



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE – 5309 – TDI / 459**

**PROBLEMAS DE CIRCULAÇÃO OCEÂNICA EQUATORIAL:  
DETERMINAÇÃO DA ESTRUTURA HORIZONTAL DOS MODOS  
BAROCLÍNICOS POR EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO.**

**Paulo Renato Centeno Holvorcem**

Dissertação de Mestrado em Meteorologia, orientada pelo Dr. Márcio Luiz Viana,  
aprovada em fevereiro de 1991.

INPE  
São José dos Campos  
1991

INPE-5309-TDI/459

PROBLEMAS DE CIRCULAÇÃO OCEÂNICA EQUATORIAL:  
DETERMINAÇÃO DA ESTRUTURA HORIZONTAL DOS MODOS  
BAROCLÍNICOS POR EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

Paulo Renato Centeno Holvorcem

INPE  
São José dos Campos  
Abril de 1991

551.46

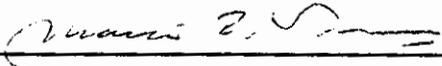
HOLVORCEM, P.R.C.

Problemas de circulação oceânica equatorial: determinação da estrutura horizontal dos modos baroclínicos por equações integrais de contorno. / P.R. C. Holvorcem. -- São José dos Campos: INPE, 1991. 254p. -- (INPE-5309-TDI/459)

1. Modelagem. 2. Oceanos tropicais.  
3. Equação de Laplace. 4. Ondas equatoriais. I. Título

Aprovada pela Banca Examinadora  
em cumprimento a requisito exigido  
para a obtenção do Título de Mestre  
em Meteorologia

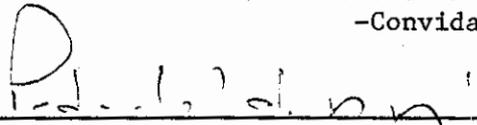
Dr. Marcio Luiz Vianna

  
Orientador/Presidente

Dr. Édmo José Dias Campos

  
Membro da Banca  
-Convidado-

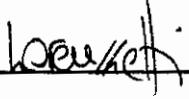
Dr. Pedro Leite da Silva Dias

  
Membro da Banca  
-Convidado-

Dr. Antonio Divino Moura

  
Membro da Banca

Dr. João Antonio Lorenzetti

  
Membro da Banca

Candidato: Paulo Renato Centeno Holvorcem

São José dos Campos, 05 de fevereiro de 1991



« The applications of analysis to the physical Sciences, have the double advantage of manifesting the extraordinary powers of this wonderful instrument of thought and at the same time of serving to increase them; numberless are the instances of the truth of this assertion.»

— GEORGE GREEN, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* (1828)

« I have on the present occasion merely noticed, but not insisted upon, these inferences, feeling persuaded that in researches like the present, little confidence is due to such consequences as are not supported by a rigorous analysis.»

— GEORGE GREEN, *Supplement to a Memoir on the Reflexion and Refraction of Light* (1839)

« ... so that the preceding formula, even when taken in its greatest extent, will not fully satisfy all the observed phenomena. The irregularity of the depth of the ocean, the manner in which it is spread over the earth, the position and declivity of the shores, their connexions with the adjoining coasts, the currents, and the resistances which the waters suffer, cannot possibly be submitted to an accurate calculation, though these causes modify the oscillations of this great fluid mass.»

— LAPLACE, *Traité de Mécanique Céleste*, Livro IV (Tradução inglesa por N. Bowditch, 1832)



*Este trabalho é dedicado  
a José Paulo e Carmem, meus pais,  
com gratidão e amor.*



## AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Márcio Luiz Vianna, por sua orientação, em particular por enfatizar a importância da assintótica e da análise complexa na presente pesquisa.

A Manuel Fiadeiro (NCAR, Boulder, Colorado), Wendell S. Brown (University of New Hampshire, Durham, New Hampshire), William E. Johns e Kevin Leaman (University of Miami, Miami, Florida), pelo importante incentivo recebido durante o II Workshop Brasil/EUA em Oceanografia Física, realizado no IOUSP de 18 a 21 de setembro de 1989.

A Christiane G. Dall'Aglio, por indicar o melhor momento para começar a redigir este trabalho; por seu auxílio no acabamento e montagem das ilustrações; e pelo amor, carinho e dedicação de todos os dias.

A todos os que colaboraram durante a realização das simulações numéricas deste trabalho, cedendo-me tempo e memória em diversos computadores; em especial,

A Angelo Shimabuko, pelo uso de seu IBM-PC, com o qual a maioria dos resultados numéricos foram obtidos; a Guy Grebot, também pelo uso de seu IBM-PC; a José Alves Dias e Sílvia L. Dias pelo uso de seu IBM-PC durante a impressão da versão final deste trabalho; pelo entusiasmo de todos em relação ao progresso desta pesquisa; e finalmente por sua grande amizade, que os últimos anos viram crescer;

A Pavel Rozenfeld, pela permissão para usar o VAX 8350 do CCS/INPE nas primeiras simulações numéricas em agosto de 1989;

A Gilberto Rodrigues Jr. e aos demais operadores do CCS/INPE pelo valioso auxílio no uso do VAX 8350 e pelas primeiras noções sobre o sistema operacional VMS;

Ao Dr. João A. Lorenzetti, pelo uso de um IBM-PC no primeiro ano desta pesquisa.

A todos os que contribuíram com suas experiências individuais, em ciência e na vida, para a evolução deste trabalho. Em especial, aos Profs. Clausius e Vylneide Lima (UnB), ao Prof. Patrício Letelier (UNICAMP), ao Prof. Jairo Cavalcante (UnB) e ao Prof. Yelisetty Viswanadham (INPE).

À CAPES e à PETROBRÁS, pelo suporte financeiro recebido respectivamente de março de 1988 a fevereiro de 1989 e de março de 1989 a fevereiro de 1991.



EQUATORIAL OCEAN CIRCULATION PROBLEMS: DETERMINATION OF  
THE HORIZONTAL STRUCTURE OF THE BAROCLINIC MODES BY  
BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS

ABSTRACT

This work contains a detailed presentation of a new methodology for the numerical simulation of tropical ocean circulation. Specifically, one considers the linearized shallow water equations on the equatorial  $\beta$ -plane, which may be used to describe the horizontal dependence of each baroclinic mode in a vertical normal mode expansion. A general boundary value problem for these equations, with slip boundary conditions applied at a boundary of arbitrary geometry, is reformulated as a boundary integral equation for the unknown boundary pressure distribution. In this way, one obtains integral equations describing both the wind-forced circulation and the scattering of free equatorial waves by islands and continental margins of arbitrary geometry. The kernels of the integral operators appearing in the boundary integral equations are analytically represented as expansions in free equatorial waves involving the Hermite functions  $\psi_m(y)$ , where  $y$  is the non-dimensional latitude. In certain cases of interest, it is inconvenient to compute the kernels through these expansions, because of their slow convergence. Physically, this arises from the superposition of equatorial waves with complex wavenumbers (zonally damped modes). A general theory is developed for the asymptotic evaluation of the remainder of a Hermite expansion, when the series is truncated after a sufficiently large number of terms. This theory, which is applicable to a variety of oceanographically relevant expansions, allows the efficient numerical computation of the kernels of the integral operators. Procedures for the numerical solution of the boundary integral equations by the boundary element method are developed and implemented in a set of routines in FORTRAN 77. Advantages of the present formulation include the possibility of evaluating the solution in selected areas of the ocean, the ease in the representation of complex coastal geometries, and the unified treatment of all frequencies of oceanographic interest without using approximations such as those of long waves or low frequencies. The new methodology is illustrated by a study of the scattering of equatorial Rossby waves with periods between 50 and 90 days by the western Atlantic boundary. Some of the resulting interference patterns exhibit a region of large amplitudes of oscillation, whose center is located between 3-9°N, 35-47°W. Evidence is found that this effect arises from the constructive interference of zonally damped modes which are excited south of the Equator at the ocean boundary.



## SUMÁRIO

|  | <u>Pág.</u> |
|--|-------------|
| LISTA DE FIGURAS.....  | xix         |
| LISTA DE TABELAS.....  | xxiii       |
| <br>   |             |
| <u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....</u>  | <u>1</u>    |
| <br>   |             |
| <u>CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES DE MO-<br/>VIMENTO.....</u>     | <u>11</u>   |
| 2.1 - O modelo oceânico.....   | 11          |
| 2.2 - A identidade integral de Green.....  | 14          |
| 2.3 - A solução fundamental da equação da maré de<br>Laplace.....                | 15          |
| 2.4 - Representações integrais.....  | 17          |
| <br>   |             |
| <u>CAPÍTULO 3 - NÚCLEOS (1).....</u>   | <u>21</u>   |
| 3.1 - Introdução.....  | 21          |
| 3.2 - Estrutura latitudinal da solução fundamental...                            | 21          |
| 3.3 - Raízes espúrias.....   | 23          |
| 3.4 - Expansões em ondas equatoriais livres.....                                 | 25          |
| <br>   |             |
| <u>CAPÍTULO 4 - EXPANSÕES EM SÉRIES DE FUNÇÕES DE HERMI-<br/>TE.....</u>         | <u>39</u>   |
| 4.1 - Introdução.....  | 39          |
| 4.2 - Comportamento assintótico das funções de Hermi-<br>te de ordem grande..... | 41          |
| 4.3 - A série auxiliar $A_r$ .....   | 45          |
| 4.4 - Séries envolvendo o produto de duas funções de<br>Hermite.....             | 53          |
| 4.5 - A série auxiliar $B_r$ .....   | 54          |

|   |         |
|---|---------|
| 4.6 - A série auxiliar $C_r$ .....  | 56      |
| 4.7 - A computação numérica de $G_\alpha(x,y)$ .....  | 62      |
| 4.8 - Alguns resultados analíticos e assintóticos....   | 63      |
| 4.9 - O comportamento assintótico de $G(\alpha,y;\vec{r}')$ quando<br>$\alpha \rightarrow \infty$ ..... | 65      |
| 4.10 - Séries envolvendo derivadas das funções de<br>Hermite.....                                       | 66      |
| <br><u>CAPÍTULO 5 - NÚCLEOS (2)</u> .....   | <br>67  |
| 5.1 - Introdução.....   | 67      |
| 5.2 - Séries assintóticas para os núcleos.....  | 67      |
| 5.3 - Aspectos computacionais.....  | 74      |
| 5.4 - O campo da solução fundamental.....   | 78      |
| 5.5 - Contribuições singulares.....   | 86      |
| <br><u>CAPÍTULO 6 - EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO</u> .....  | <br>91  |
| 6.1 - Introdução.....   | 91      |
| 6.2 - A equação integral básica.....  | 92      |
| 6.3 - Método dos elementos de contorno.....   | 93      |
| 6.4 - Integrais bi-dimensionais.....  | 97      |
| 6.5 - Cálculo assintótico de $\vec{P}(a,b;y)$ e $U(a,b;y)$ .....  | 100     |
| 6.6 - Aspectos computacionais e exemplos de soluções<br>particulares.....                               | 104     |
| 6.7 - Solução da equação integral para $p^{(H)}$ .....  | 106     |
| 6.8 - Computação de soluções no interior do oceano...   | 114     |
| 6.9 - Espalhamento de ondas equatoriais.....  | 117     |
| <br><u>CAPÍTULO 7 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS</u> .....  | <br>125 |
| 7.1 - Introdução.....   | 125     |
| 7.2 - Espalhamento de ondas equatoriais pelas Ilhas<br>Maldivas.....                                    | 125     |

|  |     |
|--|-----|
| 7.3 - Espalhamento de ondas equatoriais pela margem continental sul-americana.....                                   | 134 |
| <u>CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....</u>  | 159 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....  | 169 |
| APÊNDICE A - EXPRESSÕES PARA O CÁLCULO DOS COEFICIENTES $q_n$ E DA INTEGRAL EXPONENCIAL $E_1(z)$ ..                  | 177 |
| APÊNDICE B - SOFTWARE PARA SIMULAÇÕES DA DINÂMICA DOS OCEANOS EQUATORIAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO..... | 179 |
| APÊNDICE C - COEFICIENTES PARA O CÁLCULO ASSINTÓTICO DE $\vec{P}(a,b;\gamma)$ E $U(a,b;\gamma)$ .....                | 231 |
| APÊNDICE D - INTEGRAIS QUASE-SINGULARES.....   | 233 |



LISTA DE FIGURAS

|  | <u>Pág.</u> |
|--|-------------|
| 3.1 - Pólos de $G(\alpha, y; \vec{r}')$ em função da frequência adimensional.....  | 27          |
| 5.1 - Parte imaginária de $G(y_c; \vec{r}; \vec{r}')$ para $\vec{r}' = (0, 1)$ .....   | 79          |
| 5.2 - Parte imaginária de $G(y_c; \vec{r}; \vec{r}')$ para $y_c = 0,368$ .....   | 82          |
| 5.3 - Partes regulares das funções de influência para uma fonte em $y = 1,5$ , com $y_c = 0,2639 - 0,002i$ .....                                   | 88          |
| 6.1 - Estrutura latitudinal das soluções particulares (6.22) e (6.24) para $(a, b) = (0, 0)$ , $\vec{F}_0 = (1, 0)$ e $y_c = 0,264 - 0,002i$ ..... | 107         |
| 6.2 - Estrutura latitudinal das soluções particulares (6.22) e (6.24) para $(a, b) = (0, 1)$ , $\vec{F}_0 = (1, 0)$ e $y_c = 0,264 - 0,002i$ ..... | 109         |
| 6.3 - Campo de pressão associado com a solução particular (6.22) para $(a, b) = (1/2, 1)$ , $\vec{F}_0 = (1, 0)$ e $y_c = 0,264 - 0,002i$ .....    | 111         |
| 7.1 - Distribuição de pressão ao longo da fronteira do arquipélago das Maldivas.....   | 128         |
| 7.2 - Campo de pressão no Oceano Índico em um instante fixado quando uma onda de Kelvin com período de 60 dias incide sobre as Ilhas Maldivas..... | 130         |
| 7.3 - Campo de pressão no Oceano Índico em uma simulação da interação de ondas de Kelvin transitentes com as Ilhas Maldivas.....                   | 131         |
| 7.4 - Evolução temporal do campo de velocidade em torno das Ilhas Maldivas para uma onda de Kelvin incidente com período de 60 dias.....           | 133         |

|   |     |
|---|-----|
| 7.5 - Evolução temporal do campo de velocidade em torno das Ilhas Maldivas para uma onda de Rossby incidente (segundo modo meridional) com período de 60 dias.....  | 135 |
| 7.6 - Distribuição de pressão ao longo da margem continental sul-americana, em um instante fixado, para uma onda de Rossby incidente (primeiro modo meridional, segundo modo baroclínico) com período de 72 dias.....     | 139 |
| 7.7 - Distribuição de pressão $p(s)$ ao longo da margem continental sul-americana para uma onda de Rossby incidente (primeiro modo meridional, segundo modo baroclínico) com período $T = 72$ dias.....                   | 142 |
| 7.8 - Amplitude de oscilação do campo de pressão resultante do espalhamento de uma onda de Rossby com período de 72 dias (primeiro modo meridional, segundo modo baroclínico) pela margem continental sul-americana.....  | 144 |
| 7.9 - Evolução temporal do campo de pressão resultante do espalhamento de uma onda de Rossby com período de 72 dias (primeiro modo meridional, segundo modo baroclínico) pela margem continental sul-americana.....       | 146 |
| 7.10 - Distribuição de pressão $p(s)$ ao longo da margem continental sul-americana para uma onda de Rossby incidente (segundo modo meridional, primeiro modo baroclínico) com período $T = 50$ dias.....                  | 151 |
| 7.11 - Amplitude de oscilação do campo de pressão resultante do espalhamento de uma onda de Rossby com período de 50 dias (segundo modo meridional, primeiro modo baroclínico) pela margem continental sul-americana..... | 152 |

|  |     |
|--|-----|
| 7.12 - Amplitude de oscilação do campo de pressão resultante do espalhamento de uma onda de Rossby com período de 72 dias (segundo modo meridional, segundo modo baroclínico) pela margem continental sul-americana..... | 154 |
|--|-----|



LISTA DE TABELAS

|   | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| 4.1 - Computação de $A_3$ para $y = 8$ e $M = 48$ .....   | 52          |
| 4.2 - Cálculo assintótico de $F_\alpha(y)$ .....  | 53          |
| 4.3 - Computação de $B_3$ para $x = 6$ , $y = 4$ , $M = 27$ .....   | 55          |
| 4.4 - Computação de $C_3$ para $x = 3$ , $y = -2$ , $M = 7$ .....   | 61          |
| 4.5 - Cálculo assintótico de $G_{1/2}(1, -1/2)$ .....   | 62          |
| 5.1 - Computação da solução fundamental $G(x, y; x', y')$<br>para $y_c = 0,2639 - 0,002i$ , $y = 3$ , $y' = 2$ e $x - x' = 10^{-5}$ ..... | 76          |
| 5.2 - Computação do núcleo $\vec{K}(x, y; x', y')$ para $y_c = 0,2639 - 0,002i$ , $y = 3$ , $y' = 2$ e $x - x' = 10^{-5}$ .....           | 76          |
| 5.3 - Computação do núcleo $\vec{J}(x, y; x', y')$ para $y_c = 0,2639 - 0,002i$ , $y = 3$ , $y' = 2$ e $x - x' = 10^{-5}$ .....           | 77          |
| 5.4 - Computação do núcleo $\mathcal{D}(x, y; x', y')$ para $y_c = 0,2639 - 0,002i$ , $y = 3$ , $y' = 2$ e $x - x' = 10^{-5}$ .....       | 77          |
| 6.1 - Computação de $\vec{P}(1, 2; 3/2)$ para $y_c = 0,2639 - 0,002i$ .....   | 105         |
| 6.2 - Computação de $\mathcal{U}(1, 2; 3/2)$ para $y_c = 0,2639 - 0,002i$ .....   | 106         |
| 7.1 - Ondas equatoriais com período $T = 60$ dias no segundo modo baroclínico do Oceano Índico.....                                       | 126         |
| 7.2 - Ondas equatoriais com período $T = 72$ dias no segundo modo baroclínico do Oceano Atlântico...                                      | 143         |



## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Muitos problemas relevantes em Mecânica de Fluidos Geofísicos não são tratáveis através dos métodos de análise matemática atualmente disponíveis. Esta dificuldade, juntamente com a crescente capacidade de cálculo numérico proporcionado pelos computadores digitais, tem motivado o aparecimento de um grande número de modelos computacionais, que procuram representar alguns aspectos do oceano ou da atmosfera (ou ambos).

A maioria dos modelos de circulação oceânica de grande escala baseia-se no método das diferenças finitas (Bryan, 1969; Cane e Patton, 1984; McCreary et al., 1984). A grade computacional é geralmente construída ao longo dos paralelos e meridianos, de modo que os contornos oceânicos são representados como uma seqüência de degraus em latitude e longitude. Para representar razoavelmente um contorno não-zonal ou não-meridional, é preciso dispor de uma grande resolução espacial. Em conseqüência, as necessidades de armazenamento de matrizes numéricas e tempo de processamento podem restringir o uso do modelo a grandes computadores. Outra deficiência dos códigos de diferenças finitas é a dificuldade de alterar, ainda que ligeiramente, a geometria do modelo. Além disso, o grande número de pontos de grade aumenta o perigo de erros humanos de codificação. Mais grave, no entanto, é a dificuldade de se aplicar precisamente as condições de contorno desejadas. Claramente, o escoamento próximo de um contorno em degraus pode ser bem diferente do escoamento próximo do contorno real, que é uma curva mais suave. Finalmente, a resolução da solução numérica obtida é limitada diretamente pelo espaçamento da grade, perdendo-se a informação relativa aos

processos de menor escala.

Nos últimos dez anos, o método numérico conhecido como método dos elementos de contorno (Brebbia et al., 1984) vem sendo usado em diversas áreas da Engenharia no tratamento de equações diferenciais parciais. A idéia do método é substituir um problema de valores de contorno para a equação diferencial parcial por uma equação integral de contorno, a qual é tratada numericamente com algoritmos relativamente simples. Uma equação integral de contorno é uma condição sobre os valores da função incógnita ao longo da fronteira do domínio de interesse, envolvendo integrais da função incógnita sobre a fronteira. A solução numérica de tal equação integral envolve a discretização da fronteira em pequenos segmentos (elementos de contorno) orientados tangencialmente à mesma. O método dos elementos de contorno permite assim uma maior fidelidade na representação de contornos complicados, em comparação com o método das diferenças finitas. Além disso, a equação integral de contorno incorpora exatamente a informação dada pelas condições de contorno, de modo que não é necessário utilizar uma versão discreta destas últimas. A equação integral de contorno descreve a interação entre as diversas partes do domínio de interesse através de "funções de influência" (às vezes chamadas "soluções fundamentais" ou "funções de Green" do problema). A determinação das funções de influência envolve geralmente uma investigação detalhada da física básica do problema considerado. Os resultados desta investigação são então utilizados extensivamente no processo de solução numérica. O uso do método dos elementos de contorno permite que se examine a solução em áreas selecionadas do domínio sem necessidade de se calcular a solução no restante do mesmo. Em geral, na solução numérica é possível resolver detalhes menores do que a dimensão característica dos elementos de contorno empregados. A

solução tende a ser mais suave que uma solução por diferenças finitas, devido ao caráter suavizante da operação de integração.

Um dos exemplos mais simples do uso do método dos elementos de contorno é dado pelo processo de solução numérica da equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = \zeta \quad (1.1)$$

em um domínio bi-dimensional  $B$  de forma arbitrária, com condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann (Brebbia et al., 1984). Uma formulação integral para este tipo de problema é obtida através da identidade de Green (Hildebrand, 1965)

$$\iint_B (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dA = \oint_{\partial B} \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds, \quad (1.2)$$

onde  $\partial/\partial n$  denota a derivada na direção normal exterior a  $\partial B$ , fazendo  $\psi = G$ , a função de Green para o operador laplaciano. Esta representa a solução de (1.1) quando o termo inhomogêneo  $\zeta$  está concentrado em um ponto arbitrário  $\vec{r}'$  do plano (sendo então descrito por uma função delta de Dirac),

$$\nabla^2 G(\vec{r}; \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.3)$$

Substituindo (1.1) e (1.3) em (1.2), e aplicando condições de contorno de Neumann (condições de Dirichlet podem ser tratadas analogamente)

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \lambda(s) \quad \text{em } \partial B, \quad (1.4)$$

obtém-se a seguinte representação integral para a solução do problema de valores de contorno:

$$\phi(\vec{r}') = \oint_{\partial B} \left( \phi \frac{\partial G}{\partial n} - \lambda G \right) ds + \iint_B \zeta G \, dA. \quad (1.5)$$

Claramente, esta representação será válida somente se  $\vec{r}'$  estiver no interior de  $B$ . A utilidade de (1.5) reside na possibilidade de calcular o valor da solução  $\phi$  em pontos interiores a partir de seus valores de contorno, da função de Green e suas derivadas, da condição de contorno e do termo inhomogêneo. A função de Green para o operador laplaciano pode ser facilmente calculada a partir de (1.3), sendo dada por (Brebbia et al., 1984)

$$G(\vec{r}; \vec{r}') = (1/2\pi) \ln |\vec{r} - \vec{r}'|. \quad (1.6)$$

Entretanto, a solução interior não poderá ser calculada por (1.5) a menos que os valores de contorno de  $\phi$  (não especificados pela condição de contorno) sejam determinados. Considera-se então um processo de limite envolvendo (1.5), no qual o ponto interior  $\vec{r}'$  aproxima-se do contorno  $\partial B$  (Brebbia et al., 1984). Omitindo os detalhes, o resultado é uma relação envolvendo apenas os valores de contorno de  $\phi$ , ou equação integral de contorno,

$$\frac{1}{2}\phi(\vec{r}') = \oint_{\partial B} \left( \phi \frac{\partial G}{\partial n} - \lambda G \right) ds + \iint_B \zeta G \, dA, \quad (1.7)$$

válida quando  $\vec{r}'$  pertence ao contorno  $\partial B$ . A equação integral (1.7) pode então ser resolvida numericamente através da discretização do contorno  $\partial B$  em pequenos segmentos (elementos de contorno). A versão discreta de (1.7) será um sistema não-esparso de equações lineares, cuja dimensão será igual ao número de elementos de contorno em que  $\partial B$  foi dividido. A solução deste sistema de equações fornece então a distribuição de valores de contorno de  $\phi$ , o que permite finalmente o emprego de (1.5) no cálculo da solução em pontos arbitrários do domínio  $B$ . Note-se que

enquanto é necessário calcular todos os valores de contorno de  $\phi$ , a solução interior pode ser calculada, por (1.5), apenas em pontos selecionados de  $B$ .

Em vista das diversas vantagens do método dos elementos de contorno, é algo surpreendente que o método não tenha ainda sido usado na solução de problemas em Mecânica de Fluidos Geofísicos. Um esforço inicial nesta direção foi realizado por Mattioli (1981). Este autor derivou uma formulação integral para as equações linearizadas de água rasa sobre o plano- $f$ , no domínio de frequência, sugerindo o método dos elementos finitos para sua solução. No entanto, esta idéia parece ter sido abandonada por Mattioli nos anos subseqüentes. Vianna (1987) considerou independentemente o caso particular de uma profundidade constante, no qual a equação que governa o campo de pressão é a equação de Helmholtz em duas dimensões

$$\nabla^2 \phi - k^2 \phi = \zeta. \quad (1.8)$$

Considerando a solução fundamental desta equação, dada por (Brebbia et al., 1984)

$$G(\vec{r}; \vec{r}') = (1/2\pi) K_0(k|\vec{r} - \vec{r}'|), \quad (1.9)$$

onde  $K_0$  é a função modificada de Bessel de ordem zero (Abramowitz e Stegun, 1965), Vianna obteve uma equação integral de contorno para a pressão, que pode ser resolvida numericamente pelo método dos elementos de contorno. Mais tarde, Vianna (1988) introduziu uma formulação análoga para as equações linearizadas sobre o plano- $\beta$  equatorial, determinando uma expressão formal para a solução fundamental da equação que governa o campo de pressão, a Equação da Maré de Laplace (Laplace, 1966) sobre o plano- $\beta$  equatorial (Matsuno, 1966). Devido à anisotropia do

problema (a direção meridional se distingue pela variação do parâmetro de Coriolis), esta solução é bem mais complicada do que aquela determinada anteriormente para as equações sobre o plano- $f$ ; à diferença das soluções fundamentais consideradas acima, a solução fundamental  $G(\vec{r};\vec{r}')$  da Equação da Maré de Laplace não depende apenas da distância  $|\vec{r}-\vec{r}'|$ .

Um exemplo isolado do uso de equações integrais de contorno em estudos de circulação oceânica é descrito por Rowlands (1982), em um estudo dos efeitos de ilhas sobre a propagação de ondas de Kelvin equatoriais.

O presente trabalho discute em detalhe os aspectos matemáticos e computacionais relevantes para a solução de problemas de resposta oceânica linear sobre o plano- $\beta$  equatorial pelo método dos elementos de contorno. Recentemente, tais problemas vêm sendo estudados intensivamente (para uma revisão, v. McCreary, 1985), através de códigos numéricos e métodos analíticos e assintóticos. As investigações analíticas geralmente fazem uso de expansões das variáveis dinâmicas (pressão, velocidade, etc.) em séries infinitas de funções de Hermite. As funções de Hermite descrevem a estrutura latitudinal das autofunções de um oceano (ou atmosfera) ilimitado sobre o plano- $\beta$  equatorial (Matsuno, 1966).

As autofunções podem ser divididas em cinco categorias: ondas de gravidade, ondas de Rossby curtas, ondas de Rossby longas, ondas de Kelvin e ondas mistas de Rossby-gravidade (ou ondas de Yanai). Cada categoria inclui ondas de várias frequências e escalas espaciais e, com exceção da classe das ondas de Kelvin, apresenta dispersão. Devido à dispersão e à grande variedade de autofunções em problemas de dinâmica equatorial, é aparente em vários

trabalhos a dificuldade em lidar rigorosamente com a cinemática de um grande número de ondas equatoriais (Cane e Sarachik, 1976, 1981; Cane e Gent, 1984; Cane e Patton, 1984). A fim de evitar o tratamento direto da dispersão, usa-se freqüentemente as aproximações de "baixa freqüência" e "ondas longas" (Cane e Sarachik, 1981; du Penhoat e Treguier, 1985), nas quais são retidos apenas os modos de Kelvin e de Rossby mais longos, estes últimos quase não-dispersivos. Ao descartar o restante das autofunções, no entanto, torna-se impossível satisfazer as condições de contorno usuais ao longo das margens continentais. Condições de contorno artificiais são então introduzidas, de forma a parametrizar os efeitos dos modos negligenciados. A fim de justificar fisicamente a validade da aproximação, argumenta-se (algo vagamente) que as ondas descartadas são fortemente amortecidas devido a efeitos de fricção. No entanto, tais modos são ainda importantes para determinar a circulação próximo dos contornos oceânicos.

Outra dificuldade encontrada no tratamento das expansões em autofunções é a lenta convergência de muitas séries de funções de Hermite (Cane e Patton, 1984; Boyd e Moore, 1986). Isto ocorre principalmente porque a convergência de tais séries é bastante não-uniforme em latitude. O uso de métodos de somabilidade bem conhecidos (Hardy, 1956) foi recentemente proposto por Boyd e Moore (1986) para acelerar a convergência das expansões. Entretanto, estes autores não testaram os métodos propostos em todos os casos de interesse; tampouco apresentaram razões pelas quais os métodos deveriam funcionar em geral, ou ainda restrições à sua validade. Uma desvantagem comum aos métodos de somabilidade baseados na construção de seqüências auxiliares de convergência mais rápida, como os propostos por Boyd e Moore (1986), é a ausência de uma estimativa rigorosa do número de termos que é preciso

calcular a fim de se obter uma resposta confiável. Assim, o problema da computação numérica de séries de Hermite não está ainda satisfatoriamente resolvido na literatura oceanográfica existente.

Na presente formulação, as condições de contorno são incorporadas exatamente nas equações integrais de contorno. As funções de influência, ou núcleos, das equações integrais podem ser representadas como séries de funções de Hermite. Em certos casos, tais séries convergem muito lentamente, ou mesmo divergem; nestes casos, as representações em série são à primeira vista de pouca utilidade. Já que o método dos elementos de contorno requer extensivamente a computação precisa dos núcleos, tornou-se necessário desenvolver métodos eficientes e rigorosos para a avaliação de séries de funções de Hermite. O resultado desta pesquisa foi uma técnica assintótica de soma, juntamente com condições bem definidas para sua validade (Holvorcem, 1991). A técnica baseia-se no comportamento assintótico bem conhecido das funções de Hermite (Schwid, 1935; Olver, 1959) e em técnicas de análise clássica, como a fórmula do somatório de Poisson (Henrici, 1977). Séries divergentes são tratadas da mesma maneira que as séries convergentes, através de métodos de somabilidade abelianos (Hardy, 1956). A aplicação desta técnica para a computação dos núcleos permite a implementação do método dos elementos de contorno para a solução de vários problemas de resposta linear equatorial, sem qualquer suposição *a priori* a respeito da frequência ou dos comprimentos de onda envolvidos. Além disso, a técnica oferece uma solução rigorosa e econômica para o problema da computação de séries de Hermite.

A presente metodologia de trabalho possibilita a solução numérica de uma boa variedade de

problemas de dinâmica equatorial, sem a necessidade de se dispor de grandes recursos computacionais. Problemas de espalhamento de ondas equatoriais por margens continentais arbitrárias (Clarke, 1983; Cane e Gent, 1984; McCalpin, 1987) e ilhas (Yoon, 1981; Rowlands, 1982) podem ser formulados de maneira extremamente compacta usando equações integrais de contorno. A solução pelo método dos elementos de contorno é imediata, enquanto que códigos de diferenças finitas para estes problemas (Moore e McCreary, 1990; Yoon, 1981) são menos eficientes. Problemas de circulação forçada pelo vento em bacias oceânicas de forma realista também podem ser resolvidos economicamente, com todas as vantagens inerentes ao método dos elementos de contorno (Vianna e Holvorcem, 1991).



CAPÍTULO 2FORMULAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO2.1 - O MODELO OCEÂNICO

Neste trabalho, consideramos um modelo oceânico linear, baroclínico, tri-dimensional, descrito por McCreary (1981). Utiliza-se a aproximação do plano- $\beta$ , e a geometria da costa é arbitrária. Assume-se que o oceano está confinado entre duas superfícies horizontais rígidas, uma no topo e outra no fundo. A estratificação vertical é contínua, com um perfil básico de densidade  $\rho(z)$ . O campo de vento age sobre o oceano como uma força de volume distribuída em uma camada de mistura superficial, de espessura suposta constante (Lighthill, 1969). O modelo inclui uma parametrização da difusão vertical de calor e momentum, através de coeficientes de difusão  $\kappa$  e  $\nu$ . A fim de permitir a separação entre as variáveis horizontais ( $x$  e  $y$ ) e a vertical ( $z$ ), assume-se que os coeficientes de difusão são inversamente proporcionais ao quadrado da frequência de Brunt-Väisälä  $N(z)$ :

$$\kappa = \nu = A/N^2(z), \quad (2.1)$$

onde  $A$  é constante. Além disso, o termo de difusão de calor é modificado de  $(\kappa\rho_z)_z$  para  $(\kappa\rho)_{zz}$  (McCreary, 1981). Com estas suposições, as variáveis dinâmicas podem ser representadas em séries de modos baroclínicos. As equações de movimento para a estrutura horizontal de cada modo baroclínico são as equações de água rasa

$$\rho_0(\partial_t \vec{u} + \beta y \hat{z} \times \vec{u}) = -\nabla p - (\rho_0 A/c^2) \vec{u} + \vec{F}, \quad (2.2)$$

$$\partial_t p + (A/c^2)p + \rho_0 c^2 \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.3)$$

Nestas equações,  $\rho_0$  é uma escala de densidade da água,  $\vec{u}$ ,  $p$  e  $\vec{F}$  representam as projeções do vetor velocidade horizontal, da pressão e da força de volume que representa o forçamento pelo vento sobre o modo baroclínico considerado,  $c$  é o autovalor vertical (igual à velocidade das ondas de Kelvin no modo baroclínico em questão), e  $\beta = 2,28 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  é a taxa de variação do parâmetro de Coriolis com a latitude sobre o equador.

A fim de obter uma única equação escalar equivalente a (2.2) e (2.3), é conveniente aplicar uma transformada de Fourier no tempo, definida por

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (2.4)$$

A versão transformada de (2.2) pode ser resolvida para  $\vec{u}$  em termos de  $p$  e  $\vec{F}$ :

$$\vec{u} = (\rho_0 \beta)^{-1} (Y^2 - Y_c^2)^{-1} (iy_c - y\hat{z} \times) (\vec{F} - \nabla p), \quad (2.5)$$

onde

$$y_c = (\omega - i\Delta\omega)/\beta, \quad \Delta\omega = A/c^2. \quad (2.6)$$

Substituindo a expressão (2.5) para  $\vec{u}$  na versão transformada de (2.3), obtém-se uma equação para a pressão  $p = p(x, y, \omega)$  (Vianna, 1988),

$$\mathcal{L}p = S, \quad (2.7)$$

onde

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(y_c) = \nabla \cdot [(Y^2 - Y_c^2)^{-1} (y\hat{z} \times - iy_c) \nabla] + iy_c/4, \quad (2.8)$$

$$S = \gamma^{-1} \nabla \cdot [(y^2 - y_c^2)^{-1} (y \hat{z} \times - i y_c) \vec{F}]. \quad (2.9)$$

Em (2.7)-(2.9) e no restante deste trabalho, as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $y_c$  ficam adimensionalizadas multiplicando-se pelo recíproco do raio de deformação equatorial (Rowlands, 1982)

$$\gamma = (2\beta/c)^{1/2}. \quad (2.10)$$

A equação (2.7) é essencialmente a equação da maré de Laplace (Laplace, 1966) sobre o plano- $\beta$  (Matsuno, 1966). Os pontos singulares  $y = \pm y_c$  não estão situados no domínio físico ( $y$  real), exceto no caso especial de ausência de dissipação ( $A = 0$ ). Nas latitudes  $y = \pm \text{Re } y_c$ , a frequência de oscilação  $\omega$  se iguala ao valor do parâmetro de Coriolis. No capítulo 6, verificaremos que a singularidade em  $y = \pm y_c$  não afeta a regularidade das soluções de (2.7), ainda que possa introduzir uma ressonância no campo de velocidades. Isto está razoavelmente de acordo com uma observação de Longuet-Higgins (1965), que qualifica a singularidade da equação da maré de Laplace como "removível".

Suponha que queremos resolver as equações de água rasa (2.2) e (2.3) sobre uma região  $B$ , com um forçamento dado  $\vec{F}(x, y, t)$ . Já que o modelo em consideração é horizontalmente invíscido, devemos especificar o fluxo normal através do contorno  $\Gamma$  de  $B$  como uma condição de contorno:

$$\vec{u} \cdot \hat{n} = q(s, t) \quad (2.11)$$

ao longo de  $\Gamma$ . Em (2.11),  $\hat{n}$  é o vetor normal exterior a  $\Gamma$ , e  $q$  é uma função dada do tempo e da coordenada  $s$ , que mede o comprimento de arco ao longo de  $\Gamma$ . Quando  $q = 0$ , (2.11) reduz-se à condição usual de um fluido invíscido em uma fronteira rígida. Uma situação onde  $q \neq 0$  pode representar,

por exemplo, a descarga de um rio em uma margem continental. Tomando o produto escalar de (2.5) com  $\hat{n}$ , obtém-se uma forma equivalente de (2.11) em termos da pressão  $p$ ,

$$(y^2 - y_c^2)^{-1} (iy_c \hat{n} + y \hat{s}) \cdot \left[ \frac{1}{\gamma} \vec{F} - \nabla p \right] = \frac{1}{2} \rho_0 c q(s, \omega) \quad (2.12)$$

sobre  $\Gamma$ , onde  $\hat{s} = \hat{z} \times \hat{n}$  é o vetor tangente anti-horário a  $\Gamma$ , e  $q(s, \omega)$  denota a transformada de Fourier de  $q(s, t)$ . Esta é a condição de contorno que deve ser aplicada à equação (2.7), que governa o campo de perturbação de pressão.

## 2.2 - A IDENTIDADE INTEGRAL DE GREEN

A fim de expressar (2.7) e (2.12) como uma equação integral de contorno, é necessário estabelecer um teorema integral envolvendo o operador  $\mathcal{L}(y_c)$ , análogo à identidade de Green do cálculo vetorial (Hildebrand, 1965). O teorema integral relaciona certos produtos internos de funções de valores complexos (Friedman, 1956) definidas sobre uma região oceânica  $B$ . Definimos o produto interno de duas funções complexas  $f, g$  da posição  $\vec{r} = (x, y)$  como

$$\langle f, g \rangle = \iint_B f g^* dx dy, \quad (2.13)$$

onde o asterisco denota o complexo conjugado. Muitos autores que trabalham com o método dos elementos de contorno (Brebbia et al., 1984) costumam definir o produto interno sem o asterisco em (2.13), mesmo quando estão lidando com funções incógnitas de valores complexos como  $p(x, y, \omega)$ . Adotamos a definição (2.13), que é padrão no trabalho com espaços vetoriais complexos (Friedman, 1956).

