

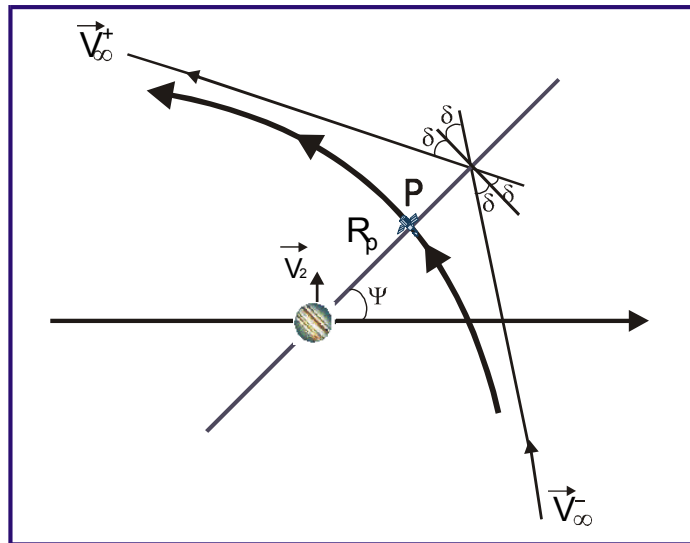


FIGURA. 10.1 - A manobra swing-by e algumas de suas variáveis.

As variáveis são:

$\vec{V}_2$  = velocidade de  $M_2$  relativa a  $M_1$ ;

$\vec{V}_\infty^-, \vec{V}_\infty^+$  = vetores velocidade do veículo espacial relativas a  $M_2$  antes e depois do encontro, respectivamente;

$\vec{V}_i, \vec{V}_o$  = vetores velocidade do veículo espacial relativas a  $M_1$  antes e depois do encontro em um movimento inercial, respectivamente;

$\delta$  = metade do ângulo de curvatura (o ângulo entre  $\vec{V}_\infty^-$  and  $\vec{V}_\infty^+$ )

Para encontrar as equações necessárias é preciso primeiro usar a teoria das órbitas hiperbólicas para se obter uma expressão para  $\delta$ . Esta expressão é:

$$\text{sen } \delta = \frac{1}{1 + \frac{R_p V_\infty^2}{\mu_2}} \quad (10.1)$$

onde:  $\mu_2 = G m_2$ , sendo  $G$  a constante gravitacional.

À partir desta equação e da Figura 10.1 é possível identificar que as variáveis independentes que descrevem completamente a manobra swing-by plana são os três parâmetros seguintes:

$|\vec{V}_\infty|$  = a magnitude da velocidade do veículo espacial quando este atinge o infinito com respeito ao corpo  $M_2$ ;

$R_p$  = distância de máximo encontro (ponto P) entre  $M_2$  e  $M_3$ ;

$\Psi$  = ângulo entre a linha do periapse (linha conectando  $M_2$  a P) e a linha  $M_1 - M_2$ .

A aproximação *patched conics* tem três fases:

- a) Na primeira,  $M_2$  é negligenciado e o movimento de  $M_3$  ao redor de  $M_1$  é considerado uma órbita kepleriana;
- b) Na segunda, é admitido que  $M_3$  entra na esfera de influência de  $M_2$ . Então a velocidade  $\vec{V}_\infty^-$  é calculada à partir da equação abaixo (Figura 10.2):

$$\vec{V}_\infty^- = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \quad (10.2)$$

O efeito de  $M_1$  é negligenciado. O movimento de  $M_3$  ao redor de  $M_2$  é hiperbólico no caso que tem interesse para a presente pesquisa. Nesta órbita hiperbólica o veículo espacial  $M_3$  é “expulso” por  $M_2$  e seu vetor velocidade (com relação a  $M_2$ ) rotaciona por um ângulo  $2\delta$ , mas mantém sua magnitude constante. Então, o veículo espacial cruza novamente a esfera de influência de  $M_2$  e a abandona para retornar para uma órbita kepleriana em volta de  $M_1$ . Nesse ponto, a velocidade  $\vec{V}_\infty^+$  é dada por:

$$\vec{V}_\infty^+ = \vec{V}_0 - \vec{V}_2 \quad (10.3)$$

c) Após este tempo, o veículo espacial está em uma nova órbita kepleriana ao redor de  $M_1$  e o swing-by está completo.

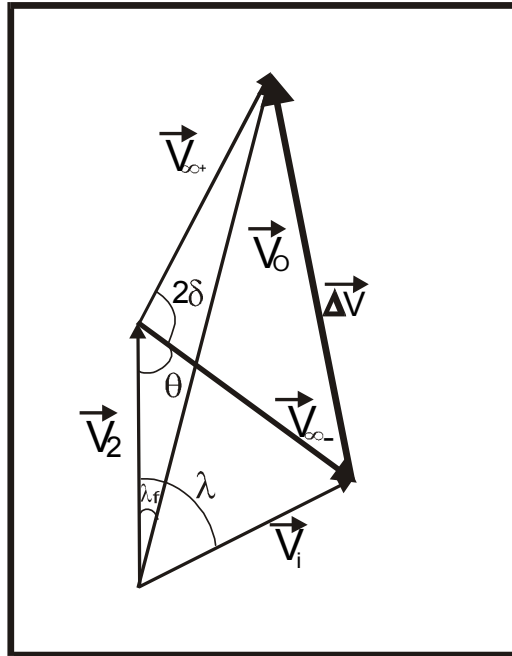


FIGURA 10.2 - Soma de vetores velocidade.

O estudo das diferenças entre as órbitas antes e após esse encontro (etapas a e c) é o principal objetivo nesta etapa.

A primeira quantidade importante calculada é  $\Delta\vec{V} = \vec{V}_o - \vec{V}_i$ , a diferença entre as velocidades inerciais antes e após o swing-by. A partir do diagrama de adição de vetores (FIGURA 10.2) e utilizando geometria básica é possível demonstrar que:

$$\Delta V = |\Delta\vec{V}| = 2|\vec{V}_{\infty}| \sin \delta = 2V_{\infty} \sin \delta \quad (10.4)$$

e que  $\Delta\vec{V}$  faz um ângulo  $\Psi + 180^\circ$  com a linha  $M_1$ - $M_2$  (FIGURA 10.3).

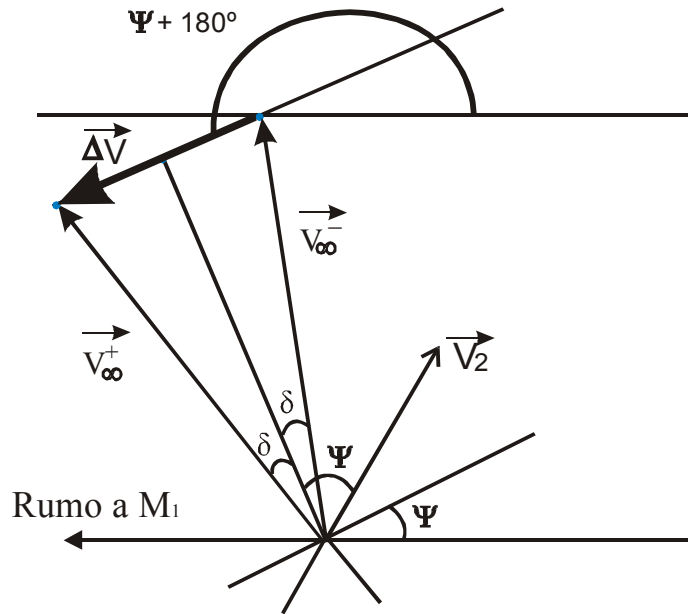


FIGURA 10.3 - Vetores velocidade.

Este fato fornece os seguintes componentes para o incremento na velocidade:

$$\Delta \dot{X} = -2V_{\infty} \sin \delta \cos \psi \quad (10.5a)$$

$$\Delta \dot{Y} = -2V_{\infty} \sin \delta \sin \psi \quad (10.5b)$$

A segunda quantidade importante é o momento angular  $C$ . A partir de sua definição, é possível obter a expressão  $C = X\dot{Y} - Y\dot{X}$ , que resulta na equação  $\Delta C = X\Delta\dot{Y} + \Delta X\dot{Y} - Y\Delta\dot{X} - \Delta Y\dot{X}$  para sua primeira variação. Esta equação se torna  $\Delta C = d\Delta\dot{Y}$  sob a condição de que o encontro é instantâneo ( $\Delta X = \Delta Y = 0$ ) e que  $t = 0$ . Têm-se  $X = d$  e  $Y = 0$ . Então, combinando este resultado com a expressão de  $\Delta\dot{Y}$  (Eq. 10.5b), o resultado é:

$$\omega_a \Delta C = -2V_2 V_{\infty} \sin \delta \sin \Psi \quad (10.6)$$

onde  $\omega_a$  é a velocidade angular do sistema.



A terceira e última quantidade derivada aqui é a variação de energia, feita por subtração direta da energia após o encontro  $E_+ \left( = \frac{1}{2} \left[ (\dot{X} + \Delta\dot{X})^2 + (\dot{Y} + \Delta\dot{Y})^2 \right] \right)$  da energia antes deste  $E_- \left( = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \right)$ . A distância a  $M_2$  é a mesma nos dois pontos, portanto não há mudança na energia potencial.

O resultado é:

$$\Delta E = E_+ - E_- = 2V_\infty \sin \delta \left[ V_\infty \sin \delta - (\dot{X} \cos \Psi + \dot{Y} \sin \Psi) \right] \quad (10.7)$$

Esta equação pode ser simplificada (Broucke, 1988) para:

$$\Delta E = -2V_2 V_\infty \sin \delta \sin \psi \quad (10.8)$$

Olhando para as Equações (10.6) e (10.8) um resultado fundamental pode ser encontrado:

$$\Delta E = \omega_a \Delta C \quad (10.9)$$

Algumas conseqüências importantes dessas equações podem ser derivadas estudando-se a Equação (10.8) com maiores detalhes. Os parâmetros  $V_2$  e  $V_\infty$  são quantidades positivas (representam as magnitudes dos dois vetores), assim como o  $\sin \delta$  (porque  $0 < \delta < 90^\circ$ ). Então, o único parâmetro que afeta o sinal de  $\Delta E$  é o  $\sin \psi$ .

A conclusão é que para valores de  $\psi$  no intervalo  $0^\circ < \psi < 180^\circ$ ,  $\Delta E$  é negativo (decrece em energia) e para  $\psi$  no intervalo  $180^\circ < \psi < 360^\circ$ ,  $\Delta E$  é positivo (aumenta em energia).

Portanto, as conclusões finais são:

- Se o swing-by ocorre na frente de  $M_2$ , há um decréscimo na energia de  $M_3$  com uma perda máxima quando  $\psi = 90^\circ$  ( $\Delta\vec{V}$  oposto a  $\vec{V}_2$ );
- Se o swing-by ocorre atrás de  $M_2$ , há um aumento na energia de  $M_3$  com um ganho máximo quando  $\psi = 270^\circ$  ( $\Delta\vec{V}$  alinhado a  $\vec{V}_2$ ).

Diversas equações mostradas aqui utilizam  $V_\infty$  como um parâmetro. A variável  $V_p$  (velocidade no momento de máxima aproximação) será utilizada posteriormente. O fato é que ambos os parâmetros são equivalentes, ainda na aproximação utilizada para derivar essas equações (*patched conics*), pois a órbita ao redor de  $M_2$  é considerada kepleriana (Hiperbólica). Elas estão relacionadas pela expressão:

$$V_\infty^2 = V_p^2 - \frac{2\mu}{R_p} \quad (10.10)$$

## 10.2 - A Manobra Swing-by Propulsada

A descrição da manobra swing-by propulsada é o principal objetivo deste capítulo. A literatura apresenta algumas aplicações interessantes desta manobra, como a missão Terra - Marte usando a manobra swing-by em Vênus (Pernicka e Howell, 1992). Para a presente seção é assumido que a diferença entre esta manobra e a manobra padrão é que é possível aplicar um impulso para o veículo espacial no momento do encontro entre o veículo espacial e o corpo secundário. Este impulso terá uma magnitude fixa “*a priori*” e direção variável. A Figura 10.4 mostra a geometria desta manobra e define algumas das variáveis utilizadas. (Prado, 1996 e Felipe et al 2002c, 2002d)

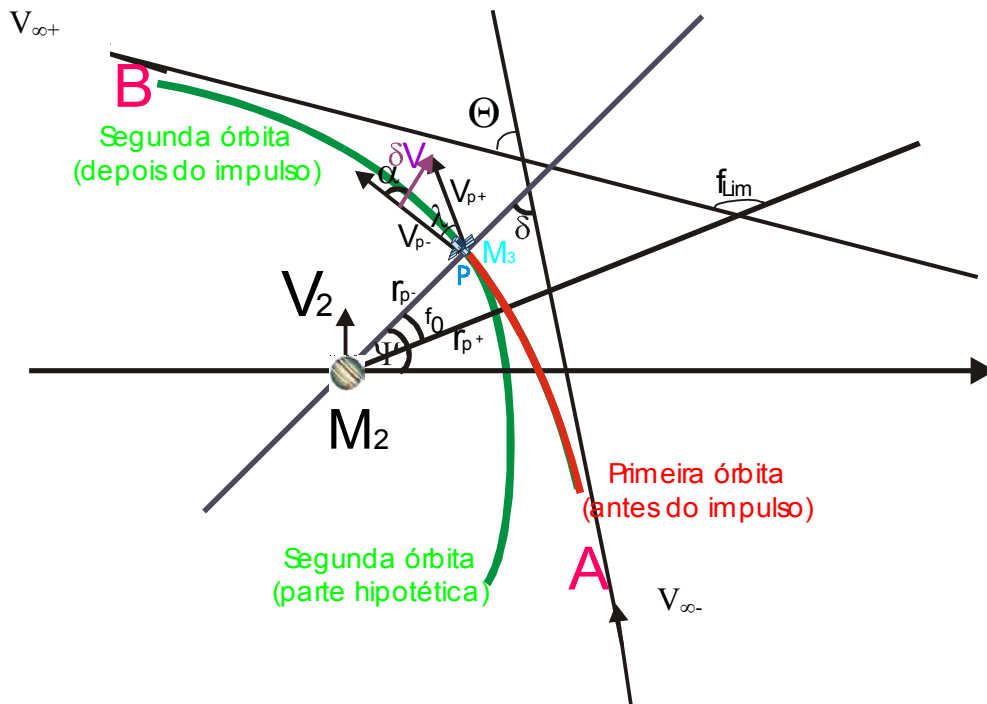


FIGURA 10.4 – A Geometria da manobra swing-by propulsada.

As variáveis são:

$V_{\infty-}$ , a magnitude da velocidade do veículo espacial ao chegar ao corpo celeste;

$V_{p-}$ , magnitude da velocidade do veículo no periapse antes do impulso;

$V_{p+}$ , magnitude da velocidade do veículo no periapse depois do impulso;

$\delta V$ , magnitude do impulso aplicado;

$\alpha$ , ângulo entre  $\vec{V}_{p-}$  e o impulso aplicado. Esta variável define a direção do impulso. O intervalo para  $\alpha$  é  $-180^\circ < \alpha < 180^\circ$  (valores positivos estão medidos na direção anti-horária);

$\lambda$ , ângulo entre  $\vec{V}_{p-}$  e  $\vec{V}_{p+}$ ;

$R_{p-}$ , a distância entre o veículo espacial e o corpo celeste durante o encontro, quando o veículo espacial está em sua primeira órbita (antes do impulso);

$R_{p+}$ , a distância entre o veículo espacial e o corpo celeste durante o encontro, quando o veículo espacial está em sua primeira órbita (depois do impulso).

Lembrando que o impulso muda a órbita do veículo espacial, assim há dois

periapses envolvidos nesta manobra: um que pertence à primeira órbita (antes do impulso) e outro que pertence à segunda órbita (depois do impulso);

$V_{\infty+}$ , a magnitude da velocidade do veículo espacial ao deixar o corpo celeste;

$\psi$ , o ângulo de aproximação (ângulo entre a linha de periapse e a linha que conecta os dois primários).

Com essas variáveis, é possível desenvolver um algoritmo para avaliar todos os parâmetros envolvidos nesta manobra. Os passos são mostrados a seguir. Lembre-se que as condições iniciais são  $V_{\infty-}$ ,  $R_{p-}$ ,  $\psi$  para a geometria do encontro e  $\delta V$  e  $\alpha$  para especificar o impulso aplicado.

a) Usando a conservação da energia é possível calcular  $V_{p-}$  a partir de  $V_{\infty-}$  e  $R_{p-}$ . A

equação usada é  $V_{p-} = \sqrt{V_{\infty-}^2 + \frac{2\mu_2}{R_{p-}}}$ , onde  $\mu_2$  é o parâmetro gravitacional do corpo

secundário;

b) o próximo passo é calcular  $V_{p+}$  a partir de  $V_{p-}$ ,  $\delta V$  e  $\alpha$ . A equação usada é

$$V_{p+} = \sqrt{V_{p-}^2 + \delta V^2 - 2V_{p-}\delta V \cos\alpha};$$

c) então é necessário calcular  $V_{\infty+}$ , de  $V_{p+}$  e  $R_{p-}$ . A equação é  $V_{\infty+} = \sqrt{V_{p+}^2 - \frac{2\mu_2}{R_{p-}}}$ ;

d) a próxima quantidade a ser avaliada é o semi eixo maior (a) da órbita depois do

swing-by. É obtido de  $V_{\infty+}$ , pelo uso da equação  $a = \frac{\mu_2}{V_{\infty+}^2}$ ;

e) então, a quantidade  $\lambda$  é calculada a partir de  $V_{p-}$ ,  $V_{p+}$ ,  $\delta V$ . A equação é

$$\lambda = \arccos\left(\frac{\delta V^2 - V_{p-}^2 - V_{p+}^2}{-2V_{p-}V_{p+}}\right);$$

f) então, o momento angular (h), o semi-latus rectum (p) e a excentricidade (e) da órbita depois do Swing-By são calculadas. Elas vem de  $V_{p+}$ ,  $R_{p-}$  e  $\lambda$ . As equações são

$$h = R_{p-}V_{p+} \sin(90^\circ - \lambda), p = \frac{h^2}{\mu_2}, e = \sqrt{1 + \frac{p}{a}};$$

g) o próximo passo é calcular a anomalia verdadeira ( $f_0$ ) do veículo espacial na segunda órbita hiperbólica (a órbita depois do impulso) ao redor do corpo secundário logo após o impulso a partir de  $e$ ,  $p$  e  $R_{p-}$ . A equação é  $f_0 = \arccos\left(\frac{1}{e}\left(\frac{p}{R_{p-}} - 1\right)\right)$ ;

h) a próxima quantidade a ser calculada é a anomalia verdadeira ( $f_{LIM}$ ) das assíntotas da segunda órbita hiperbólica do veículo espacial, ao redor do corpo secundário depois do impulso. Vem de  $e$ . A equação é  $f_{LIM} = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$ ;

i) então, o desvio total para esta manobra é determinado por  $\Theta = \delta + f_0 + f_{LIM} - 90^\circ$ .

Agora, é necessário proceder aos cálculos para obter as equações para a variação de energia, velocidade e momento angular. A Figura 10.5 mostra a geometria da soma dos vetores velocidades, que provê a informação básica para derivar essas equações.

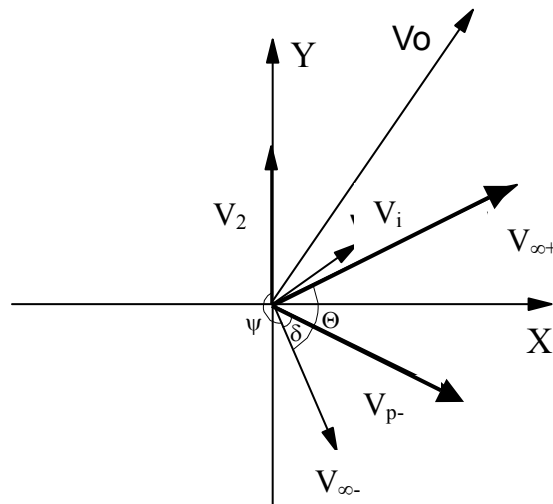


FIGURA 10.5 – Soma de vetores velocidade.

Da figura é possível obter as equações analíticas requeridas. As componentes horizontais e verticais da velocidade antes do encontro ( $V_{ix}$ ,  $V_{iy}$ ) e depois do encontro ( $V_{ox}$ ,  $V_{oy}$ ) são:

$$V_{ix} = -V_{i\infty-} \sin(\psi - \delta), \quad V_{iy} = V_2 + V_{\infty-} \cos(\psi - \delta) \quad (10.11)$$

$$V_{ox} = -V_{\infty+} \sin(\psi - \delta + \Theta), \quad V_{oy} = V_2 + V_{\infty+} \cos(\psi - \delta + \Theta) \quad (10.12)$$

Com essas equações é fácil calcular as variações em velocidade, energia e momento angular. Para derivar essas equações é assumido que o impulso e a manobra swing-by são instantâneos e que a posição do veículo espacial permanece constante durante a manobra. As equações são:

$$\Delta V_{\text{imp}} = \sqrt{(V_{ox} - V_{ix})^2 + (V_{oy} - V_{iy})^2} \quad (10.13)$$

$$\Delta E_{\text{imp}} = \frac{1}{2} (V_{ox}^2 + V_{oy}^2 - V_{ix}^2 - V_{iy}^2) \quad (10.14)$$

$$\Delta C_{\text{imp}} = d(V_{oy} - V_{iy}) \quad (10.15)$$

onde  $d$  é a distância entre  $M_1$  e  $M_2$ .

### 10.3 – Resultados para o Modelo de Dois Corpos

Nesta seção são utilizados os métodos explicados nas seções anteriores para gerar alguns resultados para entender melhor esta manobra. O sistema de Sol-Júpiter é usado como um exemplo. Um veículo espacial faz um swing-by com Júpiter para vários valores do impulso (eles podem ter magnitudes e direções diferentes, mas eles sempre estão no plano do movimento dos três corpos). A Figura 10.6 mostra as variações em velocidade, energia e momento angular para o swing-by propulsado. O eixo horizontal representa o ângulo  $\alpha$  (em graus) que define a direção do impulso e o eixo vertical representa a magnitude do impulso (em km/s). Os parâmetros usados para esta manobra são  $\mu_1 = 132784541000 \text{ kg.km}^3/\text{s}^2$ ,  $\mu_2 = 126779210 \text{ kg.km}^3/\text{s}^2$ ,  $V_{\infty+} = 1,0 \text{ km/s}$ ,  $R_{p-} = 78641,2 \text{ km}$ ,  $V_2 = 13,1 \text{ km/s}$ ,  $d_{sj} = 778330000 \text{ km}$ ,  $\psi = 270^\circ$ .

Esta é uma manobra que gera um aumento na energia ( $180^\circ < \psi < 360^\circ$ ). Para os intervalos  $\alpha > 90^\circ$  e  $\alpha < -90^\circ$  o impulso tem uma componente oposta a direção de movimento do veículo espacial, diminuindo a energia, e está trabalhando contra o swing-by. Da Figura 10.6 pode-se verificar o resultado esperado que a transferência de máximo de velocidade e energia acontece para  $\alpha = 0^\circ$  e que o mínimos do encontro ocorrem na borda dos gráficos. Também nota-se que há uma simetria com respeito à linha  $\alpha \cong 0^\circ$ .

Lembrando que a transferência máxima de energia não é sempre o objetivo da missão. Pode ser exigida para um encontro a obtenção de dados do corpo celeste, e para isto não é desejado o aumento da velocidade e energia da missão. Desta forma, os resultados aqui mostrados podem prover informações importantes para os projetistas de missão, que podem escolher os parâmetros do impulso que satisfazem melhor as metas da missão. A Figura 10.7 mostra um resultado similar para a manobra, mas com  $\psi = 90^\circ$  que é o caso onde a energia aumenta na manobra swing-by padrão ( $0^\circ < \psi < 180^\circ$ ). Para o intervalo  $\alpha > 90^\circ$  e  $\alpha < -90^\circ$ , o impulso tem uma componente oposta a direção do movimento do veículo espacial, diminuindo a energia e trabalhando a favor do swing-by. Para esta manobra há valores positivos e negativos para a troca de energia. Nas regiões positivas de variação de energia, o resultado líquido é um aumento na energia. Nas regiões negativas existentes em alguns gráficos, o swing-by e o impulso estão trabalhando juntos para diminuir a energia do veículo espacial. Note que os valores positivos ocorrem somente sobre um certo limite na magnitude do impulso e que este limite diminui quando  $\alpha$  chega a zero. A variação na velocidade e no momento angular gera um comportamento semelhante ao caso  $\psi = 270^\circ$ . Para as Figuras 10.6 a 10.10 o eixo x representa o ângulo expresso em graus e o eixo y o impulso expresso em km/s.

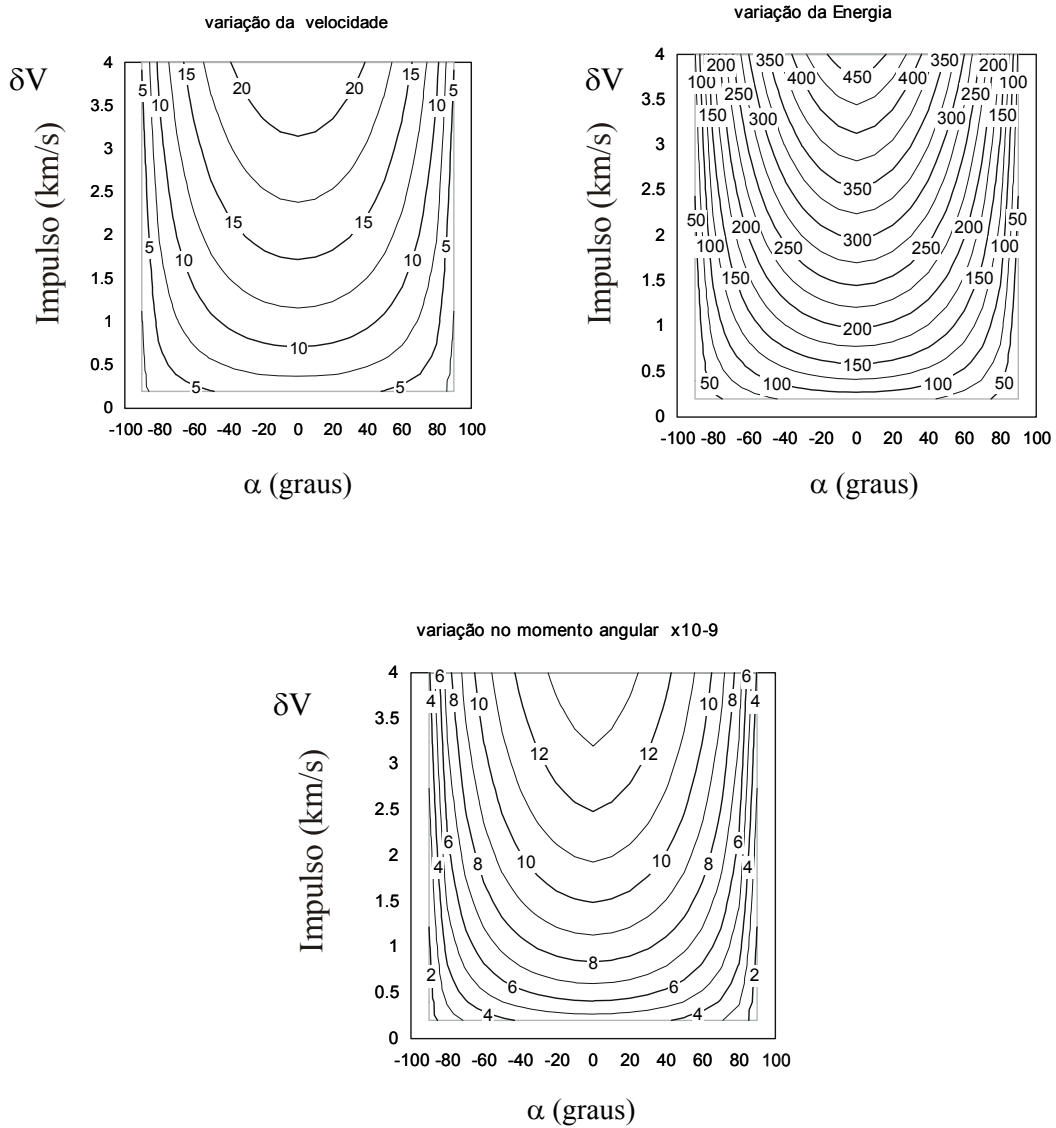


FIGURA 10.6 – Resultados para o sistema Sol-Júpiter para  $\psi = 270^\circ$ .



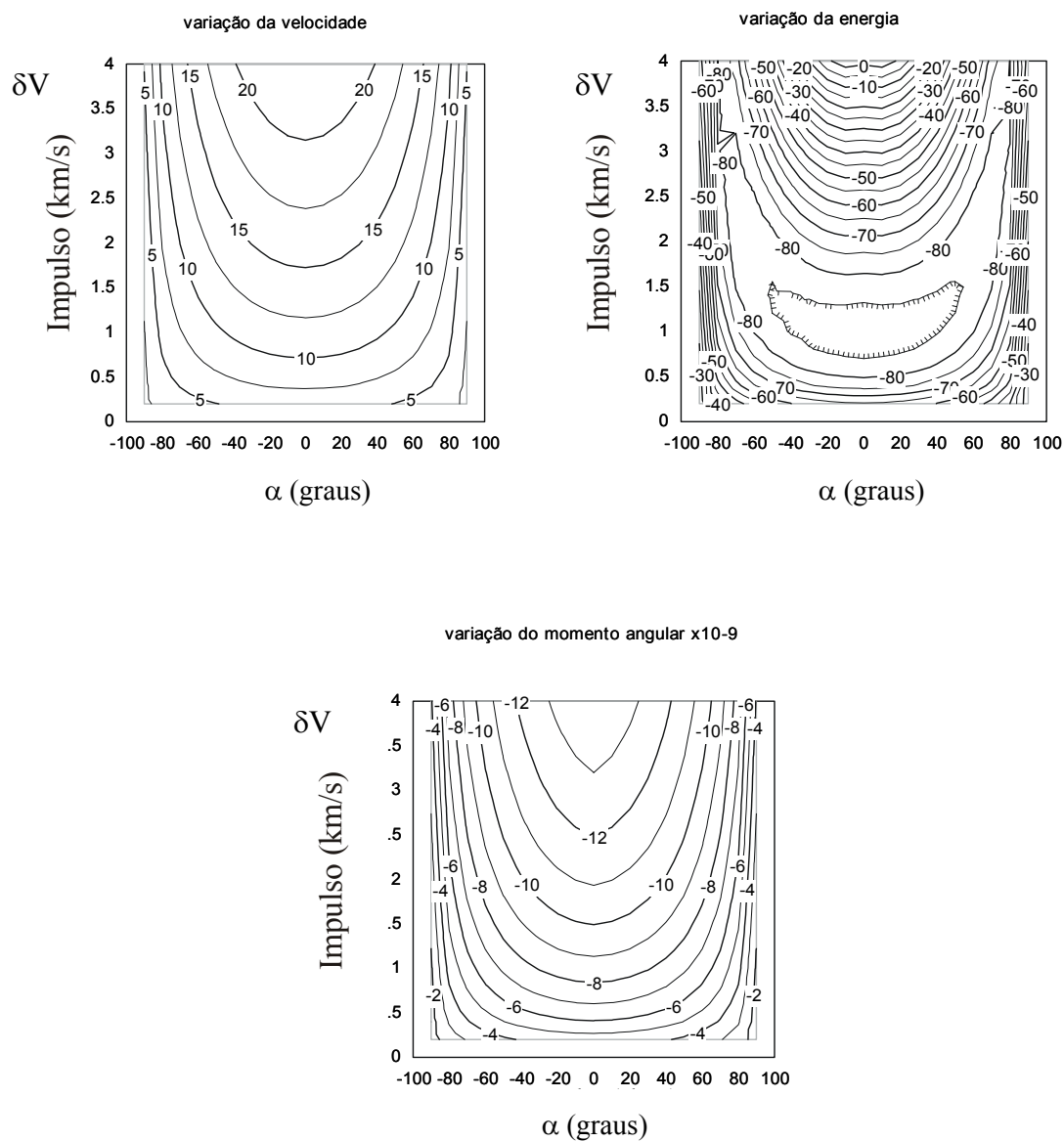


FIGURA 10.7 – Resultados para o sistema Sol-Júpiter para  $\psi = 90^\circ$ .

As Figuras 10.8 e 10.9 mostram um caso semelhante para o sistema Sol-Saturno com os parâmetros:  $\mu_1 = 132784541000 \text{ kg.km}^3/\text{s}^2$ ,  $\mu_2 = 37900311,2 \text{ kg.km}^3/\text{s}^2$ ,  $V_\infty = 1,0 \text{ km/s}$ ,  $R_p = 66294,8 \text{ km}$ ,  $V_2 = 9,7 \text{ km/s}$ ,  $d_{sj} = 1429400000 \text{ km}$ .

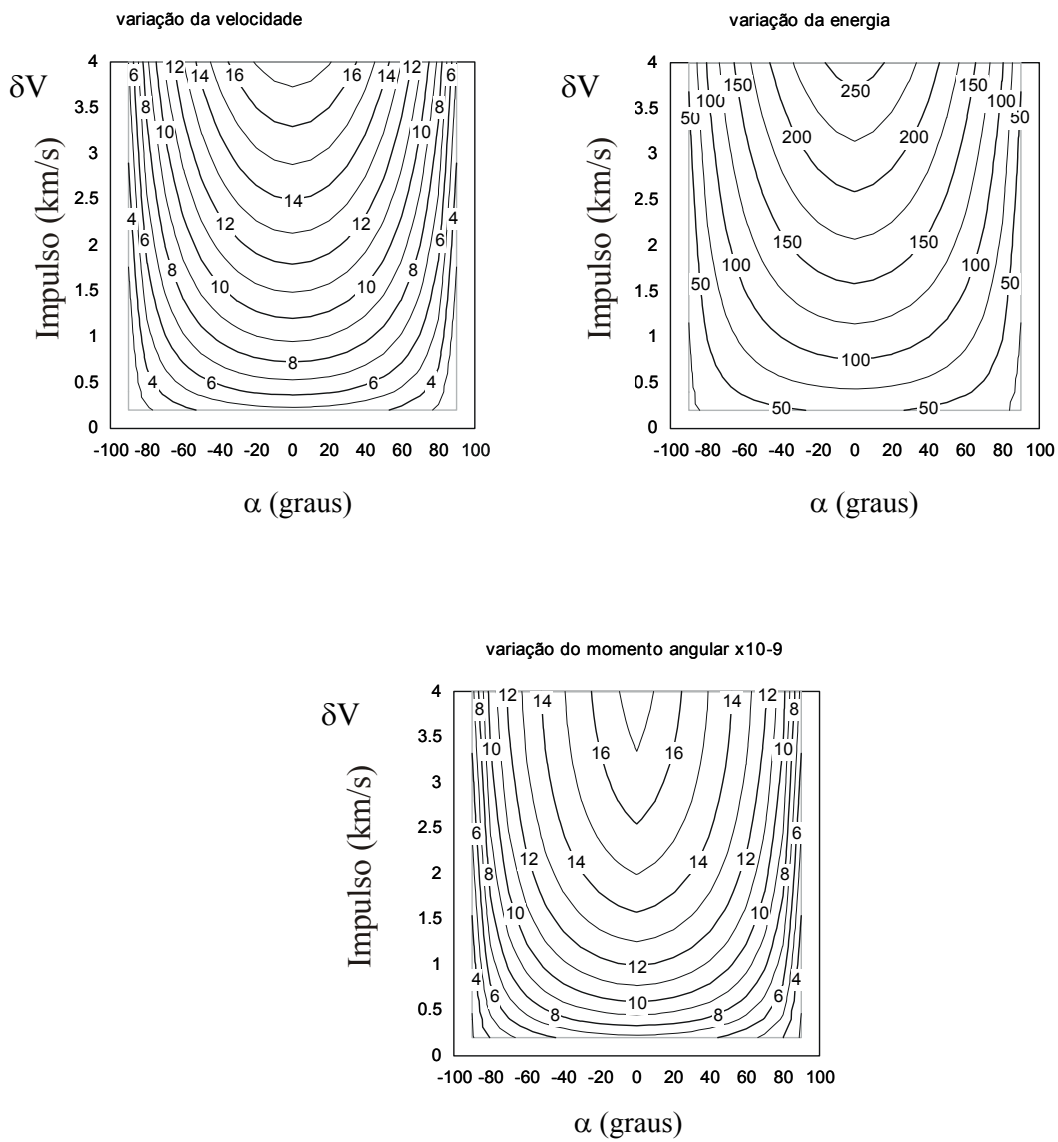


FIGURA 10.8 – Resultados para o sistema Sol-Saturno para  $\psi = 270^\circ$ .

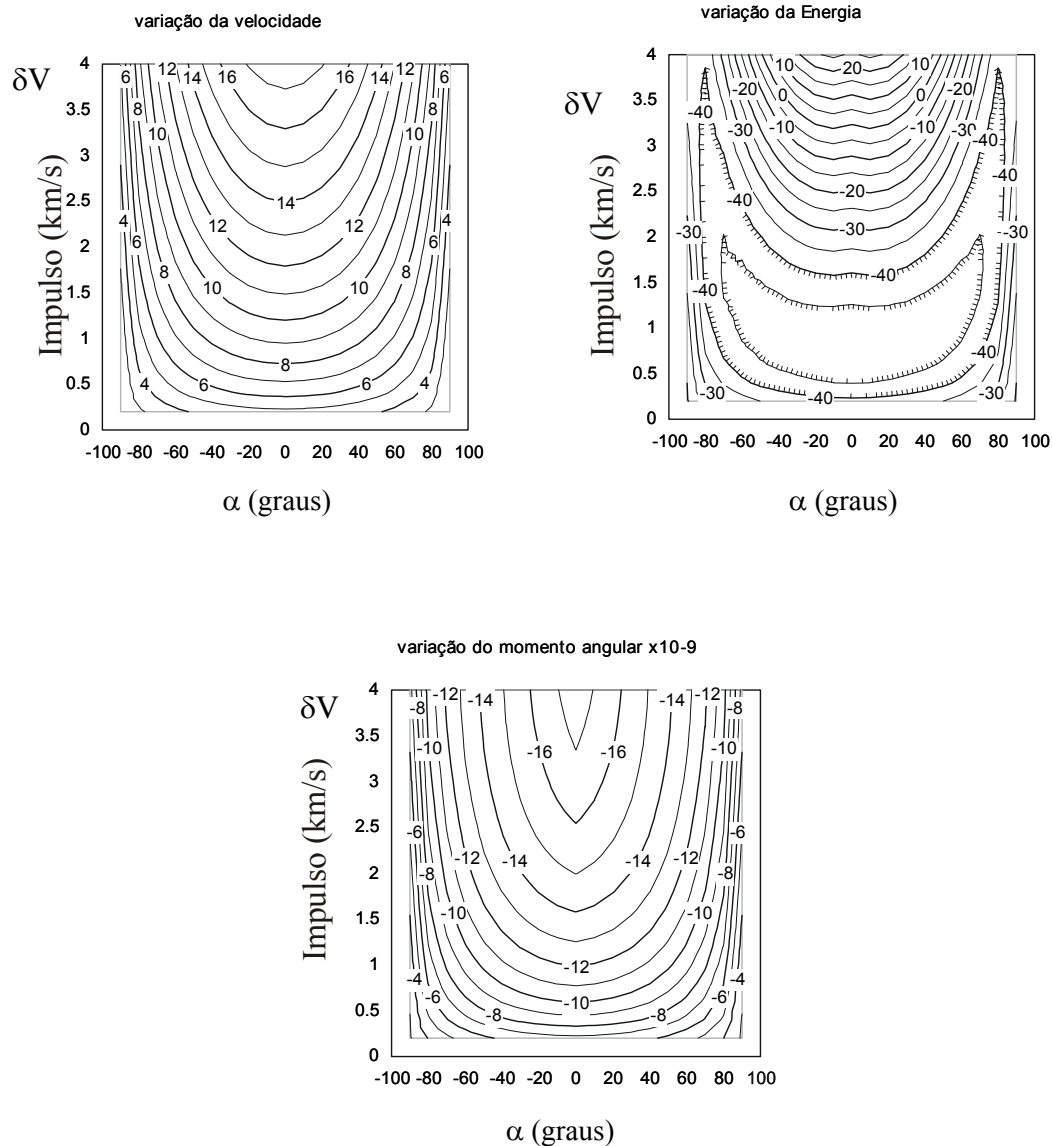


FIGURA 10.9 – Resultados para o sistema Sol-Saturno para  $\psi = 90^\circ$ .

Depois dos primeiros cálculos a eficiência da manobra swing-by propulsada é estudada. A manobra com transferência máxima de energia ( $\alpha = 0^\circ$  para a manobra que aumenta a energia e  $\alpha = 180^\circ$  para a manobra que diminui a energia) é comparada com a manobra onde o impulso é aplicado depois do swing-by. Esta nova manobra tem dois passos principais:

a) Uma manobra swing-by padrão não propulsada com alguns dos parâmetros da manobra propulsada ( $V_{\infty}$ ,  $R_p$ ,  $\psi$ );

b) um impulso (com a magnitude  $\delta V$  usado no Swing-By propulsado) é aplicado depois que o veículo espacial deixa o corpo secundário. Este impulso é assumido ser aplicado na direção que extremiza a transferência de energia. Para as manobras onde o objetivo é o aumento da energia ( $180^\circ < \psi < 360^\circ$ ), este impulso é direto (aplicado na direção do movimento do veículo espacial) e para as manobras onde a meta é diminuir a energia ( $0^\circ < \psi < 180^\circ$ ), este impulso é retrogrado (aplicado na direção oposta do movimento do veículo espacial). A Figura 10.9 mostra os resultados para o sistema Sol-Saturno para  $\psi = 90^\circ$  e  $\psi = 270^\circ$  e para  $\mu_1 = 132784541000 \text{ kg.km}^3/\text{s}^2$ ,  $\mu_2 = 37900311,2 \text{ kg.km}^3/\text{s}^2$ ,  $V_{\infty} = 1,0 \text{ km/s}$ ,  $R_{p-} = 66294.8 \text{ km}$ ,  $V_2 = 9,7 \text{ km/s}$ ,  $d_{sj} = 1429400000 \text{ km}$ .

A Figura 10.10 mostra os resultados para o sistema Sol-Júpiter para  $\psi = 90^\circ$  e  $\psi = 270^\circ$  e para  $\mu_1 = 132784541000 \text{ kg.km}^3/\text{s}^2$ ,  $\mu_2 = 126779210 \text{ kg.km}^3/\text{s}^2$ ,  $V_{\infty} = 1,0 \text{ km/s}$ ,  $R_{p-} = 78641,2 \text{ km}$ ,  $V_2 = 13,1 \text{ km/s}$ ,  $d_{sj} = 778330000 \text{ km}$ .

Para:  $\psi = 90^\circ$

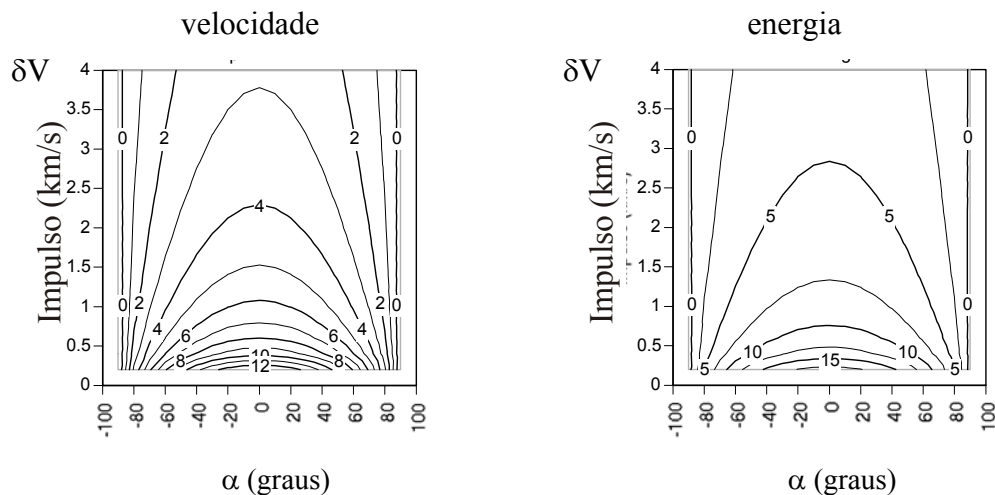


FIGURA 10.10 - Eficiência para o sistema Sol-Saturno (continua).