Usando (2.13) e a definição (2.8) do operador

$\mathcal{L}(y_c)$ , pode-se calcular  $\langle \mathcal{L}(y_c)f, g \rangle$ . Integrando por partes duas vezes, e usando o teorema da divergência, obtém-se a seguinte relação, que chamaremos de "identidade de Green para o operador  $\mathcal{L}(y_c)$ ":

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(y_c)f, g \rangle + \langle f, \mathcal{L}(y_c^*)g \rangle = \\ = \oint_{\Gamma} (y^2 - y_c^2)^{-1} [f(iy_c \hat{n} - y \hat{s}) \cdot \nabla g^* - \\ - g^*(iy_c \hat{n} + y \hat{s}) \cdot \nabla f] ds. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Na linguagem de álgebra linear, vê-se claramente de (2.14) que o operador  $-\mathcal{L}(y_c^*)$  é o adjunto de  $\mathcal{L}(y_c)$  (Friedman, 1956). Como estes dois operadores não são iguais, o problema em consideração é dito não-auto-adjunto.

### 2.3 - A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA EQUAÇÃO DA MARÉ DE LAPLACE

Suponha que o termo de fonte  $S$  em (2.7) está concentrado em um ponto arbitrário  $\vec{r}' = (x', y')$ ,

$$S = S(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.15)$$

onde  $\delta$  denota a função delta de Dirac. A perturbação de pressão resultante é chamada a solução fundamental de (2.7), e será denotada por  $G(y_c; \vec{r}; \vec{r}')$ , ou simplesmente por  $G(\vec{r}; \vec{r}')$  quando for claro do contexto que se considera uma frequência fixa:

$$\mathcal{L}(y_c)G(y_c; \vec{r}; \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.16)$$

A fim de especificar uma solução única, escolhemos para a solução fundamental a condição de contorno usual

$$G(y_c; \vec{r}; \vec{r}') \rightarrow 0, \quad |\vec{r}| \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

Em nossa notação para  $G$ , adotamos a convenção de que o primeiro vetor posição denota um ponto de observação, enquanto que o segundo indica a posição da fonte.

A maioria das soluções fundamentais encontradas na literatura refere-se a problemas auto-adjuntos. Neste caso, a reversão dos papéis de fonte e ponto de observação é equivalente a tomar o complexo conjugado da solução fundamental. A solução fundamental definida acima admite também uma relação de simetria, ainda que o operador envolvido não seja auto-adjunto (Seção 2.2). A relação de simetria pode ser determinada escolhendo

$$f(\vec{r}) = G(y_c; \vec{r}; \vec{r}_1), \quad g(\vec{r}) = G(y_c^*; \vec{r}; \vec{r}_2) \quad (2.18)$$

na identidade integral (2.14), e tomando  $B$  como o plano inteiro  $-\infty < x, y < \infty$ . A integral de contorno em (2.14) se anulará contanto que a solução fundamental tenda a zero suficientemente depressa quando  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ . Mais tarde (Seção 5.4), veremos que  $G$  decai exponencialmente em todas as direções do plano,<sup>1</sup> de modo que a integral de contorno em (2.14) de fato se anula. Usando (2.18) e a definição (2.16) na identidade (2.14), obtemos facilmente a relação de simetria procurada:

$$G(y_c; \vec{r}_1; \vec{r}_2) = -[G(y_c^*; \vec{r}_2; \vec{r}_1)]^*. \quad (2.19)$$

Esta relação é importante para a derivação das representações integrais discutidas na próxima seção.

---

<sup>1</sup> Isto só será estritamente válido na presença de fricção ( $A > 0$ ).

## 2.4 - REPRESENTAÇÕES INTEGRAIS

A identidade de Green (2.14) pode ser usada para obter uma representação integral para o campo de pressão. Escolhendo  $f = p(x, y, \omega)$  em (2.14), e deixando  $g$  arbitrária por enquanto, vemos de (2.7) que o primeiro termo à esquerda em (2.14) torna-se  $\langle S, g \rangle$ . Este termo depende apenas do campo forçante  $\vec{F}$ . Em vista de (2.12), o segundo termo no integrando em (2.14) pode ser escrito em termos de  $\vec{F}$  e  $q$ . Os termos restantes no teorema de Green envolverão  $p$ , mas não as derivadas de  $p$ . Uma forma particularmente interessante para o segundo termo em (2.14) é obtida quando escolhermos a função arbitrária  $g$  como

$$g(\vec{r}) = -G(y_c^*; \vec{r}; \vec{r}'). \quad (2.20)$$

Temos

$$\begin{aligned} \langle p, \mathcal{L}(y_c^*)g \rangle &= -\langle p, \mathcal{L}(y_c^*)G(y_c^*; \vec{r}; \vec{r}') \rangle \\ &= -\langle p, \delta(\vec{r} - \vec{r}') \rangle = -p(\vec{r}'), \end{aligned} \quad (2.21)$$

sempre que  $\vec{r}'$  esteja no interior de  $B$  (note que o resultado do cálculo acima é zero se  $\vec{r}'$  está no exterior de  $B$ ). Usando a relação de simetria (2.19), obtém-se após alguma álgebra a seguinte representação integral para o campo de pressão no interior do oceano, em termos da distribuição de pressões ao longo do contorno  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} p(\vec{r}') &= \oint_{\Gamma} p(\vec{r}) \vec{K}(\vec{r}'; \vec{r}) \cdot \hat{n}(s) ds - \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho_0 c \oint_{\Gamma} q(s) G(y_c; \vec{r}'; \vec{r}) ds - \end{aligned}$$

$$- \gamma^{-1} \iint_B \vec{K}(\vec{r}'; \vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}) dx dy, \quad (2.22)$$

onde o vetor  $\vec{K}$  é definido por

$$\vec{K}(\vec{r}'; \vec{r}) = -(\gamma^2 - \gamma_c^2)^{-1} (i\gamma_c + \gamma \hat{z} \times) \nabla G(\gamma_c; \vec{r}'; \vec{r}). \quad (2.23)$$

Note que o vetor  $\vec{r}$  que aparece nas integrais de linha em (2.22) varia ao longo da fronteira,  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ . Note também que o operador gradiente em (2.23) age sobre a posição da fonte, e não sobre o ponto de observação, como em (2.16).

A representação integral (2.22) é uma formulação alternativa do problema de valores de contorno geral para as equações de água rasa, descrito na Seção 2.1. Fisicamente, (2.22) afirma que o campo de pressão em um ponto arbitrário  $\vec{r}'$  dentro da região  $B$  é determinado pelos seguintes fatores: (a) as perturbações de pressão ao longo da fronteira, (b) a distribuição dos fluxos normais através do contorno, e (c) o campo forçante sobre a região considerada. A influência de cada um destes fatores, agindo em um ponto qualquer  $\vec{r}$  é "propagada" até o ponto  $\vec{r}'$  através dos núcleos  $G(\gamma_c; \vec{r}'; \vec{r})$  e  $\vec{K}(\vec{r}'; \vec{r})$ , que aparecem na representação integral (2.22). Portanto, se a distribuição de pressões ao longo do contorno é conhecida, a pressão em qualquer ponto interior  $\vec{r}'$  pode ser computada diretamente de (2.22), contanto que se possa calcular os núcleos que aparecem nesta equação. Uma discussão completa sobre a computação dos núcleos será apresentada ao longo dos Capítulos 3, 4 e 5. A distribuição de pressões ao longo do contorno é obtida pela solução de uma equação integral de contorno. Na Seção 6.2, esta equação é derivada de (2.22) fazendo o ponto  $\vec{r}'$  aproximar-se do contorno  $\Gamma$ .

O conhecimento das pressões ao longo do contorno permite também a computação do campo de

velocidades no interior do oceano. Substituindo o valor de  $p$  dado por (2.22) na equação (2.5), obtém-se uma representação integral para a velocidade,

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{r}') = & \frac{2}{\rho_0 c} \left[ \gamma^{-1} (y'^2 - y_c^2)^{-1} (iy_c - y' \hat{z} \times) \vec{F}(\vec{r}') + \right. \\ & + \gamma^{-1} \iint_B \mathcal{D}(\vec{r}'; \vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}) dx dy - \\ & \left. - \oint_{\Gamma} p(\vec{r}) \mathcal{D}(\vec{r}'; \vec{r}) \cdot \hat{n}(s) ds \right] - \\ & - \oint_{\Gamma} q(s) \vec{J}(\vec{r}'; \vec{r}) ds, \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde o vetor  $\vec{J}$  e o tensor  $\mathcal{D}$  são dados por

$$\vec{J}(\vec{r}'; \vec{r}) = -(y'^2 - y_c^2)^{-1} (iy_c - y' \hat{z} \times) \nabla' G(y_c; \vec{r}'; \vec{r}), \quad (2.25)$$

$$\mathcal{D}(\vec{r}'; \vec{r}) = (y'^2 - y_c^2)^{-1} (iy_c - y' \hat{z} \times) \nabla' \vec{K}(\vec{r}'; \vec{r}). \quad (2.26)$$

A solução fundamental  $G$ , os vetores  $\vec{K}$  e  $\vec{J}$ , e o tensor  $\mathcal{D}$  são as funções de influência básicas do problema do movimento de um oceano linear equatorial sobre o plano- $\beta$ . Como evidenciado por (2.22) e (2.24), o uso destas funções constitui uma maneira sistemática de representar soluções das equações de água rasa (2.2) e (2.3).



CAPÍTULO 3NÚCLEOS (1)3.1 - INTRODUÇÃO

Veremos neste capítulo que a equação da maré de Laplace sobre o plano- $\beta$ , Eq. (2.7), pode ser resolvida exatamente com o termo de fonte  $S = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$ , o que permite obter expressões analíticas para a solução fundamental e, por diferenciação, para as demais funções de influência. A solução fundamental pode ser representada como uma integral de Fourier, que se transforma facilmente em uma expansão em termos de ondas equatoriais livres. Este tipo de representação em série, ainda que mais conveniente para a interpretação física da solução fundamental do que a integral de Fourier, é insatisfatório para a computação numérica da função. De fato, em problemas de oceanografia equatorial é bastante comum encontrar expansões em ondas equatoriais livres que convergem muito lentamente (Cane e Patton, 1984; Boyd e Moore, 1986). Por esta razão, uma discussão completa sobre as técnicas de computação das funções de influência deve ser adiada para depois da discussão de uma teoria geral sobre a computação de funções definidas por expansões em ondas equatoriais (Capítulo 4).

3.2 - ESTRUTURA LATITUDINAL DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

A equação diferencial parcial (2.16), que define a solução fundamental  $G(y_c; \vec{r}; \vec{r}')$ , tem coeficientes que dependem apenas de  $y$ . Portanto, podemos tratar (2.16) aplicando uma transformada de Fourier na direção zonal,

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx. \quad (3.1)$$

A versão transformada de (2.16) é a equação diferencial ordinária

$$\frac{d}{dy} [(y^2 - y_c^2)^{-1} \frac{d}{dy} G(\alpha, y; \vec{r}')] - \left[ \frac{1}{4} + \frac{\alpha(\alpha+1/y_c)}{y^2 - y_c^2} + \frac{2\alpha y_c}{(y^2 - y_c^2)^2} \right] G(\alpha, y; \vec{r}') = (i/y_c) e^{i\alpha x'} \delta(y - y'). \quad (3.2)$$

(Por brevidade, omitimos o argumento  $y_c$  na solução fundamental). Para construir a solução de (3.2) que é compatível com as condições de contorno (2.17), precisamos de uma solução  $h(y)$  da equação homogênea associada com (3.2), que tenda a zero com  $y \rightarrow \infty$  (Butkov, 1968). Pela simetria de (3.2),  $h(-y)$  será uma segunda solução que se anula quando  $y \rightarrow -\infty$ . Pode-se verificar que uma solução da equação homogênea com o comportamento desejado quando  $y \rightarrow \infty$  é

$$h(y) = \alpha(y/y_c)U(a, y) - U'(a, y), \quad (3.3)$$

onde  $U(a, y)$  denota uma função do cilindro parabólico (Abramowitz e Stegun, 1965),  $U'(a, y) = \partial U(a, y) / \partial y$ , e

$$a = \alpha \left( \alpha + \frac{1}{y_c} \right) - \frac{1}{4} y_c^2. \quad (3.4)$$

A solução da equação inhomogênea (3.2) é então (Vianna, 1988)

$$G(\alpha, y; \vec{r}') = \frac{1}{iy_c} e^{i\alpha x'} (y'^2 - y_c^2) \frac{h(-\sigma_y y') h(\sigma_y y)}{W(y')}, \quad (3.5)$$

onde

$$\sigma_y = \text{sgn}(y - y') \quad (3.6)$$

e  $W(y')$  denota o Wronskiano de  $h(y')$  e  $h(-y')$ . Usando as propriedades

$$U(a, y) \frac{\partial}{\partial y} U(a, -y) - U(a, -y) \frac{\partial}{\partial y} U(a, y) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{\Gamma(a+1/2)}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} U(a, y) = \left( \frac{1}{4} y^2 + a \right) U(a, y), \quad (3.8)$$

pode-se calcular o Wronskiano de  $h(y')$  e  $h(-y')$ :

$$W(y') = (2\pi)^{1/2} \frac{[1 - (2\alpha/Y_c)^2]}{4\Gamma(a+1/2)} (y'^2 - Y_c^2). \quad (3.9)$$

### 3.3 - RAÍZES ESPÚRIAS

Em (3.5), o numerador e o denominador apresentam um fator comum  $(1+2\alpha/Y_c)^2$ , que corresponde à raiz espúria  $\alpha = -Y_c/2$  das relações de dispersão do plano- $\beta$  equatorial (Matsuno, 1966). Para tornar aparente este fator, é conveniente expressar  $h(y)$  em termos de funções do cilindro parabólico de ordem  $a+1$ , e expressar a função  $\Gamma(a+1/2)$  em (3.9) em termos de  $\Gamma(a+3/2)$ . Podemos usar as seguintes relações de recorrência, que derivam daquelas dadas em Abramowitz e Stegun (1965):

$$U(a, y) = \frac{1}{2} y U(a+1, y) - U'(a+1, y), \quad (3.10)$$

$$U'(a, y) = \frac{1}{2} y U'(a+1, y) - \left( \frac{1}{4} y^2 + a + \frac{1}{2} \right) U(a+1, y). \quad (3.11)$$

Substituindo estas relações em (3.3), obtemos

$$h(y) = \left[ \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2\alpha}{Y_c} \right) y^2 + a + \frac{1}{2} \right] U(a+1, y) -$$

$$- \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2\alpha}{y_c} \right) y U'(a+1, y). \quad (3.12)$$

Em virtude de (3.4),

$$a + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2\alpha}{y_c} \right) \left[ 1 + y_c \left( \alpha - \frac{1}{2} y_c \right) \right]. \quad (3.13)$$

Portanto

$$h(y) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2\alpha}{y_c} \right) \bar{h}(y), \quad (3.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{h}(y) = & \left[ \frac{1}{2} y^2 + y_c \left( \alpha - \frac{1}{2} y_c \right) + 1 \right] U(a+1, y) - \\ & - y U'(a+1, y). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Quanto à função gama, temos, em vista de (3.13):

$$\begin{aligned} \Gamma(a+1/2) &= \frac{\Gamma(a+3/2)}{a+1/2} = \\ &= \frac{2\Gamma(a+3/2)}{(1+2\alpha/y_c) [1 + y_c (\alpha - y_c/2)]}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Usando esta expressão em (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{W(y')}{y'^2 - y_c^2} &= (2\pi)^{1/2} \times \\ &\times \frac{(1+2\alpha/y_c)^2 (1-2\alpha/y_c) [1+y_c (\alpha - y_c/2)]}{8\Gamma(a+3/2)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Substituindo (3.14) e (3.17) em (3.5), obtemos a seguinte expressão para a transformada de Fourier da solução fundamental:

$$G(\alpha, y; \vec{r}') = \frac{i\Gamma(a+3/2)e^{i\alpha x'} \bar{h}(\sigma_y y) \bar{h}(-\sigma_y y')}{(2\pi)^{1/2}(\alpha - y_c/2)[1 + y_c(\alpha - y_c/2)]} . \quad (3.18)$$

### 3.4 - EXPANSÕES EM ONDAS EQUATORIAIS LIVRES

A solução fundamental é dada pela transformada inversa de Fourier:

$$G(\vec{r}; \vec{r}') = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} G(\alpha, y; \vec{r}') d\alpha. \quad (3.19)$$

Para calcular (3.19) pelo método dos resíduos, é preciso estudar as singularidades de  $G(\alpha, y; \vec{r}')$  no plano da variável complexa  $\alpha$ . Em (3.18),  $\bar{h}(\sigma_y y)$  e  $\bar{h}(-\sigma_y y')$  são funções analíticas de  $\alpha$ . A função  $\Gamma(z)$  tem pólos simples em  $z = -m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , com resíduo  $(-1)^m/m!$ . Portanto (3.18) terá pólos simples quando  $a+3/2 = -m$ , i.e.,

$$\alpha = \alpha_m^\pm = -\frac{1}{2y_c} \pm i\left(m + \frac{3}{2} - Q\right)^{1/2},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

onde

$$Q = \frac{1}{4}(y_c^2 + y_c^{-2}). \quad (3.21)$$

Os demais pólos simples de (3.18) são claramente

$$\alpha = \alpha_k = \frac{1}{2y_c'}, \quad \alpha = \alpha_y = \frac{1}{2y_c} - \frac{1}{y_c}. \quad (3.22)$$

Estes pólos correspondem aos modos de Kelvin e misto Rossby-gravidade (ou modo de Yanai), respectivamente. Quando a dissipação é pequena ( $\Delta\omega \ll \omega$ ), os pólos (3.22) ficam próximos do eixo real, na metade inferior do plano- $\alpha$ , correspondendo a modos propagatórios. Os pólos  $\alpha_m^+$  ( $\alpha_m^-$ )

situam-se na metade superior (inferior) do plano- $\alpha$  (v. Figura 3.1). Se  $\Delta\omega \ll \omega$ , os primeiros  $M_Q = \lceil \text{Re } Q - 1/2 \rceil$  pares de pólos  $\alpha_m^\pm$  (os colchetes  $\lceil \rceil$  denotam a parte inteira) ficam próximos do eixo real, correspondendo aos modos propagatórios de Rossby (gravidade) quando a frequência é baixa (alta) o suficiente. Neste caso, os pólos com  $m \geq M_Q$  representam modos fortemente amortecidos na direção- $x$ .

Calculemos os resíduos de  $f(\alpha) = e^{-i\alpha x} G(\alpha, y; \vec{r}')$  nos pólos (3.20) e (3.22):

1) Resíduo em  $\alpha = \alpha_k$

Quando  $\alpha = y_c/2$ , temos  $a = 1/2$ ,  $\Gamma(a+3/2) = \Gamma(2) = 1$ , e

$$\tilde{h}(y) = \left(\frac{1}{2} y^2 + 1\right) U(3/2, y) - y U'(3/2, y). \quad (3.23)$$

Empregando as identidades (Abramowitz e Stegun, 1965)

$$U'(b+1, y) - \frac{1}{2} y U(b+1, y) + U(b, y) = 0,$$

$$y U(b, y) - U(b-1, y) + \left(b + \frac{1}{2}\right) U(b+1, y) = 0 \quad (3.24)$$

com  $b = 1/2$ , obtemos

$$\tilde{h}(y) = U(-1/2, y) = \pi^{1/4} \psi_0(y/\sqrt{2}), \quad (3.25)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi_m(z) &= (m! \sqrt{\pi})^{-1/2} U(-(m+1/2), \sqrt{2}z) = \\ &= (2^m m! \sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-z^2/2} H_m(z) \end{aligned} \quad (3.26)$$

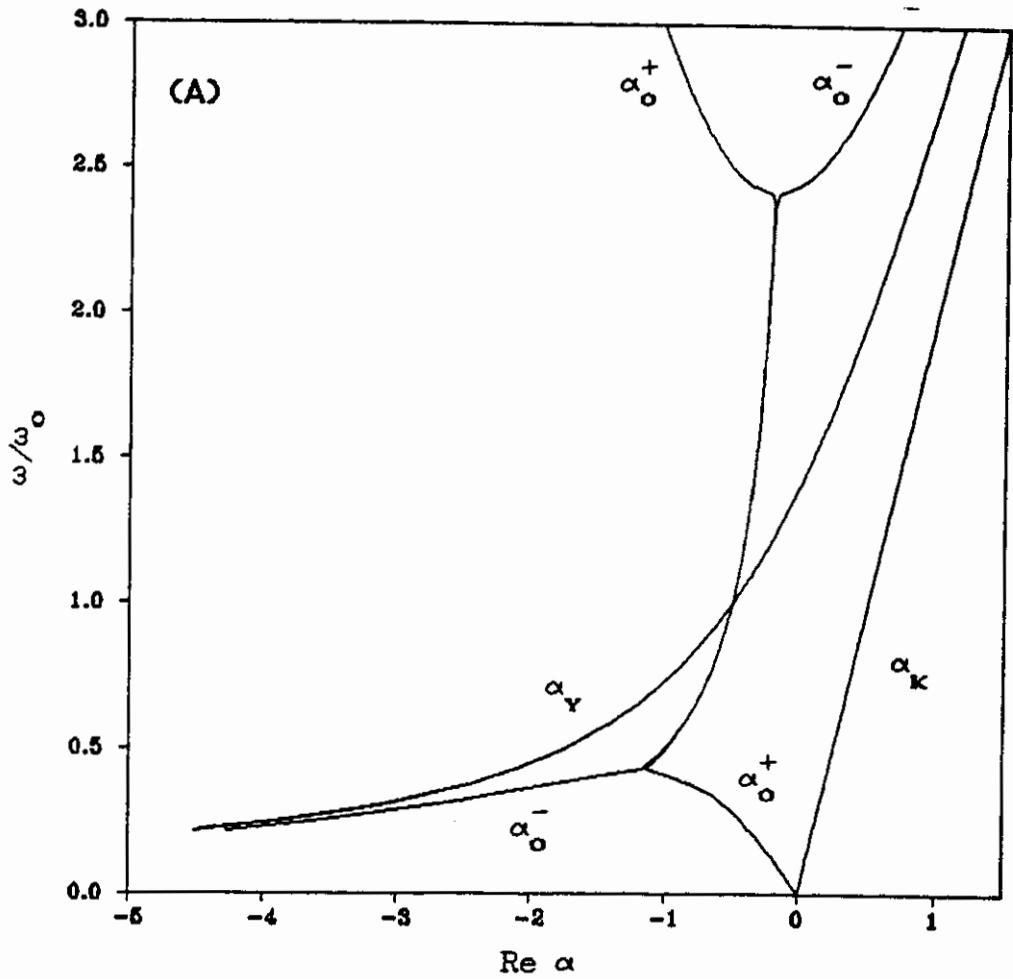


Fig. 3.1 - Pólos de  $G(\alpha, \gamma; \vec{r}')$  em função da frequência adimensional.

A escala de frequência é dada por  $\omega_0 = \beta/\gamma = (\beta c/2)^{1/2}$ , onde  $c$  é o autovalor vertical. (a) parte real; (b) parte imaginária. Para maior clareza, somente o primeiro modo de Rossby ( $\alpha_0^\pm$ ) é mostrado; os demais modos têm um comportamento similar.

(continua)

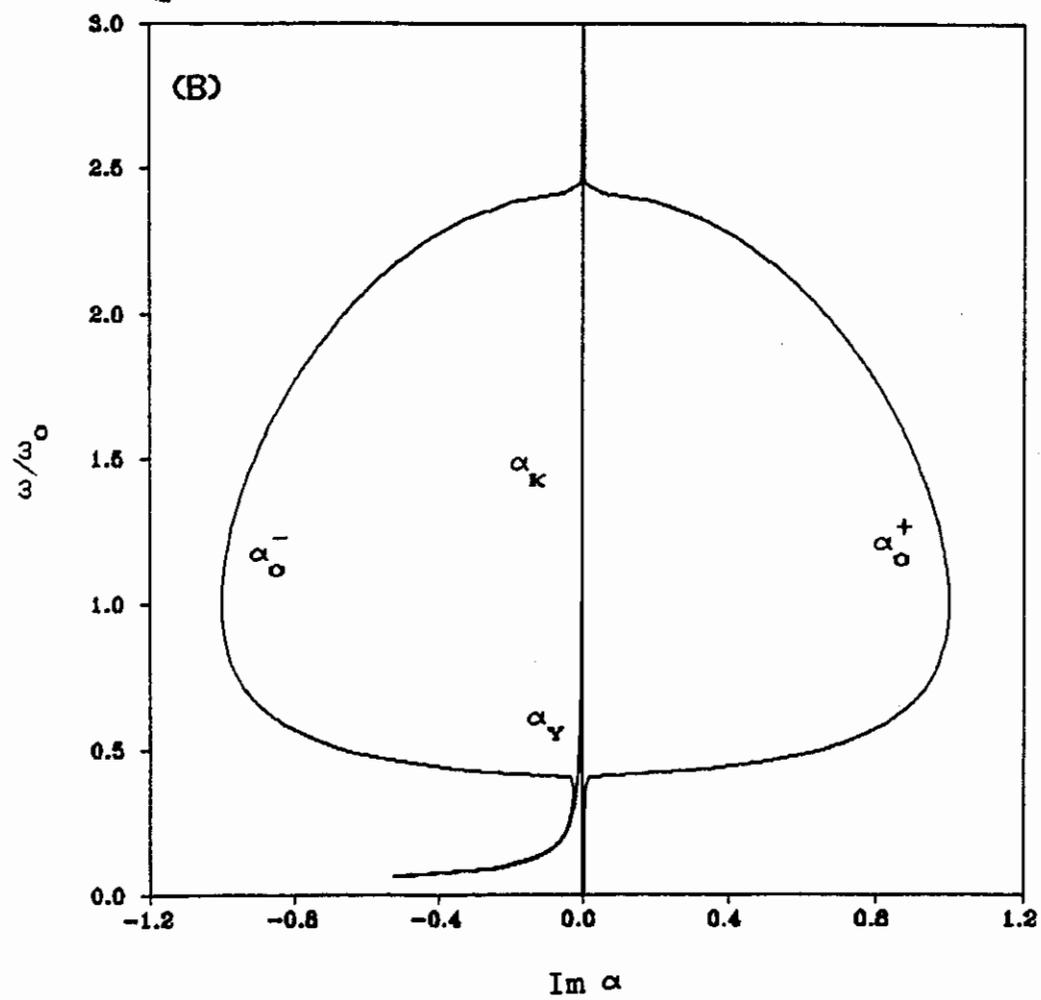


Fig. 3.1 - Conclusão.

denota a função de Hermite de ordem  $m$ . Logo, por (3.18),

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_k} &= \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha_k(x-x')} \times \\ &\times \psi_0(y/\sqrt{2})\psi_0(y'/\sqrt{2}), \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde usamos o fato de  $\psi_m$  ser uma função par quando  $m$  é par e uma função ímpar quando  $m$  é ímpar.

2) Resíduo em  $\alpha = \alpha_y$

Quando  $\alpha = y_c/2 - 1/y_c$ , temos  $a = -1/2$ ,  $\Gamma(a+3/2) = \Gamma(1) = 1$ , e

$$\tilde{h}(y) = \frac{1}{2} y^2 U(1/2, y) - y U'(1/2, y). \quad (3.28)$$

Usando (3.24) com  $b = -1/2$ , obtemos

$$\tilde{h}(y) = U(-3/2, y) = \pi^{1/4} \psi_1(y/\sqrt{2}). \quad (3.29)$$

Portanto, resulta de (3.18) que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_y} &= \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha_y(x-x')} \times \\ &\times \psi_1(y/\sqrt{2})\psi_1(y'/\sqrt{2}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

3) Resíduo em  $\alpha = \alpha_m^\pm$

Quando  $\alpha \rightarrow \alpha_m^\pm$ , temos  $a+3/2 \rightarrow -m$ , o que implica que (Abramowitz e Stegun, 1965)

$$\Gamma(a+3/2) - \frac{(-1)^m}{m!(a+3/2+m)} = \frac{(-1)^m}{m!(\alpha-\alpha_m^+)(\alpha-\alpha_m^-)}. \quad (3.31)$$

A função  $\tilde{h}(y)$  reduz-se a

$$\begin{aligned} \tilde{h}(y) = & \left( \frac{1}{2} y^2 + y_c \gamma_m^\pm + 1 \right) U(-m-1/2, y) - \\ & - y U'(-m-1/2, y), \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde

$$\gamma_m^\pm = \alpha_m^\pm - \frac{1}{2} y_c. \quad (3.33)$$

Empregando as relações de recorrência

$$\begin{aligned} (m+1)U(-m-1/2, y) - \frac{1}{2} y U(-m-3/2, y) + \\ + U'(-m-3/2, y) = 0, \\ (m+1)U'(-m-1/2, y) - \left( \frac{1}{4} y^2 - m - 1 \right) U(-m-3/2, y) - \\ - \frac{1}{2} y U'(-m-3/2, y) = 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

que se obtém de (3.10) e (3.11) com  $a = -(m+3/2)$ , a expressão (3.32) torna-se

$$\begin{aligned} \tilde{h}(y) = & \left[ 1 + \frac{1+y_c \gamma_m^\pm}{2(m+1)} \right] y U(-m-3/2, y) + \\ & + \frac{1+y_c \gamma_m^\pm}{m+1} U'(-m-3/2, y) = \\ = & (m! \sqrt{\pi})^{1/2} \phi_m^\pm(y), \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde

$$\phi_m^\sigma(y) = \left[ \sqrt{m+1} + \frac{1+y_c \gamma_m^\sigma}{2\sqrt{m+1}} \right] y \psi_{m+1}(y/\sqrt{2}) +$$

$$+ \frac{1+y_c \gamma_m^\sigma}{\sqrt{2(m+1)}} \psi'_{m+1}(Y/\sqrt{2}). \quad (3.36)$$

Usando (3.31), (3.33) e (3.35) em (3.18), obtemos finalmente

$$\text{Res } f(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_m^\pm} = \pm \frac{i e^{-i\alpha_m^\pm(x-x')} \phi_m^\pm(Y) \phi_m^\pm(Y')}{\sqrt{2} \gamma_m^\pm (1+y_c \gamma_m^\pm) (\gamma_m^+ - \gamma_m^-)}. \quad (3.37)$$

A fim de expressar a integral (3.19) como uma soma de resíduos, precisamos ainda estudar o comportamento assintótico de  $f(\alpha)$  quando  $|\alpha| \rightarrow \infty$ . A esse respeito, valem os seguintes resultados, que serão demonstrados mais adiante na Seção 4.9:

$$f(\alpha) \sim \frac{i}{2y_c \alpha} \exp[-i\alpha(x-x') - (a+1)^{1/2}|y-y'|] \times \\ \times \left[ \frac{a^{1/2}}{\alpha} (y_c^2 - yy') + y_c |y-y'| \right], \\ |\arg \alpha^2| < \frac{\pi}{2}, \quad (3.38)$$

$$f(\alpha) \sim \frac{1}{4iy_c \alpha} \frac{e^{-i\alpha(x-x')}}{\sin \pi(a+3/2)} \times \\ \times \left[ \frac{(-a)^{1/2}}{\alpha} (y_c^2 CC' + yy' SS') - \right. \\ \left. - \sigma_y y_c (ySC' - y'CS') \right], \\ |\arg(-\alpha^2)| < \frac{\pi}{2}, \quad (3.39)$$

onde

$$C = \cos [\pi(a+3/2)/2 + (-a-1)^{1/2} \sigma_y y],$$

$$\begin{aligned}
 S &= \sin [\pi(a+3/2)/2 + (-a-1)^{1/2}\sigma_y y], \\
 C' &= \cos [\pi(a+3/2)/2 - (-a-1)^{1/2}\sigma_y y'], \\
 S' &= \sin [\pi(a+3/2)/2 - (-a-1)^{1/2}\sigma_y y']. \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Consideremos primeiro o caso  $|\arg \alpha^2| < \pi/2$ . Uma vez que  $a \sim \alpha^2$  quando  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , conclui-se que os termos entre colchetes em (3.38) são  $O(1)$  com  $\alpha \rightarrow \infty$ . Além disso, como  $\operatorname{Re} (a+1)^{1/2} \rightarrow +\infty$ , o fator exponencial em (3.38) tenderá a zero para  $|x-x'|$  fixo e arbitrariamente grande somente se

$$\operatorname{sgn} (x-x') \operatorname{Im} \alpha \rightarrow -\infty \quad (3.41)$$

quando  $|\alpha| \rightarrow \infty$ .

Para descrever o comportamento assintótico no caso  $|\arg (-\alpha^2)| < \pi/2$ , é conveniente dividir a porção do plano- $\alpha$  onde esta condição se cumpre em dois domínios A e B, definidos por

$$\begin{aligned}
 A: \quad & \frac{\pi}{4} < \arg \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{3\pi}{4} < \arg \alpha < -\frac{\pi}{2}, \\
 B: \quad & \frac{\pi}{2} < \arg \alpha < \frac{3\pi}{4} \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi}{2} < \arg \alpha < -\frac{\pi}{4}. \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

O comportamento assintótico das funções trigonométricas que aparecem em (3.39) é dado por

$$\begin{aligned}
 \sin \pi(a+3/2) & \sim \pm \frac{i}{2} \exp [\mp i\pi(a+3/2)], \\
 C & \sim \frac{1}{2} \exp [\mp i\pi(a+3/2)/2 \mp i(-a-1)^{1/2}\sigma_y y], \\
 S & \sim \pm \frac{i}{2} \exp [\mp i\pi(a+3/2)/2 \mp i(-a-1)^{1/2}\sigma_y y]
 \end{aligned}$$

$$C' = \frac{1}{2} \exp [\mp i\pi(a+3/2)/2 \pm i(-a-1)^{1/2}\sigma_y y'],$$

$$S' = \pm \frac{i}{2} \exp [\mp i\pi(a+3/2)/2 \pm i(-a-1)^{1/2}\sigma_y y'], \quad (3.43)$$

onde o sinal superior se refere ao caso  $|\alpha| \rightarrow \infty$  no domínio A e o sinal inferior ao caso  $|\alpha| \rightarrow \infty$  no domínio B. Portanto,

$$\frac{CC'}{\sin \pi(a+3/2)} = \mp \frac{i}{2} \exp [\mp i(-a-1)^{1/2}|y-y'|], \quad (3.44)$$

com estimativas similares para os termos  $SC'$ ,  $CS'$  e  $SS'$  que aparecem em (3.39). Já que a parte real do expoente na expressão acima tende a  $-\infty$  para ambas as escolhas possíveis do sinal, concluímos que os termos

$$\frac{CC'}{\sin \pi(a+3/2)}, \quad \frac{SC'}{\sin \pi(a+3/2)},$$

$$\frac{CS'}{\sin \pi(a+3/2)}, \quad \frac{SS'}{\sin \pi(a+3/2)} \quad (3.45)$$

serão exponencialmente pequenos quando  $|\alpha| \rightarrow \infty$  com  $|\arg(-\alpha^2)| < \pi/2$ . Entretanto, a fim de que  $f(\alpha)$  tenda a zero neste domínio para qualquer valor fixado de  $|x-x'|$ , arbitrariamente grande, é necessário que se cumpra a condição (3.41).

Em resumo, a função  $f(\alpha)$  será exponencialmente pequena quando  $|\alpha| \rightarrow \infty$  no semi-plano definido pela condição  $\text{sgn}(x-x') \text{Im } \alpha < 0$ . Portanto, a integral em (3.19) será igual a  $i$  vezes a soma dos resíduos de  $f(\alpha)$  nos pólos situados no semi-plano superior quando  $x < x'$ , e igual a  $-i$  vezes a soma dos resíduos de  $f(\alpha)$  nos pólos situados no semi-plano inferior quando  $x > x'$ . Em vista da discussão sobre a posição dos pólos no plano- $\alpha$  e das expressões (3.27), (3.30) e (3.37) para os resíduos de  $f(\alpha)$ , obtém-se imediatamente a seguinte expansão para a

solução fundamental em ondas equatoriais livres:

$$\begin{aligned}
 G(\vec{r}; \vec{r}') = & \frac{(1-\sigma)}{2\sqrt{2}} \left[ e^{-i\alpha_K(x-x')} \psi_0(Y/\sqrt{2}) \psi_0(Y'/\sqrt{2}) + \right. \\
 & \left. + e^{-i\alpha_Y(x-x')} \psi_1(Y/\sqrt{2}) \psi_1(Y'/\sqrt{2}) \right] - \\
 & - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_m^\sigma(x-x')} \phi_m^\sigma(Y) \phi_m^\sigma(Y')}{\gamma_m^\sigma (1+y_c \gamma_m^\sigma) (\gamma_m^+ - \gamma_m^-)}, \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

onde

$$\sigma = \text{sgn}(x'-x). \quad (3.47)$$

A interpretação física de (3.46) no caso de pequena dissipação ( $\Delta\omega \ll \omega$ ) é a seguinte: quando o ponto de observação  $\vec{r}$  situa-se a leste da fonte em  $\vec{r}'$ , os primeiros dois termos representam as ondas de Kelvin e Yanai, respectivamente, que são emitidas pela fonte em direção a  $\vec{r}$ . Os termos com  $m = 0, 1, \dots, M_0 - 1$  representam ondas de Rossby curtas ou ondas de gravidade com velocidade de grupo para leste, dependendo da frequência. Quando  $\vec{r}$  situa-se a oeste de  $\vec{r}'$ , os primeiros dois termos de (3.46) estão obviamente ausentes; os termos com  $m = 0, 1, \dots, M_0 - 1$  representam ondas de Rossby longas ou ondas de gravidade com velocidade de grupo para oeste, dependendo da frequência. Os termos com  $m \geq M_0$  representam um conjunto de modos amortecidos, cuja amplitude está concentrada próximo ao meridiano da fonte  $x = x'$ .

De (3.20) e (3.46), vemos que a amplitude do modo amortecido de índice  $m$  decai para  $e^{-1}$  do seu valor em  $x = x'$  a uma distância não-dimensional  $[\text{Re}(m+3/2-Q)^{1/2}]^{-1}$  do meridiano. Esta observação é importante para a computação numérica de (3.46). De fato, se a dissipação é

pequena, é suficiente truncar a série em

$$m \approx \operatorname{Re} Q + [b/(x-x')]^2, \quad (3.48)$$

onde  $b$  é uma constante positiva, para garantir que o último termo retido tem na longitude  $x$  apenas  $e^{-b}$  de sua amplitude em  $x = x'$ , e que os termos desprezados terão sido ainda mais fortemente amortecidos entre as longitudes  $x'$  e  $x$ . No entanto, (3.48) indica que quando  $x \rightarrow x'$  será necessário reter um número infinito de termos em (3.46). De fato, tentando somar (3.46) termo a termo, verifica-se que a série converge muito lentamente quando  $|x - x'|$  é menor que um ou dois raios de deformação.

Em conclusão, a superposição dos modos amortecidos é bastante complexa perto do meridiano da fonte, sendo necessário incluir as contribuições de um grande número de modos para se obter um valor definido para a solução fundamental. No próximo capítulo, desenvolveremos uma teoria assintótica geral para a computação de expansões em funções de Hermite, que permitirá obter economicamente a soma das expansões de ocorrência mais freqüente em problemas de oceanografia equatorial. No capítulo 5, esta teoria geral será aplicada ao problema da superposição dos modos amortecidos que aparecem nas expansões das funções de influência em ondas equatoriais livres. Os resultados acima mencionados são essenciais para a implementação prática do método dos elementos de contorno.