Para:  $\psi = 270^\circ$

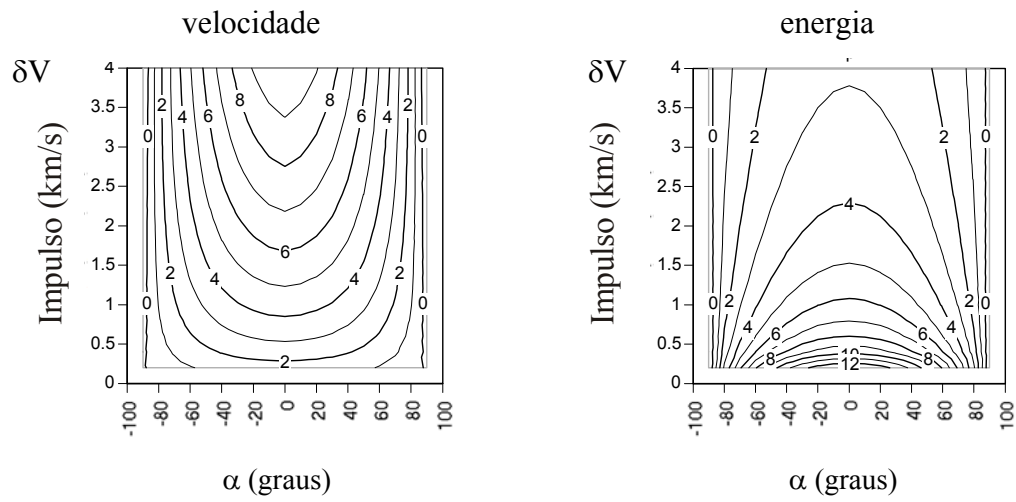


FIGURA10.10 (conclusão).

Para :  $\psi = 90^\circ$

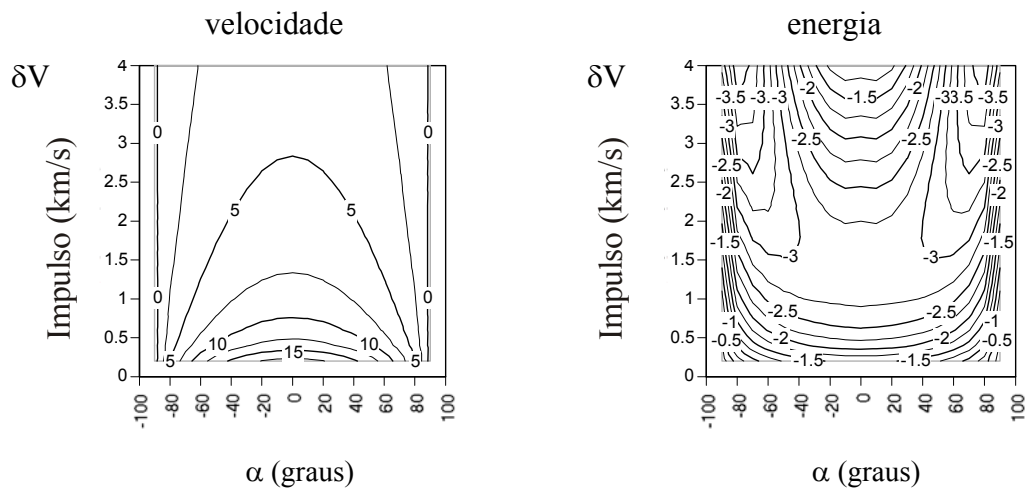


FIGURA10.11 - Eficiência para o sistema Sol-Júpiter. (continua)

Para :  $\psi = 270^\circ$

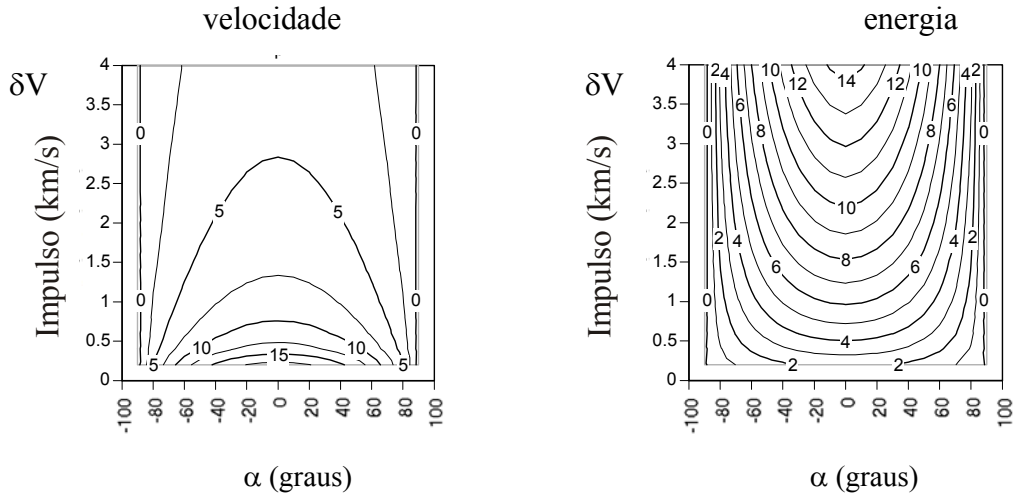


FIGURA10.11 (conclusão).

A quantidade mostrada é  $|\Delta E_{\text{imp}}| - |\Delta E_{\text{impafter}}|$  (em  $\text{km}^2/\text{s}^2$ ), onde  $\Delta E_{\text{imp}}$  é a variação de energia obtida pelo swing-by propulsado e  $\Delta E_{\text{impafter}}$  é a variação de energia da manobra que aplica o impulso depois do encontro. O sistema tem no eixo horizontal  $R_p$  (km) e no eixo vertical  $\psi$  (graus).

Valores positivos para esta quantidade indica que a aplicação do impulso durante o encontro é mais eficiente (causa uma variação em energia com magnitude maior) que a aplicação de um impulso com a mesma magnitude depois do encontro.

Para obter valores numéricos para a  $\Delta E_{\text{impafter}}$  são necessários os seguintes passos:

- a) Calcular a energia antes do encontro ( $E_i$ ), usando:  $E_i = \frac{1}{2}(V_{ix}^2 + V_{iy}^2) - \frac{\mu_1}{d}$ , onde  $\mu_1$  é o parâmetro gravitacional do corpo primário e  $d$  é a distância entre  $M_1$  e  $M_2$ ;

b) a energia depois da manobra padrão é obtida, diretamente da expressão:

$$E_o = E_i - 2V_2 V_{\infty-} \sin \delta \sin \psi ;$$

c) então, a magnitude da velocidade antes da manobra swing-by padrão é calculada da

energia, usando a expressão  $V_o = \sqrt{2\left(E_o + \frac{\mu_1}{d}\right)}$ ;

d) finalmente, a  $\Delta E_{\text{impafter}}$  é obtida de  $\Delta E_{\text{impafter}} = \frac{1}{2}(V_o + \Delta V)^2 - \frac{\mu_1}{d} - E_i$ , se  $180^\circ < \psi <$

$360^\circ$ ; ou  $\Delta E_{\text{impafter}} = \frac{1}{2}(V_o - \Delta V)^2 - \frac{\mu_1}{d} - E_i$ , se  $0^\circ < \psi < 180^\circ$ .

Está claro que a eficiência é altamente dependente no ângulo de aproximação e que tem pouca dependência na distância do encontro. Há só uma troca nos valores. Também é visível que há uma área relativamente pequena de valores negativos, o que significa que a manobra swing-by propulsada é uma escolha melhor para a maioria dos casos, mas há exceções. Também note que os gráficos se concentram em  $\psi = 180^\circ$ , embora a meta da manobra (ganhar ou perder energia) mude neste momento. Em geral, a manobra com swing-by propulsado possui um ganho de cerca de 6 – 8 %.

#### 10.4 – Swing-by Propulsado em Três Dimensões

Na presente seção faz-se uma descrição analítica da manobra swing-by propulsada no espaço tridimensional. São derivadas equações analíticas baseadas na aproximação de cônicas conjugadas para calcular a variação em velocidade, momento angular, energia e inclinação do veículo espacial nesta manobra. A seguir, estas manobras são computadas com uma dinâmica dada pelo problema restrito de três corpos.

O objetivo é desenvolver equações analíticas para as variações de velocidade, energia, momento angular e inclinação para o veículo espacial que passa perto de um corpo celeste, dentro da dinâmica da manobra do swing-by padrão, mas com a diferença que ao passar pelo ponto P o veículo espacial recebe um impulso ( $\delta V$ ) no momento da máxima aproximação entre o veículo e o corpo secundário.

As condições iniciais estão definidas na Figura 10.12. A distância  $R_p$  não está em escala para facilitar a compreensão da mesma. O resultado desta manobra é a troca na velocidade, momento angular, energia e inclinação da órbita kepleriana do veículo espacial em relação ao corpo central.

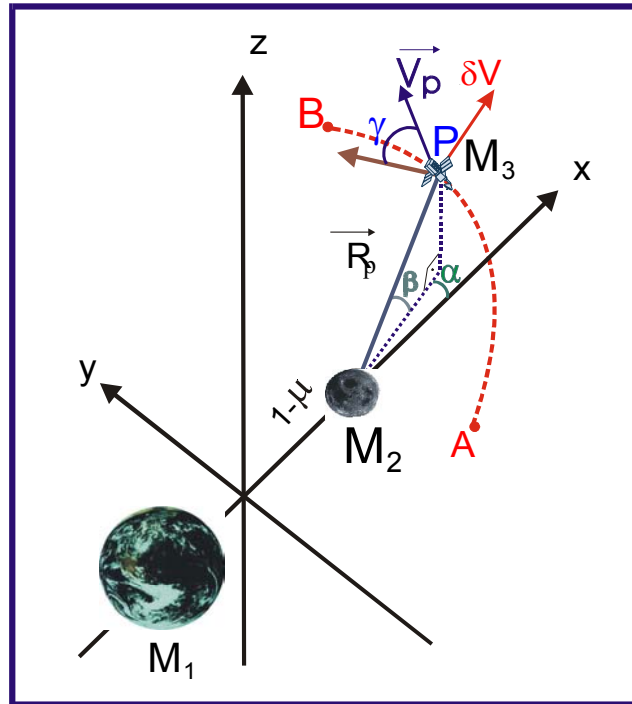


FIGURA 10.12 – O swing-by propulsado em três dimensões.

### 10.5 – Equações Analíticas do Swing-by Propulsado em Três Dimensões

Assume-se que um impulso é aplicado nas expressões no instante de máxima aproximação entre o veículo espacial e o corpo celeste.  $\vec{V}_{\infty p}^+$  é uma pseudo velocidade do veículo espacial com respeito a  $M_2$  depois do swing-by, que representa a velocidade que o veículo espacial teria com respeito a  $M_2$ , se o impulso não fosse aplicado. As posições e velocidades no periapse são (Prado, 2000):



Posição:

$$x_i = R_p \cos \beta \cos \alpha \quad (10.16)$$

$$y_i = R_p \cos \beta \sin \alpha \quad (10.17)$$

$$z_i = R_p \sin \beta \quad (10.18)$$

Velocidade:

$$V_{xi} = -V_p \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha - V_p \cos \gamma \sin \alpha \quad (10.19)$$

$$V_{yi} = -V_p \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + V_p \cos \gamma \sin \alpha \quad (10.20)$$

$$V_{zi} = +V_p \cos \beta \sin \gamma \quad (10.21)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{\infty}^- = V_{\infty} \sin \delta (\cos \beta \cos \alpha, \cos \beta \sin \alpha, \sin \beta) + V_{\infty} \cos \delta (-\sin \gamma \sin \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha, \\ -\sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha, \cos \beta \sin \gamma) \end{aligned} \quad (10.22)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{\infty}^+ = -V_{\infty} \sin \delta (\cos \beta \cos \alpha, \cos \beta \sin \alpha, \sin \beta) + V_{\infty} \cos \delta (-\sin \gamma \sin \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha, \\ -\sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha, \cos \beta \sin \gamma) \end{aligned} \quad (10.23)$$

Aplica-se o impulso (Fig. 10.12), e então as componentes da velocidade ficam:

$$V_{xi} = -V_p \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha - V_p \cos \gamma \sin \alpha + \delta V_x \quad (10.24)$$

$$V_{yi} = -V_p \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + V_p \cos \gamma \sin \alpha + \delta V_y \quad (10.25)$$

$$V_{zi} = +V_p \cos \beta \sin \gamma + \delta V_z \quad (10.26)$$

Durante a passagem, para pequenos impulsos, é assumida a mecânica de dois corpos e que a manobra inteira seja efetuada no plano que é definido pelos vetores  $\vec{R}_p$  e  $\vec{V}_p$ .

Então, os vetores  $\vec{V}_\infty^-$  e  $\vec{V}_\infty^+$ , que são vetores velocidades antes e depois do swing-by, respectivamente, com respeito a  $M_2$  podem ser escritas como uma combinação linear dos versores associados com  $\vec{R}_p$  e  $\vec{V}_p$ . Lembrando que  $\vec{V}_{\infty p}^-$  é a velocidade do veículo espacial chegando na esfera de influência de  $M_2$ , vindo da trajetória hipotética que conduz a velocidade no periapse dada pelas Equações 10.24 a 10.26, e  $\vec{V}_\infty^+$  é o vetor velocidade depois do swing-by, com respeito a  $M_2$ . Usando  $\vec{V}_\infty$  para representar ambos  $\vec{V}_\infty^-$  e  $\vec{V}_\infty^+$ , desde que as condições são as mesmas para ambos os vetores e uma solução dupla fornece os valores para  $\vec{V}_\infty^-$  e  $\vec{V}_\infty^+$ , temos:

$$\vec{V}_\infty = A \frac{\vec{R}_p}{R_p} + B \frac{\vec{V}_p}{V_p} \quad (10.27)$$

onde:

$$\begin{aligned} \vec{V}_\infty = & A(\cos\beta \cos\alpha, \cos\beta \sin\alpha, \sin\beta) + \\ & + B(-\sin\gamma \sin\beta \cos\alpha - \cos\gamma \sin\alpha + \delta V_x, \sin\gamma \sin\beta \sin\alpha + \\ & + \cos\gamma \cos\alpha + \delta V_y, \cos\beta \sin\gamma + \delta V_z) \end{aligned} \quad (10.28)$$

onde A, B são constantes e seguem as relações:  $A^2 + B^2 = V_\infty^2$ , onde  $V_\infty$  pode ser obtido de  $V_\infty^2 = V_p^2 - \frac{2\mu}{R_p}$ , que representa a conservação de energia da dinâmica de dois corpos.

Uma segunda exigência para  $\vec{V}_\infty$  é que este faça um ângulo  $\delta$  com  $\vec{V}_p$ , onde  $\delta$  é a metade do ângulo de rotação total descrito para o vetor velocidade durante a manobra (ângulo entre  $\vec{V}_\infty^-$  e  $\vec{V}_\infty^+$ ). As condições podem ser escritas como:

$$\vec{V}_\infty \bullet \vec{V}_p = V_\infty V_p \cos\delta \quad (10.29)$$

onde “•” representa o produto escalar entre os dois vetores.

Da mecânica celeste de dois corpos é conhecido que:

$$\text{sen } \delta = \frac{1}{1 + \frac{R_p V_\infty^2}{\mu_2}} \quad (10.30)$$

onde  $\mu_2$  é o parâmetro gravitacional de  $M_2$  ( $= 0,0121$ , no caso Terra-Lua).

Usando a equação para  $\vec{V}_\infty$  como uma função de  $\vec{R}_p$  e  $\vec{V}_p$ , temos:

$$\vec{V}_\infty \cdot \vec{V}_p = \left( A \frac{\vec{R}_p}{R_p} + B \frac{\vec{V}_p}{V_p} \right) \cdot \vec{V}_p = B V_p = V_\infty V_p \cos \delta \quad (10.31)$$

Então,  $B = V_\infty \cos \delta$ , porque  $\vec{R}_p \cdot \vec{V}_p = 0$  (no periapse  $\vec{R}_p$  e  $\vec{V}_p$  são perpendiculares) e

$$\vec{V}_p \cdot \vec{V}_p = V_p^2.$$

Então, se  $A^2 + B^2 = V_\infty^2 \Rightarrow A^2 = V_\infty^2 - B^2 = V_\infty^2 - V_\infty^2 \cos^2 \delta = V_\infty^2 (1 - \cos^2 \delta) = V_\infty^2 \text{sen}^2 \delta$

$$\Rightarrow A = \pm V_\infty \text{sen } \delta$$

Então, temos:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{\infty}^- = & -\{ \cos \delta (\delta V_x - \cos \gamma \text{sen} \alpha - \cos \alpha \text{sen} \beta \text{sen} \gamma) - \cos \alpha \cos \beta \text{sen} \delta \} V_\infty, \\ & (\cos \delta (\delta V_y + \cos \alpha \cos \gamma - \text{sen} \alpha \text{sen} \beta \text{sen} \gamma) - \cos \beta \text{sen} \alpha \text{sen} \delta) V_\infty, \\ & \cos \delta (\delta V_z + \cos \beta \text{sen} \gamma) - \text{sen} \beta \text{sen} \delta \} V_\infty \} \end{aligned} \quad (10.32)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{\infty}^+ = & \{ \cos \delta \cos \gamma \text{sen} \alpha + \cos \alpha (\cos \delta \text{sen} \beta \text{sen} \gamma - \cos \beta \text{sen} \delta) \} V_\infty, \\ & (\cos \delta \cos \alpha \cos \gamma + \text{sen} \alpha (-\cos \delta \text{sen} \beta \text{sen} \gamma + \cos \beta \text{sen} \delta)) V_\infty, \\ & (\cos \beta \cos \delta \text{sen} \gamma + \text{sen} \beta \text{sen} \delta) V_\infty \} \end{aligned} \quad (10.33)$$

Para  $M_2$ , a velocidade com respeito a ( $\vec{V}_2$ ) é assumida ser

$$\vec{V}_2 = (0, V_2, 0) \quad (10.34)$$

Usando a adição de vetores:

$$\begin{aligned}\vec{V}_i &= \vec{V}_\infty^- + \vec{V}_2 \\ \vec{V}_i &= \{-(\cos \delta \cos \gamma \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha (\cos \delta \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma - \cos \beta \operatorname{sen} \delta)), \\ &\frac{V_2}{V_\infty^-} + (\cos \delta \cos \alpha \cos \gamma + \operatorname{sen} \alpha (-\cos \delta \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma + \cos \beta \operatorname{sen} \delta), \\ &\cos \beta \cos \delta \operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \delta)\} \end{aligned} \quad (10.35)$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_0 &= \vec{V}_\infty^+ + \vec{V}_2 = \\ \vec{V}_0 &= \{\cos \delta (\delta V_x - \cos \gamma \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma) - \cos \alpha \cos \beta \operatorname{sen} \delta, \\ &\frac{V_2}{V_\infty^-} + \cos \delta (\delta V_y + \cos \alpha \cos \gamma - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma) - \cos \beta \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta, \\ &\cos \delta (\delta V_z + \cos \beta \operatorname{sen} \gamma) - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \delta\} \end{aligned} \quad (10.36)$$

onde  $\vec{V}_i$  e  $\vec{V}_0$  são as velocidades inerciais do veículo espacial antes e depois do swing-by, respectivamente.

Para estas equações é possível se obter expressões para a variação da velocidade, energia e momento angular. São elas:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{V} &= \vec{V}_0 - \vec{V}_i \\ \Delta \vec{V} &= \{(\delta V_x \cos \delta - 2 \cos \alpha \cos \beta \operatorname{sen} \delta) V_\infty, (\delta V_y \cos \delta - 2 \cos \beta \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta) V_\infty, (\delta V_z \cos \delta - 2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \delta) V_\infty\} \end{aligned} \quad (10.37)$$

que implica em:  $\Delta V = |\Delta \vec{V}|$

$$\Delta V = \sqrt{((\delta V_x^2 + \delta V_y^2 + \delta V_z^2) \cos^2 \delta - 4 \cos \delta (\delta V_x \cos \alpha \cos \beta + \delta V_y \cos \beta \operatorname{sen} \alpha + \delta V_z \operatorname{sen} \beta) \operatorname{sen} \delta + 4 \operatorname{sen}^2 \delta) V_\infty^2} \quad (10.38)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} (\vec{V}_0^2 - \vec{V}_i^2)$$

$$\begin{aligned} \Delta E = & \frac{1}{2} V_{\infty} (2V_2 (\delta V_y \cos \delta - 2 \cos \beta \sin \alpha \sin \delta) + \cos \delta (\cos \delta (\delta V_x^2 + \delta V_y^2 + \delta V_z^2 + 2\delta V_y \cos \alpha \cos \gamma - \\ & 2\delta V_x \cos \gamma \sin \alpha + 2\delta V_z \cos \beta \sin \gamma - 2\delta V_x \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - 2\delta V_y \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) - \\ & 2(\delta V_x \cos \alpha \cos \beta + \delta V_y \cos \beta \sin \alpha + \delta V_z \sin \beta) \sin \delta) V_{\infty} ) \end{aligned} \quad (10.39)$$

Para o momento angular ( $\vec{C}$ ) os resultados são:

$$\begin{aligned} \vec{C}_i &= \vec{R} \times \vec{V}_i \\ \vec{C}_i &= \{0, -d (\cos \beta \cos \delta \sin \gamma + \sin \beta \sin \delta) V_{\infty}, d (V_2 + (\cos \alpha \cos \gamma \cos \delta V_{\infty} + \sin \alpha (- \\ & \cos \delta \sin \beta \sin \gamma V_{\infty} + \cos \beta \sin \delta)) V_{\infty})\} \end{aligned} \quad (10.40)$$

$$\begin{aligned} \vec{C}_0 &= \vec{R} \times \vec{V}_0 \\ \vec{C}_0 &= \{0, -d (\cos \delta (\delta V_z + \cos \beta \sin \gamma) - \sin \beta \sin \delta) V_{\infty}, d (V_2 + (\cos \delta (\delta V_y + \cos \alpha \cos \gamma - \\ & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) - \cos \beta \sin \alpha \sin \delta) V_{\infty})\} \end{aligned} \quad (10.41)$$

onde  $\vec{R} = (d, 0, 0)$  é a posição do vetor de  $M_2$ .