Usando (3.46) nas definições (2.23), (2.25) e (2.26), é possível expandir os núcleos  $\vec{K}$ ,  $\vec{J}$  e  $\mathcal{D}$  em séries de funções de Hermite. Com o auxílio das relações de recorrência das funções de Hermite, pode-se mostrar que

$$(y^2 - y_c^2)^{-1} (iy_c \pm y\hat{z} \times) \nabla [e^{\pm i\alpha_m^\sigma x} \phi_m^\sigma(y)] =$$

$$= \pm e^{\pm i\alpha_m^\sigma x} [\zeta_m^\sigma(y) \hat{x} \pm i\theta_m^\sigma(y) \hat{y}], \quad (3.49)$$

onde

$$\begin{aligned} \zeta_m^\sigma(y) = & - \frac{1+y_c \gamma_m^\sigma}{4\sqrt{m+1}} y \psi_{m+1}(y/\sqrt{2}) - \\ & - \left[ \sqrt{m+1} + \frac{1+y_c \gamma_m^\sigma}{2\sqrt{m+1}} \right] \psi'_{m+1}(y/\sqrt{2}), \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\theta_m^\sigma(y) = \sqrt{m+1} \gamma_m^\sigma \psi_{m+1}(y/\sqrt{2}). \quad (3.51)$$

A identidade (3.49) implica que os fatores  $(y^2 - y_c^2)^{-1}$ ,  $(y'^2 - y_c^2)^{-1}$  que aparecem nas definições de  $\vec{K}$ ,  $\vec{J}$  e  $\mathcal{D}$  não introduzem singularidade alguma nestas funções em  $y = \pm y_c$ . As expansões de  $\vec{K}$ ,  $\vec{J}$  e  $\mathcal{D}$  em funções de Hermite são:

$$\begin{aligned} \vec{K}(\vec{r}; \vec{r}') = & \frac{(\sigma-1)}{4\sqrt{2}} \left[ e^{-i\alpha_K(x-x')} \psi_0(y/\sqrt{2}) \psi_0(y'/\sqrt{2}) \hat{x} + \right. \\ & + e^{-i\alpha_Y(x-x')} \psi_1(y/\sqrt{2}) [\psi_1(y'/\sqrt{2}) \hat{x} - \\ & \left. - (2i/y_c) \psi_0(y'/\sqrt{2}) \hat{y}] \right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_m^\sigma(x-x')} \phi_m^\sigma(y) [\zeta_m^\sigma(y') \hat{x} + i\theta_m^\sigma(y') \hat{y}]}{\gamma_m^\sigma (1+y_c \gamma_m^\sigma) (\gamma_m^+ - \gamma_m^-)}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{r}; \vec{r}') = & \frac{(1-\sigma)}{4\sqrt{2}} \left[ e^{-i\alpha_K(x-x')} \psi_0(y'/\sqrt{2}) \psi_0(y/\sqrt{2}) \hat{x} + \right. \\ & \left. + e^{-i\alpha_Y(x-x')} \psi_1(y'/\sqrt{2}) [\psi_1(y/\sqrt{2}) \hat{x} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (2i/y_c) \psi_0(y/\sqrt{2}) \hat{y}] \Big] - \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_m^\sigma(x-x')} \phi_m^\sigma(y') [\zeta_m^\sigma(y) \hat{x} - i\theta_m^\sigma(y) \hat{y}]}{\gamma_m^\sigma(1+y_c \gamma_m^\sigma) (\gamma_m^+ - \gamma_m^-)}, \tag{3.53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\vec{r}; \vec{r}') &= \frac{(1-\sigma)}{8\sqrt{2}} \left[ e^{-i\alpha_K(x-x')} \psi_0(y/\sqrt{2}) \psi_0(y'/\sqrt{2}) \hat{x}\hat{x} + \right. \\
& e^{-i\alpha_Y(x-x')} [\psi_1(y/\sqrt{2}) \hat{x} + \\
& + (2i/y_c) \psi_0(y/\sqrt{2}) \hat{y}] [\psi_1(y'/\sqrt{2}) \hat{x} - \\
& \left. - (2i/y_c) \psi_0(y'/\sqrt{2}) \hat{y}] \right] - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-i\alpha_m^\sigma(x-x')} \times \\
& \times \frac{[\zeta_m^\sigma(y) \hat{x} - i\theta_m^\sigma(y) \hat{y}] [\zeta_m^\sigma(y') \hat{x} + i\theta_m^\sigma(y') \hat{y}]}{\gamma_m^\sigma(1+y_c \gamma_m^\sigma) (\gamma_m^+ - \gamma_m^-)} \tag{3.54}
\end{aligned}$$

(A justaposição de dois vetores, como em (3.54), denota o produto diádico).



CAPÍTULO 4EXPANSÕES EM SÉRIES DE FUNÇÕES DE HERMITE4.1 - INTRODUÇÃO

As funções de Hermite normalizadas  $\psi_m(z)$  desempenham um papel importante em teorias da circulação da atmosfera e dos oceanos em baixas latitudes (Matsuno, 1966; McCreary, 1985). Em teorias linearizadas que empregam a aproximação do plano- $\beta$ , escoamentos arbitrários da atmosfera ou oceano são freqüentemente projetados sobre a base formada pelas funções de Hermite, resultando em séries da forma<sup>1</sup>

$$F(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \psi_m(y/\sqrt{2}). \quad (4.1)$$

A convergência de tais expansões é muitas vezes extremamente lenta,<sup>2</sup> o que causa sérios problemas em simulações numéricas (Cane e Patton, 1984). Recentemente, Boyd e Moore (1986) propuseram o uso de métodos de somabilidade (Hardy, 1956) para acelerar a convergência de (4.1). Os métodos propostos incluem a transformação de Euler e um segundo método a que os autores se referem como "método de Moore", mas que é na realidade o método (Hu,k) de Hutton (Hardy, 1956) com  $k = 4$ . Os métodos de Hutton apareceram em 1812, e sabe-se que qualquer série que é somável (Hu,k) é também somável (com a mesma soma) pelo

---

<sup>1</sup> A notação deste capítulo é independente daquela utilizada no restante do trabalho. Assim,  $F$  e  $G$  nesta seção representam funções arbitrárias, e não o forçamento pelo vento e a solução fundamental.

<sup>2</sup> Expansões em séries de funções de Hermite podem também ser divergentes (Thangavelu, 1989). Alguns exemplos deste tipo de comportamento aparecem neste capítulo; as expansões dos núcleos  $K$ ,  $J$  e  $D$  (Seção 3.4) também divergem quando  $x = x'$  (Capítulo 5).

método de Cesàro  $(C,k)$  (Hardy, 1956). Afirma-se em Boyd e Moore (1986) que os métodos de somabilidade acima nunca falharam em aplicações oceanográficas. Entretanto, os autores não fornecem nem uma explicação para o sucesso dos métodos, nem um conjunto de restrições à sua aplicabilidade. Foi recentemente provado (Markett, 1984; Thangavelu, 1989) que a expansão de Hermite de qualquer função em  $L^p(R)$  é somável pelo método  $(C,k)$  para qualquer  $k > 1/6$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . Em particular, o método  $(C,4)$  pode ser empregado para somar as expansões de Hermite das funções em  $L^p(R)$ , o que sugere que o método  $(Hu,4)$  é capaz de somar uma variedade comparável de expansões.

Na opinião deste autor, a computação da maioria das expansões de Hermite que ocorrem em aplicações poderia ser efetuada com vantagem por métodos mais especializados, que levam em conta informações detalhadas sobre as propriedades dos  $\psi_m(x)$ . Por exemplo, quando se usa a transformação de Euler, não se sabe a priori quantos termos precisam ser retidos na série transformada a fim de computar (4.1) precisamente. Analogamente, no método de Cesàro  $(C,k)$  é preciso construir uma seqüência de médias  $S_m^k$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , que deve convergir para a soma da série, mas não se sabe ao certo até que valor de  $m$  é preciso computar os  $S_m^k$ .

Neste capítulo apresentaremos um método especializado para se obter a soma de expansões de Hermite, o qual se utiliza do comportamento assintótico conhecido de  $\psi_m(x)$  para  $m$  grande (Olver, 1959). As séries e integrais divergentes que aparecem na análise serão somadas por métodos abelianos, que são mais fortes<sup>3</sup> que os métodos de

---

<sup>3</sup> O método de somabilidade (P) é dito mais forte que o método (Q) se toda série somável (Q) é também somável (P), e se existem séries que são somáveis (P) sem serem somáveis (Q).

Cesàro (Hardy, 1956). A idéia básica é transformar o  $M$ -ésimo resto de (4.1) através da fórmula do somatório de Poisson (Henrici, 1977), e calcular a série transformada assintoticamente para  $M$  grande, o que fornece expressões rapidamente convergentes para o resto de (4.1). O presente método permite estimar de antemão o valor mínimo de  $M$  que deve ser empregado para computar (4.1) com precisão. Esta propriedade é importante em aplicações a simulações numéricas, já que permite prever o esforço computacional necessário.

Séries da forma

$$G(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \psi_m(x/\sqrt{2}) \psi_m(y/\sqrt{2}), \quad (4.2)$$

que em vista do capítulo 3 são mais diretamente relevantes para a computação dos núcleos, serão aqui estudadas por métodos análogos aos empregados no tratamento da série (4.1). Todos os resultados assintóticos serão ilustrados com exemplos numéricos.

#### 4.2 - COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS FUNÇÕES DE HERMITE DE ORDEM GRANDE

Denotemos por  $R_M(y)$  o  $M$ -ésimo resto de (4.1),

$$R_M(y) = \sum_{m=M}^{\infty} a_m \psi_m(y/\sqrt{2}). \quad (4.3)$$

Nesta seção, estudaremos o comportamento dos termos de (4.3) quando  $M$  é grande, e usaremos esta informação para derivar uma expansão assintótica para o resto em termos de certas "séries auxiliares", que serão calculadas assintoticamente na Seção 4.3.

As funções de Hermite  $\psi_m(y/\sqrt{2})$  podem ser expressas em termos das funções do cilindro parabólico  $U(-\tilde{m}, y)$  através de (3.26), onde  $\tilde{m} = m+1/2$ . Expansões assintóticas para  $U(w, y)$  quando  $w \rightarrow \infty$  no plano complexo são disponíveis em termos de funções elementares ou em termos de funções de Airy (Olver, 1959). Quando  $w = -\tilde{m} \rightarrow -\infty$ , as expansões do primeiro tipo são válidas para  $|\tau| < 1$ , onde

$$\tau = y/2\tilde{m}^{1/2}, \quad (4.4)$$

isto é, para  $y$  entre os pontos de transição  $y = \pm 2\tilde{m}^{1/2}$  da  $m$ -ésima função de Hermite (Olver, 1974). Por outro lado, as expansões em termos de funções de Airy são válidas para  $\tau > -1$ , o que inclui um ponto de transição, e, pela simetria das funções de Hermite, todo o intervalo  $-\infty < y < \infty$ . Por simplicidade, apesar do maior intervalo de validade das expansões em funções de Airy, trabalharemos aqui apenas com expansões em funções elementares. A expansão de interesse aqui, válida se  $m \rightarrow \infty$  e  $|\tau| < 1$ , é (Olver, 1959)

$$\begin{aligned} U(-\tilde{m}, y) & \sim \frac{b_m}{(1-\tau^2)^{1/4}} \left\{ [1 + o(\tilde{m}^{-2})] \times \right. \\ & \times \cos [2\tilde{m}\Delta(\tau) - \pi/4] + \left[ \frac{y}{16\tilde{m}^{3/2}} + o(\tilde{m}^{-5/2}) \right] \times \\ & \left. \times \sin [2\tilde{m}\Delta(\tau) - \pi/4] \right\}, \quad (4.5) \end{aligned}$$

onde

$$b_m \sim \sqrt{2} e^{-\tilde{m}/2} \tilde{m}^{(\tilde{m}-1/2)/2} \left[ 1 - \frac{1}{48\tilde{m}} + o(\tilde{m}^{-2}) \right], \quad (4.6)$$

$$\Delta(\tau) = \frac{1}{2} [\cos^{-1}\tau - \tau(1-\tau^2)^{1/2}]. \quad (4.7)$$

Temos

$$e^{i(2\tilde{m}\Delta(\tau)-\pi/4)} = i^m e^{-i\chi(\tilde{m},y)}, \quad (4.8)$$

onde

$$\chi(\tilde{m},y) = \tilde{m} [\sin^{-1}\tau + \tau(1-\tau^2)^{1/2}] \quad (4.9)$$

e  $\tau$  é dado por (4.4). O limite  $m \rightarrow \infty$  com  $y$  fixado corresponde a  $\tau \rightarrow 0$ . Neste caso, podemos expandir o fator  $(1-\tau^2)^{-1/4}$  em (4.5) em potências de  $\tau$ , e substituir (4.6) e (4.8) em (4.5), obtendo

$$U(-\tilde{m},y) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\tilde{m}/2} \tilde{m}^{(\tilde{m}-1/2)/2} \sum_{\varepsilon=\pm} i^{\varepsilon m} e^{-i\varepsilon\chi(\tilde{m},y)} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{3y^2-1}{48\tilde{m}} - \frac{i\varepsilon y}{16\tilde{m}^{3/2}} + \dots \right]. \quad (4.10)$$

A aproximação de Stirling para o fatorial que aparece em (3.26) é (Olver, 1959)

$$(m!)^{-1/2} \sim (2\pi)^{-1/4} e^{\tilde{m}/2} \tilde{m}^{-\tilde{m}/2} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{1}{48\tilde{m}} + O(\tilde{m}^{-2}) \right], \quad (4.11)$$

válida para  $m \gg 1$ . Usando (4.10) e (4.11) em (3.26), obtemos uma expansão para a  $m$ -ésima função de Hermite:

$$\psi_m(y/\sqrt{2}) \sim \frac{1}{2^{3/4} \pi^{1/2} \tilde{m}^{1/4}} \sum_{\varepsilon=\pm} i^{\varepsilon m} e^{-i\varepsilon\chi(\tilde{m},y)} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{y^2}{16\tilde{m}} - \frac{i\varepsilon y}{16\tilde{m}^{3/2}} + \dots \right]. \quad (4.12)$$

A expansão acima é válida se

$$m \gg 1, \quad y^2/4. \quad (4.13)$$

Note que (4.13) implica que o segundo e o terceiro termos no colchete em (4.12) são respectivamente muito menores que  $1/4$  e  $1/8$ . Assim, estes termos sempre representarão pequenas correções à aproximação inicial dada pelo primeiro termo.

Para que (4.12) possa ser usada na derivação de uma expressão assintótica para o resto  $R_M(y)$ , é necessário assumir algum comportamento definido para os coeficientes  $a_m$  quando  $m$  é grande. O caso de coeficientes que decaem algebricamente é relevante em aplicações (Boyd e Moore, 1986), e é também adequado para ilustrar o procedimento a ser seguido quando os coeficientes têm outros comportamentos assintóticos. Vamos portanto assumir que

$$a_m = \tilde{m}^{-\alpha} \quad (4.14)$$

para alguma constante  $\alpha$ , e vamos denotar  $F(y)$  e  $R_M(y)$  por  $F_\alpha(y)$  e  $R_M(\alpha, y)$ , respectivamente.

Substituindo (4.12) e (4.14) em (4.3), obtém-se facilmente a seguinte expansão assintótica para o resto de (4.1):

$$R_M(\alpha, y) \sim \frac{2^{1/4}}{\pi^{1/2}} \operatorname{Re} \sum_{s=0}^{\infty} F_s A_{s+2\alpha+1/2}, \quad (4.15)$$

onde os primeiros  $F_s$  são dados por

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = \frac{1}{16} y^2, \quad F_3 = \frac{1}{16i} y, \quad (4.16)$$

e  $A_r$  denota a "série auxiliar"

$$A_r = \sum_{m=M}^{\infty} \frac{i^m e^{-i\chi(\tilde{m}, y)}}{\tilde{m}^{r/2}} . \quad (4.17)$$

Por (4.13), a expansão (4.15) é válida se

$$M \gg 1, \quad y^2/4. \quad (4.18)$$

Os argumentos dados logo após (4.13) indicam que a série (4.15) pode, para propósitos numéricos, ser truncada em um valor baixo de  $s$ . No entanto, dependendo do valor de  $\alpha$ , a série  $A_{s+2\alpha+1/2}$ , cujos termos decaem algebricamente com  $m$  em valor absoluto, pode convergir muito lentamente ou mesmo divergir, tornando impraticável a sua computação por soma direta termo a termo. Portanto, a fim de usar (4.15) para computar o resto de (4.1) torna-se necessário dispor de um método alternativo para computar (4.17). Tal método é desenvolvido na próxima seção a partir de considerações assintóticas.

#### 4.3 - A SÉRIE AUXILIAR $A_r$

Nesta seção, obteremos uma expressão assintótica para a série auxiliar  $A_r$ , com o auxílio da fórmula do somatório de Poisson (Henrici, 1977). Se  $f(\mu)$  é uma função complexa da variável real  $\mu$ , então a fórmula de Poisson afirma que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n , \quad (4.19)$$

onde

$$\hat{f}_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n \mu} f(\mu) d\mu \quad (4.20)$$

denota a transformada de Fourier de  $f$ . A fórmula de Poisson

é válida se  $f$  é absolutamente integrável, de variação limitada,<sup>4</sup> e para todo  $\mu_0$  satisfaz a condição

$$f(\mu_0) = \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow \mu_0^+} f(\mu) + \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow \mu_0^-} f(\mu). \quad (4.21)$$

A série  $A_r$  é absolutamente convergente apenas para  $\text{Re } r > 2$ . A fim de transformar  $A_r$  pela fórmula de Poisson para um valor arbitrário de  $r$ , interpretaremos a soma de  $A_r$  no sentido abeliano (Hardy, 1956). Defina

$$f(\mu) = \begin{cases} \bar{\mu}^{-r/2} \exp[-\delta\zeta(\bar{\mu}) + i\pi\mu/2 - i\chi(\bar{\mu}, \gamma)], & \mu > M \\ \frac{1}{2} i^M M^{-r/2} \exp[-\delta\zeta(M) - i\chi(M, \gamma)], & \mu = M \\ 0, & \mu < M, \end{cases} \quad (4.22)$$

onde  $\delta > 0$  é um parâmetro arbitrário,  $\bar{\mu} = \mu + 1/2$  e a função  $\zeta(\bar{\mu})$  tende a  $+\infty$  quando  $\mu \rightarrow \infty$ . Vamos assumir também que  $\zeta(\bar{\mu})$  admite uma expansão convergente

$$\zeta(\bar{\mu}) = \bar{\mu}^{1/2} \left( 1 + \frac{\zeta_1}{\bar{\mu}} + \frac{\zeta_2}{\bar{\mu}^2} + \dots \right), \quad (4.23)$$

de modo que

$$\begin{aligned} i\chi(\bar{\mu}, \gamma) + \delta\zeta(\bar{\mu}) &= \bar{\mu}^{1/2} \left( \gamma + \frac{\gamma_1}{\bar{\mu}} + \frac{\gamma_2}{\bar{\mu}^2} + \dots \right) \\ &= \gamma \bar{\mu}^{1/2} + i\phi(\delta, \bar{\mu}, \gamma), \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde os primeiros coeficientes em (4.24) são

$$\gamma = iy + \delta, \quad \gamma_1 = \frac{1}{24i} \gamma^3 + \zeta_1 \delta \quad (4.25)$$

<sup>4</sup> A função  $f$  se diz de variação limitada se

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f(m\mu) - f((m-1)\mu)| < \infty.$$

e  $\phi(\delta, \tilde{\mu}, y) \rightarrow 0$  quando  $\mu \rightarrow \infty$ . A função  $f(\mu)$  satisfaz as hipóteses da fórmula de Poisson, e decorre de (4.19) e (4.22) que

$$A_r = \frac{i^N e^{-i\chi(\tilde{M}, y)}}{2\tilde{M}^{r/2}} + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f_n, \quad (4.26)$$

onde  $A_r$  denota a soma de (4.17) pelo método  $(A, \lambda_m)$  de Abel,<sup>5</sup> com  $\lambda_m = \zeta(\tilde{m})$  (Hardy, 1956). O método  $(A, \lambda_m)$  é claramente equivalente ao método  $(A, m^{1/2})$ . A somabilidade de  $A_r$  por este método pode ser provada em dois passos. Primeiro, Hardy (1956, p. 141) mostrou que a série  $\sum m^{-b} \exp [aim^{1/2}]$  (a real e não-nulo) é somável pelo método de Cesàro  $(C, k)$  para algum  $k$ , e portanto somável pelo método abeliano  $(A, m)$ ; seu argumento pode ser prontamente modificado para provar a somabilidade  $(A, m)$  de  $A_r$  (e também das séries  $B_r$  e  $C_r$ , a serem definidas na Seção 4.4). Segundo, um teorema de Cartwright (Hardy, 1956, p. 381) permite deduzir a somabilidade de  $A_r$  (e também de  $B_r$  e  $C_r$ ) pelo método  $(A, m^{1/2})$  a partir de sua somabilidade  $(A, m)$ .

A escolha do método de somabilidade  $(A, \lambda_m)$  é motivada pela presença do fator

$$\begin{aligned} \exp [-i\alpha_m^\sigma(x-x')] &= e^{i(x-x')/2y_c} \times \\ &\times \exp [-(\tilde{m}-Q)^{1/2}|x-x'|] \end{aligned} \quad (4.27)$$

nas expansões das funções de influência em ondas equatoriais. De fato, podemos identificar  $(\tilde{\mu} - Q)^{1/2}$  com

<sup>5</sup> Se  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  é uma seqüência de constantes tendendo a  $+\infty$ , então a soma de  $\sum c_m$  pelo método  $(A, \lambda_m)$  de Abel é definida como  $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \sum c_m \exp [-\lambda_m \delta]$ , quando este limite existe.

$\zeta(\bar{\mu})$ , e  $|x - x'|$  com o parâmetro  $\delta$ ; quando  $\bar{\mu} > |Q|$ , a função  $(\bar{\mu} - Q)^{1/2}$  admitirá uma expansão da forma (4.23). É portanto bastante "natural" empregar o método  $(A, \lambda_m)$  para investigar o comportamento das funções de influência perto do meridiano da fonte  $x = x'$ .

A seguir, vamos obter uma expansão assintótica para  $f_n$  em potências inversas de  $M^{1/2}$ , válida em alguma vizinhança de  $\delta = 0$  e para todos os inteiros  $n$ . Então (4.26) fornecerá uma expansão assintótica para a soma abeliana de  $A_r$ , também em potências inversas de  $M^{1/2}$ .

A transformada de Fourier de  $f$  é dada por (note que  $n, M$  são inteiros)

$$\begin{aligned} f_n &= \int_H^{\infty} \frac{\exp[-2\pi i \bar{n} \mu - \delta \zeta(\bar{\mu}) - i\chi(\bar{\mu}, y)]}{\bar{\mu}^{r/2}} d\mu = \\ &= 2(-1)^n e^{-i\pi/4} \times \\ &\quad \times \int_{M^{1/2}}^{\infty} \frac{\exp[-2\pi i \bar{n} \nu^2 - \delta \zeta(\nu^2) - i\chi(\nu^2, y)]}{\nu^{r-1}} d\nu, \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde  $\bar{n} = n - 1/4$  e  $\nu = \bar{\mu}^{1/2}$ . Usando (4.18), podemos comparar os termos na exponencial em (4.28):

$$\begin{aligned} \frac{|\delta \zeta(\nu^2) + i\chi(\nu^2, y)|}{|2\pi i \bar{n} \nu^2|} &\leq \frac{|y|}{4\pi |\bar{n}| \nu} \times \\ &\quad \times \max_{0 \leq \tau \leq 1} \left( \frac{\sin^{-1} \tau}{\tau} + (1 - \tau^2)^{1/2} \right) + O(\delta) \leq \\ &\leq \frac{2|y|}{\pi M^{1/2}} + O(\delta) \ll \frac{4}{\pi} + O(\delta). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Assim, para  $\delta$  suficientemente pequeno,  $-2\pi i \bar{n} \nu^2$  será o termo

dominante na exponencial em (4.28), para todo  $\nu \geq \bar{M}^{1/2}$  e todo inteiro  $n$ . Isto indica que uma expansão assintótica para  $f_n$  pode ser obtida por integração por partes (Olver, 1974). Com esta finalidade, vamos definir a variável

$$z = z(\nu) = 2\bar{n}^{1/2}\nu + \gamma/2\pi i\bar{n}^{1/2}. \quad (4.30)$$

A integral (4.28) torna-se

$$\begin{aligned} f_n = 2(-1)^n \exp[-i\pi/4 - i\gamma^2/8\pi\bar{n}] \times \\ \times \int_{\bar{M}^{1/2}}^{\infty} \frac{\exp[-i\pi z^2/2 - i\phi(\delta, \nu^2, \gamma)]}{\nu^{r-1}} d\nu. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para integrar (4.31) por partes, faremos uso da integral de Fresnel (Abramowitz e Stegun, 1965)

$$\int e^{-i\pi z^2/2} dz = iJ(z)e^{-i\pi z^2/2}, \quad (4.32)$$

onde  $J(z)$  é uma função com o seguinte comportamento assintótico quando  $z \rightarrow \infty$  com  $|\arg z| \leq \pi/2$ :

$$J(z) \sim (\pi z)^{-1} [1 + i/\pi z^2 - 3/(\pi z^2)^2 + \dots]. \quad (4.33)$$

Integrando por partes repetidamente, com o auxílio de (4.32), obtém-se a expansão formal

$$\begin{aligned} \int_{\bar{M}^{1/2}}^{\infty} \frac{\exp[-i\pi z^2/2 - i\phi(\delta, \nu^2, \gamma)]}{\nu^{r-1}} d\nu \sim \\ \sim \frac{iJ(z) \exp[-i\pi z^2/2 - i\phi(\delta, \nu^2, \gamma)]}{2\bar{n}^{1/2}\nu^{r-1}} \left\{ 1 + \right. \\ \left. + \frac{iJ(z)}{2\bar{n}^{1/2}} \left( i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} + \frac{r-1}{\nu} \right) - \frac{J(z)}{4\bar{n}} \left[ J(z) \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \left( i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} + \frac{r-1}{\nu} \right)^2 - \left( i \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2} - \frac{r-1}{\nu^2} \right) - \right. \\ \left. - 2\bar{n}^{1/2} \frac{dJ}{dZ} \left( i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} + \frac{r-1}{\nu} \right) + \dots \right\} \Bigg|_{\nu=\bar{M}^{1/2}}^{\nu=+\infty} \quad (4.34)$$

Já que  $\text{Re}(-i\pi z^2/2) = -\text{Re}(\gamma\nu) = -\delta\nu \rightarrow -\infty$  quando  $\nu \rightarrow \infty$ , o lado direito de (4.34) se anula no limite superior de integração; em  $\nu = \bar{M}^{1/2}$ , a expansão pode ser simplificada usando (4.24), (4.30) e (4.33), e expandindo as potências inversas de  $z(\bar{M}^{1/2})$  em potências inversas de  $\bar{M}^{1/2}$ . A expansão (4.33) pode ser usada com  $z = z(\bar{M}^{1/2})$  porque

$$|z(\bar{M}^{1/2})| \geq 2|\bar{n}|^{1/2}\bar{M}^{1/2} \left[ 1 - \frac{|\gamma/2\pi i \bar{n}^{-1/2}|}{2|\bar{n}|^{1/2}\bar{M}^{1/2}} \right] \geq \\ \geq 2|\bar{n}|^{1/2}\bar{M}^{1/2} \left[ 1 - \frac{|\gamma|}{4\pi|\bar{n}|\bar{M}^{1/2}} + O(\delta) \right] \gg \\ \gg 1 - \frac{2}{\pi} + O(\delta), \quad (4.35)$$

e podemos garantir que  $|\arg z(\bar{M}^{1/2})| \leq \pi/2$  escolhendo  $\bar{n}^{1/2} = -i|\bar{n}|^{1/2}$  quando  $\bar{n} < 0$ . Com estas transformações, (4.34) e (4.31) fornecem a seguinte expansão para  $\hat{f}_n$ :

$$\hat{f}_n \sim \frac{i^{M-1} \exp[-\delta\zeta(\bar{M}) - i\chi(\bar{M}, \gamma)]}{2\pi\bar{n}\bar{M}^{r/2}} \left\{ 1 + \frac{i\gamma}{4\pi\bar{n}\bar{M}^{1/2}} + \right. \\ + \frac{1}{4\pi\bar{n}} \left( ir - \frac{\gamma^2}{4\pi\bar{n}} \right) \frac{1}{\bar{M}} - \frac{1}{4\pi\bar{n}} \left[ \frac{\gamma}{4\pi\bar{n}} \times \right. \\ \times \left. \left( \frac{i\gamma^2}{4\pi\bar{n}} + 2r + 1 \right) + i\gamma_1 \right] \frac{1}{\bar{M}^{3/2}} + \frac{1}{(4\pi\bar{n})^2} \times \\ \times \left. \left[ \frac{\gamma^4}{(4\pi\bar{n})^2} - \frac{3(r+1)i\gamma^2}{4\pi\bar{n}} - (r^2+2) + 2\gamma_1\gamma \right] \times \right.$$

$$\times \frac{1}{M^2} + \dots \left. \vphantom{\frac{1}{M^2}} \right\}, \quad (4.36)$$

O lado direito de (4.36) pode ser somado sobre  $n$  usando a identidade (Henrici, 1977)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(n-w)^{k+1}} = -\pi \frac{d^k}{dw^k} \cot \pi w, \quad (4.37)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

com  $w = 1/4$ . A fórmula de Poisson fornece então

$$\sum_{m=M}^{\infty} \frac{i^m \exp[-\delta \zeta(\tilde{m}) - i\chi(\tilde{m}, \gamma)]}{\tilde{m}^{r/2}} -$$

$$- \frac{i^M \exp[-\delta \zeta(M) - i\chi(M, \gamma)]}{2M^{r/2}} \left\{ (1+i) + \frac{\gamma}{2M^{1/2}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{4} i\gamma^2 \right) \frac{1}{M} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} \gamma \left( \frac{1}{3} \gamma^2 + (2r+1)i \right) + \right.$$

$$+ \gamma_1 \left] \frac{1}{M^{3/2}} + \frac{1}{8} \left[ \frac{5i}{48} \gamma^4 - (r+1)\gamma^2 - i[(r^2+2) - \right.$$

$$\left. \left. - 2\gamma_1 \gamma \right] \right] \frac{1}{M^2} + \dots \left. \vphantom{\frac{1}{M^2}} \right\}. \quad (4.38)$$

Fazendo  $\delta = 0$  em (4.38), obtemos a expansão assintótica procurada para a soma abeliana de  $A_r$ .

Um exemplo numérico do uso de (4.38), com  $r = 3$ , é dado na Tabela 4.1. Neste exemplo, note que o valor de  $M$  escolhido ( $M = 48$  para  $\gamma = 8$ ) é consistente com (4.18). Para comparação, o valor obtido somando-se (4.17) diretamente até  $m = 1233$  (um valor tão alto de  $m$  é necessário, devido à lenta convergência da série) é  $A_3 \approx 0,001294 - 0,002988i$ .

TABELA 4.1 - COMPUTAÇÃO DE  $A_3$  PARA  $y = 8$  E  $M = 48$ 

| $k$ | Valor de (4.38)      |
|-----|----------------------|
| 0   | 0,000301 - 0,002072i |
| 1   | 0,000983 - 0,002580i |
| 2   | 0,001151 - 0,002763i |
| 3   | 0,001245 - 0,002871i |
| 4   | 0,001281 - 0,002923i |

Linhas sucessivas da tabela mostram o valor da expansão (4.38), com  $\delta = 0$ , truncada no termo de ordem  $M^{-k/2}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Na Tabela 4.2, (4.38) é usada em (4.15) para computar alguns valores de  $F_\alpha(y)$ . A primeira linha da tabela mostra a soma parcial dos  $M$  primeiros termos de (4.1), e as linhas seguintes mostram o efeito de adicionar sucessivamente os termos  $s = 0, 1, 2, 3$  de (4.15). Para verificar a correção deste cálculo, computamos  $F_\alpha(y)$  para dois valores diferentes de  $M$  que são consistentes com (4.18). No primeiro exemplo da Tabela 4.2,  $\alpha = 3/4$ , e o primeiro termo em (4.15) será proporcional à série  $A_2$ , cujo termo geral é  $O(m^{-1}) = O\{(\lambda_m - \lambda_{m-1})/\lambda_m\}$ . Já que  $A_2$  é somável  $(A, \lambda_m)$ , isto implica que  $A_2$  (e portanto  $F_{3/4}(y)$ ) é condicionalmente convergente (Hardy, 1956, p. 161). Uma aplicação a uma série de Hermite divergente,  $F_0(y)$ , é mostrada no segundo exemplo da Tabela 4.2. Experimentos numéricos com (4.15) e (4.38) indicam que  $F_\alpha(y)$  pode ser computada com um erro relativo inferior a 5% se  $M$  é escolhido pela condição  $M \geq 3 \max\{1, y^2/4\}$ .

TABELA 4.2 - CÁLCULO ASSINTÓTICO DE  $F_{\alpha}(y)$ 

|              | $\alpha = 3/4, y = 10$ |        | $\alpha = 0, y = 4$ |       |
|--------------|------------------------|--------|---------------------|-------|
|              | M=75                   | M=85   | M=12                | M=16  |
| Soma parcial | 0,2294                 | 0,2466 | 1,262               | 1,824 |
| s=0,1        | 0,2370                 | 0,2389 | 1,629               | 1,693 |
| s=2          | 0,2376                 | 0,2383 | 1,660               | 1,684 |
| s=3          | 0,2376                 | 0,2383 | 1,660               | 1,682 |

O significado de cada linha da tabela é indicado no texto.

#### 4.4 - SÉRIES ENVOLVENDO O PRODUTO DE DUAS FUNÇÕES DE HERMITE

Séries da forma (4.2) podem ser tratadas por técnicas assintóticas similares às aquelas desenvolvidas nas duas secções anteriores. Consideremos novamente o caso onde  $a_m$  é dado por (4.14), e denotemos  $G(x,y)$  e seu  $M$ -ésimo resto por  $G_{\alpha}(x,y)$  e  $Q_H(\alpha,x,y)$ , respectivamente. Usando (4.12) em (4.2), obtém-se uma expansão assintótica para  $Q_H(\alpha,x,y)$ :

$$Q_H(\alpha,x,y) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \operatorname{Re} \sum_{s=0}^{\infty} (G_s B_{s+2\alpha+1} + H_s C_{s+2\alpha+1}). \quad (4.39)$$

Aqui os primeiros  $G_s$  e  $H_s$  são

$$\begin{aligned} G_0 &= H_0 = 1, & G_1 &= H_1 = 0, \\ G_2 &= H_2 = \frac{1}{16} (x^2+y^2), & G_3 &= \frac{1}{16i} (x+y), \\ H_3 &= \frac{1}{16i} (x-y), \end{aligned} \quad (4.40)$$

e  $B_r$  e  $C_r$  denotam as "séries auxiliares"

$$B_r = \sum_{m=M}^{\infty} \frac{(-1)^m \exp \{-i[\chi(\tilde{m}, x) + \chi(\tilde{m}, y)]\}}{\tilde{m}^{r/2}}, \quad (4.41)$$

$$C_r = \sum_{m=M}^{\infty} \frac{\exp \{-i[\chi(\tilde{m}, x) - \chi(\tilde{m}, y)]\}}{\tilde{m}^{r/2}}. \quad (4.42)$$

Por (4.13), a expansão (4.39) é válida para

$$M \gg 1, \quad x^2/4, \quad y^2/4. \quad (4.43)$$

#### 4.5 - A SÉRIE AUXILIAR $B_r$

Para derivar uma expansão assintótica para  $B_r$ , análoga a (4.38), pode-se imitar o tratamento dado à série  $A_r$ . Definindo uma função  $g(\mu)$  como

$$g(\mu) = \begin{cases} \tilde{\mu}^{-r/2} \exp \{-\delta\zeta(\tilde{\mu}) + i\pi\mu - i[\chi(\tilde{\mu}, x) + \chi(\tilde{\mu}, y)]\}, & \mu > M \\ \frac{1}{2}(-1)^M \tilde{M}^{-r/2} \exp \{-\delta\zeta(\tilde{M}) - i[\chi(\tilde{M}, x) + \chi(\tilde{M}, y)]\}, & \mu = M \\ 0, & \mu < M \end{cases} \quad (4.44)$$

com  $\zeta(\tilde{\mu})$  dado por (4.23), teremos

$$\begin{aligned} i[\chi(\tilde{\mu}, x) + \chi(\tilde{\mu}, y)] + \delta\zeta(\tilde{\mu}) &= \\ &= \tilde{\mu}^{1/2} \left( \eta + \frac{\eta_1}{\tilde{\mu}} + \frac{\eta_2}{\tilde{\mu}^2} + \dots \right) \\ &= \eta \tilde{\mu}^{1/2} + i\theta(\delta, \tilde{\mu}, x, y), \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde os primeiros coeficientes em (4.45) são

$$\eta = i(x+y) + \delta, \quad \eta_1 = \frac{1}{24i} (x^3 + y^3) + \zeta_1 \delta \quad (4.46)$$

e  $\theta(\delta, \bar{\mu}, x, y) \rightarrow 0$  quando  $\mu \rightarrow \infty$ . Aplicando a fórmula de Poisson à função  $g$ , podemos modificar ligeiramente os argumentos assintóticos da Seção 4.3 para obter o resultado

$$\begin{aligned} & \sum_{m=M}^{\infty} \frac{(-1)^m \exp \{-\delta \zeta(\bar{m}) - i[\chi(\bar{m}, x) + \chi(\bar{m}, y)]\}}{\bar{m}^{r/2}} - \\ & - \frac{(-1)^M \exp \{-\delta \zeta(M) - i[\chi(M, x) + \chi(M, y)]\}}{2M^{r/2}} \left\{ 1 + \right. \\ & + \frac{\eta}{4M^{1/2}} + \frac{r}{4M} - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{48} \eta^3 + \eta_1 \right) \frac{1}{M^{3/2}} - \\ & \left. - \frac{(r+1)\eta^2}{64M^2} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Quando  $\delta = 0$ , a expansão acima é assintótica à soma  $(A, \lambda_m)$  de  $B_r$ . Na Tabela 4.3, esta expansão é empregada para computar  $B_3$ , com  $x = 6$ ,  $y = 4$ ,  $M = 27$ . A soma direta de (4.41) até  $m = 1098$  fornece o valor aproximado  $B_3 \approx -0,003265 - 0,002419i$ .

TABELA 4.3 - COMPUTAÇÃO DE  $B_3$  PARA  $x = 6$ ,  $y = 4$ ,  $M = 27$

| $k$ | Valor de (4.47)       |
|-----|-----------------------|
| 0   | -0,003424 - 0,000544i |
| 1   | -0,003165 - 0,002176i |
| 2   | -0,003258 - 0,002191i |
| 3   | -0,003228 - 0,002384i |
| 4   | -0,003256 - 0,002389i |

Linhas sucessivas da tabela mostram o valor da expansão (4.47), com  $\delta = 0$ , truncada no termo de ordem  $M^{-k/2}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

4.6 - A SÉRIE AUXILIAR  $C_r$ 

A série (4.42) pode também ser calculada através da fórmula de Poisson, mas o argumento neste caso é um pouco mais complicado. Definindo a função  $h(\mu)$  por

$$h(\mu) = \begin{cases} \bar{\mu}^{-r/2} \exp \{-\delta\zeta(\bar{\mu}) - i[\chi(\bar{\mu}, x) - \chi(\bar{\mu}, y)]\}, & \mu > M \\ \frac{1}{2} M^{-r/2} \exp \{-\delta\zeta(M) - i[\chi(M, x) - \chi(M, y)]\}, & \mu = M \\ 0, & \mu < M \end{cases} \quad (4.48)$$

com  $\zeta(\bar{\mu})$  novamente dado por (4.23), podemos escrever

$$\begin{aligned} i[\chi(\bar{\mu}, x) - \chi(\bar{\mu}, y)] + \delta\zeta(\bar{\mu}) &= \\ &= \bar{\mu}^{1/2} \left( \xi + \frac{\xi_1}{\bar{\mu}} + \frac{\xi_2}{\bar{\mu}^2} + \dots \right) \\ &= \xi \bar{\mu}^{1/2} + i\omega(\delta, \bar{\mu}, x, y) \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde

$$\xi = i(x-y) + \delta, \quad \xi_1 = \frac{1}{24i} (x^3 - y^3) + \zeta_1 \delta \quad (4.50)$$

e  $\omega(\delta, \bar{\mu}, x, y) \rightarrow 0$  quando  $\mu \rightarrow \infty$ .

A série

$$\begin{aligned} \sum_{m=M}^{\infty} \frac{\exp \{-\delta\zeta(\bar{m}) - i[\chi(\bar{m}, x) - \chi(\bar{m}, y)]\}}{\bar{m}^{r/2}} &= \\ &= \sum_{m=M}^{\infty} \frac{\exp [-\xi \bar{m}^{1/2} - i\omega(\delta, \bar{m}, x, y)]}{\bar{m}^{r/2}} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=M}^{\infty} c_m \exp(-\xi \tilde{m}^{1/2}) = D(\xi) \quad (4.51)$$

pode ser considerada como uma série de Dirichlet,<sup>6</sup> cuja abcissa de convergência  $\beta$  é obviamente zero. Já que  $\arg c_m \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ , segue-se que  $D(\xi)$  não pode ser continuada analiticamente até o ponto  $\xi = \beta = 0$ , a partir do semi-plano  $\operatorname{Re} \xi > 0$  (Saks e Zygmund, 1971). Isto implica que a soma abeliana de  $C_r$  (e portanto aquela de  $G_\alpha(x, y)$ ) pode se tornar singular em  $x = y$ , em contraste com a série  $B_r$ , que em vista de (4.47) é uma função analítica de  $(x, y)$ .

Prosseguindo com o cálculo assintótico de  $C_r$ , a transformada de Fourier de  $h(\mu)$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \hat{h}_n &= 2(-1)^n \int_{\bar{M}^{1/2}}^{\infty} \nu^{1-r} \times \\ &\times \exp \{-2\pi i n \nu^2 - \delta \zeta(\nu^2) - i[\chi(\nu^2, x) - \chi(\nu^2, y)]\} d\nu, \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde  $\nu = \bar{\mu}^{1/2}$ . Pode-se verificar usando (4.29) que para  $\delta$  suficientemente pequeno o termo  $-2\pi i n \nu^2$  será dominante na exponencial em (4.52), mas apenas para  $n \neq 0$ . Neste caso, pode-se usar integração por partes para determinar o comportamento assintótico de  $\hat{h}_n$ , exatamente como na Seção 4.3. O resultado é uma expansão que difere de (4.36) apenas pela ausência do fator  $i^M$  e pelas substituições  $[\chi(\bar{M}, y), \bar{n}, \gamma, \gamma_1, \dots] \rightarrow [\chi(\bar{M}, x) - \chi(\bar{M}, y), n, \xi, \xi_1, \dots]$ . Usando as somas bem conhecidas (Abramowitz e Stegun, 1965)

---

<sup>6</sup> Uma série da forma  $D(\xi) = \sum c_m \exp[-\lambda_m \xi]$ , onde  $\lambda_m \rightarrow +\infty$  com  $m \rightarrow \infty$ , chama-se série de Dirichlet (Saks e Zygmund, 1971). Séries deste tipo podem ser consideradas como análogos discretos da transformada de Laplace. Assim,  $D(\xi)$  convergirá em um semi-plano da forma  $\operatorname{Re} \xi > \beta$ , e  $\beta$  será chamada sua abcissa de convergência.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad (4.53)$$

verifica-se facilmente que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \hat{h}_n &= \frac{\exp \{-\delta \zeta(M) - i[\chi(M, x) - \chi(M, y)]\}}{24M^{r/2}} \times \\ &\times \left\{ \frac{\xi}{M^{1/2}} + \frac{r}{M} - \left( \frac{1}{240} \xi^3 + \xi_1 \right) \frac{1}{M^{3/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(r+1)\xi^2}{80M^2} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

O coeficiente

$$\hat{h}_0 = 2 \int_{M^{1/2}}^{\infty} \frac{\exp [-\xi \nu - i\omega(\delta, \nu^2, x, y)]}{\nu^{r-1}} d\nu, \quad (4.55)$$

que dará origem ao comportamento singular de  $C_r$  em  $x = y$ , deve ser tratado separadamente. Se interpretamos (4.43) como

$$M \geq K \max\{1, x^2/4, y^2/4\}, \quad (4.56)$$

onde  $K > 1$  é uma constante, então para  $\nu \geq M^{1/2}$  teremos a estimativa

$$\begin{aligned} |\omega(0, \nu^2, x, y)| &\leq |x-y| \max_{x \leq t \leq y} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, \nu^2, t) \right| \leq \\ &\leq |x-y| \frac{\max\{x^2, y^2\}}{4\nu} \max_{0 \leq \tau \leq K^{-1/2}} \frac{1 - (1 - \tau^2)^{1/2}}{\tau^2} \leq \\ &\leq [1 - (1 - K^{-1})^{1/2}] |x|, \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde

$$X = \tilde{M}^{1/2} \xi. \quad (4.58)$$

Assim, para valores limitados de  $|X|$ , podemos calcular  $\hat{h}_0$  numericamente a partir da expansão convergente

$$\begin{aligned} \hat{h}_0 &= 2 \int_{\tilde{M}^{1/2}}^{\infty} e^{-\xi v} \sum_{n=0}^{\infty} q_n v^{-n-r+1} dv = \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} q_n \xi^{n+r-2} \Gamma(2-n-r, X), \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde  $\Gamma(s, X)$  denota a função gama incompleta (Abramowitz e Stegun, 1965) e os  $q_n$  são os coeficientes na expansão de  $e^{-i\omega}$  em potências de  $v^{-1}$  (cf. (4.49)), listados no Apêndice A. A partir das propriedades de  $\Gamma(s, X)$ , pode-se mostrar que cada termo de (4.59) é não-analítico em  $\xi = 0$ , em concordância com uma observação anterior nesta mesma seção. Para as aplicações deste trabalho (Capítulo 5), precisamos apenas discutir o caso onde  $2\alpha$  é um inteiro, de modo que por (4.39) podemos nos restringir ao cálculo de  $C_r$  para  $r$  inteiro. A fim de calcular (4.59), podemos então notar que  $\Gamma(s, X)$  pode ser expresso em termos de funções elementares para  $s = 1, 2, \dots$ ; que  $\Gamma(0, X) = E_1(X)$ , a integral exponencial; e que os  $\Gamma(s, X)$ ,  $s = -1, -2, \dots$ , podem ser obtidos a partir de  $\Gamma(0, X)$  pela relação de recorrência

$$\Gamma(s-1, X) = (s-1)^{-1} [\Gamma(s, X) - X^{s-1} e^{-X}]. \quad (4.60)$$

A integral exponencial é facilmente calculada com um computador (v. Apêndice A). Com base em experimentos numéricos com (4.59), verificamos que é possível calcular  $\hat{h}_0$  com um erro relativo menor que 5% para  $|X| \leq 25$  quando a expansão é truncada em  $n = 10$ .

Para computar  $\hat{h}_0$  quando  $X$  é grande, podemos usar a seguinte expansão assintótica, que se obtém de (4.55) integrando por partes repetidamente (Olver, 1974)

$$\hat{h}_0 = 2e^{-X} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{-n-1} \frac{\partial^n}{\partial v^n} \frac{\exp[-i\omega(\delta, v^2, X, Y)]}{v^{r-1}} \Big|_{v=\bar{M}^{1/2}} \quad (4.61)$$

Quando  $|X| = 25$ , verificamos a concordância numérica entre esta expansão truncada em  $n = 3$  e (4.59) truncada em  $n = 10$ . Para  $|X| > 25$ ,  $\hat{h}_0$  pode ser computado com erro relativo não superior a 5% usando (4.61) com o truncamento indicado.

Substituindo (4.48) e (4.54) na fórmula de Poisson, obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \sum_{m=\bar{M}}^{\infty} \frac{\exp\{-\delta\zeta(\bar{m}) - i[\chi(\bar{m}, X) - \chi(\bar{m}, Y)]\}}{\bar{m}^{r/2}} &= \hat{h}_0 + \\ &+ \frac{\exp\{-\delta\zeta(\bar{M}) - i[\chi(\bar{M}, X) - \chi(\bar{M}, Y)]\}}{2\bar{M}^{r/2}} \left\{ 1 + \right. \\ &+ \frac{\xi}{12\bar{M}^{1/2}} + \frac{r}{12\bar{M}} - \frac{1}{12} \left( \frac{1}{240} \xi^3 + \xi_1 \right) \frac{1}{\bar{M}^{3/2}} - \\ &\left. - \frac{(r+1)\xi^2}{960\bar{M}^2} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

onde  $\hat{h}_0$  pode ser computado de (4.59) ou (4.61), dependendo do valor de  $|X|$ . A soma abeliana de  $C_r$  é então dada assintoticamente por (4.62) com  $\delta = 0$ .

Podemos usar (4.59) e (4.62) para encontrar o comportamento singular de  $G_\alpha(x, y)$  quando  $x \rightarrow y$ . Por exemplo, quando  $\alpha = 1/2$ , temos

$$\begin{aligned}
Q_M(1/2, x, y) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \operatorname{Re} C_2 + O(1) - \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{Re} \Gamma(0, X) + O(1) - \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{Re} \ln X + O(1) - \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \ln |x-y| + O(1), \tag{4.63}
\end{aligned}$$

já que  $\Gamma(0, X) = E_1(X) \sim -\ln X$  com  $X \rightarrow 0$ . Assim, concluímos que  $G_{1/2}(x, y)$  tem uma singularidade logarítmica em  $x = y$ .

A Tabela 4.4 ilustra o uso numérico de (4.62) com  $r = 3$ ,  $x = 3$ ,  $y = -2$  e  $M = 7$ . Para comparação, a soma direta de (4.42) até  $m = 6201$  fornece  $C_3 \approx 0,00181 - 0,05584i$ .

TABELA 4.4 - COMPUTAÇÃO DE  $C_3$  PARA  $x = 3$ ,  $y = -2$ ,  $M = 7$

| $k$ | Valor de (4.62)                   |
|-----|-----------------------------------|
|     | $\hat{h}_0 = -0,02146 - 0,04548i$ |
| 0   | $-0,00097 - 0,05863i$             |
| 1   | $0,00103 - 0,05552i$              |
| 2   | $0,00171 - 0,05596i$              |
| 3   | $0,00182 - 0,05579i$              |
| 4   | $0,00186 - 0,05581i$              |

A primeira linha da tabela indica o valor de  $\hat{h}_0$ , e as demais linhas mostram o valor da expansão (4.62), com  $\delta = 0$ , truncada no termo de ordem  $M^{-k/2}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

#### 4.7 - A COMPUTAÇÃO NUMÉRICA DE $G_\alpha(x,y)$

Na Tabela 4.5, as expansões (4.39), (4.47) e (4.62) são usadas para computar  $G_{1/2}(x,y)$  para  $x = 1$  e  $y = -1/2$ . A primeira linha da tabela mostra a  $M$ -ésima soma parcial de (4.2), e as linhas seguintes mostram o efeito de adicionar os termos  $s = 0,1,2,3$  de (4.39). Dois truncamentos diferentes são usados para verificar a correção do cálculo. Os argumentos mencionados na discussão do primeiro exemplo da Tabela 4.2 podem ser usados aqui para deduzir que  $G_{1/2}(x,y)$  é condicionalmente convergente. Testes numéricos com (4.39) indicam que a constante  $K$  em (4.56) deve ser no mínimo 3 a fim de que o erro relativo do valor calculado de  $G_\alpha(x,y)$  não exceda 5% na maioria dos casos.

TABELA 4.5 - CÁLCULO ASSINTÓTICO DE  $G_{1/2}(1,-1/2)$

|              | M=3    | M=10   |
|--------------|--------|--------|
| Soma parcial | 0,4152 | 0,1835 |
| s=0,1        | 0,2752 | 0,2726 |
| s=2          | 0,2718 | 0,2731 |
| s=3          | 0,2722 | 0,2732 |

O significado de cada linha da tabela é indicado no texto.

A principal restrição ao uso de (4.39) para o cálculo de  $G_\alpha(x,y)$  ocorre quando  $|x-y| \rightarrow \infty$ . Neste caso,  $G_\alpha(x,y)$  tende a zero muito rapidamente (cf. Seção 4.8), enquanto que a série (4.2) pode divergir ou convergir lentamente. Portanto, a  $M$ -ésima soma parcial de (4.2) (e portanto o resto  $Q_M(\alpha,x,y)$ ) será muito maior do que a própria soma, resultando, devido ao cancelamento, em um

grande erro relativo no valor calculado de  $G_\alpha(x,y)$ . Naturalmente, este efeito é inerente a qualquer método de soma que calcula  $G_\alpha(x,y)$  como uma soma parcial mais um resto aproximado. Assim, um valor calculado de  $G_\alpha(x,y)$  que é menor que, digamos, 2% da  $M$ -ésima soma parcial de (4.2) estará provavelmente afetado pelo cancelamento, já que as expansões assintóticas aqui apresentadas usualmente fornecem  $B_r$  e  $C_r$  com uma precisão desta ordem. Este problema não ocorre com a série (4.15), já que  $F_\alpha(y)$  decai ou cresce mais devagar do que  $G_\alpha(x,y)$  tende a zero.

#### 4.8 - ALGUNS RESULTADOS ANALÍTICOS E ASSINTÓTICOS

O efeito de cancelamento é mais severo na computação das séries  $G_\alpha(x,y)$  com  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ . De fato, já que as funções de Hermite constituem um conjunto completo, temos  $G_0(x,y) = \sqrt{2} \delta(x-y)$ , e pode-se provar diferenciando (4.2) duas vezes que  $G_\alpha(x,y)$  satisfaz a equação do cilindro parabólico (Olver, 1974)

$$\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x^2} - \frac{1}{4} x^2 G_\alpha = -G_{\alpha-1} . \quad (4.64)$$

Portanto,  $G_\alpha(x,y) = 0$  para  $x \neq y$  e  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ , de modo que (4.39) é inútil nestes casos. Quando  $\alpha = n = 1, 2, \dots$ , podemos obter uma expressão analítica para a soma de  $G_n(x,y)$ , que entretanto é inadequada para uso numérico quando  $n > 1$ . Considere a função meromórfica

$$p_n(w) = (-w)^{-n} \Gamma(w+1/2) U(w,x) U(w,-y), \quad (4.65)$$

que tem pólos em  $w = 0$  e  $w = -(m+1/2)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . O comportamento assintótico de  $p_n(w)$  para  $w$  grande é (Olver, 1959)

$$p_n(w) = (-1)^n (\pi/2)^{1/2} w^{-n-1/2} \exp [-(x-y)w^{1/2}],$$

$$|\arg w| < \pi/2$$

$$p_n(w) = (\pi/8)^{1/2} (-w)^{-n-1/2} \times \\ \times \frac{\cos [\pi(w+1/2)/2 + (-w)^{1/2}x] \cos [\pi(w+1/2)/2 - (-w)^{1/2}y]}{\sin [\pi(w+1/2)]},$$

$$|\arg (-w)| < \pi/2.$$

(4.66)

Se  $x > y$ , podemos afirmar que a soma dos resíduos de  $p_n(w)$  se anula, o que fornece imediatamente uma expressão para  $G_n(x, y)$ :

$$G_n(x, y) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(n)} \times \\ \times \left. \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} [\Gamma(w+1/2)U(w, x)U(w, -y)] \right|_{w=0}. \quad (4.67)$$

Quando  $x \rightarrow \infty$  e  $y$  é mantido fixo, temos  $U(w, x) \sim x^{-w-1/2} e^{-x^2/4} [1 + O(x^{-2})]$  (Abramowitz e Stegun, 1965), o que implica que

$$G_n(x, y) \sim \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(n)} \Gamma(1/2)U(0, -y) \left. \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} U(w, x) \right|_{w=0} \\ \sim \frac{U(0, -y)}{\Gamma(n)} (\ln x)^{n-1} x^{-1/2} e^{-x^2/4}. \quad (4.68)$$

Esta expressão não é precisa o suficiente para ser usada para cálculo numérico, mas mostra que  $G_n(x, y)$  tende a zero mais depressa do que qualquer função de Hermite  $\psi_m(x/\sqrt{2})$  quando  $x \rightarrow \infty$ . Assim, não é surpreendente que problemas numéricos de cancelamento devam ocorrer neste limite.

Com vistas a aplicações da teoria deste capítulo, observamos que os resultados assintóticos apresentados permitem o cálculo do resto de qualquer série (4.1) ou (4.2), cujos coeficientes  $a_m$  tenham a forma assintótica

$$a_m \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n \bar{m}^{-\alpha-n\sigma} \quad (4.69)$$

quando  $m \rightarrow \infty$ , onde  $\alpha$ ,  $\sigma$  e  $d_n$  são constantes. Em geral, as expressões exatas dos coeficientes não permitirão a determinação de uma expressão fechada como (4.67), e portanto o comportamento assintótico de  $F(x)$  ou  $G(x,y)$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$  permanecerá provavelmente desconhecido. Em conclusão, não será possível em geral prever quais séries serão afetadas por problemas numéricos de cancelamento quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

#### 4.9 - O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE $G(\alpha, y; \vec{r}')$ QUANDO $\alpha \rightarrow \infty$

A expressão assintótica (4.66) permite demonstrar diretamente os resultados (3.38) e (3.39). Consideremos a função

$$P(a; y, y') = \Gamma(a+3/2)U(a+1, \sigma_y y)U(a+1, -\sigma_y y'), \quad (4.70)$$

onde  $\sigma_y = \text{sgn}(y-y')$ , que corresponde a (4.65) com  $n = 0$  e  $w = a+1$ . Quando  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , (3.15) e (3.18) implicam que

$$G(\alpha, y; \vec{r}') \sim \frac{ie^{i\alpha x'}}{(2\pi)^{1/2} y_c \alpha^2} \left[ \alpha^2 y_c^2 P - \alpha y_c \left( y' \frac{\partial P}{\partial y'} + y \frac{\partial P}{\partial y} \right) + y y' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y'} \right]. \quad (4.71)$$

Usando (4.66) na expressão acima, e notando que  $a \sim \alpha^2$

quando  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , obtém-se imediatamente os resultados (3.38) e (3.39).

#### 4.10 - SÉRIES ENVOLVENDO DERIVADAS DAS FUNÇÕES DE HERMITE

Os resultados deste capítulo permitem também a computação das séries  $dF_\alpha/dy$ ,  $\partial G_\alpha/\partial x$ ,  $\partial G_\alpha/\partial y$  e  $\partial^2 G_\alpha/\partial x \partial y$ . De fato, a derivada da função de Hermite de ordem  $m$  admite a expansão assintótica

$$\psi'_m(y/\sqrt{2}) \sim \frac{\tilde{m}^{-1/4}}{2^{1/4}\sqrt{\pi}i} \sum_{\epsilon=\pm} \epsilon i^{\epsilon m} e^{-i\epsilon \chi(\tilde{m}, y)} \times \\ \times \left[ 1 - \frac{y^2}{16\tilde{m}} + \frac{i\epsilon y}{16\tilde{m}^{3/2}} + \dots \right], \quad (4.72)$$

que se obtém por diferenciação de (4.12). Usando esta expressão pode-se derivar, como nas Seções 4.2 e 4.4, expansões para os restos de  $dF_\alpha/dy$ ,  $\partial G_\alpha/\partial x$ , etc. em termos das séries auxiliares  $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ .

CAPÍTULO 5NÚCLEOS (2)5.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo conclui a exposição sobre a computação das funções de influência sobre o plano- $\beta$  equatorial, iniciada no Capítulo 3. A presente discussão se desenvolve paralelamente àquela do capítulo anterior, pelo estudo do comportamento dos termos de índice meridional elevado nas expansões dos núcleos em ondas equatoriais livres. As "séries auxiliares" do Capítulo 4 reaparecem, e a computação dos núcleos reduz-se então a uma simples variante dos métodos assintóticos de soma discutidos previamente. O uso destes métodos torna possível descrever qualitativamente o aspecto global do campo da solução fundamental. Além disso, as expansões assintóticas derivadas neste capítulo permitem determinar o comportamento dos núcleos quando a fonte está próxima ao ponto de observação. Esta informação é essencial na dedução das equações integrais de contorno da presente formulação e em sua solução numérica pelo método dos elementos de contorno (Capítulo 6).

5.2 - SÉRIES ASSINTÓTICAS PARA OS NÚCLEOS

Nesta seção, estudaremos o comportamento assintótico dos termos de índice meridional elevado nas expansões (3.46) e (3.52)-(3.54), que definem as funções de influência. Em primeiro lugar, consideremos as funções  $\phi_m^\sigma(y)$ ,  $\zeta_m^\sigma(y)$  e  $\theta_m^\sigma(y)$ , definidas por (3.36), (3.50) e (3.51) em termos de  $\psi_{m+1}(y/\sqrt{2})$  e  $\psi'_{m+1}(y/\sqrt{2})$ . As expansões assintóticas das funções de Hermite de ordem grande

(Capítulo 4) podem ser aqui reescritas como<sup>1</sup>

$$\psi_{m+1}(y/\sqrt{2}) = \frac{i}{2^{3/4}\sqrt{\pi\tilde{m}}^{1/4}} \sum_{\varepsilon=\pm} \varepsilon i^{\varepsilon m} e^{-i\varepsilon\chi(\tilde{m},y)} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{y^2}{16\tilde{m}} - \frac{i\varepsilon y}{16\tilde{m}^{3/2}} + \dots \right], \quad (5.1)$$

$$\psi'_{m+1}(y/\sqrt{2}) = \frac{\tilde{m}^{1/4}}{2^{3/4}\sqrt{\pi}} \sum_{\varepsilon=\pm} i^{\varepsilon m} e^{-i\varepsilon\chi(\tilde{m},y)} \times \\ \times \left[ 1 - \frac{y^2}{16\tilde{m}} + \frac{i\varepsilon y}{16\tilde{m}^{3/2}} + \dots \right], \quad (5.2)$$

onde  $\tilde{m} = m+3/2$  e

$$\chi(\tilde{m},y) = \tilde{m} [\sin^{-1}\tau + \tau(1-\tau^2)^{1/2}], \quad (5.3)$$

com

$$\tau = \tau(\tilde{m},y) = y/2\tilde{m}^{1/2}. \quad (5.4)$$

As expansões acima são válidas para  $m \gg 1$ ,  $y^2/4$ .

Se  $m \geq |Q|$ , os coeficientes de  $\psi_{m+1}$  e  $\psi'_{m+1}$  em (3.36), (3.50) e (3.51) admitirão expansões convergentes em potências de  $\tilde{m}^{-1/2}$ . Combinando estas expansões com (5.1) e (5.2), obtém-se após alguma álgebra as seguintes expansões assintóticas para  $\phi_m^\sigma$ ,  $\zeta_m^\sigma$  e  $\theta_m^\sigma$ :

$$\phi_m^\sigma(y) = \frac{i\tilde{m}^{1/4}}{2^{3/4}\sqrt{\pi}} \sum_{\varepsilon=\pm} i^{\varepsilon m} e^{-i\varepsilon\chi(\tilde{m},y)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\tilde{\phi}_r^{\sigma\varepsilon}(y)}{\tilde{m}^{r/2}}, \quad (5.5)$$

<sup>1</sup> Note que aqui trabalhamos com  $\psi_{m+1}$  ao invés de  $\psi_m$ . Assim,  $\tilde{m}$  nas expressões seguintes seria escrito na notação do Capítulo 4 como  $\tilde{m}+1$ .

$$\zeta_m^\sigma(y) = - \frac{\tilde{m}^{3/4}}{2^{3/4}\sqrt{\pi}} \sum_{\varepsilon=\pm} i^{\varepsilon m} e^{-i\varepsilon\chi(\tilde{m},y)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\zeta_r^{\sigma\varepsilon}(y)}{\tilde{m}^{r/2}}, \quad (5.6)$$

$$\theta_m^\sigma(y) = - \frac{\tilde{m}^{3/4}}{2^{3/4}\sqrt{\pi}} \sum_{\varepsilon=\pm} i^{\varepsilon m} e^{-i\varepsilon\chi(\tilde{m},y)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\theta_r^{\sigma\varepsilon}(y)}{\tilde{m}^{r/2}}, \quad (5.7)$$

onde os primeiros  $\tilde{\phi}_r^{\sigma\varepsilon}$ ,  $\zeta_r^{\sigma\varepsilon}$ ,  $\theta_r^{\sigma\varepsilon}$  são

$$\tilde{\phi}_0^{\sigma\varepsilon}(y) = \varepsilon y + \sigma y_c,$$

$$\tilde{\phi}_1^{\sigma\varepsilon}(y) = \frac{i}{2} (y_c^2 - 1 + \varepsilon\sigma y_c y),$$

$$\tilde{\phi}_2^{\sigma\varepsilon}(y) = \frac{1}{16} [\sigma y_c (4 - 8Q - y^2) + \varepsilon y (y^2 - 4y_c^2)],$$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_3^{\sigma\varepsilon}(y) = \frac{i}{32} [4(y_c^2 - 1) - (y_c^2 + 1)y^2 + \\ + \varepsilon\sigma y_c y (6 - 8Q + y^2)], \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\zeta_0^{\sigma\varepsilon}(y) = 1, \quad \zeta_1^{\sigma\varepsilon}(y) = \frac{1}{2} i\sigma y_c,$$

$$\zeta_2^{\sigma\varepsilon}(y) = - \frac{1}{16} (4y_c^2 + y^2 + 4\varepsilon\sigma y_c y),$$

$$\zeta_3^{\sigma\varepsilon}(y) = \frac{i}{32} [\sigma y_c (4 - 8Q - y^2) + 2\varepsilon y (3 - 2y_c^2)], \quad (5.9)$$

$$\theta_0^{\sigma\varepsilon}(y) = \varepsilon\sigma, \quad \theta_1^{\sigma\varepsilon}(y) = \frac{i\varepsilon}{2} \left( y_c + \frac{1}{y_c} \right),$$

$$\theta_2^{\sigma\varepsilon}(y) = \frac{\varepsilon\sigma}{16} (y^2 - 8Q - 4),$$

$$\theta_3^{\sigma\varepsilon}(y) = \frac{1}{32i} \left[ 2\sigma y - \varepsilon \left( y_c + \frac{1}{y_c} \right) (y^2 - 4) \right]. \quad (5.10)$$

Para determinar o comportamento assintótico dos termos de (3.46) e (3.52)-(3.54), precisamos ainda da expansão

$$\frac{1}{\gamma_m^\sigma (1 + \gamma_c \gamma_m^\sigma) (\gamma_m^+ - \gamma_m^-)} - \frac{i}{2\gamma_c \bar{m}^{3/2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_r^\sigma}{\bar{m}^{r/2}},$$

$$m \gg 1, |Q|, \quad (5.11)$$

onde os primeiros  $C_r^\sigma$  são

$$C_0^\sigma = 1, \quad C_1^\sigma = -i\sigma\gamma_c, \quad C_2^\sigma = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{\gamma_c^2} - 3\gamma_c^2 \right),$$

$$C_3^\sigma = 0. \quad (5.12)$$

Inserindo (5.5) e (5.11) em (3.46), mostra-se imediatamente que o comportamento do termo geral  $g_m$  da série que define a solução fundamental é dado por

$$g_m = \frac{i}{8\pi\gamma_c} e^{-i\alpha_m^\sigma(x-x')} \sum_{\varepsilon, \kappa = \pm} i^{(\varepsilon+\kappa)m} \times$$

$$\times \exp \{-i[\varepsilon\chi(\bar{m}, y) + \kappa\chi(\bar{m}, y')]\} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{G_r^{\sigma\varepsilon\kappa}}{\bar{m}^{(r+2)/2}}, \quad (5.13)$$

onde

$$G_r^{\sigma\varepsilon\kappa} = \sum_{n=0}^r C_{r-n}^\sigma \sum_{j=0}^n \bar{\phi}_j^{\sigma\varepsilon}(y) \bar{\phi}_{n-j}^{\sigma\kappa}(y'), \quad (5.14)$$

contanto que  $m \gg 1, |Q|, y^2/4, y'^2/4$ .

Somando (5.13) sobre  $m$ , e usando (3.46), obtemos

$$G(y_c; \vec{r}; \vec{r}') = G_K + G_Y + \sum_{m=0}^{M-1} g_m +$$

$$+ \frac{ie}{8\pi y_c} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\epsilon, \kappa=\pm} A_{r+2}^{\epsilon\kappa} G_r^{\sigma\epsilon\kappa}, \quad (5.15)$$

onde  $G_K$ ,  $G_Y$  denotam os termos de (3.46) correspondentes às ondas de Kelvin e Yanai, e

$$A_r^{\epsilon\kappa} = \sum_{m=M}^{\infty} i^{(\epsilon+\kappa)m} \bar{m}^{-r/2} \times \\ \times \exp \{ -(\bar{m}-Q)^{1/2} |x-x'| - i[\epsilon\chi(\bar{m}, y) + \kappa\chi(\bar{m}, y')] \}. \quad (5.16)$$

É importante notar que (5.15) só será válida se  $M \gg 1$ ,  $|Q|$ ,  $y^2/4$ ,  $y'^2/4$ .

A expansão (5.13) indica que  $g_m = O(m^{-1})$  quando  $x = x'$  e  $m \rightarrow \infty$ . Os argumentos usados nas Seções 4.3 e 4.7 para provar a convergência condicional das séries  $F_{3/4}(y)$  e  $G_{1/2}(x, y)$  podem ser repetidos no presente caso para provar que (3.46) converge condicionalmente sobre o meridiano da fonte  $x = x'$ .

A computação assintótica da solução fundamental através de (5.15) depende portanto da computação das séries auxiliares  $A_r^{\epsilon\kappa}$ . Quando  $\epsilon = \kappa$  ( $\epsilon = -\kappa$ ),  $A_r^{\epsilon\kappa}$  é formalmente idêntica à série  $B_r$  ( $C_r$ ), discutida no Capítulo 4. Portanto, valem os resultados

$$A_r^{\epsilon\kappa} = \frac{1}{2} (-1)^M \bar{M}^{-r/2} \exp \{ -(\bar{M}-Q)^{1/2} |x-x'| - \\ - i[\epsilon\chi(\bar{M}, y) + \kappa\chi(\bar{M}, y')] \} \left\{ 1 + \frac{\xi_{\epsilon\kappa}}{4\bar{M}^{1/2}} + \frac{r}{4\bar{M}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{48} \xi_{\epsilon\kappa}^3 + \xi_{1\epsilon\kappa} \right) \frac{1}{\bar{M}^{3/2}} - \frac{(r+1)\xi_{\epsilon\kappa}^2}{64\bar{M}^2} + \dots \right\}, \quad (5.17)$$

para  $\epsilon = \kappa$ , e

$$\begin{aligned}
A_r^{\epsilon\kappa} &= I_r^{\epsilon\kappa} + \frac{1}{2} \bar{M}^{-r/2} \exp \{-(\bar{M}-Q)^{1/2} |x-x'| - \\
&- i[\epsilon\chi(\bar{M}, y) + \kappa\chi(\bar{M}, y')]\} \left\{ 1 + \frac{\xi_{\epsilon\kappa}}{12\bar{M}^{1/2}} + \frac{r}{12\bar{M}} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{12} \left( \frac{1}{240} \xi_{\epsilon\kappa}^3 + \xi_{1\epsilon\kappa} \right) \frac{1}{\bar{M}^{3/2}} - \frac{(r+1)\xi_{\epsilon\kappa}^2}{960\bar{M}^2} + \dots \right\} \quad (5.18)
\end{aligned}$$

para  $\epsilon = -\kappa$ , onde  $\bar{M} = M+3/2$ , os coeficientes  $\xi_{\epsilon\kappa}$ ,  $\xi_{n\epsilon\kappa}$  são definidos por

$$\begin{aligned}
(\bar{m}-Q)^{1/2} |x-x'| + i[\epsilon\chi(\bar{m}, y) + \kappa\chi(\bar{m}, y')] &= \\
&= \bar{m}^{1/2} \left[ \xi_{\epsilon\kappa} + \frac{\xi_{1\epsilon\kappa}}{\bar{m}} + \frac{\xi_{2\epsilon\kappa}}{\bar{m}^2} + \dots \right], \quad (5.19)
\end{aligned}$$

e a integral  $I_r^{\epsilon\kappa}$  é dada por

$$\begin{aligned}
I_r^{\epsilon\kappa} &= 2 \int_{\bar{M}^{1/2}}^{\infty} v^{1-r} \exp \{-|x-x'| (v^2-Q)^{1/2} - \\
&- i[\epsilon\chi(v^2, y) + \kappa\chi(v^2, y')]\} dv. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Como antes, a integral acima pode ser computada numericamente através das expansões

$$I_r^{\epsilon\kappa} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n\epsilon\kappa} \xi_{\epsilon\kappa}^{n+r-2} \Gamma(2-n-r, \bar{M}^{1/2} \xi_{\epsilon\kappa}) \quad (5.21)$$

ou

$$\begin{aligned}
I_r^{\epsilon\kappa} &= 2 \exp [-\bar{M}^{1/2} \xi_{\epsilon\kappa}] \times \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \xi_{\epsilon\kappa}^{-n-1} \frac{\partial^n}{\partial v^n} \frac{\exp [-i\Omega_{\epsilon\kappa}(v; \vec{r}; \vec{r}')] }{v^{r-1}} \Big|_{v=\bar{M}^{1/2}}, \quad (5.22)
\end{aligned}$$

onde

$$i\Omega_{\varepsilon\kappa}(\nu; \vec{r}; \vec{r}') = |x-x'|(\nu^2-Q)^{1/2} + \\ + i[\varepsilon\chi(\nu^2, y) + \kappa\chi(\nu^2, y')] - \xi_{\varepsilon\kappa}\nu \quad (5.23)$$

e os  $q_{n\varepsilon\kappa}$  são os coeficientes na expansão de  $\exp[-i\Omega_{\varepsilon\kappa}]$  em potências de  $\nu^{-1}$ , dados pelas expressões (A.2) (Apêndice A) mediante as substituições  $q_n \rightarrow q_{n\varepsilon\kappa}$  e  $\xi_n \rightarrow \xi_{n\varepsilon\kappa}$ . Como observado na Seção 4.6, um bom esquema numérico para computar  $I_r^{\varepsilon\kappa}$  é usar (5.21) truncada em  $n = 10$  para  $M^{1/2}|\xi_{\varepsilon\kappa}| \leq 25$ , e (5.22) truncada em  $n = 3$  para  $M^{1/2}|\xi_{\varepsilon\kappa}| \geq 25$ .

Expansões assintóticas para  $\vec{K}$ ,  $\vec{J}$  e  $\mathcal{D}$ , análogas a (5.15) podem ser facilmente derivadas de (5.5)-(5.7) e (5.11). Os resultados são

$$\vec{K}(\vec{r}; \vec{r}') = \vec{K}_K + \vec{K}_Y + \sum_{m=0}^{M-1} \vec{k}_m + \\ + \frac{e^{1(x-x')/2y_c}}{8\pi y_c} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon, \kappa=\pm} A_{r+1}^{\varepsilon\kappa} \vec{K}_r^{\sigma\varepsilon\kappa}, \quad (5.24)$$

$$\vec{J}(\vec{r}; \vec{r}') = \vec{J}_K + \vec{J}_Y + \sum_{m=0}^{M-1} \vec{j}_m - \\ - \frac{e^{1(x-x')/2y_c}}{8\pi y_c} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon, \kappa=\pm} A_{r+1}^{\varepsilon\kappa} \vec{J}_r^{\sigma\varepsilon\kappa}, \quad (5.25)$$

$$\mathcal{D}(\vec{r}; \vec{r}') = \mathcal{D}_K + \mathcal{D}_Y + \sum_{m=0}^{M-1} d_m + \\ + \frac{e^{1(x-x')/2y_c}}{8\pi i y_c} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon, \kappa=\pm} A_r^{\varepsilon\kappa} \mathcal{D}_r^{\sigma\varepsilon\kappa}, \quad (5.26)$$

onde  $\vec{K}_K$ ,  $\vec{K}_Y$ ,  $\vec{k}_m$ , etc. têm significados evidentes e

$$\begin{aligned}
\vec{K}_r^{\sigma\epsilon\kappa} &= \sum_{n=0}^r C_{r-n}^{\sigma} \sum_{j=0}^n \bar{\phi}_j^{\sigma\epsilon}(y) [\zeta_{n-j}^{\sigma\kappa}(y') \hat{x} + i\bar{\theta}_{n-j}^{\sigma\kappa}(y') \hat{y}], \\
\vec{J}_r^{\sigma\epsilon\kappa} &= \sum_{n=0}^r C_{r-n}^{\sigma} \sum_{j=0}^n \bar{\phi}_{n-j}^{\sigma\kappa}(y') [\zeta_j^{\sigma\epsilon}(y) \hat{x} - i\bar{\theta}_j^{\sigma\epsilon}(y) \hat{y}], \\
\mathcal{D}_r^{\sigma\epsilon\kappa} &= \sum_{n=0}^r C_{r-n}^{\sigma} \sum_{j=0}^n [\zeta_j^{\sigma\epsilon}(y) \hat{x} - i\bar{\theta}_j^{\sigma\epsilon}(y) \hat{y}] [\zeta_{n-j}^{\sigma\kappa}(y') \hat{x} + \\
&\quad + i\bar{\theta}_{n-j}^{\sigma\kappa}(y') \hat{y}]. \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Note que em (5.24)-(5.26) as expansões para  $\vec{K}$ ,  $\vec{J}$  e  $\mathcal{D}$  envolvem as séries  $A_r^{\epsilon\kappa}$ ,  $r = 0, 1$ , as quais divergem quando  $x = x'$ ; entretanto, mesmo neste caso as expansões (5.24)-(5.26), (5.17) e (5.18) fornecem um valor definido para os núcleos, a saber, uma aproximação assintótica para a soma abeliana das séries (3.52)-(3.54).

### 5.3 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Do ponto de vista computacional, é importante estimar os valores máximos que o ponto de truncamento  $M$  pode assumir quando se aplica (5.15) ou (5.24)-(5.26) aos oceanos reais. Como uma ilustração, considere o segundo modo baroclínico do Atlântico tropical, cujo autovalor vertical é estimado por du Penhoat e Treguier (1985) como  $c = 1,26 \text{ m s}^{-1}$ . O raio de deformação correspondente é  $\gamma^{-1} = 167 \text{ km}$ , e se a dissipação é desprezível temos  $y_c \approx \omega/\omega_0$ , onde  $\omega_0 = \beta/\gamma = 3,81 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ . Os valores máximos de  $|Q|$  ocorrem a frequências muito maiores ou muito menores que a escala de frequência  $\omega_0$ . À frequência anual,  $y_c \approx 0,05$ , o que implica que  $|Q| \approx 90$ . Considerando, como é usual, um modelo oceânico que se estende de  $20^\circ\text{S}$  a  $20^\circ\text{N}$ , o valor máximo de  $y$  ou  $y'$  é próximo de 13, de modo que  $y^2/4$ ,  $y'^2/4 \leq 42$ . Experimentos numéricos com (5.15) e (5.24)-(5.26) indicam que para computar as funções de influência com um

erro relativo inferior a 5% é geralmente suficiente<sup>2</sup> empregar um valor de  $M$  igual a 3 vezes o maior dos números 1,  $|Q|$ ,  $y^2/4$ ,  $y'^2/4$ . Portanto, em aplicações reais,  $5 \times 10^2$  será provavelmente um limitante superior para os valores de  $M$ .

Uma vez que as funções de influência precisam ser computadas um grande número de vezes durante o processo de solução numérica de problemas de circulação oceânica, é conveniente dispor para este fim de um conjunto de rotinas numéricas especializadas. Um tal conjunto de rotinas (em FORTRAN 77) é apresentado no Apêndice B.