Então:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{C} &= \vec{C}_0 - \vec{C}_i = \\ \Delta \vec{C} &= \{0, -d \delta V_z \cos \delta V_{\infty} + 2 d \sin \beta \sin \delta V_{\infty}, d \delta V_y \cos \delta V_{\infty} - 2 d \cos \beta \sin \alpha \sin \delta V_{\infty}\} \end{aligned} \quad (10.42)$$

Então,  $\Delta C = |\Delta \vec{C}|$

$$\Delta C = \sqrt{(d \delta V_y \cos \delta V_{\infty} - 2 d \cos \beta \sin \alpha \sin \delta V_{\infty})^2 + (d \delta V_z \cos \delta V_{\infty} - 2 d \sin \beta \sin \delta V_{\infty})^2} \quad (10.43)$$

Usando a definição de velocidade angular  $\omega = \frac{V_2}{d}$  para a inclinação, os resultados são os seguintes:  $\vec{\omega} = \{0, 0, 1\}$

$$\begin{aligned}\vec{C}_{iz} &= \vec{C}_i \cdot \vec{\omega}_z \\ \vec{C}_{iz} &= d (V_2 + (\cos\alpha \cos\gamma \cos\delta + \text{sen}\alpha (-\cos\delta \text{sen}\beta \text{sen}\gamma + \cos\beta \text{sen}\delta)) V_\infty) \quad (10.44)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{C}_{0z} &= \vec{C}_0 \cdot \vec{\omega}_z \\ \vec{C}_{0z} &= d (V_2 + (\cos\delta (\delta V_y + \cos\alpha \cos\gamma - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta \text{sen}\gamma) - \cos\beta \text{sen}\alpha \text{sen}\delta) V_\infty) \quad (10.45)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\vec{C}_z &= \vec{C}_{0z} - \vec{C}_{iz} \\ \Delta\vec{C}_z &= d V_\infty (\delta V_y \cos\delta - 2 \cos\beta \text{sen}\alpha \text{sen}\delta) \quad (10.46)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta C_i &= |\Delta\vec{C}_i| \\ \Delta C_i &= (d \cos\beta \cos\delta \text{sen}\gamma V_\infty + d \text{sen}\beta \text{sen}\delta V_\infty)^2 + d^2 \\ & (V_2 + (\cos\alpha \cos\gamma \cos\delta + \text{sen}\alpha (-\cos\delta \text{sen}\beta \text{sen}\gamma + \cos\beta \text{sen}\delta)) V_\infty)^2 \quad (10.47)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta C_0 &= |\Delta\vec{C}_0| \\ \Delta C_0 &= d^2 ((\cos\delta (\delta V_z + \cos\beta \text{sen}\gamma) - \text{sen}\beta \text{sen}\delta)^2 V_\infty^2 + \\ & (V_2 + (\cos\delta (\delta V_y + \cos\alpha \cos\gamma - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta \text{sen}\gamma) - \cos\beta \text{sen}\alpha \text{sen}\delta) V_\infty)^2) \quad (10.48)\end{aligned}$$

$$\text{Cos}(i_i) = \frac{C_{iz}}{|\vec{C}_i|}$$

$$\text{Cos}(i_i) = \frac{d (V_2 + \cos\alpha \cos\gamma \cos\delta + \text{sen}\alpha (-\cos\delta \text{sen}\beta \text{sen}\gamma + \cos\beta \text{sen}\delta)) V_\infty}{(d \cos\beta \cos\delta \text{sen}\gamma V_\infty + d \text{sen}\beta \text{sen}\delta V_\infty)^2 + d^2 (V_2 + (\cos\alpha \cos\gamma \cos\delta + \text{sen}\alpha (-\cos\delta \text{sen}\beta \text{sen}\gamma + \cos\beta \text{sen}\delta)) V_\infty)^2} \quad (10.49)$$

$$\text{Cos}(i_0) = \frac{C_{0z}}{|\vec{C}_0|}$$

$$\text{Cos}(i_0) = \frac{V_2 + (\cos\delta (\delta V_y + \cos\alpha \cos\gamma - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta \text{sen}\gamma) - \cos\beta \text{sen}\alpha \text{sen}\delta)V_\infty}{d((\cos\delta (\delta V_z + \cos\beta \text{sen}\gamma) - \text{sen}\beta \text{sen}\delta)^2 V_\infty^2 + (V_2 + (\cos\delta (\delta V_y + \cos\alpha \cos\gamma - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta \text{sen}\gamma) - \cos\beta \text{sen}\alpha \text{sen}\delta)V_\infty)^2)} \quad (10.50)$$

A variação da inclinação pode ser obtida de  $i_0$ -  $i_i$ .

$$\Delta_i = \arccos(A) - \arccos(B) \quad (10.51)$$

onde:

$$A = \frac{V_2 + (\cos\delta (\delta V_y + \cos\alpha \cos\gamma - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta \text{sen}\gamma) - \cos\beta \text{sen}\alpha \text{sen}\delta)V_\infty}{d((\cos\delta (\delta V_z + \cos\beta \text{sen}\gamma) - \text{sen}\beta \text{sen}\delta)^2 V_\infty^2 + (V_2 + (\cos\delta (\delta V_y + \cos\alpha \cos\gamma - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta \text{sen}\gamma) - \cos\beta \text{sen}\alpha \text{sen}\delta)V_\infty)^2)}$$

$$B = \frac{V_2 + (\cos\delta (\delta V_y + \cos\alpha \cos\gamma - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta \text{sen}\gamma) - \cos\beta \text{sen}\alpha \text{sen}\delta)V_\infty}{d((\cos\delta (\delta V_z + \cos\beta \text{sen}\gamma) - \text{sen}\beta \text{sen}\delta)^2 V_\infty^2 + (V_2 + (\cos\delta (\delta V_y + \cos\alpha \cos\gamma - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta \text{sen}\gamma) - \cos\beta \text{sen}\alpha \text{sen}\delta)V_\infty)^2)}$$

onde:  $\delta V_z = \sqrt{-(\delta V_x)^2 - (\delta V_y)^2 + (|\delta \vec{V}|)^2}$  e  $|\delta \vec{V}|$  é a magnitude do impulso aplicado na manobra.

## 10.6 – Resultados para o Swing-by Propulsado

Foram gerados gráficos no sistema Terra-Lua com diferentes valores e direções de ângulos para obter máximos e mínimos de  $\Delta E$ ,  $\Delta C$ ,  $\Delta V$  como função da direção de um impulso com magnitude fixa. As Figuras 10.12 e 10.13 mostram os resultados obtidos. Os valores atribuídos as variáveis são:  $V_2 = 1,0$ ;  $\mu = 0,0121$ ;  $R_p = 1911,8$  km;  $V_\infty = 2,0$ ,  $|\delta \vec{V}| = 0,01$ ,  $d = 1,0$ ,  $\mu_2 = 0,0121$ .

A maioria dos extremos se localiza nas bordas, embora existam exceções, o que indica a existência de direções diferenciadas para o impulso.

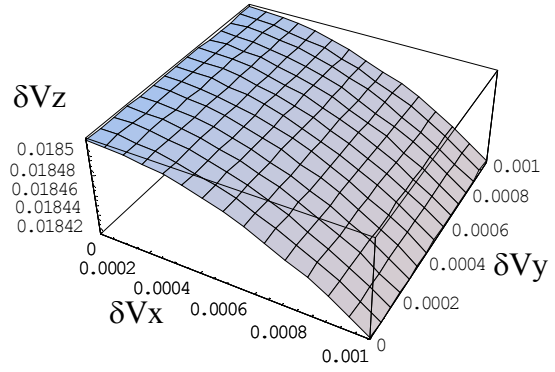
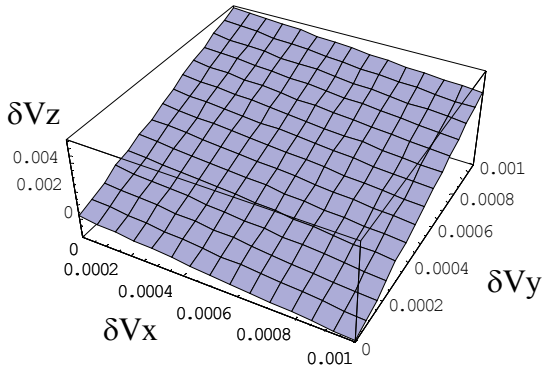
Foram feitas comparações na variação de energia entre a manobra swing-by padrão e a manobra propulsada e obtivemos a Tabela 10.1.



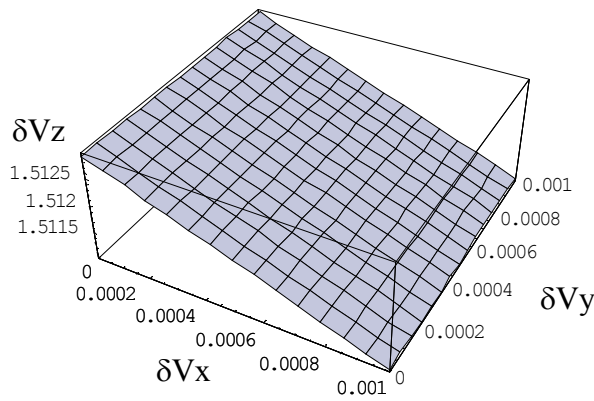
$\alpha = 0^\circ$

$\Delta E$

$\Delta C$



$\Delta V$



$\alpha = 30^\circ$

$\Delta E$

$\Delta C$

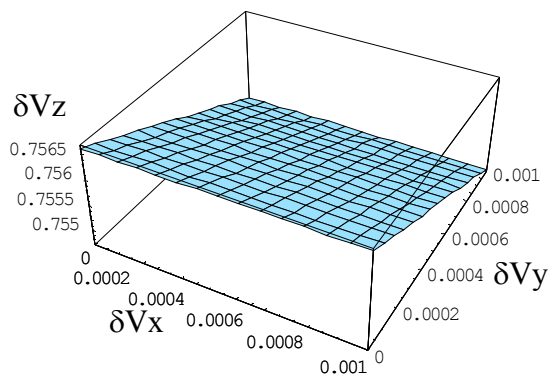
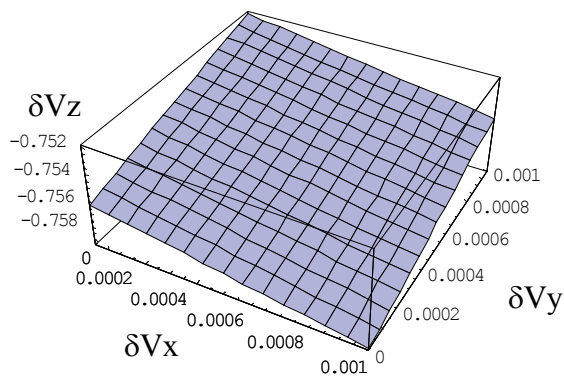
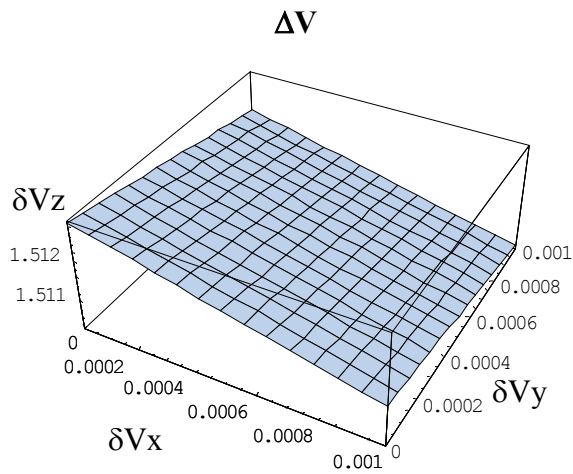


FIGURA 10.13 – Resultados das simulações para o caso plano ( $\beta = \gamma = 0^\circ$ )  
(Continua).



$\alpha = 60^\circ$

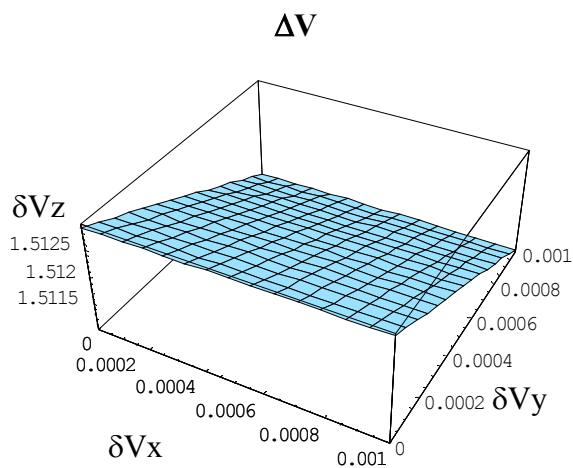
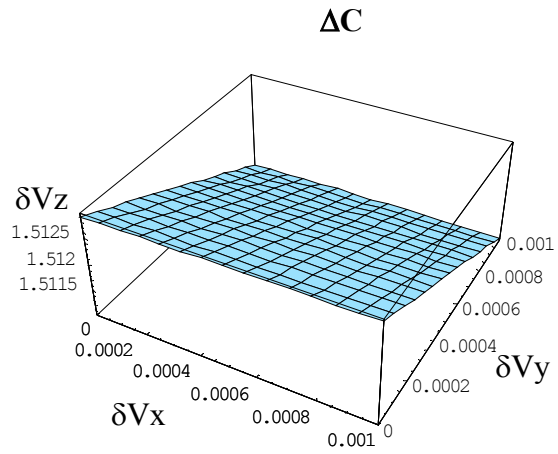
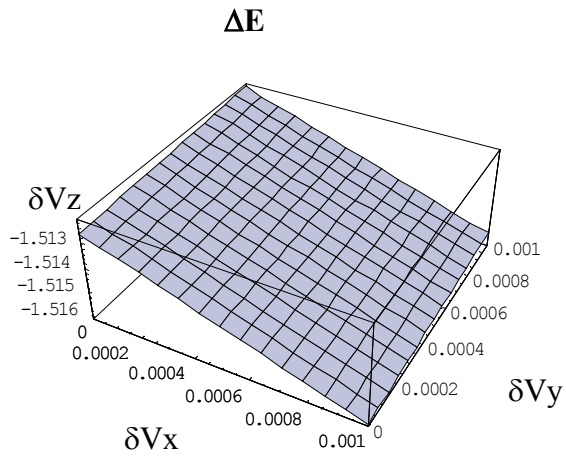
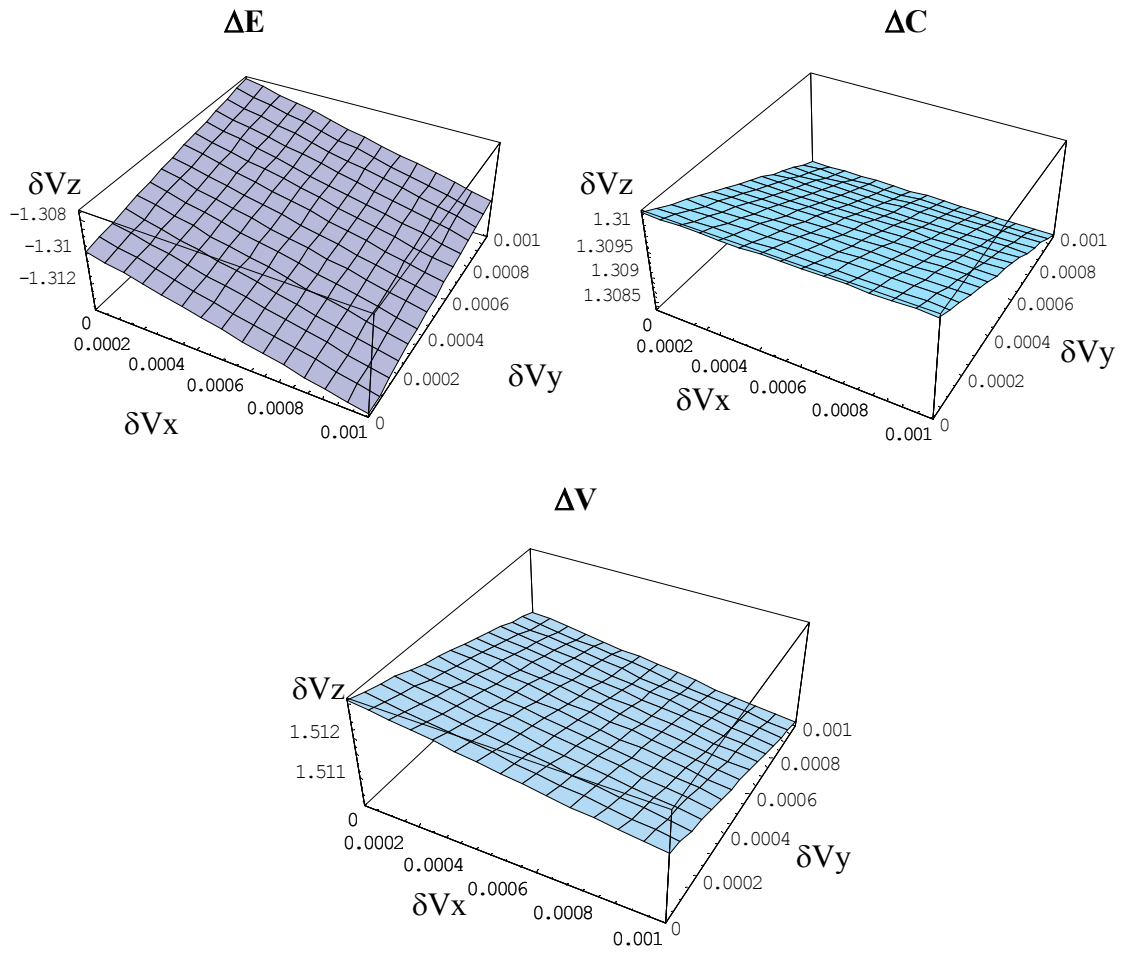


FIGURA 10.13 – ( Continuação). ( Continua )

$\alpha = 90^\circ$



$\alpha = 120^\circ$

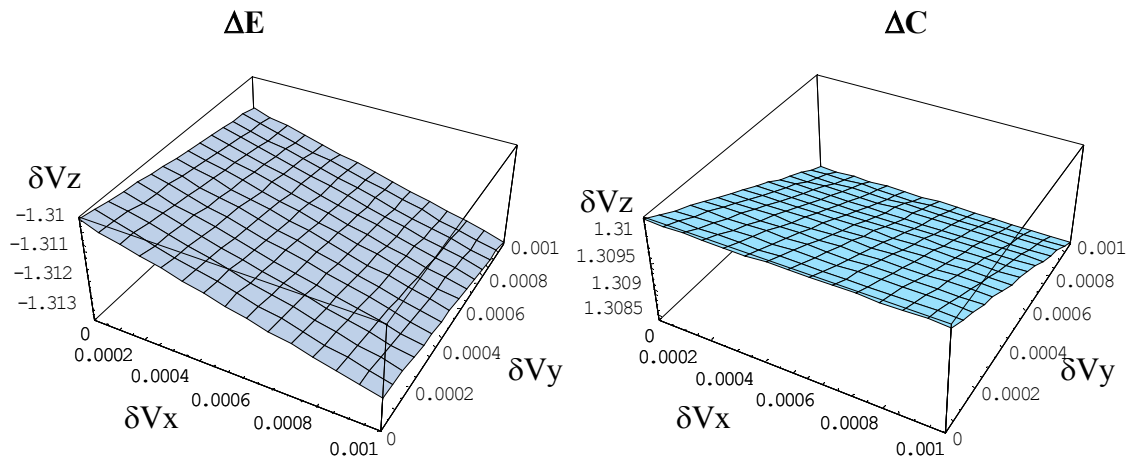
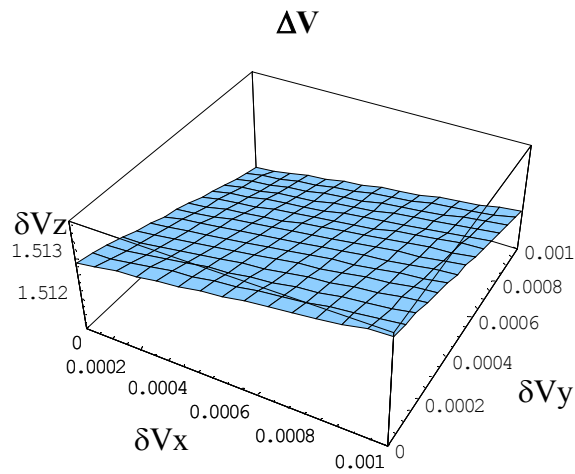


FIGURA 10.13 – (Continuação) (Continua).



$\alpha = 150^\circ$

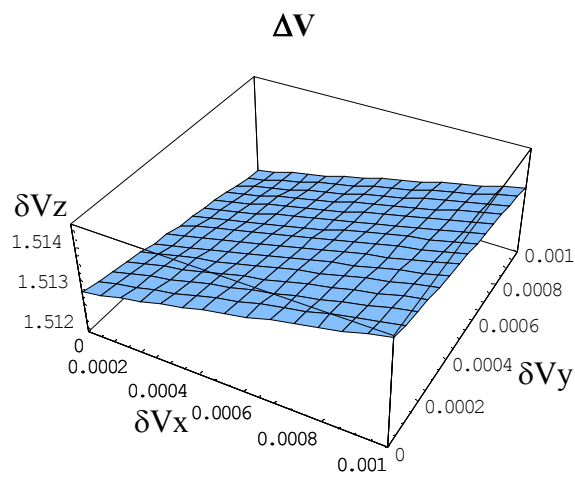
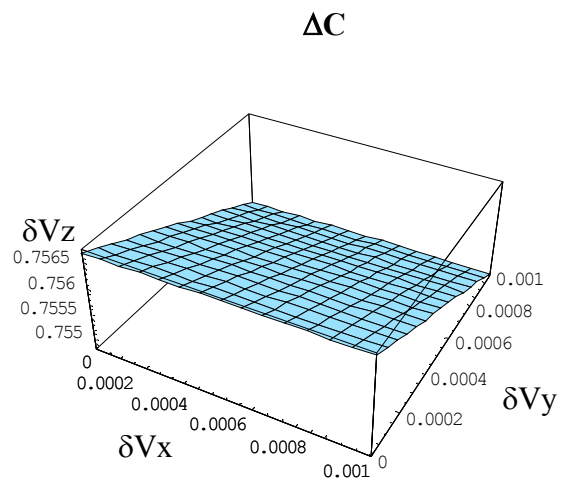
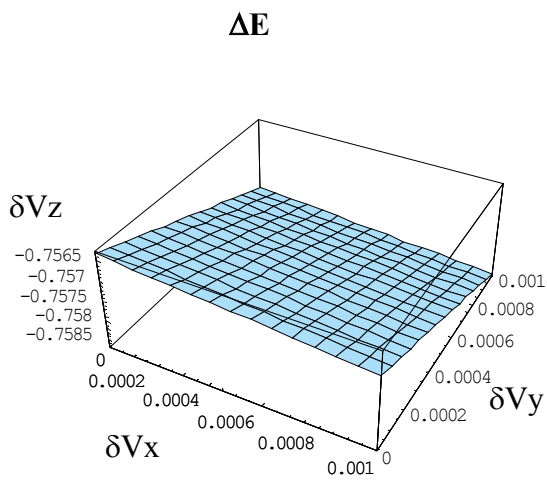
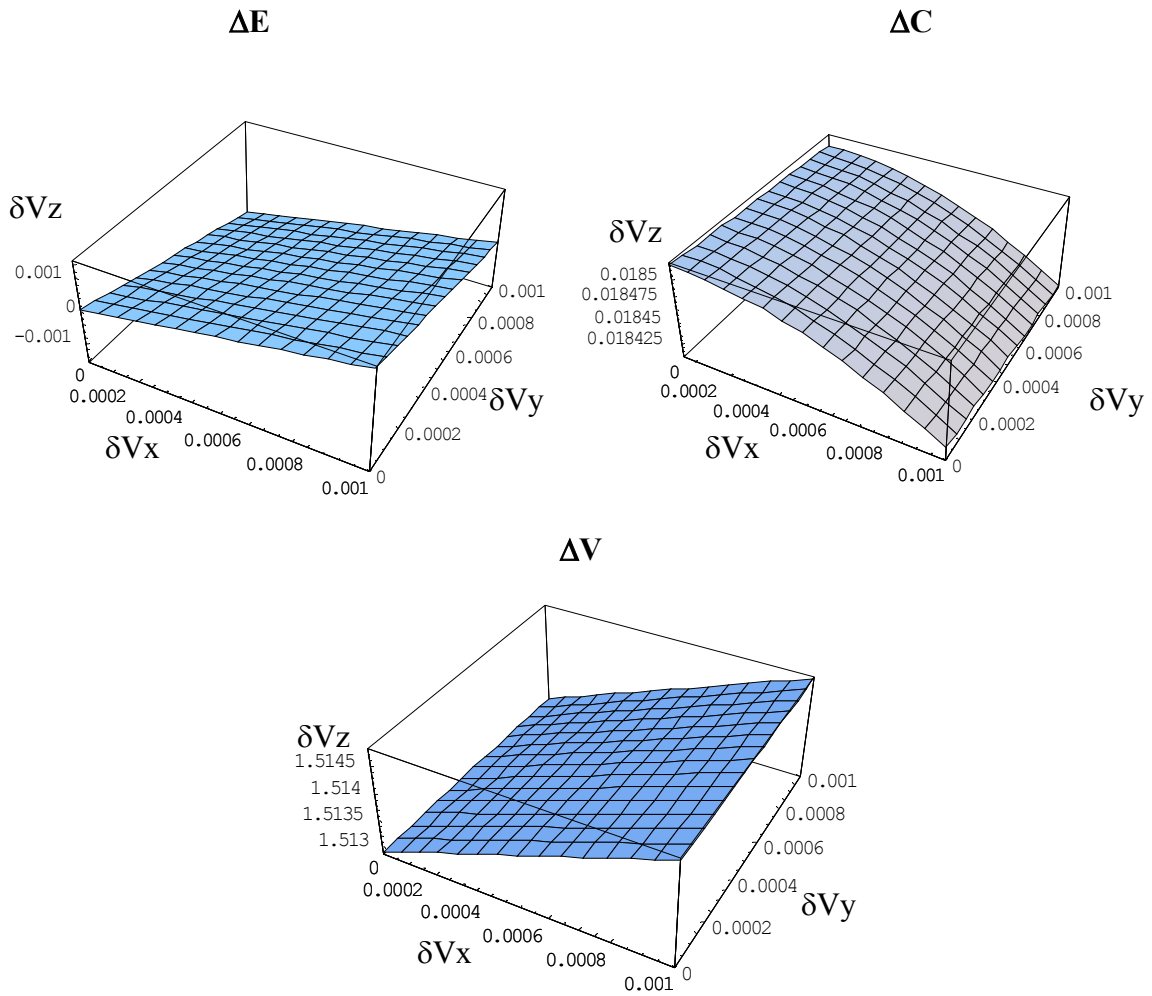


FIGURA 10.13 – ( Continuação) (Continua).