Nas Tabelas 5.1 a 5.4, apresentamos um exemplo do uso numérico de (5.15) e (5.24)-(5.26).<sup>3</sup> O valor escolhido de  $|x - x'|$  é muito pequeno, da ordem de alguns metros ( $10^{-5}$  em unidades não-dimensionais). Em vista dos resultados da secção precedente, esperamos que (3.46) e (3.52)-(3.54) convirjam muito lentamente. Pode-se observar nas tabelas que os valores calculados através das expansões assintóticas (5.15) e (5.24)-(5.26) são insensíveis ao valor de  $M$ , escolhido arbitrariamente. As somas parciais de (3.46) e (3.52)-(3.54) truncadas em  $m = M-1$ , por outro

---

<sup>2</sup> Uma exceção importante a esta prescrição ocorre quando se tenta computar as funções de influência para  $|x - x'| \leq O(1)$ ,  $|y - y'| \gg 1$  e  $y \rightarrow \pm\infty$  ou  $y' \rightarrow \pm\infty$ . Nestas condições, as funções de influência tendem a zero muito rapidamente com as latitudes  $y$ ,  $y'$ , de modo que os valores calculados por (5.15) e (5.24)-(5.26) são afetados por um grande erro relativo (os erros absolutos, por outro lado, não são muito grandes); este efeito foi descrito na Seção 4.7 em conexão com a série  $G_\alpha(x, y)$ . Esperamos que estes erros não sejam importantes em simulações numéricas porque a contribuição de uma região onde os núcleos são exponencialmente pequenos às integrais que aparecem nas representações integrais básicas (Capítulo 2) será provavelmente desprezível.

<sup>3</sup> Todos os exemplos numéricos que envolvem o cálculo de funções de influência foram computados com o auxílio das rotinas descritas no Apêndice B.

lado, não fornecem um resultado definido. A fim de estimar quantos termos seria necessário somar para se obter um valor preciso a partir das somas parciais, podemos usar (3.48) com, digamos,  $b = 7$ . Seria necessário somar aproximadamente  $M = \text{Re } Q + [b/(x-x')]^2 \approx 5 \times 10^{11}$  termos!

TABELA 5.1 - COMPUTAÇÃO DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL  $G(x,y;x',y')$   
PARA  $y_c = 0,2639 - 0,002i$ ,  $y = 3$ ,  $y' = 2$  E  $x - x' = 10^{-5}$

| $M$ | Valor de (3.46)<br>(truncada em $m = M-1$ ) | Valor de (5.15)<br>(truncada em $r = 3$ ) |
|-----|---|---|
| 11  | 6,348+1,931i                                | 6,377+2,168i                              |
| 15  | 6,331+2,598i                                | 6,376+2,195i                              |
| 19  | 6,358+2,797i                                | 6,377+2,201i                              |
| 26  | 6,386+2,864i                                | 6,377+2,202i                              |

TABELA 5.2 - COMPUTAÇÃO DO NÚCLEO  $\vec{K}(x,y;x',y')$  PARA  
 $y_c = 0,2639 - 0,002i$ ,  $y = 3$ ,  $y' = 2$  E  $x - x' = 10^{-5}$

| $M$ |       | Valor de (3.52)<br>(truncada em $m = M-1$ ) | Valor de (5.24)<br>(truncada em $r = 3$ ) |
|-----|-------|---|---|
| 11  | $K_x$ | 5,752-3,583i                                | 5,720-1,768i                              |
|     | $K_y$ | -2,342+5,247i                               | -2,379+5,352i                             |
| 15  | $K_x$ | 5,823-3,378i                                | 5,721-1,761i                              |
|     | $K_y$ | -2,924+4,147i                               | -2,403+5,345i                             |
| 19  | $K_x$ | 5,879-2,483i                                | 5,720-1,742i                              |
|     | $K_y$ | -3,046+3,793i                               | -2,406+5,344i                             |
| 26  | $K_x$ | 5,871-1,023i                                | 5,720-1,725i                              |
|     | $K_y$ | -2,981+3,701i                               | -2,406+5,344i                             |

As componentes de  $\vec{K}$  são indicadas por  $K_x$  e  $K_y$ .

TABELA 5.3 - COMPUTAÇÃO DO NÚCLEO  $\tilde{J}(x,y;x',y')$  PARA  $y_c = 0,2639 - 0,002i, y = 3, y' = 2$  E  $x - x' = 10^{-5}$

| M  |       | Valor de (3.53)<br>(truncada em $m = M-1$ ) | Valor de (5.25)<br>(truncada em $r = 3$ ) |
|----|-------|---|---|
| 11 | $J_x$ | 0,749-1,949i                                | 0,756-0,616i                              |
|    | $J_y$ | -1,071+4,067i                               | -1,373+4,136i                             |
| 15 | $J_x$ | 0,673-1,574i                                | 0,755-0,609i                              |
|    | $J_y$ | -1,511+3,333i                               | -1,390+4,132i                             |
| 19 | $J_x$ | 0,607-1,186i                                | 0,755-0,605i                              |
|    | $J_y$ | -1,704+3,097i                               | -1,394+4,131i                             |
| 26 | $J_x$ | 0,597-0,304i                                | 0,754-0,598i                              |
|    | $J_y$ | -1,867+3,036i                               | -1,396+4,131i                             |

As componentes de  $\tilde{J}$  são indicadas por  $J_x$  e  $J_y$ .

TABELA 5.4 - COMPUTAÇÃO DO NÚCLEO  $D(x,y;x',y')$  PARA  $y_c = 0,2639 - 0,002i, y = 3, y' = 2$  E  $x - x' = 10^{-5}$

| M  |          | Valor de (3.54)<br>(truncada em $m = M-1$ ) | Valor de (5.26)<br>(truncada em $r = 3$ ) |
|----|----------|---|---|
| 11 | $D_{xx}$ | -0,157+1,729i                               | -0,146+0,919i                             |
|    | $D_{xy}$ | -1,788-2,776i                               | -0,526-0,775i                             |
|    | $D_{yx}$ | -2,257-5,389i                               | -1,130-3,586i                             |
|    | $D_{yy}$ | 4,044-0,112i                                | 4,170+0,709i                              |
| 15 | $D_{xx}$ | -0,169+2,746i                               | -0,146+0,939i                             |
|    | $D_{xy}$ | -1,417-2,095i                               | -0,526-0,778i                             |
|    | $D_{yx}$ | -2,141-5,198i                               | -1,120-3,584i                             |
|    | $D_{yy}$ | 2,662-0,894i                                | 4,162+0,803i                              |

(continua)

Tabela 5.4 - Conclusão.

| M  |          | Valor de (3.54)<br>(truncada em $m = M-1$ ) | Valor de (5.26)<br>(truncada em $r = 3$ ) |
|----|----------|---|---|
| 19 | $D_{xx}$ | -0,170+3,823i                               | -0,146+0,953i                             |
|    | $D_{xy}$ | -1,032-1,284i                               | -0,524-0,779i                             |
|    | $D_{yx}$ | -1,598-4,105i                               | -1,107-3,581i                             |
|    | $D_{yy}$ | 2,219-1,223i                                | 4,161+0,824i                              |
| 26 | $D_{xx}$ | -0,163+3,878i                               | -0,146+0,954i                             |
|    | $D_{xy}$ | -0,209+0,683i                               | -0,518-0,781i                             |
|    | $D_{yx}$ | -0,689-1,923i                               | -1,096-3,578i                             |
|    | $D_{yy}$ | 2,103-1,281i                                | 4,161+0,830i                              |

As componentes de  $\mathcal{D}$  são indicadas por  $D_{xx}$ ,  $D_{xy}$ ,  $D_{yx}$  e  $D_{yy}$ .

Experimentos numéricos semelhantes aos apresentados nas Tabelas 4.2 e 4.5 indicaram que as expansões assintóticas (5.15) e (5.24)-(5.26) podem na prática ser truncadas em  $r = 3$ .

#### 5.4 - O CAMPO DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Alguns aspectos qualitativos importantes dos campos da solução fundamental e dos demais núcleos podem ser demonstrados através de gráficos como os das Figuras 5.1 e 5.2. Na Figura 5.1, mostramos um mapa de isolinhas de  $\text{Im } G(y_c; \vec{r}; \vec{r}')$  para uma fonte em  $\vec{r}' = (0,1)$  e para três frequências diferentes (a dissipação é desprezível). Os valores de  $G$  foram computados usando (3.46) e o truncamento dado por (3.48) com  $b = 7$  sempre que  $|x| > 0,5$ , e usando (5.15) para  $|x| < 0,5$ . Note nas figuras que o campo é contínuo através do meridiano da fonte  $x = 0$ , uma propriedade que não é aparente na representação em série

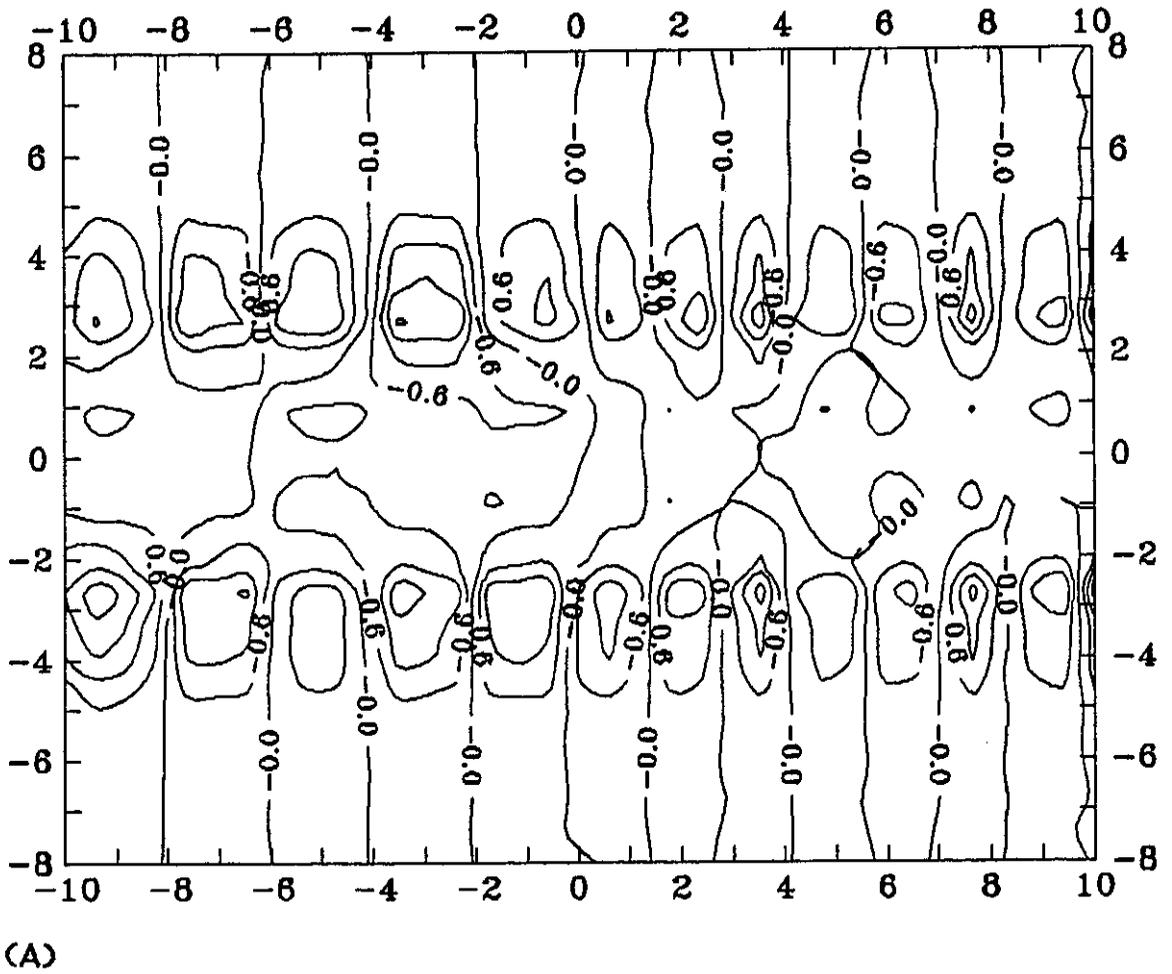
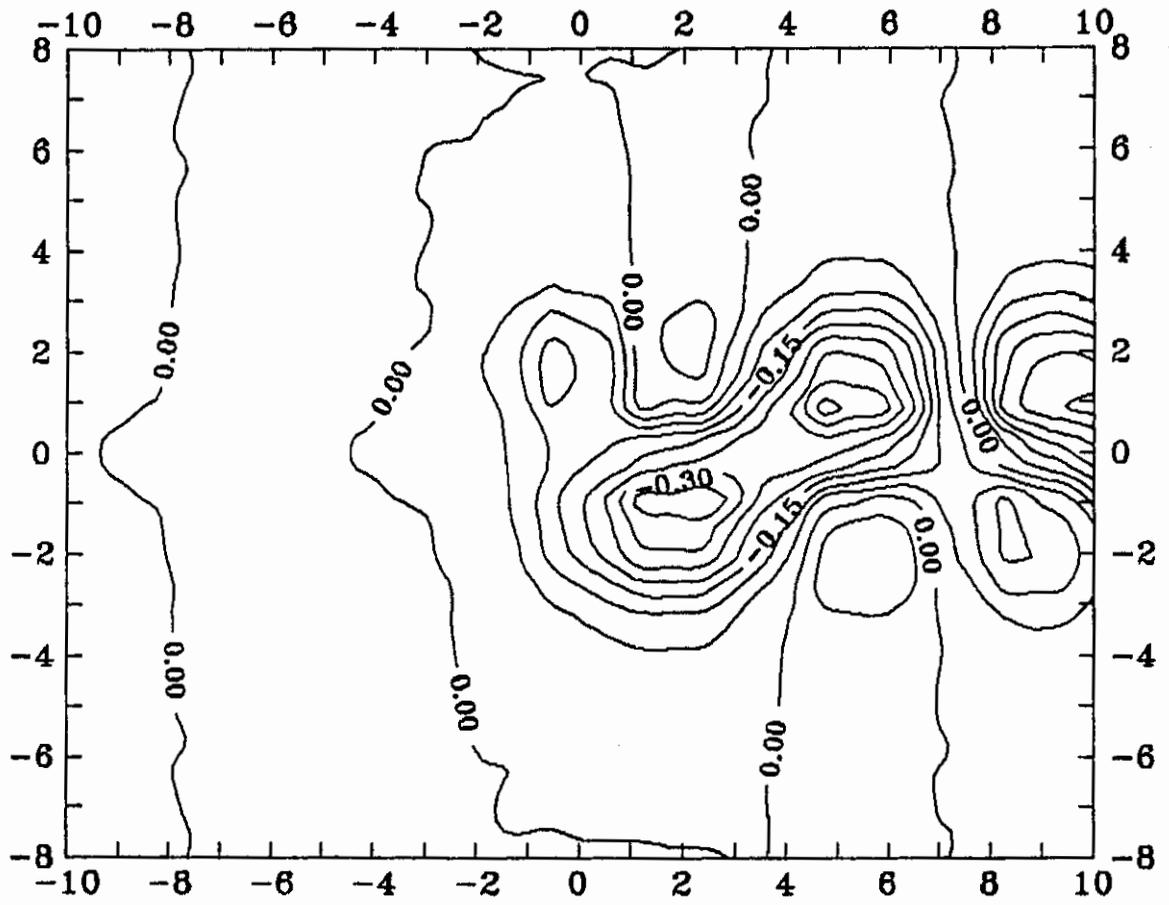


Fig. 5.1 - Parte imaginária de  $G(y_c; \vec{r}; \vec{r}')$  para  $\vec{r}' = (0, 1)$ .

(a)  $y_c = 0,263$ , (b)  $y_c = 0,789$ , (c)  $y_c = 3,16$ . A singularidade logarítmica de  $G$  em  $\vec{r} = \vec{r}'$  (v. Seção 5.5) não é aparente nestas figuras.

(continua)



(B)

Fig. 5.1 - Continuação.

(continua)

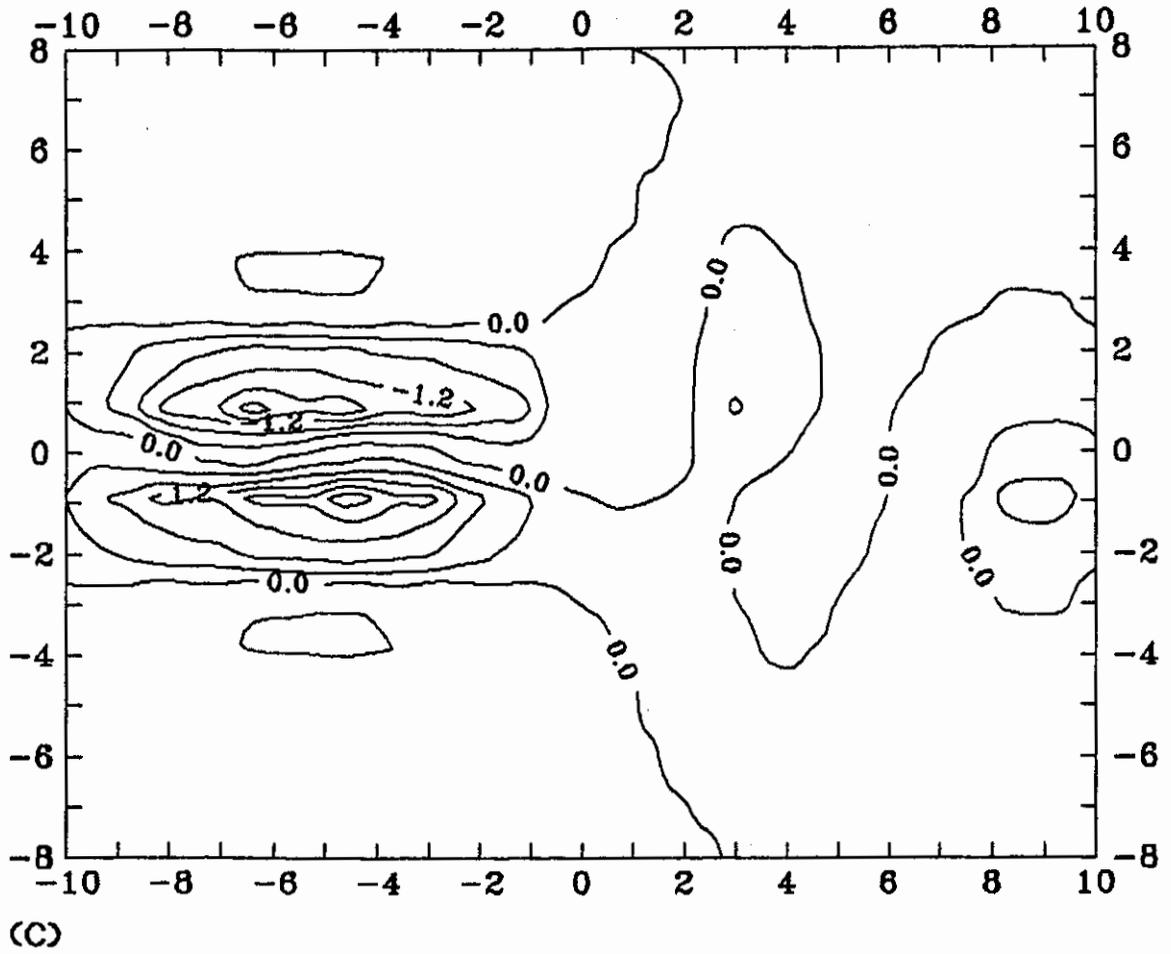


Fig. 5.1 - Conclusão.

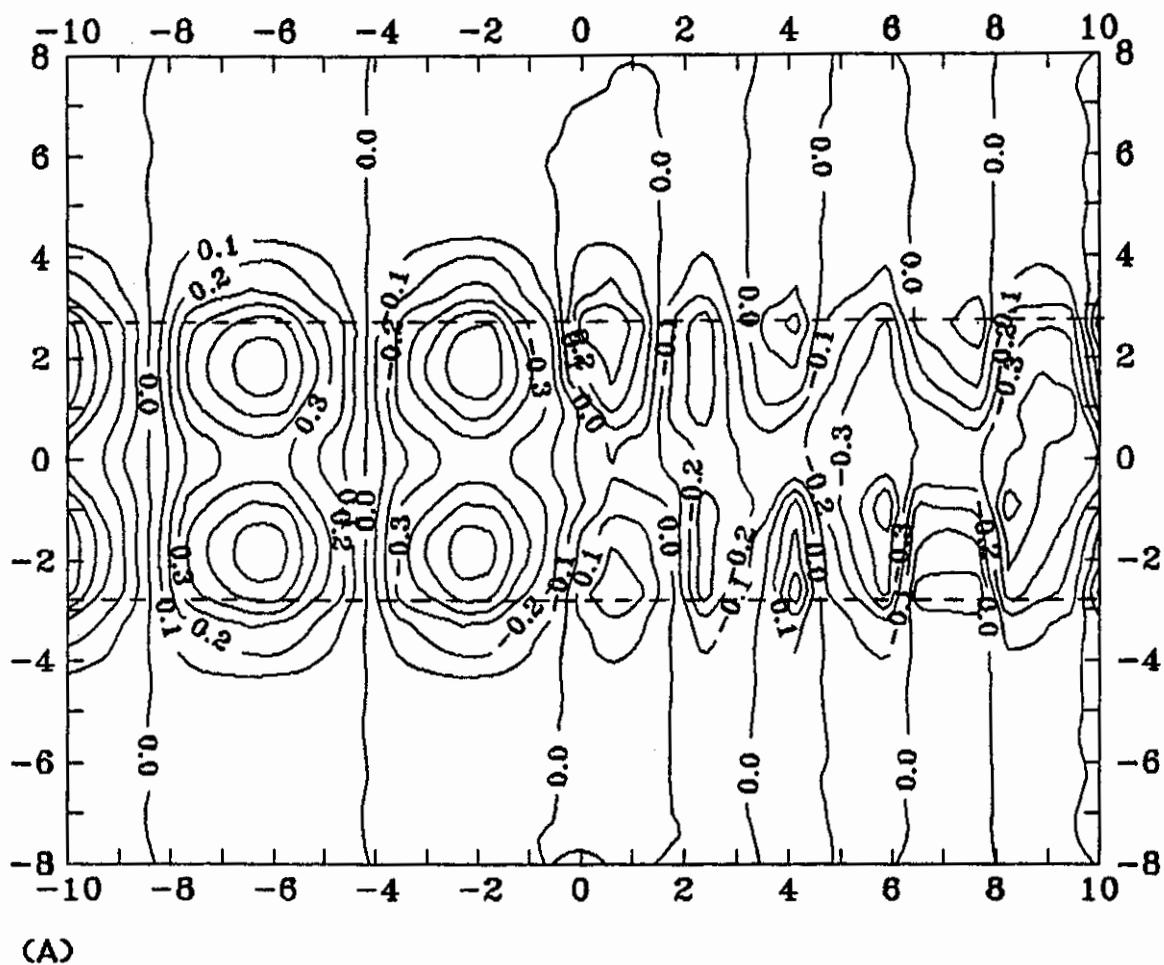
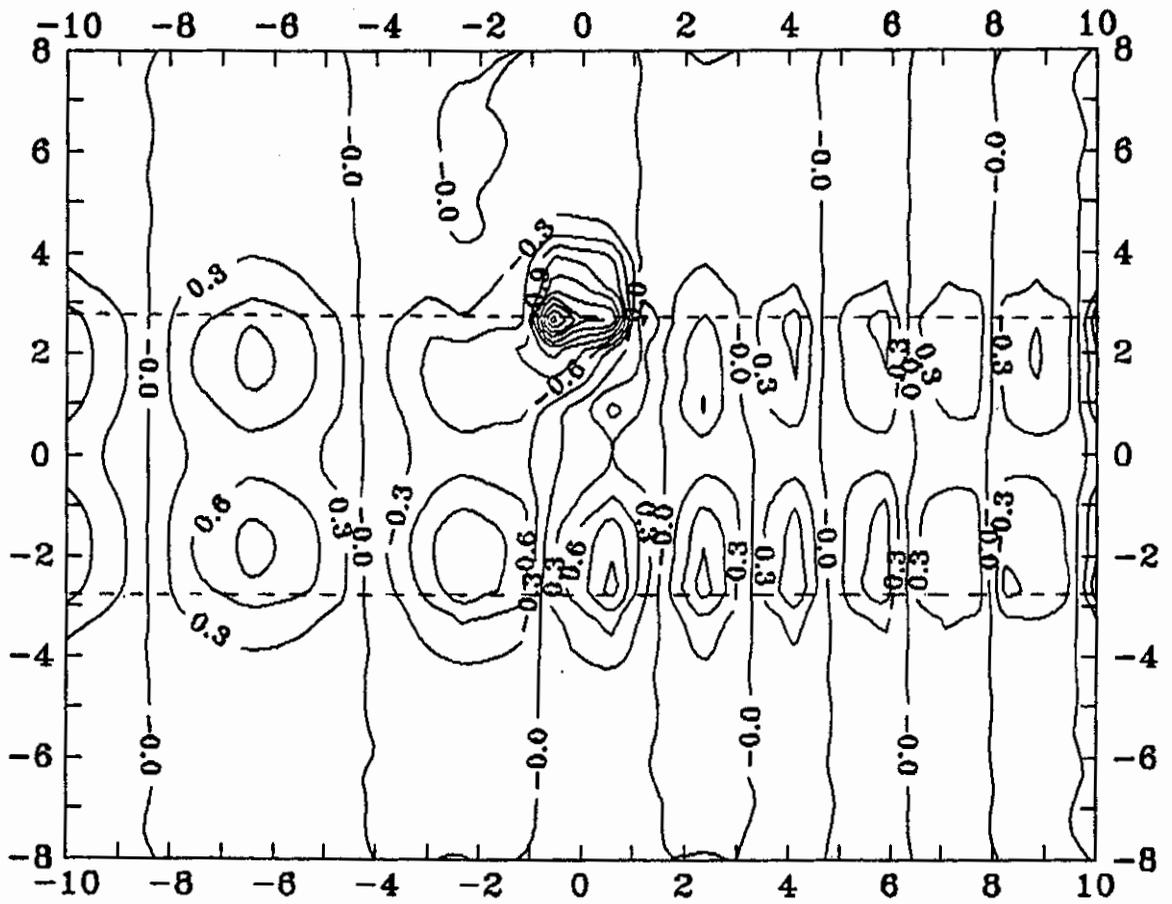


Fig. 5.2 - Parte imaginária de  $G(y_c; \vec{r}; \vec{r}')$  para  $y_c = 0,368$ .

(a)  $\vec{r}' = (0; 0,5)$ , (b)  $\vec{r}' = (0; 2,739)$ , (c)  $\vec{r}' = (0; 5)$ . As linhas tracejadas horizontais são  $y = \pm y_c = \pm 2Q^{1/2} = \pm (y_c^2 + 1/y_c^2)^{1/2} = \pm 2,739$ .

(continua)



(B)

Fig. 5.2 - Continuação.

(continua)

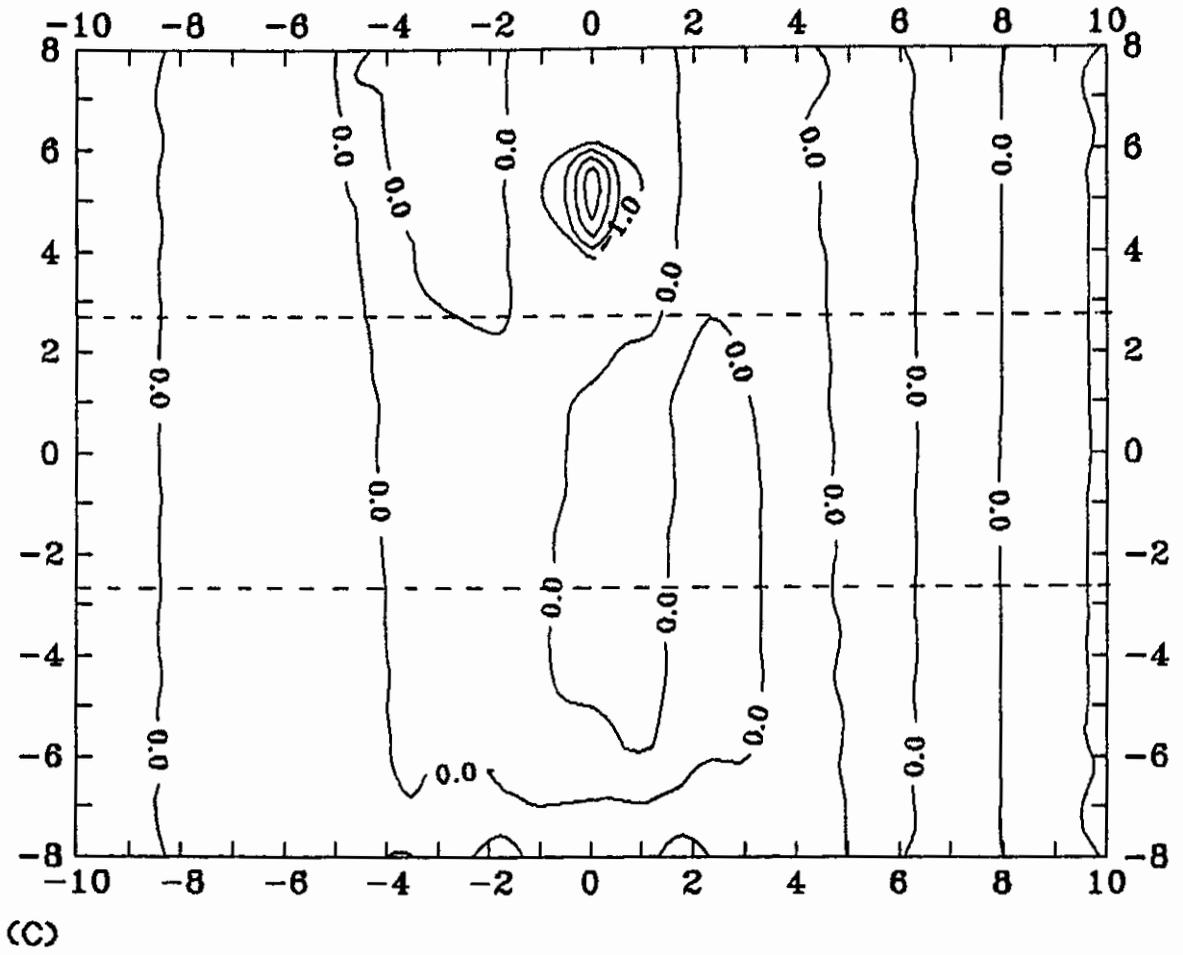


Fig. 5.2 - Conclusão.

(3.46). Na Figura 5.1a, a frequência é baixa, com ondas de Rossby aparecendo tanto a leste quanto a oeste da fonte; a Figura 5.1c mostra um caso em que a frequência é alta, onde aparecem ondas de gravidade; finalmente, a Figura 5.1b mostra um caso em que a frequência é "intermediária", onde os únicos modos propagatórios são o de Kelvin e o de Yanai.

Na Figura 5.2, ilustramos a dependência do campo da solução fundamental em relação à posição da fonte, a uma frequência fixada. É conhecido (Jacobs, 1967; Ripa, 1989) que a radiação de uma fonte pontual sobre o plano- $\beta$  formará um sistema de cáusticas múltiplas entre as latitudes extremas  $y = \pm 2|Q|^{1/2} = \pm y_e$ . Estas latitudes são indicadas por linhas horizontais na Figura 5.2. Quando a fonte situa-se entre as latitudes extremas (Figura 5.2a), a amplitude de  $G$  decresce rapidamente na região  $|y| > y_e$ . Se a fonte está situada nesta região (Figura 5.2c), a amplitude de  $G$  é desprezível em todo o plano, exceto na vizinhança imediata da fonte. Um caso intermediário, onde a fonte está sobre uma latitude extrema, é mostrado na Figura 5.2b.

Os mapas das Figuras 5.1 e 5.2 sugerem que  $G$  sempre decai exponencialmente quando  $|y| \rightarrow \infty$ , e esta conclusão é sustentada por estudos que utilizam a aproximação da óptica geométrica (Jacobs, 1967; Ripa, 1989). Quando  $|x| \rightarrow \infty$ , apenas um número finito de modos propagatórios contribui para a solução fundamental, e estes decairão exponencialmente na direção de suas respectivas velocidades de grupo, na presença de uma dissipação arbitrariamente pequena. Assim,  $G$  decairá exponencialmente quando  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ , como mencionado na Seção 2.3. A mesma conclusão é válida para as demais funções de influência.

### 5.5 - CONTRIBUIÇÕES SINGULARES

A solução fundamental e os demais núcleos apresentam uma singularidade em  $\vec{r}' = \vec{r}$ . Um tal comportamento poderia ser esperado, em vista dos resultados da Seção 4.6, porque a solução fundamental é definida por meio de séries de produtos de duas funções de Hermite. Para determinar o comportamento singular das funções de influência, podemos seguir o procedimento já empregado na Seção 4.6 em relação à série  $G_\alpha(x, y)$ . Consideremos primeiro o comportamento das séries  $A_r^{\epsilon\kappa}$  com  $\epsilon = -\kappa$ , que aparecem em (5.15) e (5.24)-(5.26), quando  $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}$ . Usando (5.18) e (5.21), obtemos

$$\begin{aligned} A_0^{\epsilon\kappa} &= I_0^{\epsilon\kappa} + O(1) = 2\xi_{\epsilon\kappa}^{-2} \Gamma(2, M^{1/2} \xi_{\epsilon\kappa}) + O(1) = \\ &= 2\xi_{\epsilon\kappa}^{-2} (1 + M^{1/2} \xi_{\epsilon\kappa}) \exp[-M^{1/2} \xi_{\epsilon\kappa}] + O(1) = \\ &= 2\xi_{\epsilon\kappa}^{-2} (1 - M \xi_{\epsilon\kappa}^2) + O(1) = 2/\xi_{\epsilon\kappa}^2 + O(1), \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} A_1^{\epsilon\kappa} &= I_1^{\epsilon\kappa} + O(1) = 2\xi_{\epsilon\kappa}^{-1} \Gamma(1, M^{1/2} \xi_{\epsilon\kappa}) + O(1) = \\ &= 2\xi_{\epsilon\kappa}^{-1} \exp[-M^{1/2} \xi_{\epsilon\kappa}] + O(1) = \\ &= 2/\xi_{\epsilon\kappa} + O(1), \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} A_2^{\epsilon\kappa} &= I_2^{\epsilon\kappa} + O(1) = 2\Gamma(0, M^{1/2} \xi_{\epsilon\kappa}) + O(1) = \\ &= 2E_1(M^{1/2} \xi_{\epsilon\kappa}) + O(1) = \\ &= -2 \log \xi_{\epsilon\kappa} + O(1); \end{aligned} \quad (5.30)$$

analogamente, pode-se mostrar que  $A_r^{\epsilon\kappa} = O(1)$  para todo  $r \geq 3$ ,  $\epsilon = -\kappa$ . Além disso, decorre de (5.17) que  $A_r^{\epsilon\kappa} = O(1)$  se  $\epsilon = \kappa$ .

Expandindo os coeficientes dos  $A_r^{\varepsilon\kappa}$  em (5.15) e (5.24)-(5.26) em série de Taylor em torno do ponto  $x' = x$ ,  $y' = y$ , e usando os resultados do parágrafo anterior, mostra-se após alguma álgebra que os  $A_r^{\varepsilon\kappa}$  com  $\varepsilon = -\kappa$  e  $r \leq 2$  contribuem para o campo das funções de influência com os seguintes termos singulares:

$$G(y_c; \vec{r}; \vec{r}') = \frac{i}{2\pi y_c} (y^2 - y_c^2) \log R + O(1), \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \vec{K}(\vec{r}; \vec{r}') = \frac{1}{4\pi y_c} \left\{ 2(iy\hat{z} \times -y_c) \frac{\vec{R}}{R^2} + \right. \\ \left. + \left( i\hat{x} - \frac{y}{y_c} \hat{y} \right) \log R \right\} + O(1), \quad (5.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{r}; \vec{r}') = \frac{1}{4\pi y_c} \left\{ 2(iy\hat{z} \times +y_c) \frac{\vec{R}}{R^2} - \right. \\ \left. - \left( i\hat{x} + \frac{y}{y_c} \hat{y} \right) \log R \right\} + O(1), \quad (5.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\vec{r}; \vec{r}') = \frac{1}{8\pi i y_c} \left\{ \frac{4(\Delta x^2 - \Delta y^2)}{R^4} \left( 1 + \frac{i\Delta x}{2y_c} \right) (\hat{x}\hat{x} - \hat{y}\hat{y}) + \right. \\ + \left( \frac{8\Delta x\Delta y}{R^4} + \frac{2i}{y_c} \frac{\Delta y(\Delta x^2 - \Delta y^2)}{R^4} \right) (\hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x}) + \frac{4i}{y_c} \frac{\Delta x}{R^2} \hat{y}\hat{y} + \\ + \left[ \frac{1}{2} (y^2 + y_c^2) (\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y}) - \frac{1}{2y_c^2} (\hat{x}\hat{x} + 3\hat{y}\hat{y}) - \right. \\ \left. - iy_c y (\hat{x}\hat{y} - \hat{y}\hat{x}) \right] \log R \left. \right\} + O(1). \quad (5.34) \end{aligned}$$

Em (5.31)-(5.34) introduzimos as notações  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = \Delta x\hat{x} + \Delta y\hat{y}$  e  $R = |\vec{R}|$ .

No capítulo seguinte, freqüentemente precisaremos nos referir aos termos  $O(1)$  que aparecem nas

expressões (5.31)-(5.34). Estes termos representam funções contínuas em  $\vec{r}' = \vec{r}$ , que chamaremos de "partes regulares" das funções de influência. As partes regulares das funções  $G$ ,  $\vec{K}$ ,  $\vec{J}$  e  $\mathcal{D}$  serão denotadas respectivamente por  $G^{(R)}$ ,  $\vec{K}^{(R)}$ ,  $\vec{J}^{(R)}$  e  $\mathcal{D}^{(R)}$ . A Figura 5.3 ilustra o comportamento das partes regulares das funções de influência ao longo de uma reta que passa através da fonte.

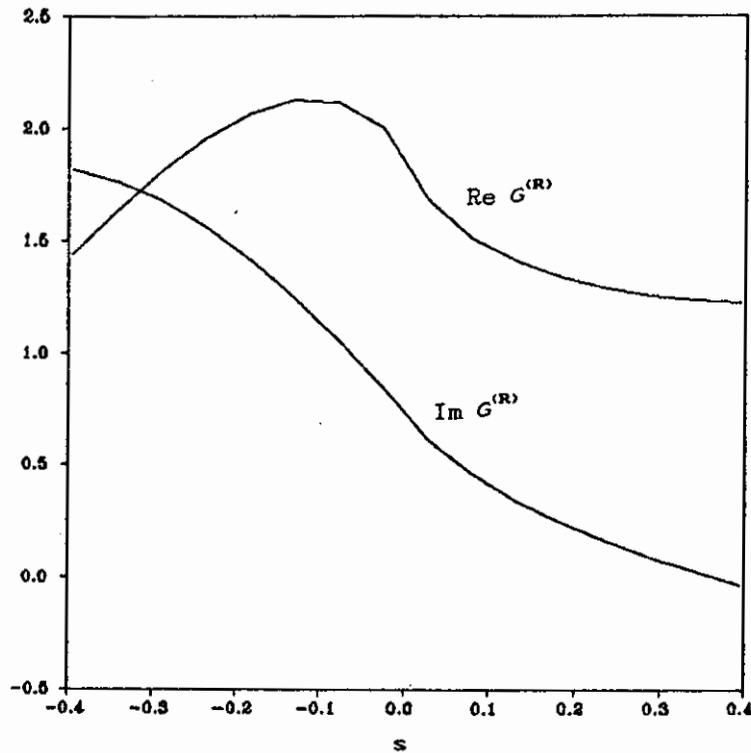


Fig. 5.3 - Partes regulares das funções de influência para uma fonte em  $y = 1,5$ , com  $y_c = 0,2639 - 0,002i$ .

A abcissa  $s$  é medida em raios de deformação ao longo de uma reta que passa através da fonte em  $s = 0$  e faz um ângulo de  $37^\circ$  com a direção zonal. As componentes cartesianas das partes regulares de  $\vec{K}$ ,  $\vec{J}$  e  $\mathcal{D}$  são denotadas por  $K_x^{(R)}$ ,  $K_y^{(R)}$ ,  $J_x^{(R)}$ ,  $J_y^{(R)}$ ,  $D_{xx}^{(R)}$ ,  $D_{xy}^{(R)}$ ,  $D_{yx}^{(R)}$  e  $D_{yy}^{(R)}$ .

(continua)

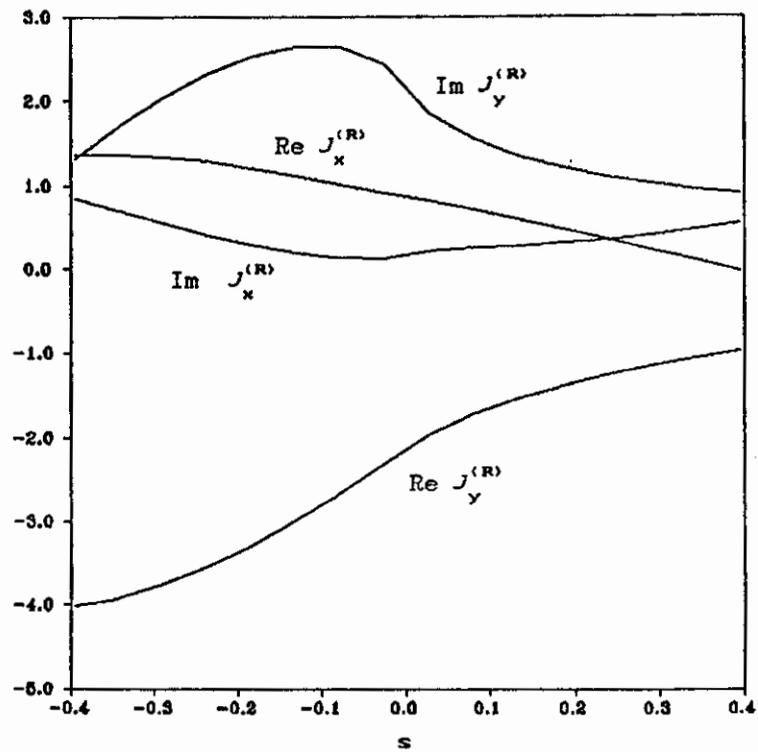
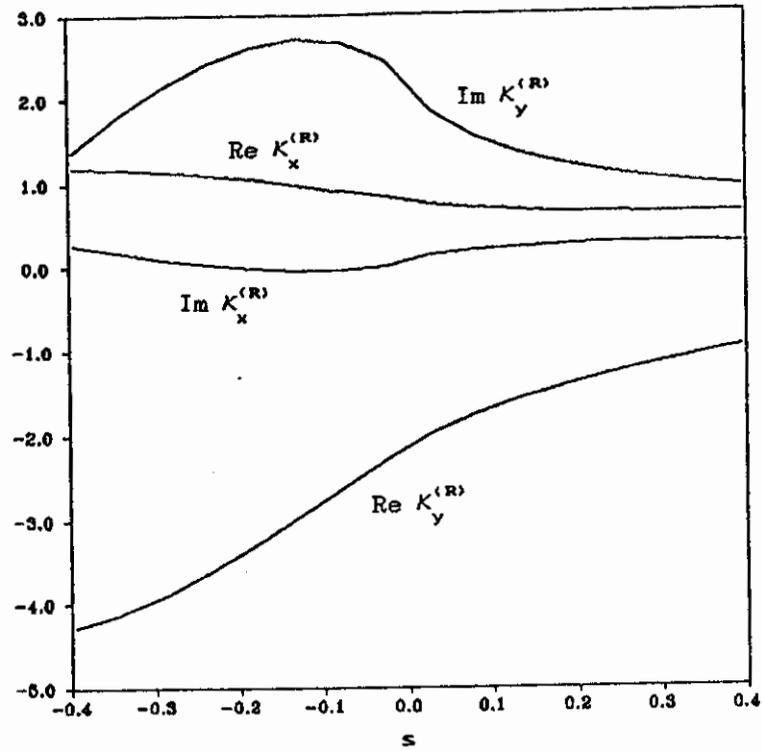


Fig. 5.3 - Continuação.

(continua)

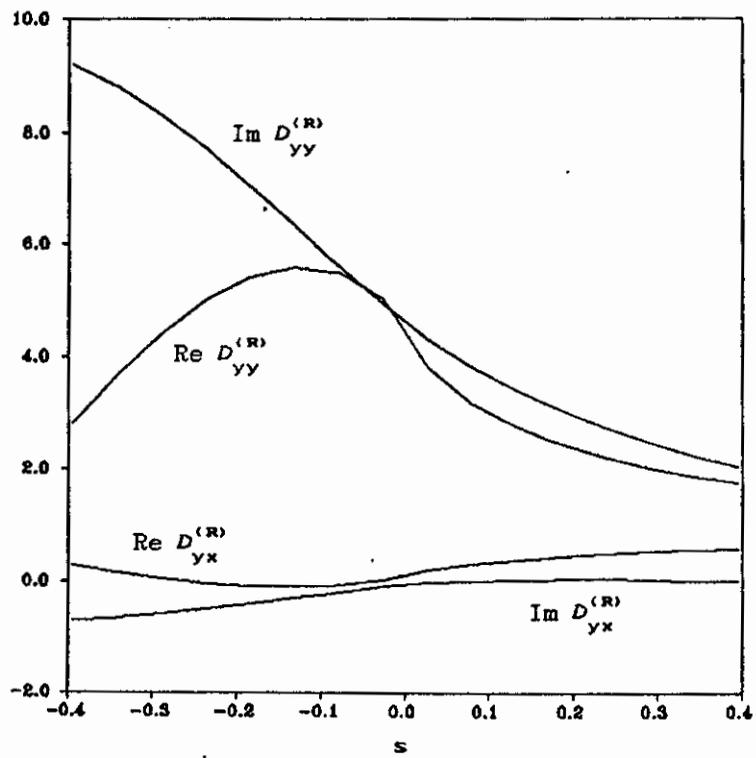
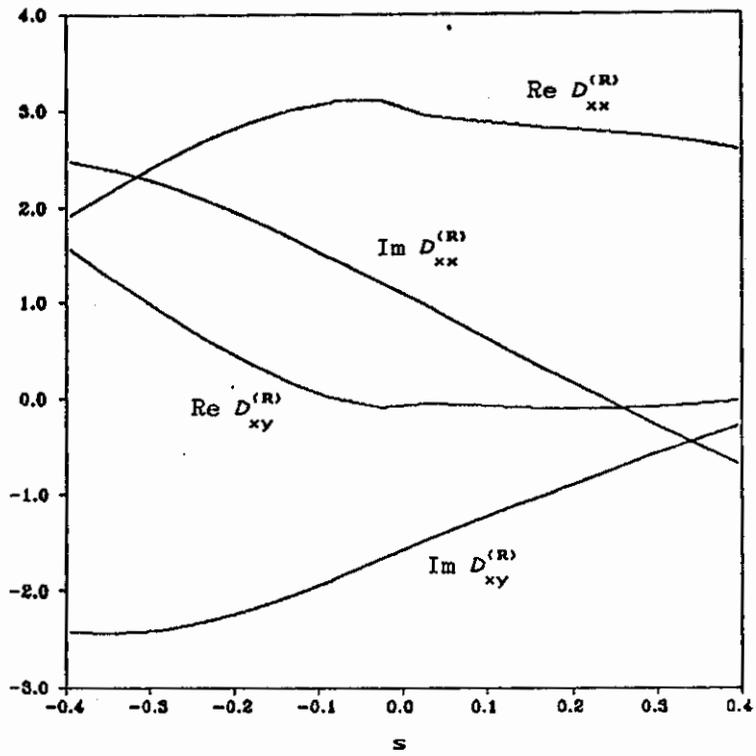


Fig. 5.3 - Conclusão.

CAPÍTULO 6EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO6.1 - INTRODUÇÃO

Após o estudo detalhado do comportamento dos núcleos, realizado nos Capítulos 3 e 5, estamos em condições de deduzir uma equação integral de contorno para o campo de pressão ao longo de uma fronteira oceânica arbitrária, a partir da representação integral (2.22). Introduziremos neste capítulo o método dos elementos de contorno para a solução desta equação integral. No tratamento de problemas forçados pelo vento, será conveniente transformar o termo integral bi-dimensional em (2.22) em uma integral de contorno. Esta transformação pode ser efetuada empregando-se soluções particulares das equações de movimento. Tais soluções são definidas por séries de funções de Hermite que convergem lentamente. A teoria assintótica do Capítulo 5 pode ser prontamente aplicada, obtendo-se expansões assintóticas análogas a (5.15) e (5.24)-(5.26).

Na última seção do capítulo, a equação integral básica é adaptada para descrever o espalhamento de ondas equatoriais livres por obstáculos (ilhas e margens continentais) de forma arbitrária. Este problema tem sido bastante estudado (Yoon, 1981; Rowlands, 1982; Clarke, 1983; Cane e Gent, 1984; McCalpin, 1987), mas inexiste na literatura um método que permita tratar rigorosamente o problema do espalhamento de ondas equatoriais em um oceano infinito ou semi-infinito, quando as fronteiras têm geometria arbitrária. Freqüentemente, faz-se uso da aproximação de ondas longas (Cane e Gent, 1984; McCalpin, 1987) para simplificar o problema próximo aos contornos. Longe das fronteiras, um amortecimento artificial é por

vezes empregado para simular um meio infinito com uma grade computacional finita. Entretanto, este recurso não é simultaneamente efetivo para todos os tipos de ondas equatoriais (Moore e McCreary, 1990). A presente formulação integral tem a vantagem de permitir o tratamento rigoroso de tais problemas exteriores (Brebbia et al., 1984) através da discretização de contornos finitos.

## 6.2 - A EQUAÇÃO INTEGRAL BÁSICA

A representação integral (2.22) para o campo de pressão foi obtida sob a suposição de que o ponto  $\vec{r}'$  estava situado no interior da região oceânica  $B$ . Suponha agora que  $\vec{r}'$  esteja em uma posição  $s' = s'$  sobre a fronteira  $\Gamma$  de  $B$ . Por (5.32), o primeiro integrando em (2.22) se comporta como  $(s - s')^{-1}$  quando  $s \rightarrow s'$ . Assim, a primeira integral em (2.22) não fará sentido mesmo como uma integral de Riemann imprópria. A fim de interpretar esta integral corretamente, consideraremos um processo de limite, no qual  $\vec{r}'$  se aproxima de um ponto  $\vec{r}''$  da fronteira  $\Gamma$  a partir do interior de  $B$ , ao longo da direção normal  $\hat{n}(s'')$ , onde  $s''$  é a coordenada de  $\vec{r}''$  sobre  $\Gamma$ . Denotemos por  $Z(\delta s)$  a contribuição à integral de um pequeno segmento  $s'' - \delta s \leq s \leq s'' + \delta s$ . Se a distância  $\delta n$  entre  $\vec{r}'$  e  $\vec{r}''$  é pequena, então por (5.32) teremos

$$Z(\delta s) = \frac{p(\vec{r}'')}{2\pi y_c} \int_{s''-\delta s}^{s''+\delta s} \hat{n}(s'') \cdot (iy''\hat{z} \times -y_c) \frac{[\vec{r}' - \vec{r}(s)]}{|\vec{r}' - \vec{r}(s)|^2} ds + O(\delta s). \quad (6.1)$$

Já que  $\vec{r}(s) = \vec{r}'' + (s-s'')\hat{s}(s'') + O((s-s'')^2)$  e  $\vec{r}'' - \vec{r}' = \delta n \hat{n}(s'')$ , concluímos que

$$Z(\delta s) = \frac{p(\vec{r}'')}{2\pi y_c} \int_{s''-\delta s}^{s''+\delta s} \frac{iy''(s-s'') + y_c \delta n}{\delta n^2 + (s-s'')^2} ds + O(\delta s)$$

$$= \frac{1}{\pi} p(\vec{r}'') \tan^{-1}(\delta s / \delta n) + O(\delta s). \quad (6.2)$$

Tomando o limite  $\delta s, \delta n \rightarrow 0$  com  $\delta n \ll \delta s$ , vemos que  $Z(\delta s) \rightarrow p(\vec{r}'')/2$ . Assim, quando  $\vec{r}'$  está na posição  $s = s'$  sobre  $\Gamma$ , a primeira integral em (2.22) deveria ser interpretada como

$$\frac{1}{2} p(\vec{r}') + \lim_{\delta s \rightarrow 0} \int_{|s-s'| \geq \delta s} p(\vec{r}) \hat{n}(s) \cdot \vec{K}(\vec{r}'; \vec{r}) ds. \quad (6.3)$$

O segundo termo da expressão acima é chamado o "valor principal" da primeira integral em (2.22). Por (5.31) e (5.32), as outras integrais em (2.22) têm singularidades integráveis em  $\vec{r} = \vec{r}'$ , e podem portanto ser interpretadas como integrais impróprias de Riemann. Assim, a equação integral de contorno para a distribuição de pressão ao longo do contorno,  $p(s) = p(\vec{r}(s))$ , é

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p(\vec{r}') &= \text{P.V.} \oint_{\Gamma} p(\vec{r}) \hat{n}(s) \cdot \vec{K}(\vec{r}'; \vec{r}) ds - \\ &- \frac{1}{2} \rho_0 c \oint_{\Gamma} q(s) G(y_c; \vec{r}'; \vec{r}) ds - \\ &- \gamma^{-1} \iint_B \vec{F}(\mathbf{r}) \cdot \vec{K}(\vec{r}'; \vec{r}) dx dy, \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde  $\vec{r}'$  ocupa a posição  $s'$  sobre  $\Gamma$  e P.V. denota o valor principal.

### 6.3 - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Uma vez que as funções de influência são bastante complicadas, é difícil resolver (6.4) analiticamente, mesmo se a geometria do oceano, o forçamento e as condições de contorno são muito simples. No entanto, utilizando as rotinas de computação dos núcleos (contidas no Apêndice B), a equação (6.4) pode ser resolvida numericamente pelo método dos elementos de contorno (Brebbia et al., 1984). O método consiste

basicamente em discretizar a fronteira  $\Gamma$  em  $N$  pequenos segmentos (elementos de contorno)  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ . Em cada elemento  $\Gamma_j$ , escolhemos um ponto  $\vec{r}'_j$ , e assumimos que a pressão ao longo de cada elemento é constante, igual a  $p_j = p(\vec{r}'_j)$ . Aplicando (6.4) em  $\vec{r}' = \vec{r}'_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , obtemos um sistema de equações lineares para as pressões  $p_j$  ao longo do contorno:

$$\frac{1}{2} p_k = \sum_{j=1}^N T_{kj} p_j - Q_k, \quad (6.5)$$

onde

$$T_{kj} = \text{P.V.} \int_{\Gamma_j} \hat{n}(s) \cdot \vec{K}(\vec{r}'_k; \vec{r}) ds \quad (6.6)$$

$$Q_k = \frac{1}{2} \rho_0 c \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} q(s) G(y_c; \vec{r}'_k; \vec{r}) ds + \gamma^{-1} \iint_B \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{K}(\vec{r}'_k; \vec{r}) dx dy. \quad (6.7)$$

Geometrias oceânicas bastante complexas podem ser descritas fielmente por algumas dezenas de elementos, de modo que a dimensão  $N$  do sistema de equações lineares acima será normalmente bastante modesta.

O esquema numérico mais simples usa elementos de contorno retilíneos. Suponha por simplicidade que a fronteira  $\Gamma$  consiste de uma única ilha ou margem continental, de modo que podemos discretizá-la como uma linha poligonal com  $N+1$  vértices consecutivos  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N+1}$ . O vetor unitário normal ao  $k$ -ésimo elemento de contorno  $\Gamma_k = \{\vec{r}_k, \vec{r}_{k+1}\}$  é dado por

$$\hat{n}_k = d_k^{-1} (\vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k) \times \hat{z}, \quad (6.8)$$

onde

$$d_k = |\vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k| \quad (6.9)$$

é o comprimento do elemento e assumimos que  $k$  sempre aumenta no sentido do vetor  $\hat{s}_k = \hat{z} \times \hat{n}_k$ . Para tratar um contorno que consiste de várias curvas  $C_1, C_2, \dots$ , poderíamos discretizar cada curva como descrito acima, e então renumerar os elementos consecutivamente de 1 até o número total de elementos. A fim de simplificar as expressões que se seguem, é conveniente escolher o ponto  $\vec{r}'_k$  no centro do elemento  $\Gamma_k$ ,

$$\vec{r}'_k = \frac{1}{2} (\vec{r}_{k+1} + \vec{r}_k). \quad (6.10)$$

Quando os elementos de contorno são retilíneos, (6.6) reduz-se a

$$T_{kj} = \hat{n}_j \cdot \left( \text{P.V.} \int_{\Gamma_j} \vec{K}(\vec{r}'_k; \vec{r}) ds \right). \quad (6.11)$$

Quando  $j \neq k$ , o ponto  $\vec{r}'_k$  não está sobre o caminho de integração na integral acima; o integrando será uma função suave de  $s$ , e  $T_{kj}$  poderá ser calculado aproximadamente por regras de quadratura numérica como a regra de 2 pontos de Gauss-Legendre<sup>1</sup>

$$T_{kj} \approx \frac{1}{2} d_j \hat{n}_j \cdot [\vec{K}(\vec{r}'_k; \vec{r}'_j + hd_j \hat{s}_j) + \vec{K}(\vec{r}'_k; \vec{r}'_j - hd_j \hat{s}_j)], \quad (6.12)$$

---

<sup>1</sup> Qualquer regra de quadratura numérica perderá sua eficiência se o integrando variar muito rapidamente sobre o domínio de integração. Portanto, antes de empreender uma solução numérica pelo método dos elementos de contorno é importante estimar a escala horizontal das oscilações no campo das funções de influência, com o auxílio de mapas como os da Figura 5.1.

onde  $h = 0,2886751$ . Quando  $j = k$ , há uma singularidade no integrando de (6.11) em  $\vec{r} = \vec{r}'_k$ ; para computar a integral numericamente, podemos escrever

$$T_{kk} = \hat{n}_k \cdot \left\{ \text{P.V.} \int_{\Gamma_k} \vec{K}^{(S)}(\vec{r}'_k; \vec{r}) ds + \int_{\Gamma_k} \vec{K}^{(R)}(\vec{r}'_k; \vec{r}) ds \right\}, \quad (6.13)$$

onde a "parte singular" de  $\vec{K}$  é (v. Seção 5.5)

$$\vec{K}^{(S)}(\vec{r}'_k; \vec{r}) = \frac{1}{4\pi y_c} \left\{ 2(iy'_k \hat{z} \times -y_c) \frac{\vec{R}_k}{R_k^2} + \left[ i\hat{x} - \frac{y'_k}{y_c} \hat{y} \right] \log R_k \right\}, \quad (6.14)$$

com  $\vec{R}_k = \vec{r}'_k - \vec{r}$ ,  $R_k = |\vec{R}_k|$ , e a "parte regular" de  $\vec{K}$  é

$$\vec{K}^{(R)} = \vec{K} - \vec{K}^{(S)} = O(1). \quad (6.15)$$

A primeira integral em (6.13) pode ser calculada analiticamente. Quanto à segunda integral, sabemos que a parte regular de  $\vec{K}$  é uma função contínua (Seção 5.5); além disso, a Figura 5.3 indica que  $\vec{K}^{(R)}$  varia lentamente numa escala horizontal de cerca de 1 raio de deformação. Portanto, se  $d_k \leq 1$  podemos computar a segunda integral usando a regra de 2 pontos Gauss-Legendre. O resultado final é

$$T_{kk} \approx \frac{d_k}{4\pi y_c} \left[ \log \frac{1}{2} d_k - 1 \right] \left( i\hat{x} - \frac{y'_k}{y_c} \hat{y} \right) \cdot \hat{n}_k + \frac{1}{2} d_k \hat{n}_k \cdot \left[ \vec{K}^{(R)}(\vec{r}'_k; \vec{r}'_k + hd_k \hat{s}_k) + \right.$$

$$+ \vec{K}^{(R)} (\vec{r}'_k; \vec{r}'_k - h d_k \hat{s}_k)] . \quad (6.16)$$

O cálculo dos coeficientes  $T_{kj}$  pode ser efetuado com o auxílio do programa Mat descrito no Apêndice B.

Consideremos agora o cálculo dos números  $Q_k$ , dados por (6.7). As integrais de contorno que aparecem nesta equação podem ser calculadas por um esquema similar ao descrito acima para os coeficientes  $T_{kj}$ , se assumimos que  $q(s)$  é constante ao longo de cada elemento de contorno. Entretanto, a discretização direta do segundo termo de (6.7), uma integral bi-dimensional, seria bastante dispendiosa e complicada do ponto de vista computacional. Esta dificuldade, associada com a presença de termos inomogêneos na equação integral, é comum à maioria dos esquemas de solução numérica de equações pelo método dos elementos de contorno. Dentre as possíveis alternativas para evitar a discretização do interior do domínio do problema, a mais rigorosa e mais satisfatória é empregar soluções particulares das equações de movimento (Azevedo e Brebbia, 1988).

#### 6.4 - INTEGRAIS BI-DIMENSIONAIS

Nesta seção, consideraremos a redução do último termo de (6.4) a uma integral de contorno. Para simplificar a discussão seguinte, suponha que queremos resolver as equações de água rasa sobre uma bacia oceânica  $B$ , com a condição de contorno de fluxo normal nulo nos contornos oceânicos e com um campo forçante  $\vec{F}(\vec{r})$ . Se dispusermos de uma solução particular  $p^{(P)}(\vec{r})$  de (2.7) (que em geral não satisfará as condições de contorno), poderemos escrever o campo de pressão total como

$$p = p^{(P)} + p^{(H)} , \quad (6.17)$$

onde  $p^{(H)}$  satisfaz a forma homogênea das equações de água rasa. Em pontos  $\vec{r}'$  do interior de  $B$ , (2.22) permite representar o campo  $p^{(H)}$  como

$$p^{(H)}(\vec{r}') = \oint_{\Gamma} p^{(H)}(\vec{r}) \hat{n}(s) \cdot \vec{K}(\vec{r}'; \vec{r}) ds + \\ + \frac{1}{2} \rho_0 c \oint_{\Gamma} G(y_c; \vec{r}'; \vec{r}) \vec{u}^{(P)}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(s) ds, \quad (6.18)$$

onde  $\vec{u}^{(P)}$  denota o campo de velocidade associado com a solução particular  $p^{(P)}$ . Quando  $\vec{r}'$  é levado até o contorno  $\Gamma$ , obtemos de (6.18) uma equação integral de contorno para o campo desconhecido  $p^{(H)}$ ; esta equação é análoga a (6.4), mas o termo envolvendo uma integral bi-dimensional está ausente, e  $-\vec{u}^{(P)} \cdot \hat{n}$  faz o papel de  $q$ . Esta equação pode ser resolvida numericamente como descrito na Seção 6.3, sem as desvantagens advindas da discretização de uma integral bi-dimensional.

Para determinar uma solução particular para a pressão, associada com uma distribuição realista dos ventos sobre o oceano, pode-se começar calculando a resposta de um oceano ilimitado sobre o plano- $\beta$  a uma classe de forçamentos "simples". Se um forçamento arbitrário puder ser expandido como uma combinação linear destes forçamentos "simples", então a solução particular procurada será dada pela mesma combinação linear das respostas calculadas para o oceano ilimitado.

Um forçamento de frequência fixa e com uma dependência senoidal em  $x$  e  $y$  (que corresponde a uma onda plana nas variáveis  $(t, x, y)$ ) é provavelmente a escolha mais vantajosa para computar a resposta do oceano ilimitado. De fato, a resposta pode ser determinada analiticamente, e a decomposição de um forçamento arbitrário em suas componentes de Fourier pode ser eficientemente realizada

por algoritmos de transformada rápida de Fourier (FFT).<sup>2</sup> Portanto, é suficiente calcular a resposta do oceano a um forçamento da forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_0 e^{i(ax+by)}, \quad (6.19)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $\vec{F}_0$  são constantes. Um campo de pressão forçado por (6.19) é obtido de (2.22) se tomamos a região  $B$  como o plano inteiro:

$$p^{(P)}(\vec{r}) = -\gamma^{-1} \vec{F}_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(ax'+by')} \vec{K}(\vec{r}; \vec{r}') dx' dy'. \quad (6.20)$$

Inserindo a expansão de  $\vec{K}$  em funções de Hermite, Equação (3.52), e usando a propriedade bem conhecida

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iby} \psi_m(y/\sqrt{2}) dy = 2\sqrt{\pi} i^m \psi_m(\sqrt{2}b) \quad (6.21)$$

obtemos

$$p^{(P)}(\vec{r}) = \gamma^{-1} e^{iax} \vec{P}(a, b; y) \cdot \vec{F}_0, \quad (6.22)$$

onde

---

<sup>2</sup> Uma alternativa à decomposição em ondas planas é a projeção do forçamento sobre autofunções cuja dependência meridional é dada pelas funções de Hermite. Cane e Patton (1984) consideraram esta alternativa "impraticável" em vista da lenta convergência das expansões meridionais envolvidas. O uso da decomposição em ondas planas permite um tratamento mais eficiente de dados de vento, através do algoritmo FFT. Entretanto, veremos a seguir que as soluções particulares são dadas por séries lentamente convergentes de funções de Hermite. Este comportamento não causa maiores dificuldades, uma vez que a teoria assintótica de soma desenvolvida nos Capítulos 4 e 5 é aplicável.

$$\begin{aligned}
\vec{P}(a,b;y) = & \frac{1}{i} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left\{ \frac{\psi_0(y/\sqrt{2})\psi_0(\sqrt{2}b)}{a+\alpha_k} \hat{x} + \right. \\
& + \frac{i\psi_1(y/\sqrt{2})[\psi_1(\sqrt{2}b)\hat{x} - (2/y_c)\psi_0(\sqrt{2}b)\hat{y}]}{a+\alpha_y} - \\
& \left. - \sum_{\sigma=\pm} \sigma \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m \phi_m^\sigma(y) [\phi_m^\sigma(2b)\hat{x} + 2\theta_m^\sigma(2b)\hat{y}]}{\gamma_m^\sigma(a+\alpha_m^\sigma)(1+y_c\gamma_m^\sigma)(\gamma_m^+-\gamma_m^-)} \right\}. \quad (6.23)
\end{aligned}$$

O campo de velocidade correspondente pode ser obtido de modo análogo a partir de (2.24),

$$\begin{aligned}
\vec{u}^{(P)}(\vec{r}) = & (\rho_0\omega_0)^{-1} \left\{ e^{i(ax+by)} \frac{(iy_c - y\hat{z} \times) \vec{F}_0}{y^2 - y_c^2} + \right. \\
& \left. + e^{iax} u(a,b;y) \cdot \vec{F}_0 \right\}, \quad (6.24)
\end{aligned}$$

onde  $\omega_0 = \beta/\gamma$  e

$$\begin{aligned}
u(a,b;y) = & \frac{1}{2i} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left[ \frac{\psi_0(y/\sqrt{2})\psi_0(\sqrt{2}b)}{a+\alpha_k} \hat{x}\hat{x} + \frac{i}{a+\alpha_y} \times \right. \\
& \times [\psi_1(y/\sqrt{2})\hat{x} + (2i/y_c)\psi_0(y/\sqrt{2})\hat{y}] [\psi_1(\sqrt{2}b)\hat{x} - \\
& - (2/y_c)\psi_0(\sqrt{2}b)\hat{y}] - 2 \sum_{\sigma=\pm} \sigma \sum_{m=0}^{\infty} i^m \times \\
& \left. \times \frac{[\zeta_m^\sigma(y)\hat{x} - i\theta_m^\sigma(y)\hat{y}] [\phi_m^\sigma(2b)\hat{x} + 2\theta_m^\sigma(2b)\hat{y}]}{\gamma_m^\sigma(a+\alpha_m^\sigma)(1+y_c\gamma_m^\sigma)(\gamma_m^+-\gamma_m^-)} \right]. \quad (6.25)
\end{aligned}$$

### 6.5 - CÁLCULO ASSINTÓTICO DE $\vec{P}(a,b;y)$ E $u(a,b;y)$

Uma estimativa assintótica simples da magnitude dos termos gerais  $\vec{p}_m^\sigma$  e  $u_m^\sigma$  das expansões (6.23) e

(6.25) pode ser obtida a partir de (3.20), (5.5)-(5.7) e (5.11):

$$\vec{p}_m^\sigma = O(m^{-1}), \quad u_m^\sigma = O(m^{-1/2}), \quad (6.26)$$

quando  $m \rightarrow \infty$ . As estimativas acima permitem deduzir que (6.23) converge condicionalmente<sup>3</sup> e que (6.25) é uma série divergente. Portanto, para computar  $\vec{P}$  e  $u$  precisamos derivar expansões assintóticas análogas a (5.15) e (5.24)-(5.26). Usando (3.20) e (5.11), mostra-se que

$$\frac{1}{\gamma_m^\sigma (a + \alpha_m^\sigma) (1 + \gamma_c \gamma_m^\sigma) (\gamma_m^+ - \gamma_m^-)} = \frac{\sigma}{2\gamma_c \bar{m}^2} \sum_{r=0}^{\infty} (i\sigma)^r \frac{\hat{C}_r(a)}{\bar{m}^{r/2}} \quad (6.27)$$

para  $m \gg a^2$ ,  $|Q|$ , onde os primeiros  $\hat{C}_r(a)$  são dados por

$$\begin{aligned} \hat{C}_0(a) &= 1, & \hat{C}_1(a) &= a - \left( \gamma_c + \frac{1}{2\gamma_c} \right), \\ \hat{C}_2(a) &= a^2 - \left( \gamma_c + \frac{1}{\gamma_c} \right) a + \frac{1}{4} (\gamma_c^2 + 2), \\ \hat{C}_3(a) &= a^3 - \left( \gamma_c + \frac{3}{2\gamma_c} \right) a^2 + \left( 1 + \frac{1}{8} \gamma_c^2 + \frac{3}{8\gamma_c^2} \right) a + \\ &+ \frac{1}{8} \left( \gamma_c^3 + \frac{1}{2\gamma_c^3} - \frac{1}{\gamma_c} - \frac{\gamma_c}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Usando (5.5)-(5.7) e (6.27) em (6.23) e (6.25), obtém-se após alguma álgebra as seguintes expansões assintóticas, válidas se  $m \gg 1$ ,  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $y^2/4$ ,  $|Q|$ :

$$\vec{p}_m^\sigma = - \frac{1}{8\sqrt{\pi} \gamma_c \bar{m}} \sum_{\varepsilon, k=\pm} i^{-\varepsilon k m} \exp \{-i[\varepsilon \chi(\bar{m}, y) +$$

<sup>3</sup> Cf. um argumento análogo usado na Seção 4.3.

$$+ \kappa\chi(\bar{m}, 2b) \}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\bar{m}^{r/2}} \left( \frac{P_r^{\sigma\epsilon\kappa}}{\bar{m}^{1/2}} \hat{\mathbf{x}} + Q_r^{\sigma\epsilon\kappa} \hat{\mathbf{y}} \right), \quad (6.29)$$

$$u_m^\sigma = \frac{i}{8\sqrt{\pi}y_c \bar{m}^{1/2}} \sum_{\epsilon, \kappa=\pm} i^{-\epsilon\kappa m} \exp \{-i[\epsilon\chi(\bar{m}, y) + \kappa\chi(\bar{m}, 2b)]\} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\bar{m}^{r/2}} \left( \frac{1}{\bar{m}^{1/2}} \vec{U}_r^{\sigma\epsilon\kappa} \hat{\mathbf{x}} + \vec{V}_r^{\sigma\epsilon\kappa} \hat{\mathbf{y}} \right), \quad (6.30)$$

onde

$$P_r^{\sigma\epsilon\kappa} = i \sum_{n=0}^r (i\sigma)^{r-n} \mathcal{C}_{r-n}(a) \sum_{j=0}^n \bar{\phi}_{n-j}^{\sigma\epsilon}(y) \bar{\phi}_j^{\sigma\kappa}(2b), \quad (6.31)$$

$$Q_r^{\sigma\epsilon\kappa} = -2 \sum_{n=0}^r (i\sigma)^{r-n} \mathcal{C}_{r-n}(a) \sum_{j=0}^n \bar{\phi}_{n-j}^{\sigma\epsilon}(y) \bar{\theta}_j^{\sigma\kappa}(2b), \quad (6.32)$$

$$\vec{U}_r^{\sigma\epsilon\kappa} = -i \sum_{n=0}^r (i\sigma)^{r-n} \mathcal{C}_{r-n}(a) \sum_{j=0}^n [\zeta_{n-j}^{\sigma\epsilon}(y) \hat{\mathbf{x}} - i\bar{\theta}_{n-j}^{\sigma\epsilon}(y) \hat{\mathbf{y}}] \bar{\phi}_j^{\sigma\kappa}(2b), \quad (6.33)$$

$$\vec{V}_r^{\sigma\epsilon\kappa} = 2 \sum_{n=0}^r (i\sigma)^{r-n} \mathcal{C}_{r-n}(a) \sum_{j=0}^n [\zeta_{n-j}^{\sigma\epsilon}(y) \hat{\mathbf{x}} - i\bar{\theta}_{n-j}^{\sigma\epsilon}(y) \hat{\mathbf{y}}] \bar{\theta}_j^{\sigma\kappa}(2b). \quad (6.34)$$

Inserindo (6.29) e (6.30) em (6.23) e (6.25), obtemos as expansões assintóticas

$$\begin{aligned} \vec{P}(a, b; y) &= \vec{P}_x + \vec{P}_y + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{\sigma=\pm} \vec{P}_m^\sigma - \\ &- \frac{1}{8\sqrt{\pi}y_c} \sum_{\epsilon, \kappa=\pm} \sum_{r=0}^{\infty} (E_{r+3}^{\epsilon\kappa} P_r^{\epsilon\kappa} \hat{\mathbf{x}} + E_{r+2}^{\epsilon\kappa} Q_r^{\epsilon\kappa} \hat{\mathbf{y}}), \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$u(a, b; y) = u_x + u_y + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{\sigma=\pm} u_m^\sigma +$$

$$+ \frac{i}{8\sqrt{\pi}y_c} \sum_{\varepsilon, \kappa = \pm} \sum_{r=0}^{\infty} (E_{r+2}^{\varepsilon\kappa} \vec{U}_r^{\varepsilon\kappa} \hat{x} + E_{r+1}^{\varepsilon\kappa} \vec{V}_r^{\varepsilon\kappa} \hat{y}), \quad (6.36)$$

onde  $\vec{P}_K, \vec{P}_Y, U_K, U_Y$  denotam os termos de (6.23) e (6.25) associados com as ondas de Kelvin e Yanai,  $E_r^{\varepsilon\kappa}$  denota a série auxiliar

$$E_r^{\varepsilon\kappa} = \sum_{m=M}^{\infty} \frac{i^{-\varepsilon\kappa m} \exp \{-i[\varepsilon\chi(\tilde{m}, y) + \kappa\chi(\tilde{m}, 2b)]\}}{\tilde{m}^{r/2}} \quad (6.37)$$

e

$$\begin{aligned} P_r^{\varepsilon\kappa} &= \sum_{\sigma=\pm} P_r^{\sigma\varepsilon\kappa}, & Q_r^{\varepsilon\kappa} &= \sum_{\sigma=\pm} Q_r^{\sigma\varepsilon\kappa}, \\ \vec{U}_r^{\varepsilon\kappa} &= \sum_{\sigma=\pm} \vec{U}_r^{\sigma\varepsilon\kappa}, & \vec{V}_r^{\varepsilon\kappa} &= \sum_{\sigma=\pm} \vec{V}_r^{\sigma\varepsilon\kappa}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

As expansões (6.35) e (6.36) são válidas contanto que

$$M \gg 1, \quad a^2, \quad b^2, \quad y^2/4, \quad |Q|. \quad (6.39)$$

Os primeiros coeficientes  $P_r^{\varepsilon\kappa}, Q_r^{\varepsilon\kappa}$ , etc. são listados no Apêndice C.

A série auxiliar  $E_r^{\varepsilon\kappa}$  é bastante similar à série auxiliar  $A_r$ , definida no Capítulo 4. Uma modificação trivial dos argumentos da Seção 4.3 conduz à expansão assintótica

$$\begin{aligned} E_r^{\varepsilon\kappa} &= \frac{i^{-\varepsilon\kappa M} \exp \{-i[\varepsilon\chi(\tilde{M}, y) + \kappa\chi(\tilde{M}, 2b)]\}}{2\tilde{M}^{r/2}} \left\{ (1-i\varepsilon\kappa) + \right. \\ &+ \frac{\gamma_{\varepsilon\kappa}}{2\tilde{M}^{1/2}} + \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{4} i\varepsilon\kappa \gamma_{\varepsilon\kappa}^2 \right) \frac{1}{\tilde{M}} - \\ &- \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} \gamma_{\varepsilon\kappa} \left( \frac{1}{3} \gamma_{\varepsilon\kappa}^2 - (2r+1)i\varepsilon\kappa \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_{1\epsilon\kappa} \left] \frac{1}{M^{3/2}} - \frac{1}{8} \left[ \frac{5}{48} i\epsilon\kappa \gamma_{\epsilon\kappa}^4 + (r+1)\gamma_{\epsilon\kappa}^2 - \right. \\
& \left. - i\epsilon\kappa(r^2+2 - 2\gamma_{\epsilon\kappa}\gamma_{1\epsilon\kappa}) \right] \frac{1}{M^2} + \dots \left. \right\}, \quad (6.40)
\end{aligned}$$

onde

$$\gamma_{\epsilon\kappa} = i(\epsilon y + 2\kappa b), \quad \gamma_{1\epsilon\kappa} = \frac{1}{24i} (\epsilon y^3 + 8\kappa b^3). \quad (6.41)$$

### 6.6 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS E EXEMPLOS DE SOLUÇÕES PARTICULARES

Em aplicações computacionais, é importante estimar os maiores valores de  $M$  que podem ocorrer quando se aplica (6.35) e (6.36) aos oceanos e ventos reais. Na Seção 5.3, os termos  $y^2/4$  e  $|Q|$  foram estimados em  $O(10^2)$  na maioria dos casos de interesse. Uma descrição bastante realista das variações horizontais do campo de vento sobre uma bacia oceânica geralmente poderá ser obtida com os comprimentos de onda maiores que, digamos, 200 km. Em outras palavras, o comprimento de onda não-dimensional será geralmente maior que 1 raio de deformação, o que implica que  $2\pi$  será um limitante superior para os números de onda não-dimensionais. Assim, todos os termos do lado direito de (6.39) serão  $O(10^2)$  na maioria das aplicações.

As funções  $\vec{P}$  e  $U$  podem ser computadas numericamente através da rotina UP, descrita no Apêndice B. Um exemplo numérico é apresentado nas Tabelas 6.1 e 6.2; os valores calculados através de (6.35) e (6.36) são insensíveis à escolha do ponto de truncamento  $M$ .