$\alpha = 180^\circ$



$\alpha = 210^\circ$

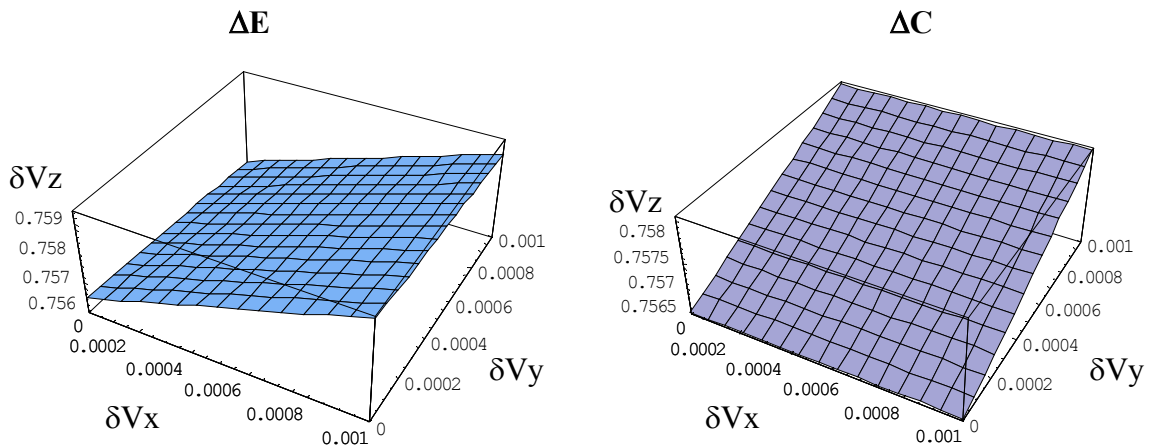


FIGURA 10.13 – ( Continuação ) ( Continua ).

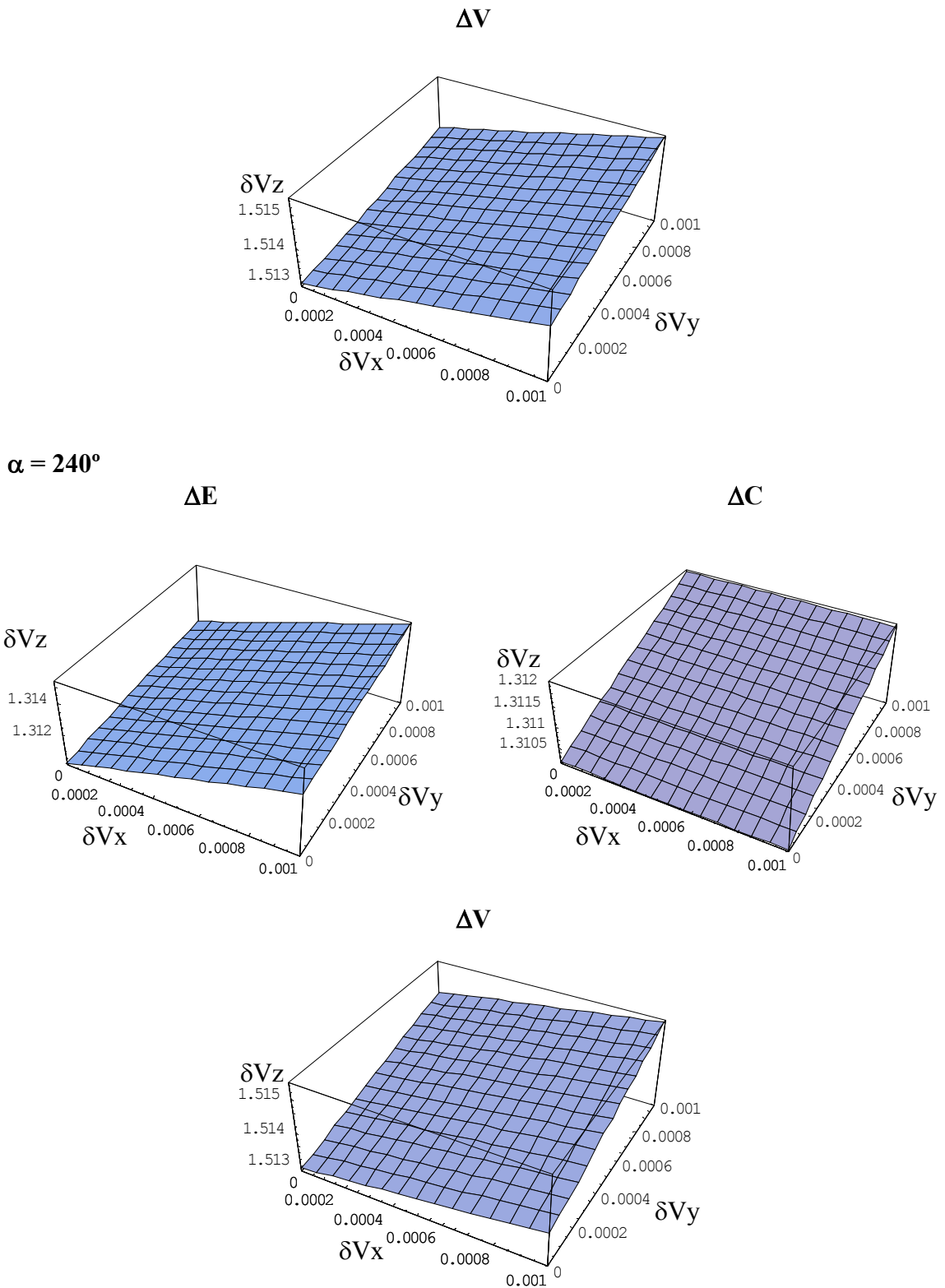
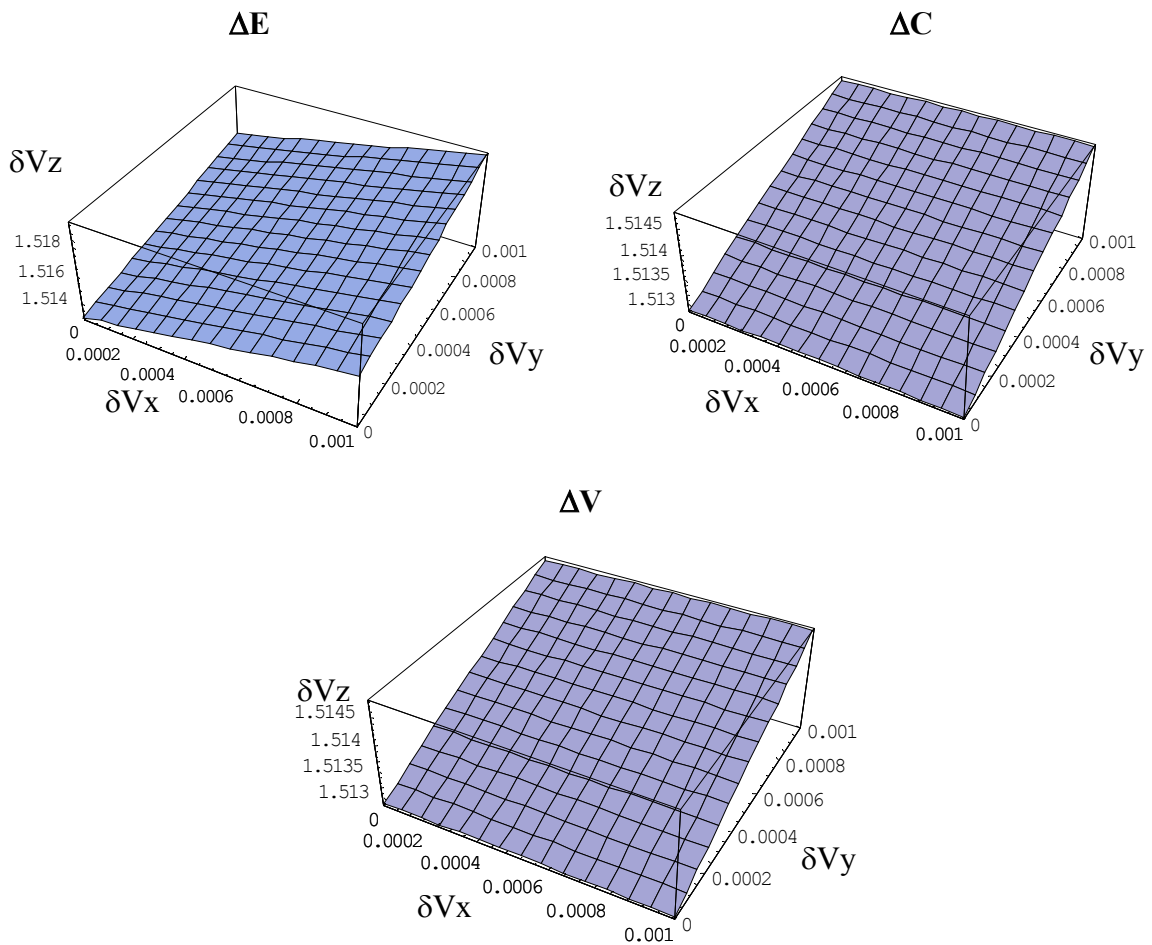


FIGURA 10.13 - (Continuação) ( Continua ).

$\alpha = 270^\circ$



$\alpha = 300^\circ$

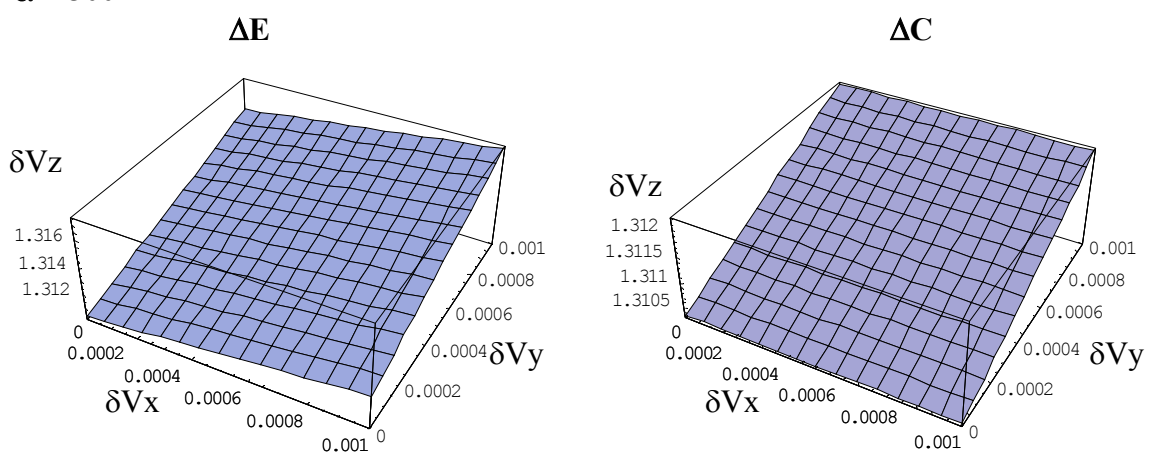


FIGURA 10.13 – ( Continuação ) ( Continua ).

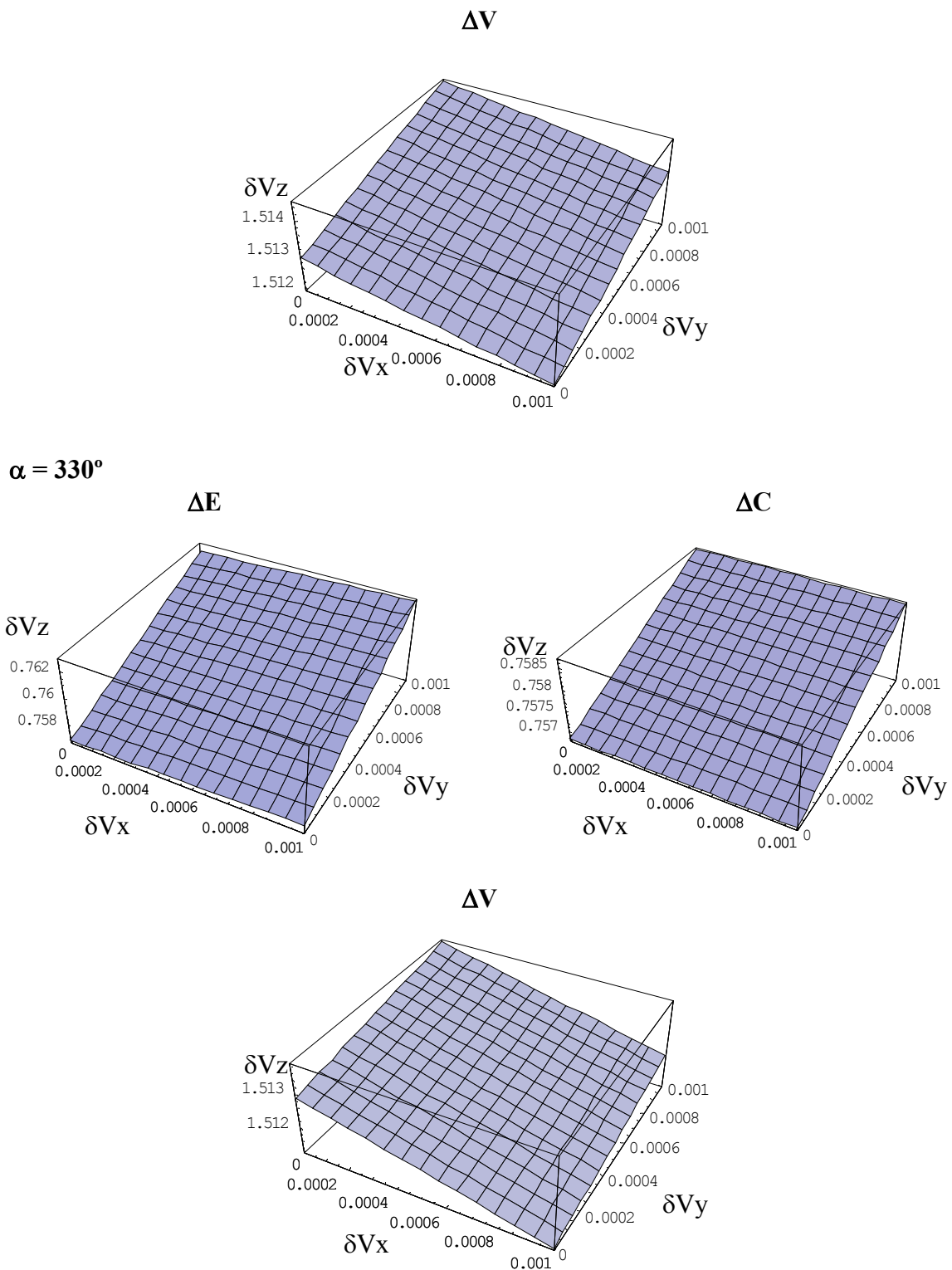
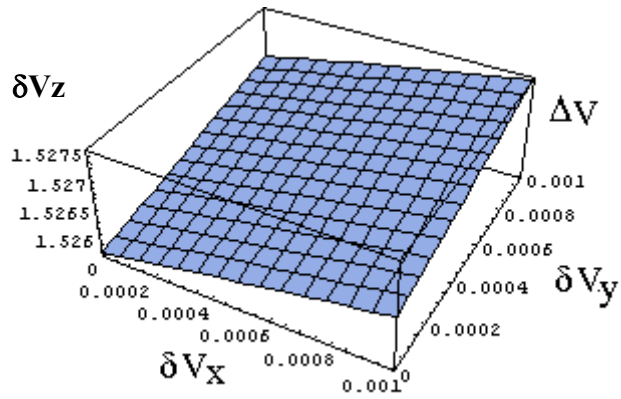
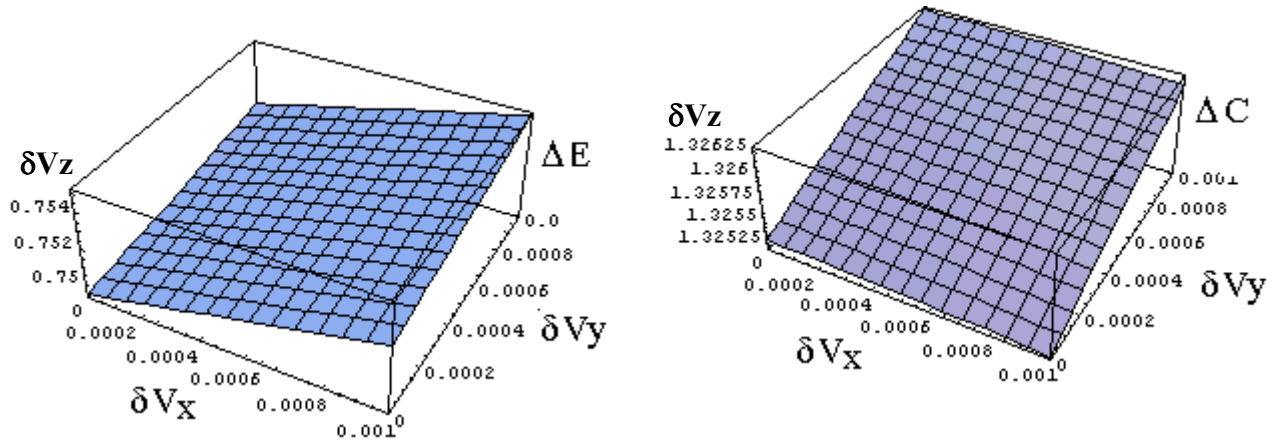


FIGURA10.13 – ( Conclusão ).



$$\alpha = -135^\circ, \beta = -45^\circ, \gamma = -45^\circ$$



$$\alpha = 45^\circ, \beta = -90^\circ, \gamma = 180^\circ$$

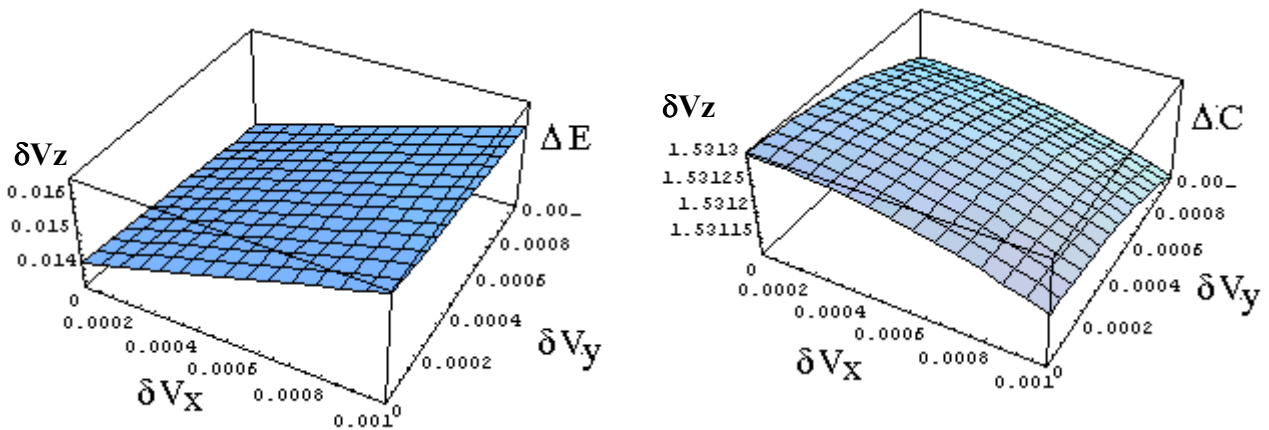
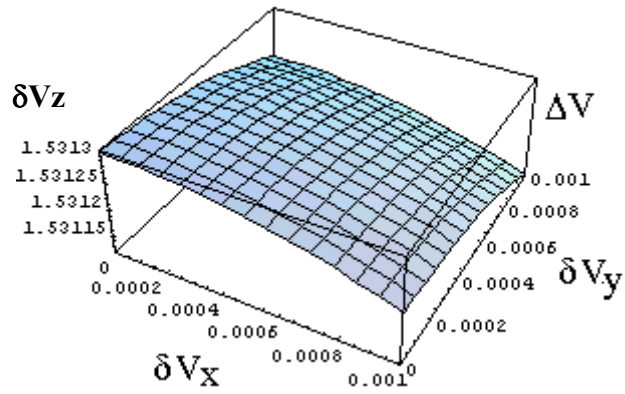


FIGURA 10.14 – Resultados e simulações. (Continua).



$$\alpha = -90^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = -180^\circ$$

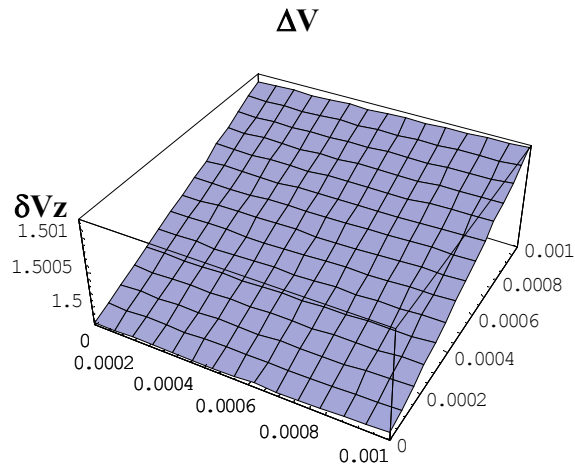
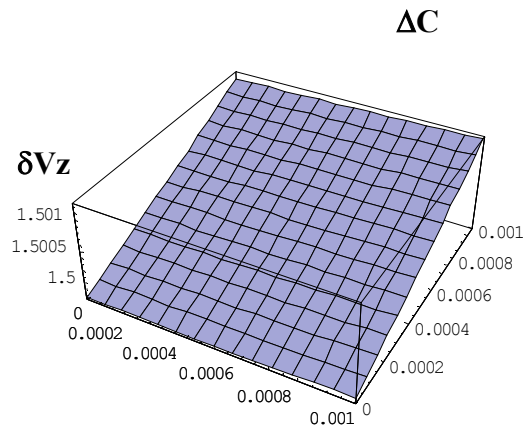
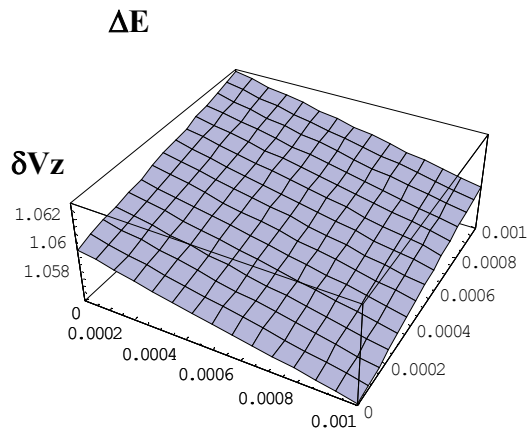


FIGURA10.14 – ( Conclusão ).

TABELA 10.1 - Máximos Valores da Variação de Energia.

ângulos	Swing-by padrão $\Delta E$ max	Swing by propulsado $\Delta E$ max	Eficiência
$\alpha = -135^\circ, \beta = -45^\circ, \gamma = -45^\circ$	0,756453	0,75305	0,476302
$\alpha = -90^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = -180^\circ$	1,06972	1,06288	0,658116
$\alpha = 45^\circ, \beta = -90^\circ, \gamma = 180^\circ$	-0,0000409975	0,0164884	-----
$\alpha = 0^\circ, \beta = 0^\circ, \gamma = 0^\circ$	0	0,00545071	-----
$\alpha = 30^\circ, \beta = 0^\circ, \gamma = 0^\circ$	-0,756378	-0,752087	0,593724
$\alpha = 60^\circ, \beta = 0^\circ, \gamma = 0^\circ$	-1,3101	-1,30757	0,208381
$\alpha = 90^\circ, \beta = 0^\circ, \gamma = 0^\circ$	-1,51279	-1,51217	0,0542045
$\alpha = 120^\circ, \beta = 0^\circ, \gamma = 0^\circ$	-1,31015	-1,30998	0,028241
$\alpha = 150^\circ, \beta = 0^\circ, \gamma = 0^\circ$	-0,756479	-0,756307	0,0491752
$\alpha = 180^\circ, \beta = 0^\circ, \gamma = 0^\circ$	-0,000115961	0,0014556	-----
$\alpha = 210^\circ, \beta = 0^\circ, \gamma = 0^\circ$	0,756278	0,759376	0,383192
$\alpha = 240^\circ, \beta = 0^\circ, \gamma = 0^\circ$	1,31004	1,31523	0,383904
$\alpha = 270^\circ, \beta = 0^\circ, \gamma = 0^\circ$	1,51279	1,51964	0,439585
$\alpha = 300^\circ, \beta = 0^\circ, \gamma = 0^\circ$	1,31021	1,31743	0,535792
$\alpha = 330^\circ, \beta = 0^\circ, \gamma = 0^\circ$	0,756579	0,762772	0,792118

Nota-se na tabela acima que valores de variação da energia zero ou próximos de zero geram singularidades. Portanto, devem não devem ser considerados.

Na maioria dos casos, a manobra mais eficiente é obtida quando o impulso é alinhado com os eixos “x” ou “y”. Assim, o presente trabalho pode mostrar a melhor direção para aplicar o impulso para qualquer critério desejado: máximo ou mínimo de variação de energia, velocidade, momento angular ou inclinação.

Os resultados para as manobras reproduzidas com a dinâmica do problema restrito de três corpos, para a maioria dos casos estudados, deram ao swing-by propulsado uma variação de consumo muito próxima ao padrão, sendo melhor em alguns casos.

A estimativa da eficiência pode ser obtida assumindo que o impulso aplicado após o swing-by gere uma alteração de energia dada por:

$$\Delta E = V_{\text{sat}} \delta V \quad (10.52)$$

onde  $\delta V = 0,01$  e  $V_{\text{sat}}$  é a velocidade inercial do veículo quando situado a uma distância aproximadamente igual a distância entre a Terra e a Lua. Este valor é da ordem de 0,002 unidades canônicas. Logo, a variação de energia é da ordem de 0,0002 unidades canônicas.

### 10.7 – Expansões para o Swing-by Propulsado

Foram feitas expansões em séries de potência até segunda ordem para a variação de velocidade, energia, momento angular e inclinação na manobra swing-by propulsada.

As expansões da variação de velocidade e inclinação nos dão equações complexas de difícil entendimento, portanto não são mostradas aqui.

A equação da expansão da variação de energia é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta E = & \delta V_y V_2 \cos \delta V_\infty - V_2 \cos \beta \sin \alpha \sin \delta V_\infty + 0.5 \delta V_x^2 \cos \delta^2 V_\infty^2 + \\ & 0.5 \delta V_y^2 \cos \delta^2 V_\infty^2 + 0.5 \delta V_z^2 \cos \delta^2 V_\infty^2 + \delta V_y \cos \alpha \cos \gamma \cos \delta^2 V_\infty^2 - \\ & \delta V_x \cos \gamma \cos \delta^2 \sin \alpha V_\infty^2 + \delta V_z \cos \beta \cos \delta^2 \sin \gamma^2 V_\infty^2 - \\ & \delta V_x \cos \alpha \cos \delta^2 \sin \beta \sin \gamma V_\infty^2 - \delta V_y \cos \delta^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma^2 V_\infty^2 - \\ & \delta V_x \cos \alpha \cos \beta \cos \delta \sin \delta V_\infty^2 - \delta V_y \cos \beta \cos \delta \sin \alpha \sin \delta V_\infty^2 - \\ & \delta V_z \cos \delta \sin \beta \sin \delta V_\infty^2 - 2 \cos \beta \cos \delta \sin \beta \sin \gamma \sin \delta V_\infty^2 + \\ & 2 \cos \alpha^2 \cos \beta \cos \delta \sin \beta \sin \gamma \sin \delta V_\infty^2 + \\ & 2 \cos \beta \cos \delta \sin \alpha^2 \sin \beta \sin \gamma \sin \delta V_\infty^2 \end{aligned} \quad (10.53)$$

A equação da expansão da variação do momento angular é dada por:

$$\begin{aligned}
\Delta C = & -(60 d^8 \delta V_y^2 \delta V_z^2 \cos \beta^2 \cos \delta^4 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^4 V_\infty^8) / \\
& (4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)^{7/2} + \\
& (3 d^6 \delta V_y^2 \delta V_z^2 \cos \beta^2 \cos \delta^4 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^6) / \\
& (4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)^{5/2} + \\
& (3 d^6 \delta V_y^2 \delta V_z^2 \cos \delta^4 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^6) / (4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)^{5/2} - \\
& (12 d^6 \delta V_y^2 \delta V_z^2 \cos \beta^2 \cos \delta^3 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \delta^3 V_\infty^6) / \\
& (4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)^{5/2} - \\
& (12 d^6 \delta V_y \delta V_z^2 \cos \beta \cos \delta^3 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^3 V_\infty^6) / \\
& (4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)^{5/2} - \\
& (d^4 \delta V_y^2 \delta V_z^2 \cos \delta^4 V_\infty^4) / (4(4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)^{3/2}) + \\
& (d^4 \delta V_y \delta V_z^2 \cos \beta \cos \delta^3 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta V_\infty^4) / \\
& (4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)^{5/2} + \\
& (d^4 \delta V_y^2 \delta V_z \cos \delta^3 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \delta V_\infty^4) / \\
& (4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)^{5/2} - \\
& (2 d^4 \delta V_y^2 \cos \beta^2 \cos \delta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^4) / \\
& (4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)^{5/2} - \\
& (4 d^4 \delta V_y \delta V_z \cos \beta \cos \delta^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^4) / \\
& (4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)^{5/2} - \\
& (2 d^4 \delta V_z^2 \cos \delta^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^4) / \\
& (4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)^{5/2} + \\
& (d^2 \delta V_y^2 \cos \delta^2 V_\infty^2) / (2 \sqrt{(4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)}) + \\
& (d^2 \delta V_z^2 \cos \delta^2 V_\infty^2) / (2 \sqrt{(4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)}) - \\
& (2 d^2 \delta V_y \cos \beta \cos \delta \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta V_\infty^2) / (\sqrt{(4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)}) - \\
& (2 d^2 \delta V_y \cos \delta \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \delta V_\infty^2) / (\sqrt{(4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2)}) + \\
& \sqrt{4 d^2 \cos \beta^2 \operatorname{sen} \alpha^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2 + 4 d^2 \operatorname{sen} \beta^2 \operatorname{sen} \delta^2 V_\infty^2}
\end{aligned}
\tag{10.54}$$

Alguns valores foram atribuídos para o desenvolvimento das expansões de primeira e segunda ordens. Assim mostram-se os valores de todas as variações, levando em conta

os valores:  $V_2 = 1,0$ ;  $\mu = 0,0121$ ;  $R_p = 1911,8$  km;  $V_\infty = 2,0$ ,  $|\delta\vec{V}| = 0,01$ ,  $d = 1,0$ ,  $\mu_2 = 0,0121$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ .

O desenvolvimento dos primeiros termos das expansões que envolvem potencias unitárias na variáveis  $\delta V$  são:

$$\begin{aligned} \Delta V = & 1,51279 - 1,13381 \delta V_x - 0,654584 \delta V_y - 0,490598 \delta V_x \delta V_y - \\ & 1,30915 \delta V_z - 0,981181 \delta V_x \delta V_z - 0,566468 \delta V_y \delta V_z - 1,27367 \delta V_x \delta V_y \delta V_z \end{aligned} \quad (10.55)$$

$$\Delta E = -0,534851 - 3,53244 \delta V_x + 1,79121 \delta V_y + 1,10891 \delta V_z \quad (10.56)$$

$$\Delta C = 1,19595 - 0,828004 \delta V_y - 1,65598 \delta V_z - 1,14651 \delta V_y \delta V_z \quad (10.57)$$

$$\Delta I = -0,283465 - 0,856491 \delta V_y + 1,38348 \delta V_z - 1,18044 \delta V_y \delta V_z \quad (10.58)$$

O desenvolvimento dos termos das expansões que envolvem potencias de segunda ordem na variáveis  $\delta V$  são:

$$\begin{aligned} \Delta V = & 1,51279 - 1,13381 \delta V_x + 0,708078 \delta V_x^2 - 0,654584 \delta V_y - \\ & 0,490598 \delta V_x \delta V_y - 0,0613083 \delta V_x^2 \delta V_y + 0,991342 \delta V_y^2 + 0,53071 \delta V \delta V_y^2 - \\ & 0,172331 \delta V_x^2 \delta V_y^2 - 1,30915 \delta V_z - 0,981181 \delta V_x \delta V_z - 0,122615 \delta V_x^2 \delta V_z - \\ & 0,566468 \delta V_y \delta V_z - 1,27367 \delta V_x \delta V_y \delta V_z - 1,11376 \delta V_x^2 \delta V_y \delta V_z + \\ & 0,612783 \delta V_y^2 \delta V_z + 0,826689 \delta V_x \delta V_y^2 \delta V_z - 0,309734 \delta V_x^2 \delta V_y^2 \delta V_z + \\ & 0,566502 \delta V_z^2 - 0,424518 \delta V_x \delta V_z^2 - 1,00763 \delta V_x^2 \delta V_z^2 - \\ & 0,245088 \delta V_y \delta V_z^2 - 1,65328 \delta V_x \delta V_y \delta V_z^2 - 3,51093 \delta V_x^2 \delta V_y \delta V_z^2 - \\ & 0,0530467 \delta V_y^2 \delta V_z^2 - 0,119243 \delta V_x \delta V_y^2 \delta V_z^2 - 1,89146 \delta V_x^2 \delta V_y^2 \delta V_z^2 \end{aligned} \quad (10.59)$$

$$\Delta E = -0,534851 - 3,53244 \delta V_x + 1,71393 \delta V_x^2 + 1,79121 \delta V_y + 1,71393 \delta V_y^2 + 1,10891 \delta V_z + 1,71393 \delta V_z^2 \quad (10.60)$$

$$\Delta C = 1,19595 - 0,828004 \delta V_y + 1,14649 \delta V_y^2 - 1,65598 \delta V_z - 1,14651 \delta V_y \delta V_z + 0,793723 \delta V_y^2 \delta V_z + 0,286631 \delta V_z^2 - 1,38908 \delta V_y \delta V_z^2 - 0,68701 \delta V_y^2 \delta V_z^2 \quad (10.61)$$

$$\Delta I = -0,283465 - 0,856491 \delta V_y + 1,18494 \delta V_y^2 + 1,38348 \delta V_z - 1,18044 \delta V_y \delta V_z - 0,396663 \delta V_y^2 \delta V_z - 1,18494 \delta V_z^2 + 4,28972 \delta V_y \delta V_z^2 - 8,3925 \delta V_y^2 \delta V_z^2 \quad (10.62)$$

Para melhorar o entendimento e dar mais clareza as equações eliminam-se os termos de ordem superior obtidos durante a expansão, temos:

Para primeira ordem:

$$\Delta V = 1,51279 - 1,13381 \delta V_x - 0,654584 \delta V_y - 1,30915 \delta V_z \quad (10.63)$$

$$\Delta E = -0,534851 - 3,53244 \delta V_x + 1,79121 \delta V_y + 1,10891 \delta V_z \quad (10.64)$$

$$\Delta C = 1,19595 - 0,828004 \delta V_y - 1,65598 \delta V_z \quad (10.65)$$

$$\Delta I = -0,283465 - 0,856491 \delta V_y + 1,38348 \delta V_z \quad (10.66)$$

Para segunda ordem:

$$\Delta V = 1,51279 - 1,13381 \delta V_x + 0,708078 \delta V_x^2 - 0,654584 \delta V_y - 0,490598 \delta V_x \delta V_y - 0,991342 \delta V_y^2 - 1,30915 \delta V_z - 0,981181 \delta V_x \delta V_z - 0,566468 \delta V_y \delta V_z + 0,566502 \delta V_z^2 \quad (10.67)$$

$$\Delta E = -0,534851 - 3,53244 \delta V_x + 1,71393 \delta V_x^2 + 1,79121 \delta V_y + 1,71393 \delta V_y^2 + 1,10891 \delta V_z + 1,71393 \delta V_z^2 \quad (10.68)$$

$$\Delta C = 1,19595 - 0,828004 \delta V_y + 1,14649 \delta V_y^2 - 1,65598 \delta V_z - 1,14651 \delta V_y \delta V_z + 0,286631 \delta V_z^2 \quad (10.69)$$

$$\Delta I = -0,283465 - 0,856491 \delta V_y + 1,18494 \delta V_y^2 + 1,38348 \delta V_z - 1,18044 \delta V_y \delta V_z - 1,18494 \delta V_z^2 \quad (10.70)$$

Comparando as equações do swing-by propulsado com as expansões vê-se, na Figura 10.14, que a diferença entre elas é pequena, da ordem de  $10^{-4}$  para  $\Delta E$  e  $\Delta I$  e  $10^{-5}$  para  $\Delta V$  e  $\Delta C$  para primeira ordem.

Na Figura 10.15 vemos a mesma diferença na segunda ordem,  $10^{-16}$  para  $\Delta E$  e  $10^{-7}$  para  $\Delta C$ ,  $\Delta V$  e  $\Delta I$ .



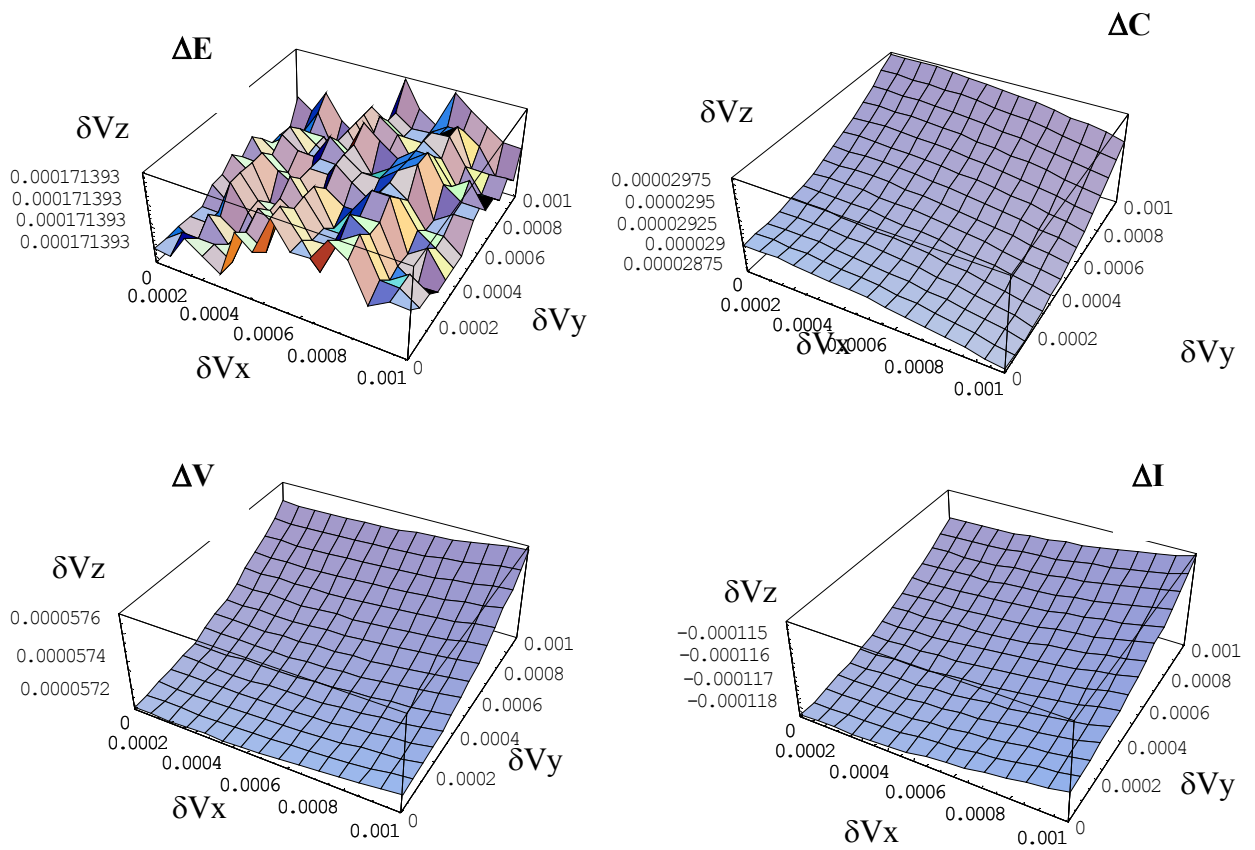


FIGURA 10.15 – Diferenças entre o swing-by propulsado e as expansões de primeira ordem.

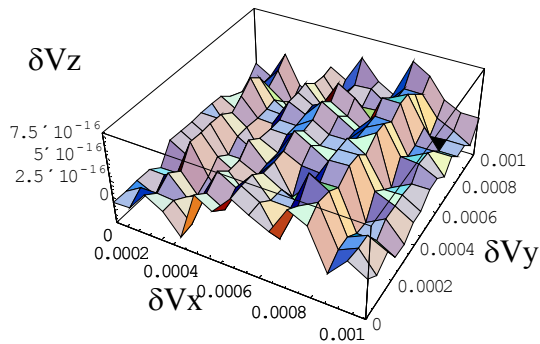
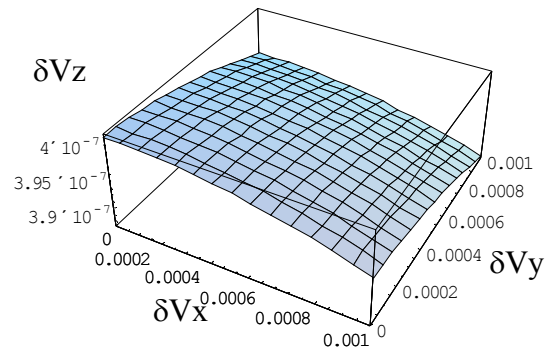
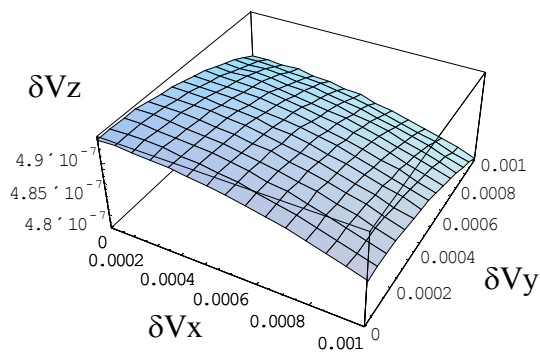
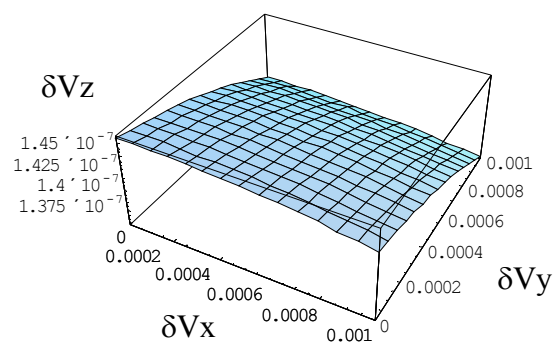
$\Delta E$  $\Delta C$  $\Delta V$  $\Delta I$ 

FIGURA 10.16 – Diferenças entre o swing-by propulsado e as expansões de segunda ordem.