As Figuras 6.1 e 6.2 ilustram a estrutura meridional dos campos de pressão e velocidade (6.22) e (6.24) quando o forçamento (6.19) é zonal ( $\vec{F}_0 \cdot \hat{y} = 0$ ) e independente da longitude ( $a = 0$ ). Na Figura 6.1, o

forçamento é também independente de  $y$  ( $b = 0$ ), e a resposta é relativamente confinada próximo ao equador. Na Figura 6.2, o comprimento de onda meridional do forçamento é  $2\pi$  raios de deformação ( $b = 1$ ) e os campos dinâmicos exibem oscilações na direção meridional com esta mesma escala de comprimento. No domínio do tempo, o forçamento corresponde a uma onda plana que se propaga do norte para o sul (cf. a definição (2.4) da transformada de Fourier no tempo), e a resposta também exhibe propagação em direção ao sul. Comparando as Figuras 6.1 e 6.2, vê-se que a resposta decai muito mais lentamente com a latitude no caso em que  $b \neq 0$ . Em geral, observa-se que as funções  $\vec{P}$  e  $U$  decaem algebricamente com a latitude, em contraste com as funções de influência  $G$ ,  $\vec{J}$ ,  $\vec{K}$  e  $D$ , que decaem exponencialmente quando  $|y| \rightarrow \infty$ .

TABELA 6.1 - COMPUTAÇÃO DE  $\vec{P}(1,2;3/2)$   
PARA  $y_c = 0,2639 - 0,002i$

| $M$ |       | Valor de (6.35)<br>(truncada em $r = 3$ ) |
|-----|-------|---|
| 13  | $P_x$ | 1,418-1,527i                              |
|     | $P_y$ | -0,885+1,227i                             |
| 21  | $P_x$ | 1,420-1,529i                              |
|     | $P_y$ | -0,887+1,231i                             |
| 29  | $P_x$ | 1,419-1,529i                              |
|     | $P_y$ | -0,887+1,231i                             |

As componentes de  $\vec{P}$  são indicadas por  $P_x$  e  $P_y$ .

A Figura 6.3 mostra o campo de pressão (6.22) quando o forçamento é zonal e se propaga de nordeste para sudoeste ( $a = 0,5$  e  $b = 1$ ). A resposta fica confinada à vizinhança do Equador, apresenta um comprimento de onda

zonal igual ao do forçamento e se propaga para oeste com o passar do tempo.

TABELA 6.2 - COMPUTAÇÃO DE  $u(1,2;3/2)$   
PARA  $y_c = 0,2639 - 0,002i$

| $M$ |          | Valor de (6.36)<br>(truncada em $r = 3$ ) |
|-----|----------|---|
| 13  | $U_{xx}$ | -6,011+10,504i                            |
|     | $U_{xy}$ | 3,161- 5,381i                             |
|     | $U_{yx}$ | -0,180- 0,197i                            |
|     | $U_{yy}$ | -0,395- 3,785i                            |
| 21  | $U_{xx}$ | -6,019+10,522i                            |
|     | $U_{xy}$ | 3,165- 5,390i                             |
|     | $U_{yx}$ | -0,178- 0,194i                            |
|     | $U_{yy}$ | -0,382- 3,793i                            |
| 29  | $U_{xx}$ | -6,024+10,523i                            |
|     | $U_{xy}$ | 3,168- 5,391i                             |
|     | $U_{yx}$ | -0,178- 0,196i                            |
|     | $U_{yy}$ | -0,379- 3,796i                            |

As componentes de  $u$  são indicadas por  $U_{xx}$ ,  $U_{xy}$ ,  $U_{yx}$  e  $U_{yy}$ .

#### 6.7 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL PARA $p^{(H)}$

De acordo com a discussão da Seção 6.4, a parte homogênea  $p^{(H)}$  da solução de um problema forçado<sup>4</sup> satisfaz a representação integral (6.18) quando  $\vec{r}'$  está no interior da bacia oceânica  $B$  e a equação integral de contorno

<sup>4</sup> Aqui, como na Seção 6.4, adotamos sem perda de generalidade a condição de contorno de fluxo normal nulo na fronteira  $\Gamma$ .

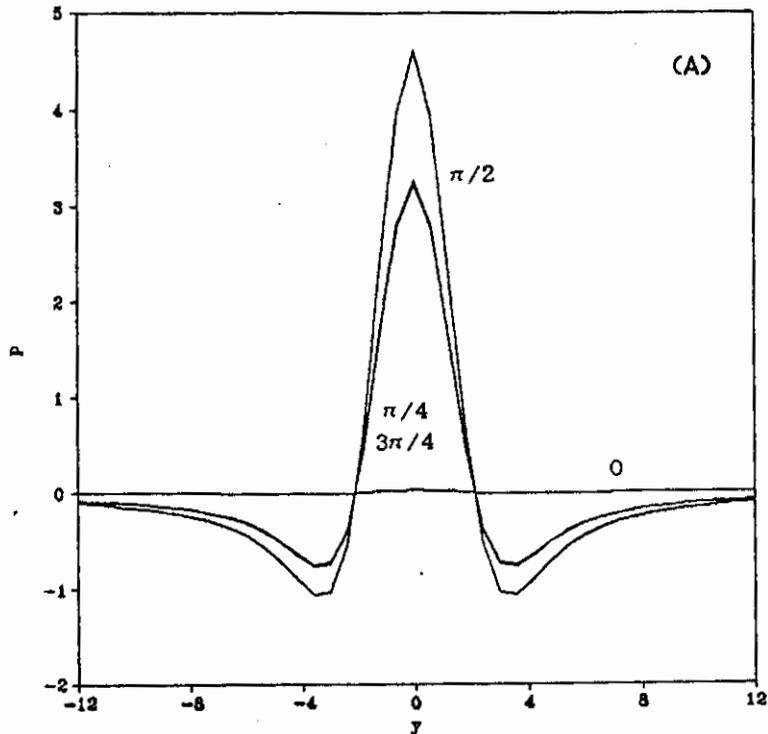


Fig. 6.1 - Estrutura latitudinal das soluções particulares (6.22) e (6.24) para  $(a,b) = (0,0)$ ,  $\vec{F}_0 = (1,0)$  e  $y_c = 0,264 - 0,002i$ .

(a) pressão, (b) velocidade zonal e (c) velocidade meridional. A fim de ilustrar a evolução temporal das soluções, os valores de  $\text{Re} \{e^{i\omega t} p^{(P)}(y)\}$  e  $\text{Re} \{e^{i\omega t} \vec{u}^{(P)}(y)\}$  são plotados para  $\omega t = 0, \pi/4, \pi/2$  e  $3\pi/4$ . A segunda metade do ciclo é omitida para maior clareza, mas pode ser obtida da primeira metade por reflexão sobre o eixo- $y$ .

(continua)

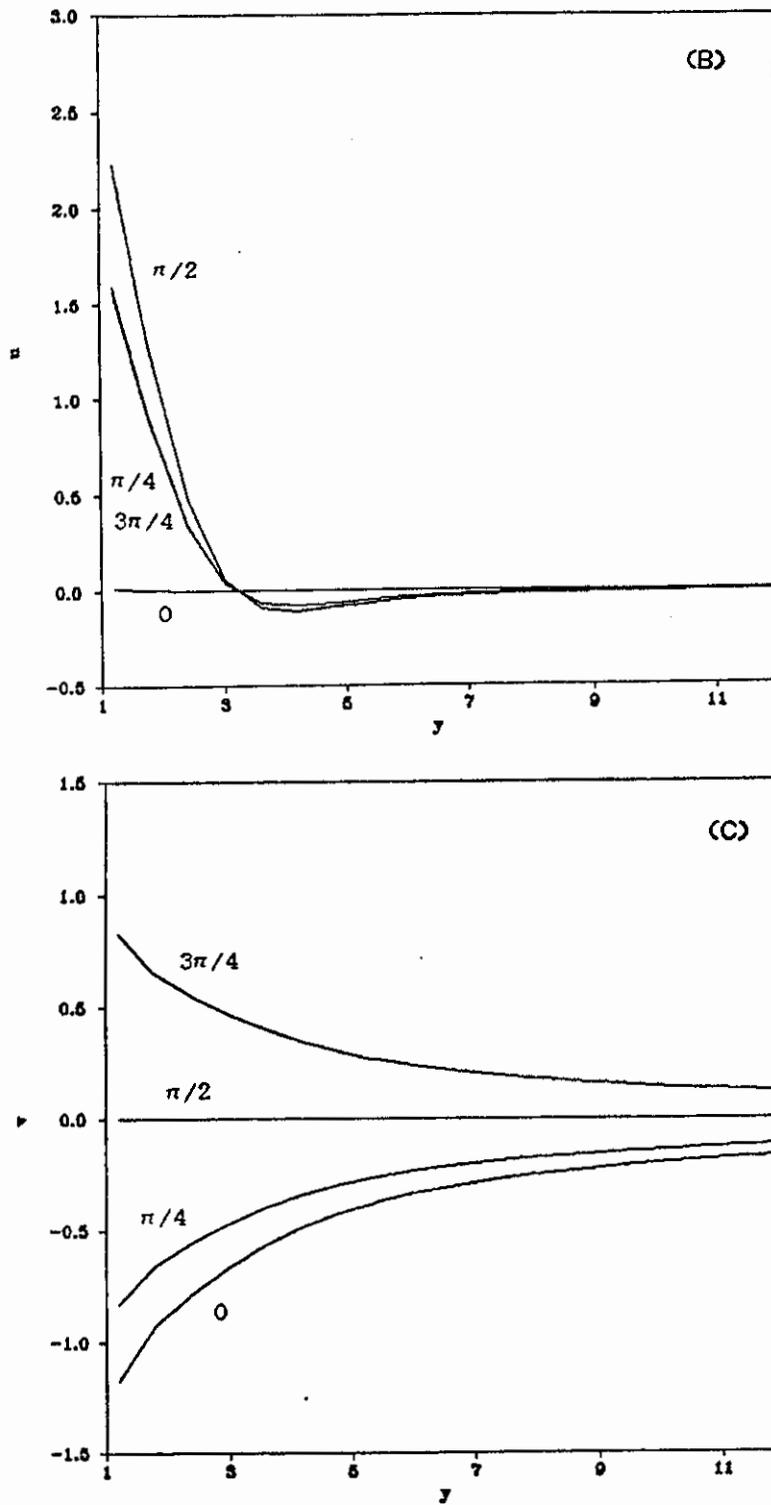


Fig. 6.1 - Conclusão.

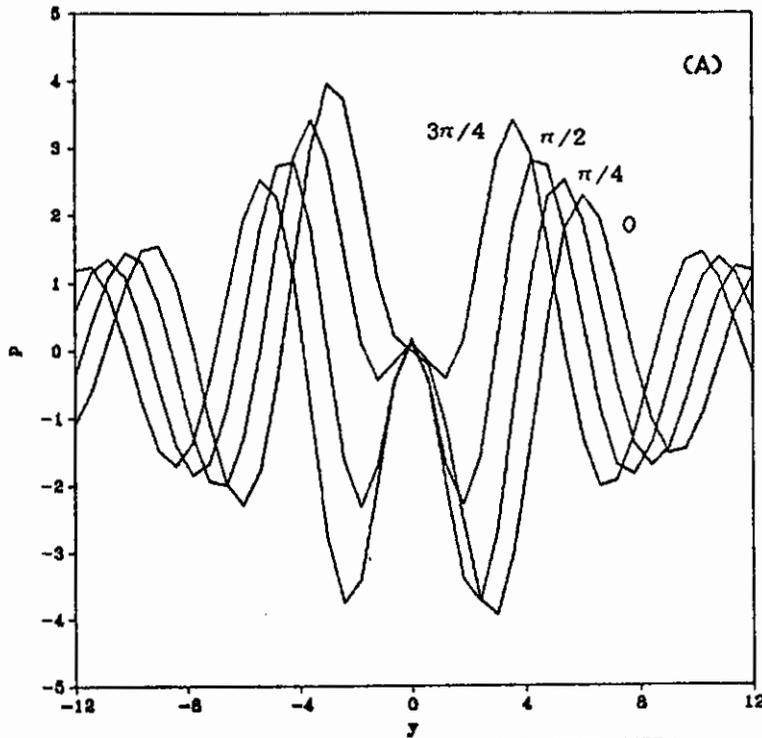


Fig. 6.2 - Estrutura latitudinal das soluções particulares (6.22) e (6.24) para  $(a,b) = (0,1)$ ,  $\vec{F}_0 = (1,0)$  e  $y_c = 0,264 - 0,002i$ .

(a) pressão, (b) velocidade zonal e (c) velocidade meridional. A fim de ilustrar a evolução temporal das soluções, os valores de  $\text{Re} \{e^{i\omega t} p^{(P)}(y)\}$  e  $\text{Re} \{e^{i\omega t} \vec{u}^{(P)}(y)\}$  são plotados para  $\omega t = 0, \pi/4, \pi/2$  e  $3\pi/4$ . A segunda metade do ciclo é omitida para maior clareza, mas pode ser obtida da primeira metade por reflexão sobre o eixo- $y$ .

(continua)

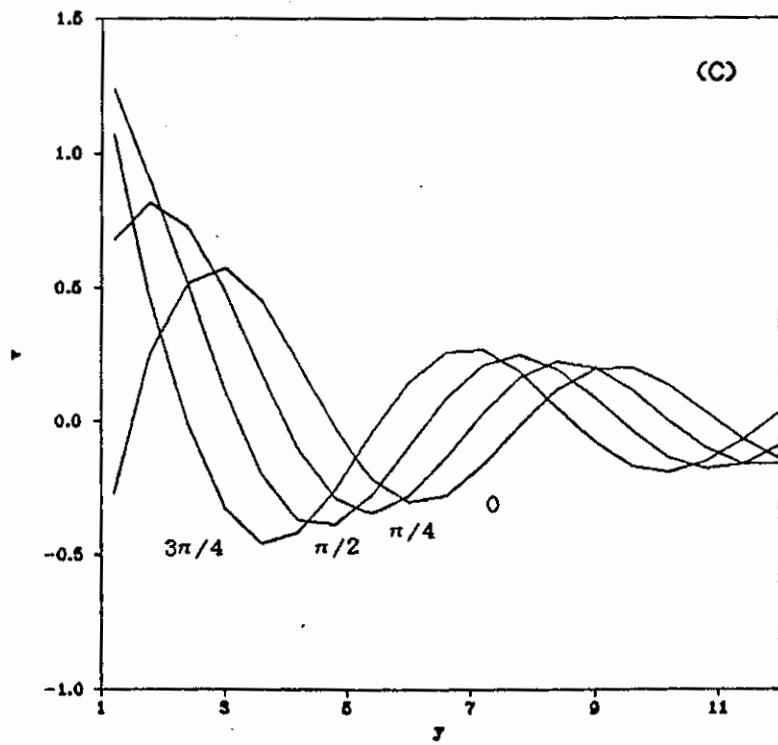
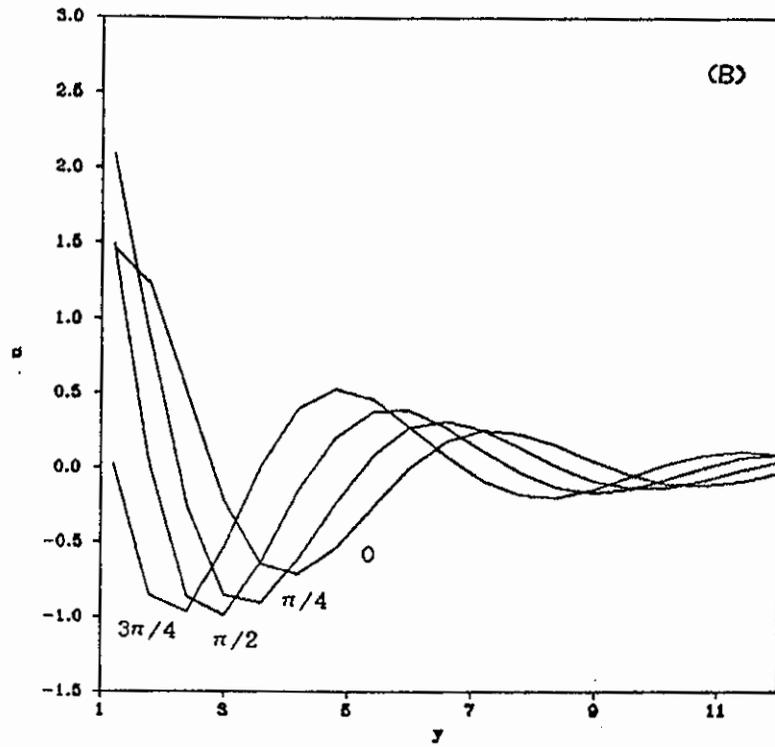


Fig. 6.2 - Conclusão.

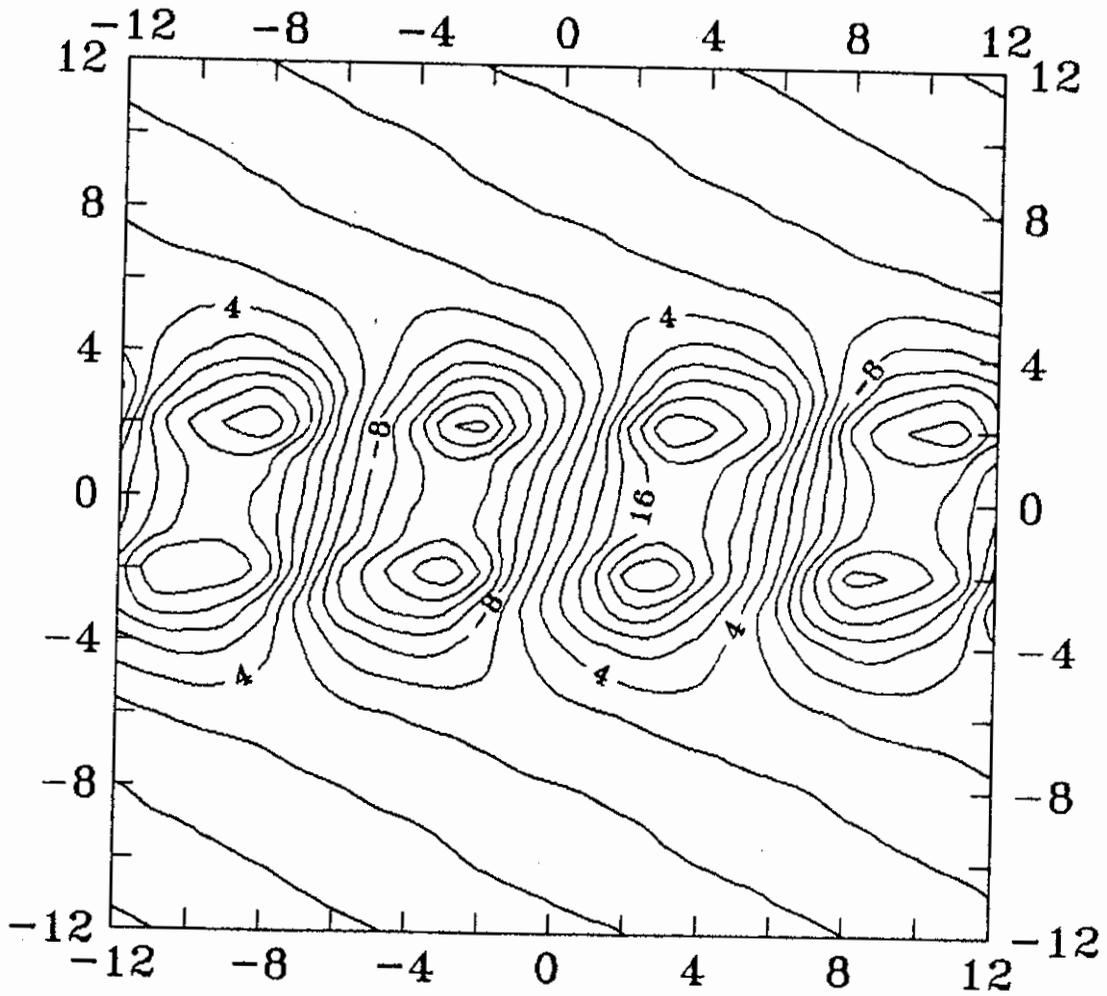


Fig. 6.3 - Campo de pressão associado com a solução particular (6.22) para  $(a,b) = (1/2,1)$ ,  $\vec{F}_0 = (1,0)$  e  $y_c = 0,264 - 0,002i$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p^{(H)}(\vec{r}') &= \text{P.V.} \oint_{\Gamma} p^{(H)}(\vec{r}) \hat{n}(s) \cdot \vec{K}(\vec{r}'; \vec{r}) ds + \\ &+ \frac{1}{2} \rho_0 c \oint_{\Gamma} G(y_c; \vec{r}'; \vec{r}) \vec{u}^{(P)}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(s) ds, \end{aligned} \quad (6.42)$$

quando  $\vec{r}'$  está sobre a fronteira  $\Gamma$ . A versão discretizada de (6.42) é dada por

$$\frac{1}{2} p_k^{(H)} = \sum_{j=1}^N T_{kj} p_j^{(H)} - Q_k, \quad (6.43)$$

onde  $p_k^{(H)} = p^{(H)}(\vec{r}'_k)$ ,  $T_{kj}$  é dado por (6.6) e  $Q_k$  é dado por

$$Q_k = - \frac{1}{2} \rho_0 c \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} \Phi_{nk} ds, \quad (6.44)$$

onde<sup>5</sup>

$$\Phi_{nk} = [\vec{u}^{(P)}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_n] G(y_c; \vec{r}'_k; \vec{r}). \quad (6.45)$$

A computação numérica de  $T_{kj}$  foi discutida na Seção 6.3, e pode ser realizada com o auxílio do programa Mat (Apêndice B). Para computar  $Q_k$  é preciso dispor de uma solução particular  $\vec{u}^{(P)}$  das equações de movimento; podemos assumir que  $\vec{u}^{(P)}$  é dada por uma superposição de soluções da forma (6.24) com diferentes valores de  $\vec{F}_0$ ,  $a$  e  $b$ .

Em vista de (6.44) e (6.45), duas singularidades devem ser consideradas no cálculo de  $Q_k$ : uma associada com a singularidade da solução fundamental  $G$  na vizinhança da

---

<sup>5</sup> Consideramos que os elementos de contorno são retilíneos.

fonte e outra associada com a singularidade de  $\vec{u}^{(P)}$  quando<sup>6</sup>  $y \rightarrow \pm y_c$ . A primeira singularidade afeta apenas o termo  $n = k$  em (6.44), enquanto a segunda afetará os elementos  $\Gamma_n$  que cruzarem uma das latitudes  $\pm \text{Re } y_c$ . Usando (5.31) e (6.24), podemos determinar as contribuições singulares a  $\Phi_{nk}$ ; se

$$\Phi_{nk} = \Phi_{nk}^{(S)} + \Phi_{nk}^{(R)}, \quad (6.46)$$

com  $\Phi_{nk}^{(R)}$  uma função contínua, então

$$\begin{aligned} \Phi_{nk}^{(S)} = & \frac{i}{2\pi y_c} \delta_{nk} [\vec{u}^{(P)}(\vec{r}'_k) \cdot \hat{n}_n] (y_k'^2 - y_c^2) \log |s - s'_k| + \\ & + \frac{\lambda_n}{2\rho_0 \omega_0} G(y_c; \vec{r}'_k; \bar{x}_n, \bar{y}_n) \frac{\hat{n}_n \cdot (i - \lambda_n \hat{z} \times) \vec{F}(\bar{x}_n, \bar{y}_n)}{y - \lambda_n y_c}, \end{aligned} \quad (6.47)$$

onde  $s'_k$  é a coordenada de  $\vec{r}'_k$  ao longo de  $\Gamma$ ,

$$\lambda_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \Gamma_n \text{ não cruza uma das latitudes} \\ & y = \pm \text{Re } y_c \\ \pm 1 & \text{se } \Gamma_n \text{ cruza a latitude } y = \pm \text{Re } y_c \end{cases} \quad (6.48)$$

e  $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$  é o ponto onde  $\Gamma_n$  cruza a latitude<sup>7</sup>  $\lambda_n \text{Re } y_c$ . Portanto,

$$Q_k = -\frac{1}{2} \rho_0 c \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} \Phi_{nk}^{(R)} ds + \frac{id_k}{2\pi y_c} \left( \log \frac{1}{2} d_k - 1 \right) \times \right.$$

<sup>6</sup> Esta singularidade é representada pelo primeiro termo de (6.24) (o segundo termo é uma função regular, em vista da Seção 6.5), e fisicamente corresponde a uma resposta ressonante do oceano a um forçamento à frequência inercial local. No domínio do tempo, a singularidade desaparece, devido à integração sobre a frequência  $\omega$ . A singularidade não aparece no campo de pressão, como indicado por (6.22).

<sup>7</sup> Assume-se que cada elemento cruza no máximo uma das latitudes  $y = \pm \text{Re } y_c$ .

$$\begin{aligned}
& \times (y_k'^2 - y_c^2) \vec{u}^{(P)}(\vec{r}'_k) \cdot \hat{n}_k \Big\} - \\
& - \frac{1}{2} \gamma^{-1} \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n}{\cos \theta_n} G(y_c; \vec{r}'_k; \bar{x}_n, \bar{y}_n) \times \\
& \times \log \left[ 1 - 2 \left( 1 - \frac{2(y_n' - \lambda_n y_c)}{d_n \cos \theta_n} \right)^{-1} \right] \hat{n}_n \cdot \\
& \cdot (i - \lambda_n \hat{z} \times) \vec{F}(\bar{x}_n, \bar{y}_n), \tag{6.49}
\end{aligned}$$

onde  $\cos \theta_n = \hat{n}_n \cdot \hat{x}$ . As integrais de  $\Phi_{nk}^{(R)}$  que aparecem em (6.49) podem ser computadas pela regra de Gauss-Legendre (cf. Seção 6.3).

Os programas NorFlow e Qk, descritos no Apêndice B, permitem calcular numericamente os coeficientes  $Q_k$ . Uma vez conhecidos todos os coeficientes do sistema de equações lineares (6.43), é possível resolvê-lo por eliminação gaussiana (cf. o programa Gauss no Apêndice B), obtendo-se assim o valor da solução homogênea  $p_k^{(H)}$ ,  $k = 1, \dots, N$  ao longo da fronteira  $\Gamma$ .

## 6.8 - COMPUTAÇÃO DE SOLUÇÕES NO INTERIOR DO OCEANO

O valor da solução homogênea  $(p^{(H)}, \vec{u}^{(H)})$  em um ponto  $\vec{r}'$  no interior da bacia oceânica pode ser obtido a partir das representações integrais (6.18) e

$$\begin{aligned}
\vec{u}^{(H)}(\vec{r}') = & - \frac{2}{\rho_0 c} \oint_{\Gamma} p^{(H)}(\vec{r}) \mathcal{D}(\vec{r}'; \vec{r}) \cdot \hat{n}(s) ds + \\
& + \oint_{\Gamma} [\vec{u}^{(P)}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(s)] \vec{J}(\vec{r}'; \vec{r}) ds, \tag{6.50}
\end{aligned}$$

que deriva de (2.24). Versões discretizadas de (6.18) e (6.50) são

$$p^{(H)}(\vec{r}') = \sum_{k=1}^N p_k^{(H)} T_k + \frac{1}{2} \rho_0 c \sum_{k=1}^N G_k, \quad (6.51)$$

$$\vec{u}^{(H)}(\vec{r}') = -\frac{2}{\rho_0 c} \sum_{k=1}^N p_k^{(H)} \vec{D}_k + \sum_{k=1}^N \vec{J}_k, \quad (6.52)$$

onde

$$T_k = \hat{n}_k \cdot \int_{\Gamma_k} \vec{K}(\vec{r}'; \vec{r}) ds, \quad \vec{D}_k = \int_{\Gamma_k} \mathcal{D}(\vec{r}'; \vec{r}) \cdot \hat{n}_k ds, \quad (6.53)$$

$$G_k = \int_{\Gamma_k} [\vec{u}^{(P)}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_k] G(y_c; \vec{r}'; \vec{r}) ds, \quad (6.54)$$

$$\vec{J}_k = \int_{\Gamma_k} [\vec{u}^{(P)}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_k] \vec{J}(\vec{r}'; \vec{r}) ds. \quad (6.55)$$

As integrais (6.53)-(6.55) podem ser computadas pela regra de Gauss-Legendre (Seção 6.3) contanto que seus integrandos não variem muito rapidamente ao longo do elemento  $\Gamma_k$ . Esta condição não será satisfeita em duas situações:

1) O Ponto  $\vec{r}'$  Está Muito Próximo<sup>8</sup> do Elemento  $\Gamma_k$

Neste caso, devido à singularidade das funções de influência quando  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$ , as integrais (6.53)-(6.55) serão quase-singulares (Vijayakumar e Cormack, 1988). Para tratar as integrais (6.53), podemos escrever

$$T_k = \hat{n}_k \cdot \int_{\Gamma_k} \vec{K}^{(S)}(\vec{r}'; \vec{r}) ds + \hat{n}_k \cdot \int_{\Gamma_k} \vec{K}^{(R)}(\vec{r}'; \vec{r}) ds, \\ \vec{D}_k = \int_{\Gamma_k} \mathcal{D}^{(S)}(\vec{r}'; \vec{r}) \cdot \hat{n}_k ds + \int_{\Gamma_k} \mathcal{D}^{(R)}(\vec{r}'; \vec{r}) \cdot \hat{n}_k ds; \quad (6.56)$$

---

<sup>8</sup> Tipicamente, a uma distância menor que 1 raio de deformação.

as integrais das partes regulares  $\vec{K}^{(R)}$  e  $\mathcal{D}^{(R)}$  podem ser computadas pela regra de Gauss-Legendre, e as integrais das contribuições singulares  $\vec{K}^{(S)}$  e  $\mathcal{D}^{(S)}$  podem ser calculadas analiticamente no caso de elementos de contorno retilíneos (as expressões completas são apresentadas no Apêndice D). As integrais (6.54) e (6.55) são mais difíceis de calcular, porque  $\vec{u}^{(P)}(\vec{r})$  varia ao longo de  $\Gamma_k$ . Podemos escrever o integrando de (6.54) como

$$[\vec{u}^{(P)}(\vec{r}_\perp) \cdot \hat{n}_k] G^{(S)}(\vec{r}'; \vec{r}) + g_k, \quad (6.57)$$

onde  $\vec{r}_\perp$  é a projeção perpendicular de  $\vec{r}'$  sobre  $\Gamma_k$  e esperamos que  $g_k$  seja uma função que varia com suficiente lentidão para que a regra de Gauss-Legendre seja aplicável. A integral da parte singular de  $G$  ao longo de um elemento de contorno retilíneo pode ser calculada analiticamente (v. Apêndice D). Um tratamento análogo pode ser usado no cálculo de (6.55).

## 2) O Elemento $\Gamma_k$ Cruza Uma das Latitudes $y = \pm \text{Re } y_c$

Neste caso,  $\vec{u}^{(P)}(\vec{r})$  torna-se quase-singular; o integrando de (6.54) apresentará uma contribuição singular dada pelo segundo termo de (6.47) com a substituição  $\vec{r}'_k \rightarrow \vec{r}'$ ; a integral desta contribuição é dada pelo último termo de (6.49) com a mesma substituição. A parte regular do integrando pode ser tratada pela regra de Gauss-Legendre. A integral (6.55) pode ser calculada da mesma maneira.

A computação de soluções no interior do oceano pode ser realizada com o auxílio do programa WindFcd, descrito no Apêndice B.

## 6.9 - ESPALHAMENTO DE ONDAS EQUATORIAIS

Nesta seção, o problema do espalhamento de ondas equatoriais livres por ilhas e margens continentais de geometria arbitrária é formulado como uma equação integral de contorno para o campo de pressão. Problemas similares tem sido estudados analiticamente (Rowlands, 1982; Clarke, 1983; Cane e Gent, 1984) e numericamente (Yoon, 1981; McCalpin, 1987; Moore e McCreary, 1990).

Os métodos de solução analítica ou semi-analítica existentes na literatura geralmente fazem restrições quanto à frequência da onda incidente (Cane e Gent, 1984) ou à curvatura dos contornos oceânicos (Clarke, 1983), e tratam separadamente as fronteiras oceânicas leste e oeste (Cane e Gent, 1984; Clarke, 1983).

Estudos numéricos de espalhamento freqüentemente recorrem ao método das diferenças finitas (Yoon, 1981; Moore e McCreary, 1990). Entretanto, um problema de espalhamento pressupõe a presença de um oceano infinito ou semi-infinito, para que se torne possível evidenciar os efeitos de um grupo de ilhas ou de uma margem continental sobre a propagação de ondas, enquanto se ignora os efeitos de outros contornos distantes. A representação de um oceano infinito ou semi-infinito em um esquema de diferenças finitas é trabalhosa, requerendo o uso de grades extensas e algum tipo de amortecimento numérico artificial para evitar reflexões espúrias, um dispositivo que é apenas parcialmente eficiente (Moore e McCreary, 1990).

A formulação integral a ser apresentada abaixo é exata no contexto da teoria linear, e unifica o tratamento do espalhamento de ondas de frequências baixas, intermediárias e altas. Problemas de espalhamento por ilhas

e por fronteiras oceânicas leste e oeste (ou uma combinação destas) são também tratados simultaneamente. Um oceano infinito ou semi-infinito é incluído explicitamente na formulação, que envolve apenas integrais sobre os contornos oceânicos. A solução da equação integral para a pressão é geralmente impossível por métodos analíticos, exceto para fronteiras meridionais, devido à complexidade das funções de influência sobre o plano- $\beta$  equatorial (Capítulo 5). Entretanto, do ponto de vista numérico a formulação é extremamente conveniente para uso mesmo em pequenos computadores, já que fronteiras complexas podem ser descritas por um número relativamente pequeno de elementos de contorno.

Consideremos primeiro um grupo de ilhas (contornos fechados)  $C_1, C_2, \dots$ , e suponhamos que uma onda equatorial livre de frequência  $\omega$  incide ao longo da direção zonal. O campo resultante de pressões e velocidades pode ser escrito como

$$p = p^{(I)} + p^{(S)}, \quad \vec{u} = \vec{u}^{(I)} + \vec{u}^{(S)}, \quad (6.58)$$

onde  $p^{(I)}, \vec{u}^{(I)}$  são os campos da onda incidente e  $p^{(S)}, \vec{u}^{(S)}$  são os campos da onda espalhada.

Uma representação integral para o campo de pressão pode ser obtida de (2.22) com  $\vec{F} = 0$  (a onda incidente é forçada em  $x = +\infty$  ou  $x = -\infty$  e se propaga livremente no oceano). Sejam  $x = x_W$  e  $x = x_E$  dois meridianos situados respectivamente a oeste e a leste do grupo de ilhas, e seja  $B$  a região do oceano que é exterior a  $C_1, C_2, \dots$  e está entre os meridianos  $x = x_W$  e  $x = x_E$ . Se  $\vec{r}$  está no interior de  $B$ , a representação integral (2.22) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
p(\vec{r}') &= \sum_r \oint_{C_r} [p(\vec{r}) \vec{K}(\vec{r}'; \vec{r}) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \rho_0 c G(\vec{r}'; \vec{r}) \vec{u}(\vec{r})] \cdot \hat{n}(s) ds + \\
&\quad + [P^{(I)}(x) + P^{(S)}(x)] \Big|_{x=x_W}^{x=x_E}, \tag{6.59}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
P^{(I)}(x) &= \hat{x} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [p^{(I)}(x, y) \vec{K}(\vec{r}'; x, y) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \rho_0 c G(\vec{r}'; x, y) \vec{u}^{(I)}(x, y)] dy, \tag{6.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{(S)}(x) &= \hat{x} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [p^{(S)}(x, y) \vec{K}(\vec{r}'; x, y) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \rho_0 c G(\vec{r}'; x, y) \vec{u}^{(S)}(x, y)] dy. \tag{6.61}
\end{aligned}$$

Uma forma mais compacta para (6.59) pode ser obtida fazendo  $x_W \rightarrow -\infty$  e  $x_E \rightarrow +\infty$ . Na presença de dissipação ( $A \neq 0$ , arbitrariamente pequeno) sabe-se que uma onda equatorial livre decai exponencialmente na direção de sua velocidade de grupo. Neste caso, as funções de influência  $G(\vec{r}'; \vec{r})$  e  $\vec{K}(\vec{r}'; \vec{r})$  decairão exponencialmente quando  $|x| \rightarrow \infty$ , já que estas funções são formadas por uma superposição de ondas equatoriais livres emitidas de  $x = x'$  (v. Seção 3.4). O campo espalhado consiste de ondas emitidas pelos contornos  $C_1, C_2, \dots$ , que pelas mesmas razões acima devem decair exponencialmente quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Em conclusão, temos que  $P^{(S)}(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$  e  $P^{(I)}(x) \rightarrow 0$  quando  $c_g x \rightarrow +\infty$ , onde  $c_g$  é a velocidade de grupo da onda incidente. Entretanto, veremos abaixo que  $P^{(I)}(x)$  é constante para  $c_g x$  negativo e  $|c_g x|$  suficientemente grande. Isto acontece porque os campos incidentes crescem exponencialmente quando  $c_g x \rightarrow -\infty$ , enquanto as funções de influência em (6.60) decaem exponencialmente; a integral pode então aproximar-se

de um valor constante.