### 10.8 – Estimativa de Economia de Consumo de Combustível Devido ao Swing-by

Nesta seção faz-se uma estimativa da economia de consumo de combustível de uma missão onde o veículo espacial viaja da Terra para uma órbita Halo do sistema Terra-Sol, utilizando uma manobra de swing-by com a Lua para gerar esta economia de combustível, como esquematizado na Figura 10.17 (Howell e Guzmán, 2000).

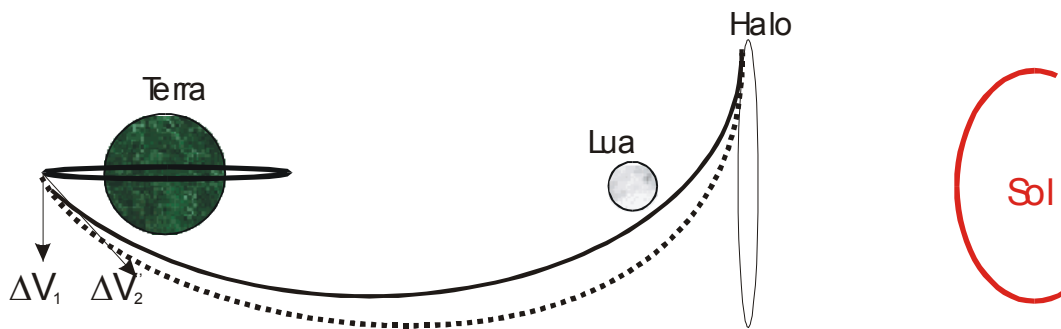


FIGURA 10.17 – Esquema da transferência com a manobra swing-by.

A Figura 10.17 representa o esquema para a manobra, onde a linha pontilhada representa a transferência direta a partir de uma órbita de estacionamento ao redor da Terra para uma órbita Halo e a linha contínua representa a transferência com a manobra de swing-by ao redor da Lua.

Não foram calculadas as trajetórias para realizar esta missão. Esta tarefa é bastante complexa e foge aos objetivos do presente trabalho. Porém, é possível fazer uma estimativa de economia de combustível com base nas variações de energia.

Desta forma o veículo parte de uma órbita de estacionamento ao redor da Terra, no sistema Terra-Sol com velocidade circular de  $V_c = 7,59473\text{km/s}$  e recebe um impulso para deixar esta órbita de  $\Delta V_1 = 2,5668\text{ km/s}$ .

As variações de energia são obtidas por:

$$E1 = 0,5(V_c + \Delta V_1)^2 - \frac{\mu}{r} \text{ (sem o swing-by)} \quad (10.71)$$

$$E2 = 0,5(V_c + \Delta V_2)^2 - \frac{\mu}{r} \text{ (com o swing-by)} \quad (10.72)$$

onde:

$$\Delta E_a = E_1 - E_2 = 0,5 (2 V_c \Delta V_1 - 2 V_c \Delta V_2 + \Delta V_1^2 - \Delta V_2^2) \quad (10.73)$$

Após aplicar os valores numéricos, tem-se:  $\Delta E_a = 0,5 (45,9811 - 15,1895\Delta V_2 - \Delta V_2^2)$ .

A partir de agora, calcula-se a variação de velocidade requerida levando-se em consideração o ganho de energia devido ao swing-by.

Temos:  $\Delta E = -2V_2V_\infty \sin \delta \sin \psi$ , onde:  $\sin \delta = \frac{1}{1 + \frac{R_p V_\infty^2}{\mu_2}}$ ;  $\mu_2 = 0,0121$ ; porém

transformados em unidades do sistema internacional.

Utiliza-se as equações do plano com  $\sin \psi = 1,0$  porque deseja-se obter uma estimativa da máxima economia e não valores específicos.

Então as soluções da Equação (10.72) são:

$$\begin{aligned} \Delta V_2' &= -7,59473 - 1,41421 \sqrt{51,8305 - \Delta E} \\ \Delta V_2'' &= -7,59473 + 1,41421 \sqrt{51,8305 - \Delta E} \end{aligned}$$

Desconsidera-se:  $\Delta V_2' = -7,59473 - 1,41421 \sqrt{51,8305 - \Delta E}$ , pois a solução desta equação corresponde a valores negativos.

Desta forma, a variação da velocidade no impulso aplicado que faz uso da economia do swing-by em função da variação da energia fica:

$$\Delta V_2 = -7,59473 + 1,41421 \sqrt{51,8305 - \frac{2,09306V_\infty}{1 + 82,6446R_p V_\infty^2}} \quad (10.74)$$

Utilizam-se os seguintes valores  $0,0047814403 < R_p < 0,026014365$  e  $1,0 < V_\infty < 2,5$  para avaliar este consumo. A Figura 10.18 mostra os valores obtidos.

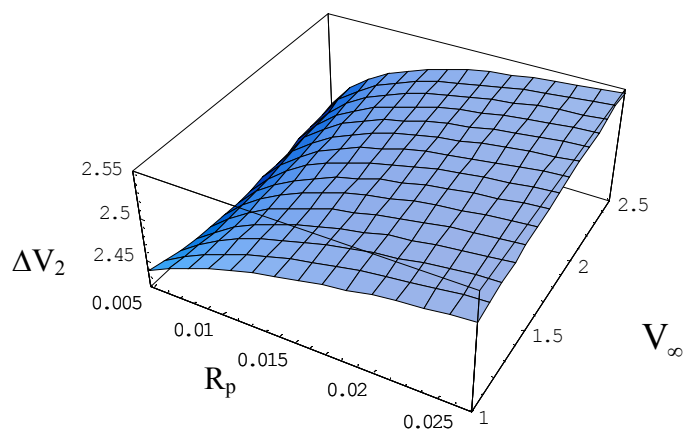


FIGURA 10.18 – Variação da velocidade no impulso aplicado utilizando o swing-by.

Desta forma a economia é dada pela diferença dos consumos  $\Delta VTot = \Delta V_1 - \Delta V_2$ . A Figura 10.19 mostra os valores obtidos.

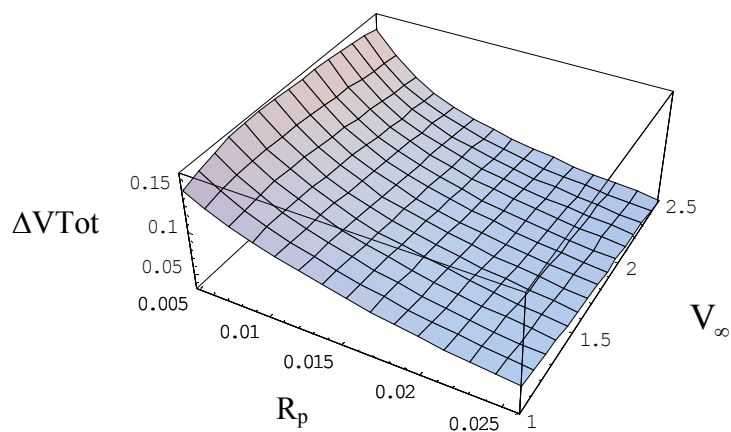


FIGURA 10.19 – Variação da velocidade total com o uso do swing-by.

## 10.9 – Conclusões

Utilizando a técnica acima descrita, baseada em Prado (1996), para o caso plano, foram investigados os sistemas Sol-Júpiter e Sol-Saturno e para o caso tridimensional, o

sistema Terra-Lua. Foi possível investigar a melhor posição para se aplicar o impulso. Os resultados mostraram para a maioria dos casos estudados o swing-by propulsado é uma escolha melhor (cerca de 8%), mas há alguns casos onde o swing-by não propulsado seguido da aplicação do impulso reduz o consumo total. Este tipo de manobra pode ser usado para transferir um veículo espacial entre a Terra e uma órbita Halo no sistema Sol-Terra, usando um swing-by na Lua para economizar combustível.

Obtiveram-se equações analíticas para a variação de velocidade, energia, momento angular e inclinação na manobra swing-by propulsada para o caso particular de impulsos pequenos e foi observado que os valores obtidos para o swing-by padrão e o propulsado são próximos, embora o propulsado seja melhor, em alguns casos. Os gráficos mostram a importância prática desta manobra. A eficiência desta manobra foi calculada e mostrou-se da ordem de 0,4 % a 0,8%.

A seguir, foi feita a expansão analítica das equações obtidas e, comparando os resultados do swing-by propulsado com sua expansão, notamos que a diferença entre eles é pequena, da ordem de  $10^{-4}$  para  $\Delta E$  e  $\Delta i$  e  $10^{-5}$  para  $\Delta V$  e  $\Delta C$  para primeira ordem e, para segunda ordem,  $10^{-16}$  para  $\Delta E$  e  $10^{-7}$  para  $\Delta C$ ,  $\Delta V$  e  $\Delta I$ . Isto nos mostra que o modelo expandido é mais eficiente.

Contudo, as economias geradas pelo uso da técnica do swing-by na Lua são da ordem de 6% em relação ao custo total. Ao utilizarmos um swing-by propulsado podemos gerar uma economia maior, que chega a 8% para o sistema Sol-Júpiter e Sol-Saturno e de até 0,8% para o sistema Sol-Terra.

Não foram encontrados resultados similares no caso tridimensional na literatura para comparação. A comparação com os resultados obtidos em Prado (1996), que estudou o caso plano, mostra que as conclusões aqui obtidas são muito similares as obtidas na literatura.

## CAPÍTULO 11

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES FINAIS

#### 11.1 – Conclusões

Conforme apresentado no Capítulo 1, o presente trabalho tem por objetivo estudar diversos tópicos relativos às órbitas Halo, definidas no contexto do problema restrito de três corpos. Dentro dessas tarefas, será abordada a determinação das órbitas Halo, pelo método de Lindstedt-Poincaré e, posteriormente, serão abordados problemas concretos de engenharia espacial, como manobras orbitais entre as órbitas Halo, manobras entre as órbitas Halo e os primários, manobras completas entre a Terra e a Lua utilizando uma órbita Halo como estacionamento, etc. Para completar esses objetivos, diversos problemas que não dispunham de solução na literatura foram resolvidos. Essas contribuições serão mostradas em detalhes ao longo dos próximos parágrafos.

Para realizar as tarefas aqui propostas, foram analisados diferentes modelos e sistemas de primários para a dinâmica e diversas estratégias para as manobras realizadas. Para a dinâmica foram considerados dois modelos básicos: o problema restrito de três corpos e o problema restrito bi-circular de quatro corpos. Para ambos os modelos o veículo espacial é assumido como sendo um ponto sem massa que se move devido à força gravitacional dos primários, que são corpos celestes modelados como pontos de massa dentro dos diversos sistemas utilizados. Esses dois modelos foram escolhidos, devido ao fato de combinarem simplicidade de implementação com precisão suficiente para os cálculos envolvidos. Para os problemas envolvendo as manobras orbitais, foi utilizada uma generalização do problema de Lambert. Esse problema foi proposto e resolvido para a dinâmica de dois corpos com essa denominação, mas foi estendido as dinâmicas mais complexas aqui utilizadas com o uso de métodos numéricos para a resolução do problema de valor de contorno em dois pontos.

Com estes tópicos estudados, as principais conclusões obtidas são mostradas nos parágrafos abaixo. De forma geral, elas constituem uma serie de passos que tem importância para futuras análises de missões.

No Capítulo 4, determinou-se as órbitas Halo utilizando o método de Lindstedt-Poincaré. A tarefa inicial foi a de implementação de um método já existente na literatura. A seguir, esse método foi aplicado com sucesso no Capítulo 5 para a obtenção de órbitas do tipo Halo em sistema de primários formados pelo Sol e cada um de seus planetas do Sistema Solar. Um estudo generalizado para diversos valores de parâmetros de massa também foi feito, como forma de complementar o trabalho aqui desenvolvido. A contribuição obtida nesse capítulo foi a de obter resultados que são novos na literatura. As órbitas aqui encontradas podem ser utilizadas para a colocação de veículos espaciais diretamente, em missões interplanetárias de pesquisa científica, e também na construção de trajetórias para missões interplanetárias que utilizam essas órbitas como locais de estacionamento para materiais e até mesmo pessoas, quando em missões aos planetas exteriores do Sistema Solar. A forma de apresentação utilizada ( $z_{max}$  vs  $x_{max}$ ) é bastante eficiente em termos de economia de espaço para mostrar famílias inteiras de órbitas Halo de uma forma compacta.

No Capítulo 6, foi proposto e desenvolvido um novo método para o cálculo de manobras orbitais envolvendo órbitas do tipo Halo. O método é baseado na discretização das órbitas Halo em certo número de pontos e a consequente aplicação do método de Lambert, utilizado dentro do problema restrito de três corpos para cada par de pontos possíveis. Com isso, obtêm-se famílias de trajetórias de transferências identificadas pelo tempo da manobra. A contribuição efetuada nesse ponto foi a de estudar o problema de transferências orbitais com tempo fixo envolvendo órbitas do tipo Halo e também envolvendo as órbitas do tipo Halo e os primários. Esse problema não foi encontrado na literatura, toda ela centrada no problema de manobras orbitais com consumo mínimo de combustível e tempo livre. Assim sendo, além de contribuir com um novo enfoque ao problema de manobras orbitais, foram também obtidos resultados que oferecem uma grande variedade de opções de trajetórias para os exemplos citados.



No Capítulo 7, um algoritmo numérico foi proposto e implementado com sucesso para resolver o problema de *rendez-vous* entre veículos espaciais que estão em duas órbitas Halo distintas. O método é baseado na discretização das órbitas Halo e na solução do problema de Lambert entre pares de pontos, conforme mostrado no Capítulo 6. Considera-se a possibilidade de uma missão Terra-Lua onde uma parte dos equipamentos fiquem estacionadas em uma órbita Halo. Neste caso a manobra que levará o veículo espacial da Lua para a órbita Halo será uma manobra de *rendez-vous*. Existe também a opção de se transferir o veículo da Lua para uma órbita Halo qualquer (sem o vínculo de *rendez-vous*) e depois efetuar o encontro entre eles através do *rendez-vous* entre as órbitas Halo. Dessa forma, a contribuição desse capítulo está em utilizar uma nova técnica (o problema de Lambert generalizado) para estudar o problema de *rendez-vous* envolvendo órbitas Halo, problema esse que já foi um pouco estudado na literatura, mas com outros enfoques, principalmente centrados na fase final de aproximação entre os veículos espaciais. Como manobra completa, obtida através de um controle bi-impulsivo, não foi encontrado nenhum trabalho com enfoque similar para comparação.

No Capítulo 8, é estudada uma missão completa entre a Terra e a Lua. Esse capítulo combina as técnicas e resultados obtidos nos capítulos anteriores para a realização de uma manobra completa. Com base nos resultados obtidos, observa-se a grande economia gerada pela estratégia de se transferir o sub-veículo da órbita em torno da Lua para uma órbita Halo, sem impor a condição de *rendez-vous*, e apenas numa segunda etapa efetuar o encontro dos veículos espaciais. Comparando-se os resultados de consumo total obtido utilizando as órbitas Halo como estacionamento com a manobra de Hohmann, no Capítulo 6, observa-se que a estratégia aqui sugerida possui um consumo menor. Nota-se ainda que a permanência do veículo espacial na órbita tipo Halo aumenta ainda mais a economia de combustível, conforme demonstrado no exemplo calculado. Este resultado é obtido devido a uma dinâmica mais realista utilizada, conforme citado por Belbruno e Miller, 1991. Nota-se, porém, que esta economia de combustível é obtida à custa de um tempo de transferência muito maior, de forma que a escolha da manobra ideal deve considerar estes dois fatores. Assim sendo, a

contribuição desse capítulo consiste na utilização dos tópicos anteriormente desenvolvidos e na descoberta de novos resultados com validade geral para uma manobra completa entre a Terra e a Lua com a utilização de uma órbita Halo intermediária.

No Capítulo 9, implementou-se e testou-se o problema restrito bi-circular de quatro corpos com sucesso. Comparou-se os resultados de transferências e de *rendez-vous* com a dinâmica do problema restrito de três corpos e foram encontradas manobras de transferência da órbita ao redor da Terra para Halo com um consumo mais econômico. Foram encontradas trajetórias que terminaram em captura gravitacional, neste modelo, vinda de direções diferentes. Diferentes valores para o ângulo de captura na obtenção da captura gravitacional foram utilizados. Esses resultados mostram muito bem o potencial deste tipo de manobra dentro do modelo matemático testado. Assim sendo, a contribuição desse capítulo foi a de resolver os problemas propostos nos capítulos anteriores com a utilização de um a dinâmica mais completa e realista. Dentro dessa dinâmica, tanto as técnicas empregadas para a solução do problema como os resultados obtidos são novos na literatura. A conclusão mais importante é que o quarto corpo incluído na dinâmica pode melhorar ou piorar o desempenho da manobra e as técnicas aqui apresentadas podem ser utilizadas na tarefa de encontrar as condições ideais para que a influência do quarto corpo seja produtiva para a missão considerada. Além disso, uma estimativa das possíveis vantagens dessa dinâmica pode ser feita com os resultados aqui mostrados.

No Capítulo 10 foi estudado o problema do swing-by propulsado em três dimensões. Foi utilizada a técnica baseada em Prado 1996, que estudou o mesmo problema na sua forma plana. Foram investigados os sistemas Sol-Júpiter e Sol-Saturno. A primeira contribuição desse capítulo foi em resolver o problema de forma analítica, baseada na aproximação por cônicas conjugadas. Essa modelagem não foi encontrada na literatura e se constitui em uma ferramenta importante para a realização de manobras orbitais. Após essa modelagem, foi possível investigar a melhor posição para se aplicar o impulso. Os resultados mostraram que, para a maioria dos casos estudados, o swing-by propulsado é

uma escolha mais eficiente, em cerca de 8%, mas há alguns casos onde o swing-by não propulsado seguido da aplicação do impulso reduz o consumo total. Este tipo de manobra pode ser usado para transferir um veículo espacial entre a Terra e uma órbita Halo no sistema Sol-Terra, usando um swing-by na Lua para economizar combustível. Foram obtidas equações analíticas para a variação de velocidade, energia, momento angular e inclinação na manobra swing-by propulsada para o caso particular de impulsos pequenos e observamos que os valores entre o swing-by padrão e o propulsado são próximos, embora o propulsado seja melhor, em alguns casos. Os resultados aqui obtidos mostram a importância prática desta manobra. A eficiência desta manobra foi calculada e mostrou-se ser da ordem de 0,4 % a 0,8%. A seguir, foi feita a expansão analítica das equações obtidas e comparando os resultados do swing-by propulsado com sua expansão, notamos que a diferença entre eles é pequena, da ordem de  $10^{-4}$  para  $\Delta e$  e  $\Delta i$  e  $10^{-5}$  para  $\Delta v$  e  $\Delta c$  para primeira ordem, e para segunda ordem,  $10^{-16}$  para  $\Delta e$  e  $10^{-7}$  para  $\Delta c$ ,  $\Delta v$  e  $\Delta i$ . Isto nos mostra que o modelo expandido é mais eficiente. Contudo, as economias geradas pelo uso da técnica do swing-by na lua são da ordem de 6% em relação ao custo total. Ao utilizarmos um swing-by propulsado podemos gerar uma economia maior, que vai 8% para o caso plano até 0,8% para o caso tridimensional. Logo, esse capítulo combina um desenvolvimento analítico novo com resultados que possuem aplicação em missões reais.

De uma forma geral, o presente trabalho pode demonstrar uma nova forma de resolver o problema de manobras orbitais envolvendo órbitas do tipo Halo (entre elas e entre elas e os primários) através da aplicação de um método generalizado do problema de Lambert para a obtenção de manobras com tempo fixo. Foi possível estender esse resultado para incluir manobras de *rendez-vous* e calcular uma manobra completa entre a Terra e a Lua. Além disso, foi possível mostrar formas eficientes de utilizar um quarto corpo envolvido na dinâmica. Finalmente, foi possível equacionar analiticamente o problema de um swing-by propulsado em três dimensões, mostrando como esse procedimento pode ser utilizado para obter economias de combustível em manobras envolvendo órbitas do tipo Halo.

## 11.2 – Sugestões para Extensão deste Trabalho

Diversas sugestões podem ser feitas para futuras extensões dos tópicos abordados neste trabalho. Entre elas podemos citar:

- a) estudar melhor a variação de ângulo de fase  $\alpha$  para obtenção da economia do consumo de combustível no problema bi-circular de corpos;
- b) calcular as trajetórias para a missão que viaja de uma órbita ao redor da Terra e vai para uma órbita Halo, utilizando a manobra de swing-by com Lua, no sistema Sol-Terra.
- c) Estender o modelo de quatro corpos quase-bicircular para o problema de Ncorpos utilizando as soluções numéricas do JPL para o movimento de todos os planetas. Isto tornaria o modelo físico ainda mais realista, já que poderia se analisar as perturbações de outros planetas (tais como Vênus) na estrutura e estabilidade das órbitas Halo.
- d) Estudar métodos diferentes para a obtenção das órbitas Halo, de preferência que possam ser utilizados na obtenção de órbitas de amplitude maior. Essas órbitas são importantes nas manobras orbitais e não podem ser obtidas com o método de Lindsted-Poincaré.
- e) Estender o desenvolvimento analítico do swing-by propulsado para o caso aonde os impulsos aplicados possuem magnitude livre da restrição de pequenos impulsos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andreu, M.A. **The quasi-bicircular problem**.1998. 199p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada e Análises na Universidad de Barcelona), Barcelona, Espanha 1998.
- Andreu, M.A.; Simó, C. Translunar halo orbits in the quasi-bicircular model. In A. Roy (ed). **The dynamics of small bodies in the solar system**. Maratea, Italia: NATO, ASI, 1999.
- Beaugé, C.; Felipe, G. ; Prado, A.F.B.A. Semi-analytical determination of halo orbits via Lindstedt-Poincaré method.. In: Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, (COBEM), 16., 2001, Uberlândia. **Anais...** Uberlândia: UFU, 2001 (ISBN: 85-85769-07-6). 1 CD-ROM.
- Belbruno, E. A. Lunar capture orbits, a method of constructing Earth-Moon trajectories and the lunar gás mission. In: AIAA/DGLR/JSASS International Electric Propulsion Conference, 19., 1987. Colorado. **Proceedings...** Colorado: AIAA, 1987. p.1054-1064. (AIAA-87-1054).
- Belbruno, E. A.; Miler, J. K. **A ballistic lunar capture trajectory for the japanese space Hiten**. Pasadena: JPL 1990a. (JPL IOM-90.4-1731).
- Belbruno, E. A.; Miler, J. K. **A ballistic lunar capture trajectory for the Lunar Observer mission**. Pasadena, JPL 1990b. (JPL IOM-90.4-1752).
- Belbruno, E. A.; Miler, J. K. Sun perturbed earth to moon transfers with ballistic capture. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v.16, n. 4, p.770-775, 1993.
- Billik, B. H.; Roth, H. L. Studies relative to rendezvous between circular orbits. **Astronautica Acta**, v. 13, n. 1, p. 23-36, 1967.
- Bond, V. R.; Sponaugle, S. J.; Fraietta, M. F.; Everett, S. F. Cislunar libration point as a transportation node for lunar exploration. In: AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, 1991. Houston, TX. **Proceedings...** Houston: AAS, 1991. (AAS paper 91-103).
- Breakwell, J. V. **Investigation of halo satellite orbit control**. Washington: NASA, 1973. Technical Report CR-132858.
- Breakwell, J. V.; Brown, J. V. The halo family of 3-dimensional periodic orbits in the earth-moon restricted 3-body problem, **Celestial Mechanics**, v. 20, n. 4, p. 389-404, 1979.

- Broucke, R.A.; Prado, A.F.B.A. Jupiter swing-by trajectories passing near the Earth. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 82, n. 2, p. 1159-1176, 1993.
- Cielaszyk, D. ; Wie, B. New Approach to halo orbit determination and control. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v.19, n.2, p. 266-273, 1996.
- Corrêa A. A.; Stuchi T. J.; Prado A. F. B. A. Determinação numérica de órbitas do tipo halo. **Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira**, v.20, n.1, p.113, 23-27 jul. 2000. XXVI Reunião da Sociedade Astronômica Brasileira.
- Corrêa A. A.; Prado A. F. B. A.; Stuchi T. J. Transfer from the Earth to the halo orbits with minimum fuel consumption. In: Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, (COBEM), 16., 2001, Uberlândia. **Anais...** Uberlândia: UFU, 2001 (ISBN: 85-85769-07-6). 1 CD-ROM.
- Corrêa, A.A.; Prado, A.F.B.A.; Stuchi, T.J. Impulsive transfers from halo orbits in the Earth-Moon system. In: Othon C. Winter ; A. F. Bertachini A. Prado (eds.). **Advances in space dynamics 3 applications in astronautics**. São José dos Campos: INPE, 2002. p. 298-316. ISBN: 85-85-17-00006-4.
- Corrêa, A. A.; Beauge C.; Prado A. F. B. A. Reduction to the center manifold in the restricted three body system - **Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira**, v.22, n.1, 3-7 Ago. 2002. XXVI Reunião da Sociedade Astronômica Brasileira. 2002b.
- Damario, L. D. D.; Edelbaum, T. N. Minimum impulse three body trajectories, **AIAA Journal**, v.12, n.4, p.455-462, 1974.
- Dunham, D.W. Contingency plans for the ISEE-3 libration point mission. In: AAS Astrodynamics Specialist Conference, 1979, Provincetown, MA. **Proceedings...** Provincetown, MA: AAS, 1979. ( paper 79-129).
- Farquhar, R.W. **The control and use of libration-point satellites**, 1968. PhD. Thesis (Astronautics and Aeronautics) - Stanford University, 1968.
- Farquhar, R. W. Future Missions for libration-point satellites. **Astronautics and Aeronautics**, v. 7, n.5, p. 52-56, 1969.
- Farquhar, R. W. **The control and use of libration point satellites**. Stanford: Stanford University, 1968. 125p. Report SUDAAR-350. Reprinted as NASA, (NASA, TR R-346), 1970a.
- Farquhar, R. W. The Moon's influence on the location of the Sun-Earth exterior libration point. **Celestial Mechanics**, v. 2, n.2, p. 131-133, 1970b.

- Farquhar, R. W. **The utilization of halo orbits in advanced lunar operations.** Washington: NASA, 1971. 101p. Technical Report TN D-6365.
- Farquhar, R. W. A Halo-orbit lunar station. **Astronautics and Aeronautics**, v. 10, n.6, p. 59-63, 1972.
- Farquhar, R. W. A Halo-orbit lunar station. **Astronautics and Aeronautics**, v. 1, n.6, p. 59-63, 1972.
- Farquhar, R. W. Halo-orbit and lunar-swingby missions of the 1990's, **Acta Astronautica**, v. 24, p. 227-234, 1991.
- Farquhar, R. W.; Kamel, A.A. Quasi-periodic orbits around the translunar libration points. **Celestial Mechanics**, v. 7, n.4, p.458-473, 1973.
- Farquhar, R. W.; Muhonen, D.P.; Newman, C.R. ; Heuberger, H.S. Trajectories and orbital maneuvers for the first libration-point satellite. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 3, n.6, p. 549-554, 1980.
- Farquhar, R. W.; Muhonen, D. P.; Richardson, D. L. Mission design for a halo orbiter of the Earth. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 14, n. 13, p. 170-177, Mar., 1977.
- Felipe, G.; Beauge, C. ; Prado, A.F.B.A. Determinação analítica de órbitas do tipo Halo. **Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira**, v.20, n.1, p.115, 23-27 jul. 2000. XXVI Reunião da Sociedade Astronômica Brasileira, 2000a.
- Felipe, G.; Beauge, C. ; Prado, A.F.B.A. Transferências orbitais envolvendo órbitas do tipo halo. In: Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, 10., 2000, Nazaré Paulista. **Anais...** Guaratinguetá: FEG/UNESP, 2000b.
- Felipe, G.; Beauge, C. ; Prado, A.F.B.A. Variação do parâmetro de massa nas famílias de órbitas halo. **Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira**, v.21, n.1, p.75, 5-9 Ago. 2001. XXVI Reunião da Sociedade Astronômica Brasileira, 2001a.
- Felipe, G. ; Prado, A.F.B.A. ; Beaugé, C. Minimum fuel transfers between halo orbits. In: Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM),16., 2001, Uberlândia. **Anais...**Uberlândia: UFU, 2001b (ISBN: 85-85769-07-6). 1 CD-ROM.
- Felipe, G.; Prado, A.F.B.A. ; Beaugé, C. Missões lunares com uso de órbitas de estacionamento do tipo halo. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), 24. 2001, Belo Horizonte. **Resumo das Comunicações...** Belo Horizonte: SBMA, 2001c. p. 302.

- Felipe, G.; Prado, A.F.B.A. ; Beauge, C. Orbital transfers between halo orbits and the primaries in the Earth-Moon system. In: Othon C. Winter ; A. F. Bertachini A. Prado (eds). **Advances in space dynamics 3 applications in astronautics**. São José dos Campos: INPE, 2002, p. 298-316. ISBN: 85-85-17-00006-4.
- Felipe, G.; Prado, A.F.B.A.; Beauge, C. Orbital maneuvers to control a spacecraft in Halo orbits of the Sun-Jupiter system. In: Congresso Brasileiro de Automática, (CBA 2002), 14., 2002, Natal. **Anais...** Natal, UFRN, 2202b. 1CD-ROM.
- Felipe, G.; Prado, A.F.B.A.; Beaugé, C. Use of a powered swing-by in two-dimensions to transfer a spacecraft between the Earth and a halo orbit. **Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira**, v.22, n.1, p.177, 3-7 Ago. 2002. XXVI Reunião da Sociedade Astronômica Brasileira, 2002c.
- Felipe, G.; Prado, A.F.B.A.; Beaugé, C. Estudo analítico do swing-By propulsado em três dimensões. In: Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, 11., 2002, Viçosa. **Anais...** Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, 2002d.
- Felipe, G.; Prado, A.F.B.A. Classification of out of plane swing-by trajectories. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 22, n. 5, p. 643-649, Sept.-Oct. 1999.
- Gingiss, A. J. **Navigation analysis of Earth-Moon libration point missions**. 1992 M.S. Thesis (The Charles Stark Draper Laboratory Rep) - Massachusetts Inst. of Techology, Cambridge, MA, June, 1992. CSDL-T-1133.
- Gooding, R.H. A procedure for the solution of Lambert's orbital boundary-value problem. **Celestial Mechanics**. v. 48, p. 145-165, 1990.
- Gómez G.; Llibre J.; Martínez R.; Simó C. **Dynamics and mission design near libration points, fundamentals: the case of collinear libration points**. Singapore: World Scientific, v. 1, 2001a.
- Gómez G.; Llibre J.; Martínez R.; Simó C. **Dynamics and mission design near libration points, fundamentals: the case of triangular libration points**. Singapore: World Scientific, v. 2 , 2001b.
- Gómez, G. ; Simó. C. ; Jorba. A.; Masdemont. J. **Dynamics and mission design near libration points, Fundamentals: advanced methods for collinear points**, v. 3, Singapore: World Scientific, 2001c.
- Gómez, G. ; Simó C.; Jorba À.; Masdemont, J. **Dynamics and mission design near libration points, fundamentals: advanced methods for triangular points**, v. 4, Singapore: World Scientific, 2001d.



- Gómez, G.; Howell, K.; Masdemont, J. ; Simó, C. Station-Keeping strategies for translunar libration point orbits. In: AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, 1998, Monterey, CA. **Proceedings...** Monterey, CA: ASS/AIAA, v.168, 1998. (Paper 98-168).
- Gómez, G.; Jorba, A.; Masdemont, J. ; Simó, C. Lissajous orbits around halo orbits. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 95, p.117-134, 1997.
- Gómez, G.; Jorba, A.; Masdemont, J. ; Simó, C. Study of transfer from the Earth to a Halo orbit around the equilibrium point  $L_1$ , **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 56, n.4, p. 541-562, 1993a.
- Gómez, G.; Jorba, A.; Masdemont, J. ; Simó, C. Study of transfer between halo orbits in the solar system. **Advances in the Astronautical Sciences** v.293, p. 623-637, 1993b.
- Gómez, G.; Jorba, A.; Masdemont, J. ; Simó, C. Moon's influence on the transfer from the Earth to a Halo Orbit. In A. E. Roy (ed). **Predictability, Stability and Chaos in N-Body Dynamical Systems**. New York: Plenum Press, p. 283-290, 1991a.
- Gómez, G.; Jorba, A.; Masdemont, J. ; Simó, C. **Study refinement os semianalytical Halo orbit theory ESOC**. New York: 1991b. Contract 8625/89/MO (SC).
- Gross, L. R. E. ; Prussing, J. E. Optimal multiple-impulse direct ascent fixed-time rendezvous. **AIAA Journal**, v. 12, n. 7, p. 885-889, 1974.
- Hechler. M. **SOHO Mission Analysis  $L_1$  transfer trajectory**. [ S.1 ]: ESA, 1984. Techical Report MAO Working, paper n. 202.
- Heuberger, H. Halo Orbit Station Keeping for ISEE-C. In: AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Conference, 1977, Jakson Hole, WY. **Proceedings...** Jakson Hole, WY: AAS/AIAA, 1977.
- Hiday, L. A.; Howell, K. C. Transfers between libration-point orbits in the elliptic restricted problem. In: AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, 1992.Colorado. **Proceedings...** Colorado: AAS/AIAA, 1992. Paper AAS 92-126.
- Hohmann, W. **Die erreichbarkeit der himmelskorper**. 2 ed. Munich: Oldenbourg, 1925.
- Humi, M. Fuel-optimal rendezvous in a general central force field. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v.16, n. 1, p. 215-217, 1993.

- Howell, K. C. Three-Dimensional, periodic Halo Orbits. In: AAS/AIAA Astrodynamic Conference, 1981, Lake Tahoe, NV. **Proceedings...AAS/AIAA** paper n. 81-147, Aug, 1981.
- Howell, K. C. Effects of eccentricity in Halo orbits In: AAS/AIAA Astrodynamics Conference, 1983, Lae Placid, NY. **Proceedings...** San Diego, CA: Univelt Inc. , 1984. p. 319-333.
- Howell, K. C. Three dimensional periodic halo orbits. **Celestial Mechanics**, v. 32, n. 1, p. 53-72, 1984.
- Howell, K. C. ; Breakwell, J. V. Almost Rectilinear Halo Orbits, **AAS/AIAA** paper n. 82-139, Jan., 1982.
- Howell, K. C. ; Breakwell, J. V. Almost Rectilinear Halo Orbits, **Celestial Mechanics**, v. 32, n.1, p. 29-52, 1984.
- Howell, K. C. ; Hiday, L.A. Time-free transfers between libration point orbits in the elliptic restricted problem, **Acta Astronautica**, v. 32, n.4, p. 245-254, 1993.
- Howell, K. C. ; Pernicka, H. J. Station keeping method for libration point trajectories, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 16, n. 1, p. 151-159, Jan-Feb, 1993.
- Howell, K. C., Mains, D. L., and BarDen B. T., Transfer trajectories de Earth parking orbits to Sun-Earth halo orbits, In: AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, 1994, Cocoa Beach, FL. **Proceedings...** Cocoa Beach: AAS/AIAA AAS, 1994. paper 94-160
- Howell, K.C. ; Guzman J.J. Spacecraft trajectory design in the context of a coherent restricted four-body problem with application to the MAP Mission. In International Astronautical Congress, 51., 2000, Rio de Janeiro. **Proceedings...** Rio de Janeiro: IAA,2000. IAF Paper 00-A.5.06.
- Jones, B. L. ; Bishop, R. H. Stable Orbit Rendezvous for a Small Radius Translunar Halo Orbit, **Advances in Astronautical Sciences**, v. 82, Part. I, p. 585-604, 1993.
- Jones, B. L., and Bishop, R. H., Rendezvous Targeting and Navigation for a Translunar Halo Orbit, **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 17, n. 5, p. 1109-1114, September-October, 1994.
- Koon W. S.; Lo, M.W.; Marsden, J.H.E.; Ross, S.D. Low Energy Transfer to the Moon, **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 81, p.63-73, 2001.

- Lee, S.; Cochran Jr. J. E. High thrust rendezvous via feedback linearization. In: Annual AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting,., Pasadena, 1993. **Proceedings**. San Diego: AAS/AIAA, 1993, v. 3, p.565-584.
- Lembeck, C. A.; Prussing, J. E. Optimal impulsive intercept with low-thrust rendezvous return. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 16, n. 3, 1993.
- Lopez, I.; McInnes, C. R. Autonomous rendezvous using artificial potential function guidance, **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 18, n. 2, p. 237-241, 1995.
- Marchal, C. **The three-body problem**: Elsevier: Amsterdam, 1990.
- Mirfakhraie, K. **Optimal cooperative time-fixed impulsive rendezvous**. Ph. D. Thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, IL, 1990.
- Mirfakhraie, K.; Conway, B. A. Optimal cooperative time-fixed impulsive rendezvous, **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 17, n. 3, p. 607-613, 1994.
- Pardis, C. J.; Carter, T. E. Optimal power-limited rendezvous with thrust saturation, **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 18, n. 5, p. 1145-1150, 1995.
- Pernicka, H.J.; Howell, K.C. Sun-Earth libration point trajectories that avoid the solar exclusion zone. **Journal of Astronautical Sciences**, v. 38, n.3, p. 269-288, 1990.
- Pernicka, H.J.; Howell, K.C. Use of Halo orbits to provide a communication link between Earth and Mars. In: AAS/AIAA Astrodynamics Conference, 1992, Colorado Springs. **Proceedings ...Colorado Spring: AIAA/AAS, 1992**. Paper 92-4585.
- Popescu, M. Optimal transfer from lagrangian points, **Acta Astronautical**, v. 12, n. 4, p. 225-228, 1985.
- Popescu, M. ; Cardos, V. The domain of initial conditions for the class of three-dimensional halo periodical orbits, **Acta Astronautical**, v. 36, n.4, p. 193-196, 1995.
- Prado, A.; F., B. A. **Optimal transfer and swing-by orbits in the two-and three-body problems**. Austin, 240p. Ph.D. Thesis– (Aerospace Engineering and Engineering Mechanics). University of Texas, Dec., 1993.
- Prado, A.; F., B. A. Powered Swing-by. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v.19, n.5, p.1142-1147, 1996a.
- Prado, A.F.B.A. Powered swing-by. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 19, n. 5, Sept-Oct., p. 1142-1147, 1996b.

- Prado, A.F.B.A. Optimal rendezvous maneuvers for space vehicles. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, v. 18, n. 3, p.297-301, 1996c.
- Prado, A.F.B.A. Close-approach trajectories in the elliptic restricted problem. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 20, n. 4, p. 797-802, July-Aug. 1997.
- Prado, A.F.B.A. Delta-v estimate for Jupiter swing-by trajectories. In: Applied Mechanics in the Americas; Pan-American Congress of Applied Mechanics, ( PACAM VI ), 6. and International Conference on Dynamic Problems in Mechanics, ( DINAME99 ), 8., 1999, Rio de Janeiro. **Proceedings...** Rio de Janeiro: [S.n], v. 6, p. 263-266, 1999.
- Prado, A.F.B.A. An Analytical description of the close approach maneuver in three dimensions. In: International Astronautical Congress, 51., 2000, Rio de Janeiro, Brasil. **Proceedings...** Rio de Janeiro: IAF, 2000. (IAF-00-A.5.05), (INPE-8066-PRE/3882).
- Prado, A.F.B.A.; Broucke, R.A. Effects of atmospheric drag in swing-by trajectory. **Acta Astronautica**, v. 36, n. 6, p. 285-290, Sept. 1995a.
- Prado, A.F.B.A.; Broucke, R.A. A Classification of swing-by trajectories using the moon. **Applied Mechanics Reviews**, v. 48, n. 11, part 2, p. 138-142. Nov. 1995b.
- Prado, A.F.B.A.; Broucke, R.A. The minimum delta-v Lambert's problem. **SBA Controle & Automação**, v. 7, n. 2, p. 84-90, May/Aug. 1996.
- Press, W. H.; Flannery, B. P.; Teukolsky S. A. ; Vetterling, W. T. **Numerical recipes**, New York: Cambridge University Press, 1989.
- Prussing, J. E. Optimal four-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbits. **AIAA Journal**, v. 7, n. 5, p. 928-935, 1969.
- Prussing, J. E. Optimal two- and three-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbit. **AIAA Journal**, v. 8, n. 7, p. 1221-1228, 1970.
- Prussing, J. E. Optimal cooperative time-fixed impulsive rendezvous. In: AIAA/AAS Astrodynamics Specialists Conference, 1988, Hyatt Regency - Minneapolis. **Proceedings...** Washington: AIAA, 1988. p. 49-54.
- Prussing, J. E.; Chiu, J. H. Optimal multiple-impulse time-fixed rendezvous between circular orbits. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 9, n.1, p. 17-22, 1986.

- Pu, C.L. ; Edelbaum, T.N. Four-body trajectory optimization. **AIAA Journal**, v. 13, n .3, p. 333-336, 1975.
- Richardson, D. L. Analytic construction of periodic orbits about the collinear points, **Celestial Mechanics**, v. 22, n. 3, p. 241-253, 1980a.
- Richardson, D. L. Halo orbit formulation for the ISEE-3 mission, **Journal Guidance and Control**, v. 3, n. 6, p. 543-548, 1980b.
- Richardson, D. L. A note on a lagrangian formulation for motion about the collinear points, **Celestial Mechanics**, v. 22, n. 3, p. 231-236, 1980c.
- Rodriguez-Canabal, J. Operational halo orbit maintenance technique for SOHO. In: d International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics, 2., 1986, Darmstadt. **Proceedings...** Darmstadt: ESA, p. 71-78, 1986.
- Simó, C.; Gómez, G.; Llibre J. ; Martínez R. Station keeping of a quasiperiodic halo orbit using invariant manifolds. In: International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics, 2., 1986, Darmstadt. **Proceedings...** Darmstadt: ESA, 1986. p. 65-70. 1986.
- Simó, C.; Gómez, G.; Llibre J.; Martínez R. ; Rodríguez J. On the optimal station keeping control of halo orbits, **Acta Astronautica**, v. 15, n. 6, p. 391-397, 1987.
- Stalos, S.; Folta, D.; Short, B.; Jen, J.; Seacord, A. Optimum transfer to a large-amplitude halo orbit for the solar and heliospheric observatory (SOHO) spacecraft. In: International Symposium on Space Flight Dynamics, 8, 1993, Greenbelt, Maryland. **Proceedings...** Greenbelt, Maryland: AAS/GSFC, 1993. paper n. 93-553.
- Starchville, Jr. T. F.; Melton, G. R. Optimal low-thrust trajectories to Earth-Moon  $L_2$  halo orbits (Circular Problem), In:AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, 4-7 Aug., 1997, Sun Valley, Idaho, **Proceedings...** Sun Valley, Idaho: AAS/AIAA, 1997. ( 97-714 ).
- Stern, S. A.; Fowler, W. T. Path constrained rendezvous near large space structures, **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 22, p. 548-553, 1985.
- Szebehely, V. **Theory of orbits**: the restricted problem of three bodies. New York: Academic Press, 1967.
- Tauer, D. R.; Coverstone-Carroll, V.; Prussing, J. E. Optimal impulse time-fixed orbital rendezvous and interception with path constraints. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 18, n. 1, p. 54-60, 1995.

- Vieira Neto, E. **Estudo numérico da captura gravitacional temporária utilizando o problema restrito de três corpos**. 1998. 224p. (INPE-7033-TDI/663), Tese (Doutorado Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1999.
- Wolfsberger, W.; Weiß, J.; Rangnitt, D. Strategies and schemes for rendezvous on geostationary transfer orbit. **Acta Astronautica**, v. 10, n. 8, p.527-538, 1983.
- Shaohua, Y.; Akiba, R.; Matsuo, H. Control of omni-directional rendezvous trajectories. **Acta Astronautica**, v. 32, n. 2, p. 83-87, 1994.
- Yamakawa, H. **On Earth-Moon transfer trajectory with gravitational capture**. (PhD. Dissertation) - University of Tokyo, Tokyo, 1992.
- Yu, S. Terminal spacecraft coplanar rendezvous control. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 18, n. 4, p. 838-842, 1995.
- Yuan, P. J.; Hsu, S. C. Rendezvous guidance with proportional navigation. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 17, n. 2, p. 409-411, 1994.