Aqui trataremos duas possibilidades para a onda incidente: uma onda de Rossby longa e uma onda de Kelvin. No primeiro caso, o campo de pressão incidente é

$$p^{(I)}(\vec{r}) = p_0 e^{-i\alpha_n^+ x} \phi_n^+(y), \quad (6.62)$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$  e  $p_0$  é uma constante arbitrária. O campo de velocidades associado com (6.62) é, por (2.5) e (3.49),

$$\vec{u}^{(I)}(\vec{r}) = \frac{2p_0}{\rho_0 c} e^{-i\alpha_n^+ x} [\zeta_n^+(y) \hat{x} - i\theta_n^+(y) \hat{y}]. \quad (6.63)$$

No segundo caso, o campo de pressão incidente é

$$p^{(I)}(\vec{r}) = p_0 e^{-i\alpha_k^+ x} \psi_0(y/\sqrt{2}), \quad (6.64)$$

e o campo de velocidades é

$$\vec{u}^{(I)}(\vec{r}) = \frac{p_0}{\rho_0 c} e^{-i\alpha_k^+ x} \psi_0(y/\sqrt{2}) \hat{x}. \quad (6.65)$$

No cálculo de  $P^{(I)}(x)$ , precisaremos das seguintes identidades, que são válidas para quaisquer  $k, m \geq 0$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(y/\sqrt{2}) \psi_m(y/\sqrt{2}) dy = \sqrt{2} \delta_{km}, \quad (6.66)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \psi_k(y/\sqrt{2}) \psi_m(y/\sqrt{2}) dy = \sqrt{2} (\sqrt{k} \delta_{k-1,m} + \sqrt{m} \delta_{k,m-1}), \quad (6.67)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \psi_k(y/\sqrt{2}) \psi_m(y/\sqrt{2}) dy = \sqrt{2} [\delta_{km} + \sqrt{k(k-1)} \delta_{k-2,m} +$$

$$+ \sqrt{m(m-1)}\delta_{k,m-2} + 2\sqrt{km}\delta_{k-1,m-1}]. \quad (6.68)$$

A segunda e a terceira identidades podem ser deduzidas da relação de ortogonalidade básica (6.66) por integração por partes. Será também conveniente reescrever (3.36), (3.50) e (3.51), através das relações de recorrência das funções de Hermite, como

$$\begin{aligned} \phi_m^\sigma(y) &= \sqrt{m+1}y\psi_{m+1}(y/\sqrt{2}) + (1+y_c\gamma_m^\sigma)\psi_m(y/\sqrt{2}), \\ \zeta_m^\sigma(y) &= \frac{1}{2}\sqrt{m+1}y\psi_{m+1}(y/\sqrt{2}) - (m + \frac{3}{2} + \\ &\quad + \frac{1}{2}y_c\gamma_m^\sigma)\psi_m(y/\sqrt{2}), \\ \theta_m^\sigma(y) &= \sqrt{m+1}\gamma_m^\sigma\psi_{m+1}(y/\sqrt{2}). \end{aligned} \quad (6.69)$$

### 1) Onda de Rossby Longa Incidente

Já que as ondas de Rossby longas têm  $c < 0$ , a discussão que segue a Equação (6.61) implica que  $P^{(I)}(x_w) \rightarrow 0$  quando  $x_w \rightarrow -\infty$ . Para calcular  $P^{(I)}(x_E)$ , usamos (3.46), (3.52), (6.62) e (6.63) em (6.60):

$$\begin{aligned} P^{(I)}(x_E) &= P_0 \frac{e^{-1\alpha_n^+ x_E}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-1\alpha_m^+(x' - x_E)}}{\gamma_m^+(1+y_c\gamma_m^+)(\gamma_m^+ - \gamma_m^-)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \phi_m^+(y') [\zeta_m^+(y)\phi_n^+(y) + \zeta_n^+(y)\phi_m^+(y)] \right\} dy. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Para simplificar (6.70), usaremos a seguinte identidade, que é uma consequência direta de (6.69) e (6.66)-(6.68):

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\zeta_m^\sigma(y)\phi_n^{\sigma'}(y) + \zeta_n^{\sigma'}(y)\phi_m^\sigma(y)] dy = -\sqrt{2} \left\{ (n+1) [1 + \right.$$

$$+ y_c (\gamma_n^\sigma + \gamma_n^{\sigma'}) ] + (1 + y_c \gamma_n^\sigma) (1 + y_c \gamma_n^{\sigma'}) \} \delta_{mn}. \quad (6.71)$$

Assim, (6.70) se reduz a

$$P^{(I)}(x_E) = -R_n p_0 e^{-i\alpha_n^+ x'} \phi_n^+(y'), \quad (6.72)$$

onde

$$R_n = \frac{(n+1)(1+2y_c \gamma_n^+) + (1+y_c \gamma_n^+)^2}{\gamma_n^+ (1+y_c \gamma_n^+) (\gamma_n^+ - \gamma_n^-)}, \quad (6.73)$$

um resultado que é independente de  $x_E$ .

## 2) Onda de Kelvin Incidente

Aqui  $c_g > 0$ , de modo que  $P^{(I)}(x_E) \rightarrow 0$  quando  $x_E \rightarrow +\infty$ . Usando (3.46), (3.52), (6.64) e (6.65), obtemos

$$\begin{aligned} P^{(I)}(x_W) = & p_0 \frac{e^{-i\alpha_K x_W}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(y/\sqrt{2}) \times \\ & \times \left\{ - \left[ e^{-i\alpha_K (x' - x_W)} \psi_0(y'/\sqrt{2}) \psi_0(y/\sqrt{2}) \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{-i\alpha_Y (x' - x_W)} \psi_1(y'/\sqrt{2}) \psi_1(y/\sqrt{2}) \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_m^- (x' - x_W)} \phi_m^-(y') [\phi_m^-(y)/2 + \zeta_m^-(y)]}{\gamma_m^- (1 + y_c \gamma_m^-) (\gamma_m^+ - \gamma_m^-)} \right\} dy. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Já que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \phi_m^\sigma(y) + \zeta_m^\sigma(y) = & \sqrt{m+1} y \psi_{m+1}(y/\sqrt{2}) - \\ & - (m+1) \psi_m(y/\sqrt{2}), \end{aligned} \quad (6.75)$$

verifica-se facilmente usando (6.66) e (6.67) que a integral de cada termo do somatório em (6.74) é igual a zero. A integral do termo associado com a onda de Yanai também se anula, em vista de (6.66); obtemos finalmente

$$P^{(I)}(x_w) = -p_0 e^{-i\alpha_k x'} \psi_0(y'/\sqrt{2}), \quad (6.76)$$

que é novamente independente da longitude arbitrária  $x_w$ .

Levando os valores calculados de  $P^{(I)}(x)$  em (6.59), podemos escrever a representação integral para o campo de pressão no problema do espalhamento como

$$p(\vec{r}') = \sum_r \oint_{C_r} p(\vec{r}) \vec{K}(\vec{r}'; \vec{r}) \cdot \hat{n}(s) ds + \lambda p^{(I)}(\vec{r}'), \quad (6.77)$$

onde  $\vec{r}'$  é um ponto no interior do oceano e  $\lambda = -R_n$  no caso de uma onda de Rossby longa incidente e  $\lambda = 1$  no caso de uma onda de Kelvin incidente (por simplicidade, assumimos que o fluxo através dos contornos  $C_1, C_2, \dots$  é nulo). A expressão correspondente para a velocidade é, por (2.5),

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{r}') = & -\frac{2}{\rho_0 c} \sum_r \oint_{C_r} p(\vec{r}) \mathcal{D}(\vec{r}'; \vec{r}) \cdot \hat{n}(s) ds + \\ & + \lambda \vec{u}^{(I)}(\vec{r}'). \end{aligned} \quad (6.78)$$

Se o ponto  $\vec{r}'$  se aproxima de um dos contornos  $C_1, C_2, \dots$ , (6.77) torna-se uma equação integral de contorno para  $p(s) = p(\vec{r}(s))$ ; o primeiro membro fica multiplicado por um fator 1/2 e a integral no segundo membro deve ser entendida no sentido do valor principal (cf. Seção 6.2). A versão discretizada desta equação é dada por (6.5), onde os coeficientes  $T_{kj}$  são dados por (6.6) e  $Q_k = -\lambda p^{(I)}(\vec{r}'_k)$ . O cálculo numérico dos coeficientes  $T_{kj}$  e  $Q_k$  pode ser realizado com os programas Mat e RightSca,

respectivamente (v. Apêndice B); a distribuição de pressões ao longo dos contornos  $C_1, C_2, \dots$  pode então ser obtida resolvendo (6.5) com o auxílio do programa Gauss.

Em seguida, a solução em qualquer ponto  $\vec{r}'$  no interior do oceano poderá ser calculada usando versões discretas de (6.77) e (6.78),

$$p(\vec{r}') = \sum_{k=1}^N p_k T_k + \lambda p^{(I)}(\vec{r}'), \quad (6.79)$$

$$\vec{u}(\vec{r}') = -\frac{2}{\rho_0 c} \sum_{k=1}^N p_k \vec{D}_k + \lambda \vec{u}^{(I)}(\vec{r}'), \quad (6.80)$$

onde  $T_k$  e  $\vec{D}_k$  foram definidos por (6.53). O cálculo destes coeficientes foi discutido na Seção 6.8. Os programas TD e Scatt (v. Apêndice B) podem ser empregados para calcular a solução em um conjunto arbitrário de pontos do interior do oceano.

Finalmente, é importante observar que (6.77) e (6.78) permanecem válidas se um dos contornos  $C_r$  representa uma margem continental; neste caso,  $C_r$  corresponde a uma "ilha" ilimitada na direção meridional e semi-infinita na direção zonal.

## CAPÍTULO 7

### SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

#### 7.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos os resultados de algumas simulações numéricas realizadas através do método dos elementos de contorno.<sup>1</sup> Uma vez que a variedade de problemas oceânicos que podem ser estudados com a presente formulação é bastante ampla, os exemplos considerados restringem-se ao problema do espalhamento de ondas equatoriais livres por ilhas e margens continentais, cuja solução pelo método dos elementos de contorno foi discutida na Seção 6.9. Do ponto de vista computacional, o tratamento deste problema é mais simples do que o de problemas forçados pelo vento. Além disso, o estudo dos padrões de amplitude e fase resultantes pode sugerir possíveis explicações para feições observadas nos oceanos reais.

Os casos que consideraremos mais adiante envolvem ondas equatoriais de frequência intermediária (períodos de 50 a 90 dias), nos oceanos Índico e Atlântico.

#### 7.2 - ESPALHAMENTO DE ONDAS EQUATORIAIS PELAS ILHAS MALDIVAS

Um problema transiente envolvendo a interação de ondas de Kelvin e de Rossby com as Ilhas Maldivas (situadas aproximadamente a 73°E, entre 1°S e 6°N) foi estudado numericamente por Yoon (1981) através do método das diferenças finitas. Aqui, consideraremos o espalhamento de ondas equatoriais com período  $T = 60$  dias, com estrutura

---

<sup>1</sup> Todos os resultados numéricos foram obtidos com o auxílio do software descrito no Apêndice B.

vertical dada pelo segundo modo baroclínico do Oceano Índico equatorial, para o qual Moore e McCreary (1990) estimam o autovalor vertical  $c = 1,67 \text{ m s}^{-1}$ . O raio de deformação correspondente é  $r = (c/2\beta)^{1/2} = 191 \text{ km}$ ; assumindo um coeficiente de dissipação  $A = 1,3 \times 10^{-8} \text{ m}^2\text{s}^{-3}$  (Moore e McCreary, 1990), a frequência não-dimensional correspondente ao período de 60 dias é  $\text{Re } y_c = 2\pi/\beta r T = 0,278$ . Portanto, (3.20)-(3.22) implicam que os possíveis modos propagatórios com período de 60 dias são no presente caso o de Kelvin, o de Yanai e os modos de Rossby com índices meridionais  $m = 0, 1$ . Os comprimentos de onda e as velocidades de fase destes modos são dados na Tabela 7.1.

TABELA 7.1 - ONDAS EQUATORIAIS COM PERÍODO  $T = 60$  DIAS NO SEGUNDO MODO BAROCLÍNICO DO OCEANO ÍNDICO

| Modo   | Comprimento de onda ( $^{\circ}$ ) | Velocidade de fase ( $^{\circ}/\text{dia}$ ) |
|--|------------------------------------|--|
| Kelvin   | 77,4                               | 1,3  |
| Rossby longo $\left\{ \begin{array}{l} n = 0 \\ n = 1 \end{array} \right.$ | 23,1<br>11,6                       | 0,4<br>0,2                                   |
| Rossby curto $\left\{ \begin{array}{l} n = 1 \\ n = 0 \end{array} \right.$ | 4,1<br>3,5                         | 0,07<br>0,06                                 |
| Yanai  | 3,1                                | 0,05   |

A geometria do arquipélago das Maldivas foi representada pelos dois contornos fechados<sup>2</sup> que aparecem na Figura 7.4, correspondentes à isóbata de 200 m (McCalpin, 1987). Quando uma onda equatorial incide sobre o arquipélago, a primeira etapa do método dos elementos de contorno consiste em resolver a equação integral de

<sup>2</sup> O contorno situado mais ao norte será referido como  $C_1$ , e o outro como  $C_2$ .

contorno obtida na Seção 6.9 para a distribuição de pressão ao longo da fronteira do problema. Do ponto de vista numérico, os elementos de contorno em que a fronteira será discretizada devem ser suficientemente pequenos para que um refinamento adicional da discretização não produza como resultado uma distribuição de pressão significativamente diferente daquela obtida com a discretização original. A fim de ilustrar este ponto, determinamos a distribuição de pressão ao longo da fronteira no caso de uma onda de Kelvin incidente empregando duas discretizações diferentes, nas quais os elementos de contorno têm comprimentos característicos de 55 km e 40 km, respectivamente<sup>3</sup> (Figura 7.1). A concordância entre as duas distribuições sugere que ambas as discretizações usadas são suficientemente finas para tratar o espalhamento da onda de Kelvin pelas Ilhas Maldivas.

A partir da distribuição de pressões ao longo da fronteira, os campos de pressão e velocidade podem ser calculados em qualquer ponto do oceano, através de (6.79) e (6.80). Algumas características dos campos resultantes do espalhamento de ondas de Kelvin e Rossby longas são descritas abaixo:

#### 1) Onda de Kelvin

O campo de pressão mostra uma ligeira amplificação na amplitude de oscilação imediatamente a oeste de  $C_1$ , em relação à amplitude devida apenas à onda incidente (Figura 7.2). A Figura 7.3 mostra um efeito de amplificação semelhante, observado na simulação de Yoon

---

<sup>3</sup> Os comprimentos mencionados são os comprimentos médios dos elementos em ambas as discretizações. Elementos mais curtos do que a média são empregados nas porções mais encurvadas da fronteira, a fim de reproduzi-la mais fielmente.

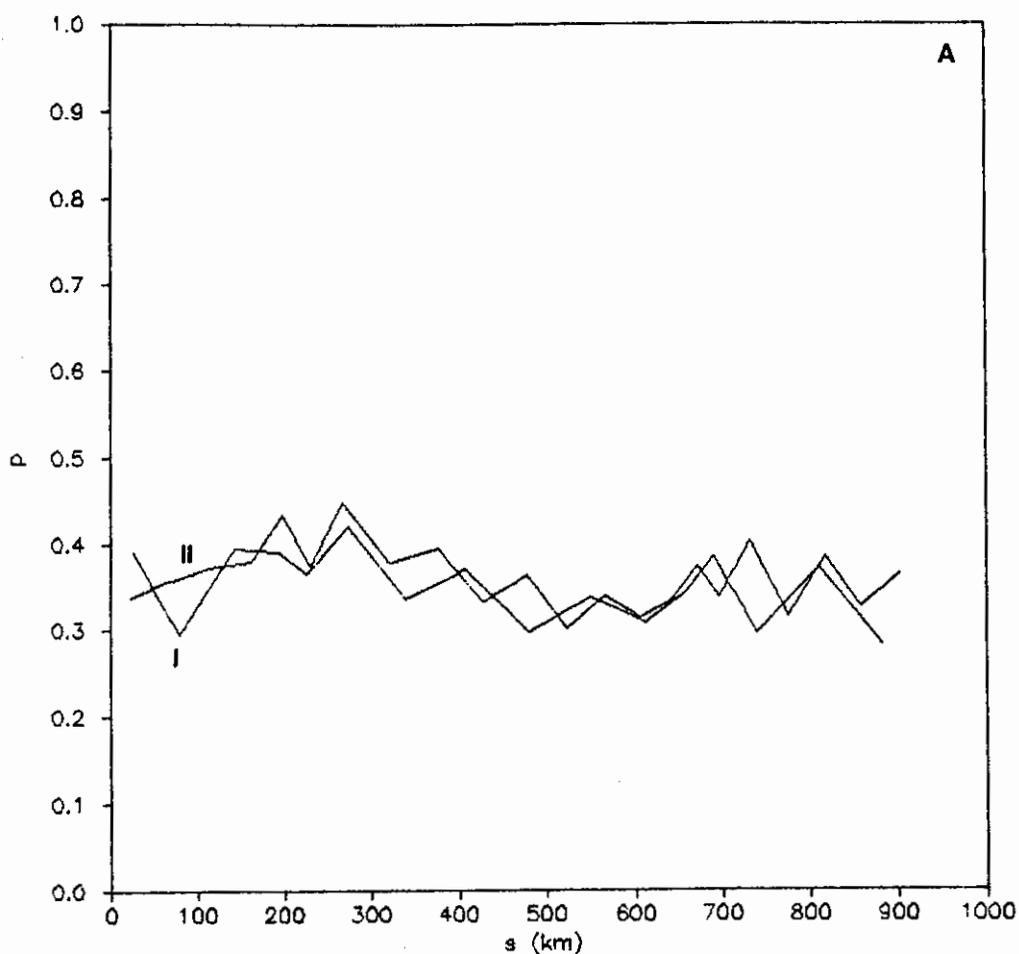


Fig. 7.1 - Distribuição de pressão ao longo da fronteira do arquipélago das Maldivas.

(a) Contorno  $C_1$ , (b) contorno  $C_2$ . As figuras mostram a distribuição de pressão em um instante fixado quando uma onda de Kelvin com período de 60 dias incide sobre as ilhas. O ponto  $s = 0$  ao longo de  $C_1$  está situado a  $4^\circ N$  no lado oeste do contorno; o ponto  $s = 0$  ao longo de  $C_2$  está sobre o Equador no lado oeste de  $C_2$ . Ambos os contornos são percorridos no sentido horário. As curvas marcadas I e II foram obtidas com discretizações em elementos de contorno de 55 km e 40 km de comprimento (em média), respectivamente.

(continua)

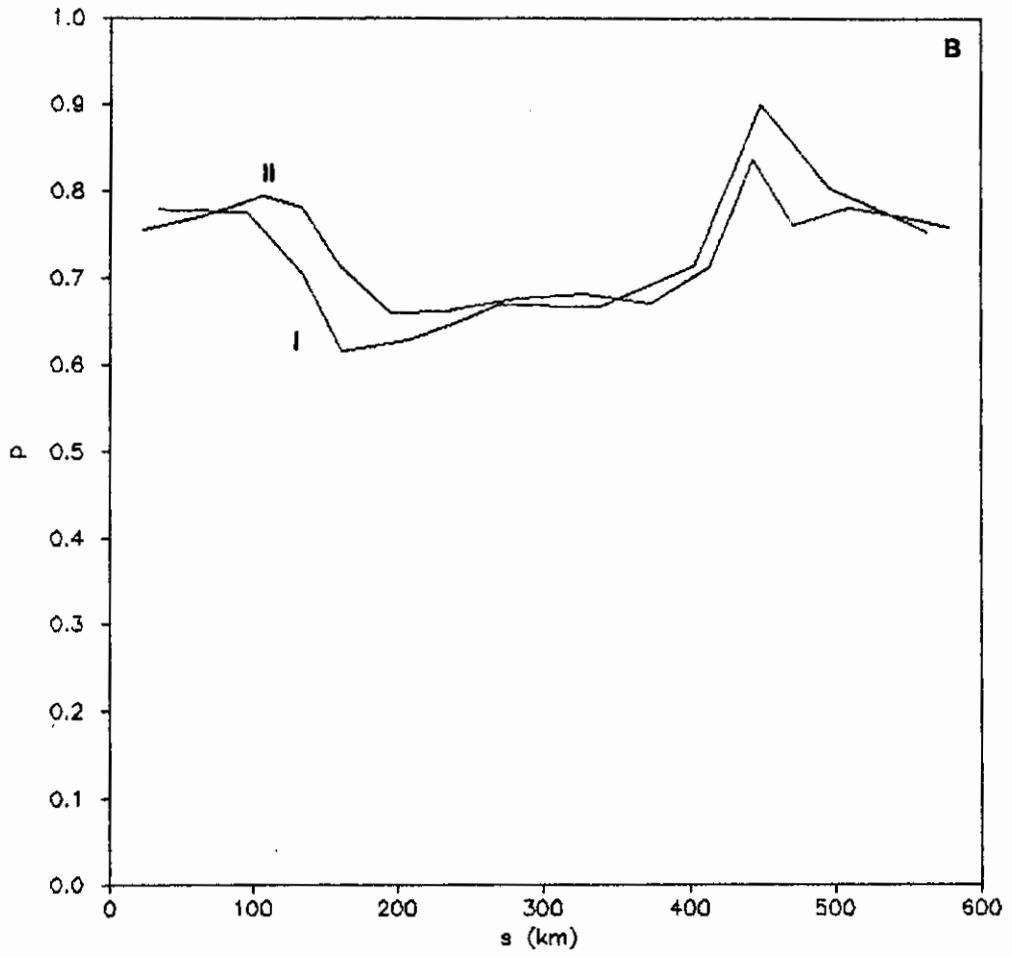


Fig. 7.1 - Conclusão.

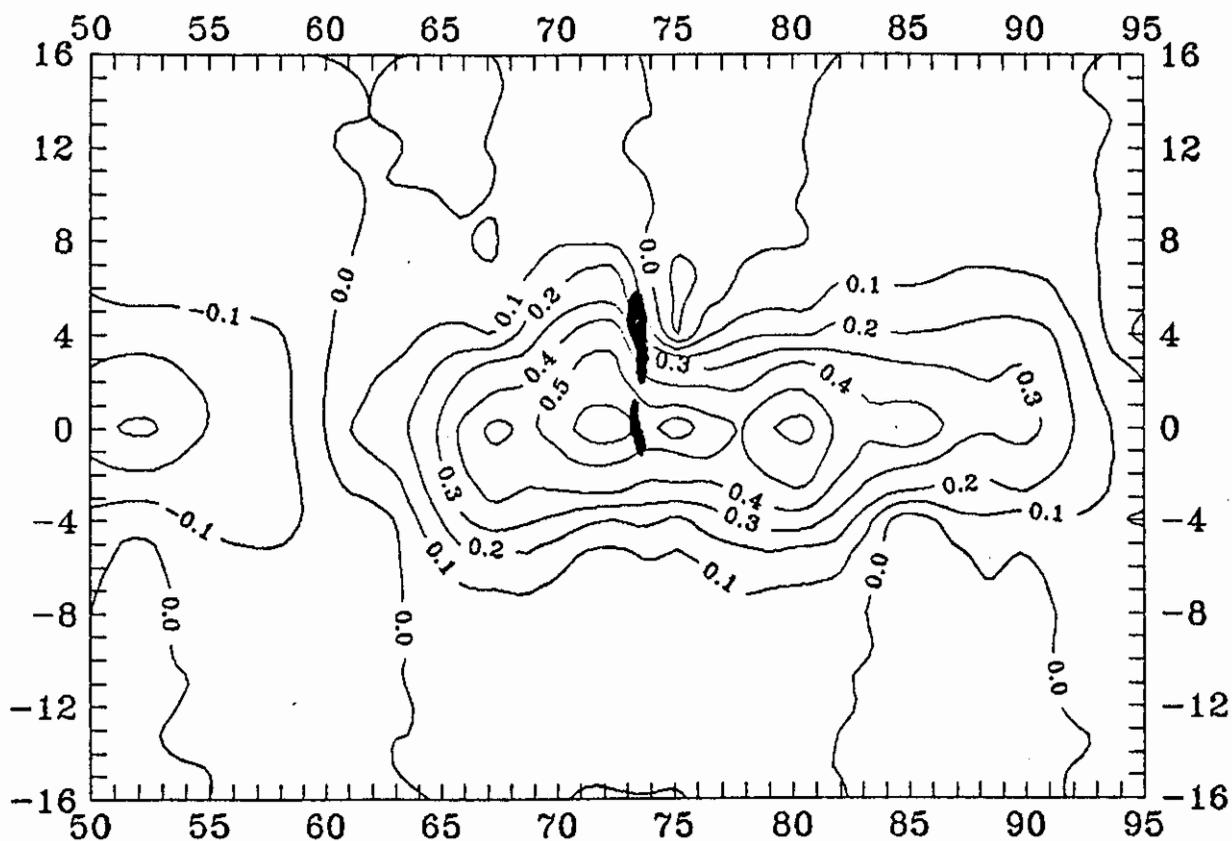


Fig. 7.2 - Campo de pressão no oceano Índico em um instante fixado quando uma onda de Kelvin com período de 60 dias incide sobre as Ilhas Maldivas.

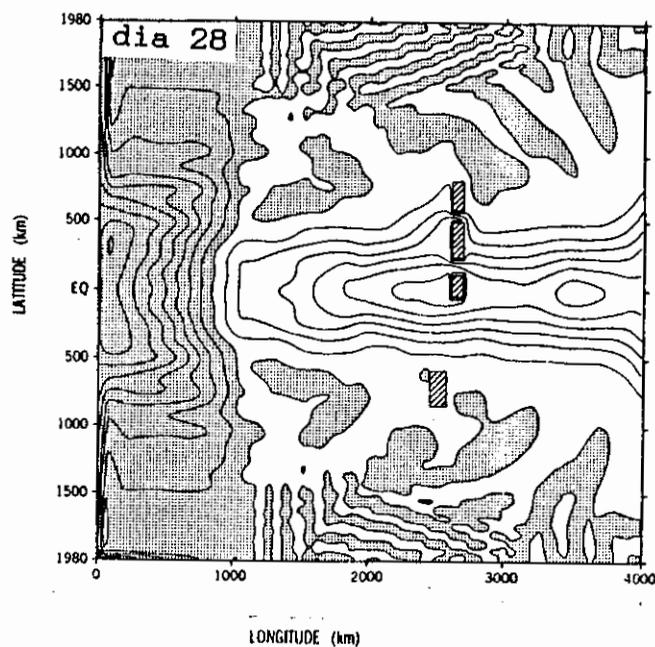


Fig. 7.3 - Campo de pressão no oceano Índico em uma simulação da interação de ondas de Kelvin transientes com as Ilhas Maldivas.  
FONTE: Yoon (1981).

(1981). Uma pequena região de baixa pressão centrada em  $75,5^{\circ}\text{E}$ ,  $6^{\circ}\text{N}$  pode ser notada a leste de  $C_1$  na Figura 7.2; esta perturbação se propaga para oeste com uma velocidade de fase de aproximadamente  $0,05^{\circ}/\text{dia}$ , e está associada com os vórtices que aparecem a leste de  $C_1$  na Figura 7.4. Com base na escala zonal destes vórtices (cerca de  $4^{\circ}$ ) e em sua velocidade de fase, inferimos a presença nesta feição de ondas de Rossby curtas (cf. Tabela 7.1). As correntes mais intensas são encontradas no estreito situado entre os contornos  $C_1$  e  $C_2$ ; além disso, pode-se notar na Figura 7.4 que a condição de contorno  $\vec{u} \cdot \hat{n} = 0$  se cumpre satisfatoriamente na solução numérica calculada.

Os resultados acima parecem consistentes com a conclusão de Yoon (1981) de que o campo de pressão associado com uma onda de Kelvin pode ser significativamente modificado na vizinhança imediata das Ilhas Maldivas.

### 2) Onda de Rossby $n = 0$

A feição mais notável do campo de pressão resultante é uma região de grande amplitude de oscilação com cerca de  $3^{\circ}$  de diâmetro a  $75^{\circ}\text{E}$ ,  $4^{\circ}\text{N}$  (a leste de  $C_1$ ). A amplitude máxima nesta região é cerca de duas vezes maior do que a amplitude máxima no resto do oceano. Na mesma região, encontramos vórtices que se propagam para oeste, bastante similares aos vórtices discutidos em conexão com a onda de Kelvin.

### 3) Onda de Rossby $n = 1$

Neste caso, em  $75^{\circ}\text{E}$  aparecem regiões de grande amplitude de oscilação de pressão simetricamente dispostas em relação ao Equador, a  $4^{\circ}\text{N}$  e  $4^{\circ}\text{S}$ . Dois vórtices

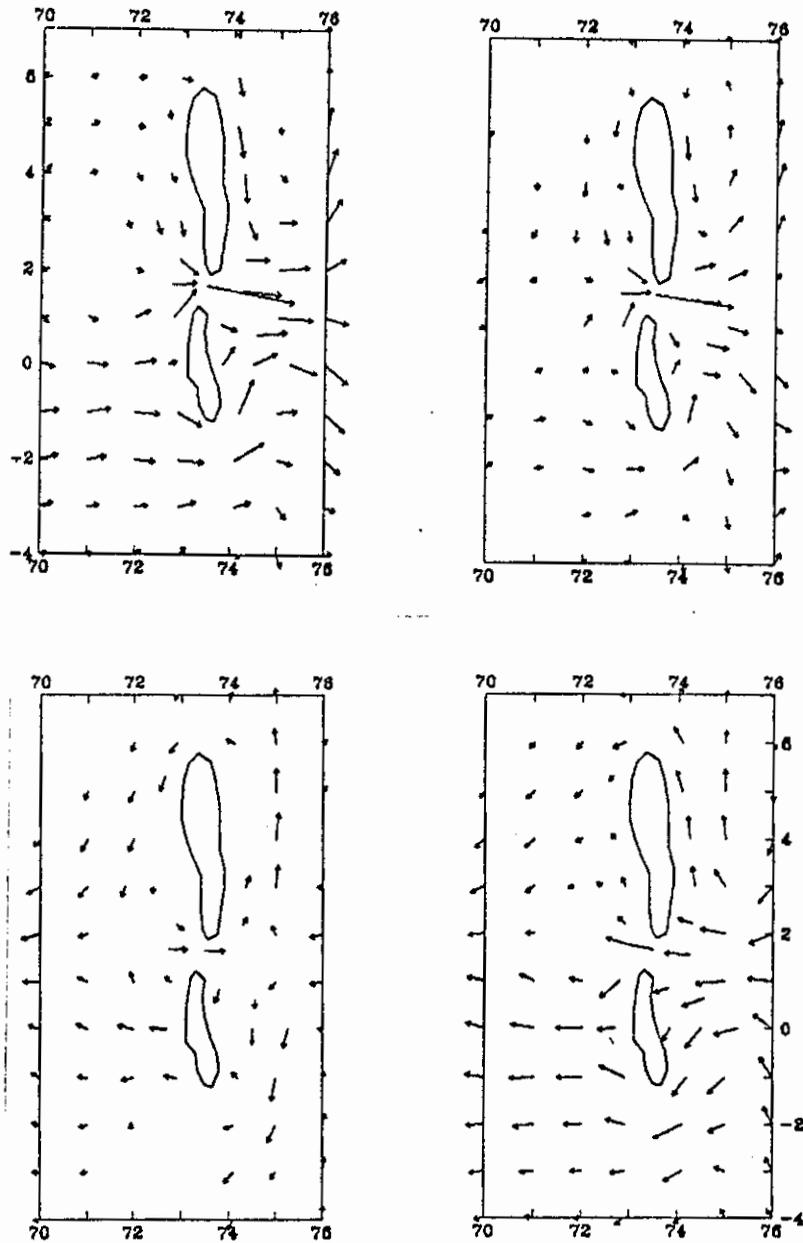


Fig. 7.4 - Evolução temporal do campo de velocidade em torno das Ilhas Maldivas para uma onda de Kelvin incidente com período de 60 dias.

As figuras mostram quatro fases sucessivas que diferem entre si por  $1/8$  do ciclo completo.

intensos, um a leste de  $C_1$  e outro a leste de  $C_2$ , são encontrados propagando-se com a velocidade e o comprimento de onda característicos da onda de Rossby curta  $n = 1$  (Figura 7.5). Os vórtices ultrapassam as ilhas em seu movimento para oeste, originando novos vórtices a oeste das mesmas; estes têm a velocidade e o comprimento de onda característicos da onda incidente. As correntes mais intensas ocorrem no estreito entre  $C_1$  e  $C_2$ .

Em resumo, quando uma onda de Rossby livre incide sobre as Ilhas Maldivas, aparecem regiões de grande amplitude de oscilação imediatamente a leste do arquipélago. O estudo de Yoon (1981) concluiu que as ondas de Rossby são fortemente amortecidas quando passam pelo arquipélago. Este efeito, que não aparece nas simulações acima, é provavelmente devido à presença de uma dissipação horizontal relativamente grande no modelo de Yoon.

### 7.3 - ESPALHAMENTO DE ONDAS EQUATORIAIS PELA MARGEM CONTINENTAL SUL-AMERICANA

A reflexão de ondas equatoriais livres por uma fronteira meridional foi estudada por Clarke (1983). Cane e Gent (1984) propuseram uma solução para o problema correspondente quando a fronteira tem uma geometria arbitrária, empregando as aproximações de baixa frequência e de ondas longas. Argumenta-se que as ondas curtas (de Yanai, de Rossby e as ondas amortecidas zonalmente) não precisam ser consideradas explicitamente no cálculo do coeficiente de reflexão<sup>4</sup>. Entretanto, a situação é diferente no cálculo dos campos espalhados  $p^{(S)}, \vec{u}^{(S)}$  (Seção 6.9). Consideremos por exemplo a margem continental da

---

<sup>4</sup> Esta conclusão, obtida invocando o fato de a divergência das ondas curtas ser  $O(\omega)$  quando  $\omega \rightarrow 0$ , não é portanto estritamente válida mesmo no caso de baixas frequências.

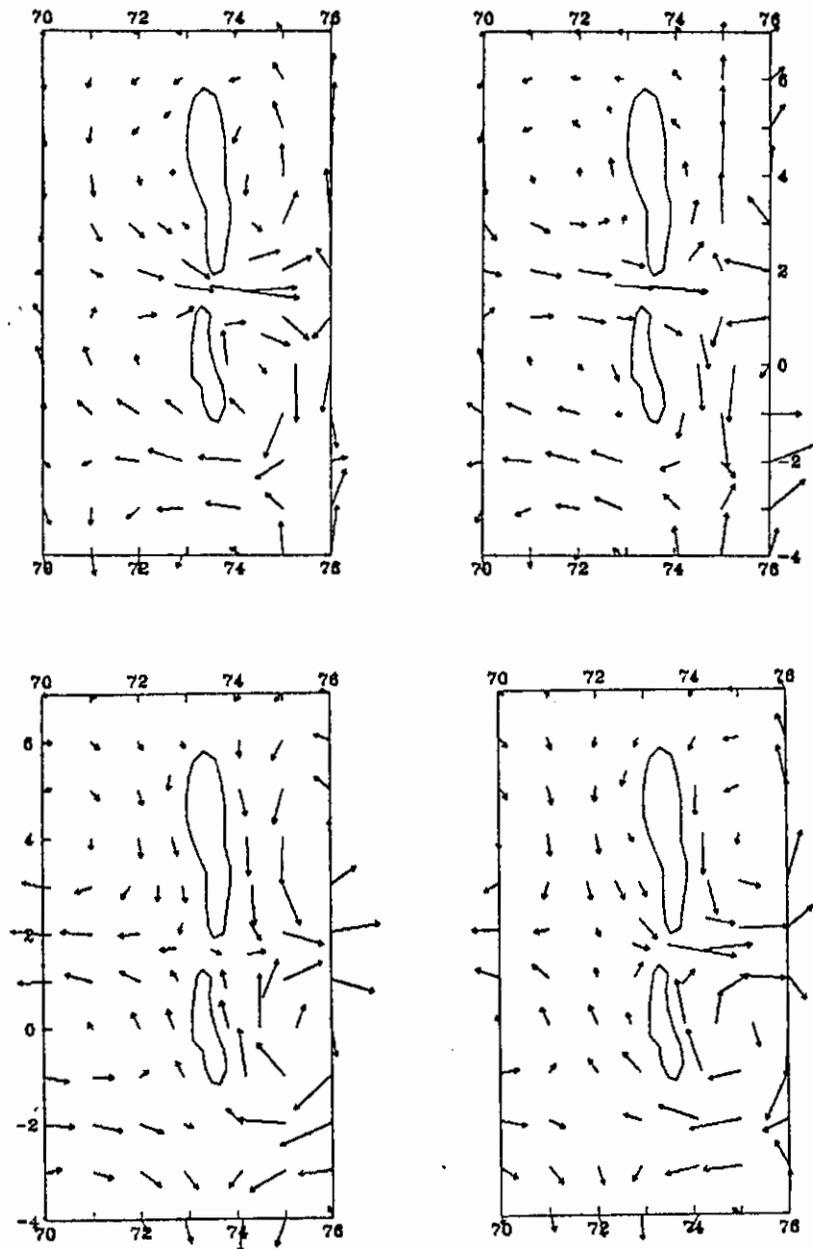


Fig. 7.5 - Evolução temporal do campo de velocidade em torno das Ilhas Maldivas para uma onda de Rossby incidente (segundo modo meridional) com período de 60 dias.

As figuras mostram quatro fases sucessivas que diferem entre si por  $1/8$  do ciclo completo.

América do Sul, que é fortemente inclinada em relação ao Equador. Na aproximação da óptica geométrica (Jacobs, 1967; Ripa, 1989), uma onda equatorial de frequência  $\omega$  com índice meridional  $m$  é descrita por um feixe de raios senoidais, cuja equação em unidades não-dimensionais é

$$y = 2(m+3/2)^{1/2} \sin \left( \frac{x - x_0}{2(Q-m-3/2)^{1/2}} \right), \quad (7.1)$$

onde  $x_0$  é uma longitude arbitrária e na ausência de dissipação  $Q$  é dado por (cf. (3.21))

$$Q = \frac{1}{4} [(\omega/\omega_0)^2 + (\omega_0/\omega)^2], \quad \omega_0 = (\beta c/2)^{1/2}. \quad (7.2)$$

Esta expressão indica que os modos propagatórios de índice mais elevado terão raios de comprimento de onda zonal menor (o que não significa que estes serão os modos de menor comprimento de onda à frequência considerada (Ripa, 1989)). Uma vez que as ondas curtas são amortecidas apenas na direção zonal, uma onda curta de índice meridional elevado emitida na fronteira ao sul do Equador pode percorrer uma distância considerável em direção ao norte antes que sua amplitude se torne desprezível devido ao movimento na direção zonal. Assim, o campo espalhado ao norte da margem continental sul-americana pode ser consideravelmente influenciado pelas ondas curtas, que são omitidas no método de Cane e Gent.

No restante desta secção, apresentamos os resultados de algumas simulações envolvendo o espalhamento pela margem continental sul-americana das ondas de Rossby  $n = 0$  e  $n = 1$ , com períodos entre 50 e 90 dias (Holvorcem e Vianna, 1991). O interesse neste intervalo de frequências deriva de observações recentes de oscilações intra-sazonais no Oceano Atlântico equatorial, ao norte do equador. Dados de corrente obtidos com um instrumento em  $6^\circ\text{N}$ ,  $28^\circ\text{W}$  indicam

que o ciclo sazonal da Contracorrente Norte-Equatorial exibe flutuações intensas nas componentes  $u$  e  $v$  do vetor velocidade, com períodos entre um e seis meses (Richardson e Reverdin, 1987). Além disso, dados de ecossonda invertida relatados por Garzoli (1987) em  $28^{\circ}\text{W}$  entre o Equador e  $9^{\circ}\text{N}$  sugerem a existência de oscilações intensas com períodos entre 50 e 100 dias. A amplitude máxima destas oscilações ocorre no intervalo  $3-9^{\circ}\text{N}$ . Oscilações de grande amplitude na componente meridional do vetor velocidade, com período de aproximadamente 50 dias foram encontradas em dados obtidos durante 1987-88 com um conjunto de correntômetros instalado próximo à Guiana Francesa (Johns et al., 1990). As oscilações foram interpretadas em termos de uma onda de Rossby extra-equatorial com velocidade de grupo muito pequena, cuja estrutura vertical é dada pelo primeiro modo baroclínico do Oceano Atlântico equatorial. Com base em imagens de satélite tomadas durante 1979-80, Johns et al. (1990) sugeriram uma relação entre as oscilações observadas e a retroflexão sazonal da Corrente Norte do Brasil. Entretanto, a persistência das oscilações durante o ano todo sugere a presença de um campo de ondas, que poderia ser gerado no interior do oceano (Johns et al., 1990). Um padrão de onda estacionária com períodos de oscilação entre 40 e 50 dias foi observado no nível do mar, na temperatura da superfície do mar e na pressão atmosférica ao longo da costa do Golfo da Guiné (Picaut e Verstraete, 1976). Em vista disso, é concebível que ondas de Rossby equatoriais com períodos de 40-50 dias sejam emitidas do Golfo da Guiné em direção ao oeste, sendo posteriormente refletidas na margem continental sul-americana.

A estrutura vertical das ondas será dada por um dos dois primeiros modos baroclínicos do oceano Atlântico tropical, cujos autovalores são aproximadamente  $c = 2,17 \text{ m s}^{-1}$  para o primeiro modo e  $c = 1,26 \text{ m s}^{-1}$  para o

segundo modo (du Penhoat e Treguier, 1985). Os raios de deformação correspondentes são 218 km e 167 km, respectivamente. Em todos os cálculos seguintes, assumimos um coeficiente de dissipação  $A = 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$  (McCreary et al., 1984).

1) Onda de Rossby  $n = 0$

Aqui discutimos os campos resultantes do espalhamento da onda de Rossby  $n = 0$  com períodos  $T = 50$  dias (primeiro e segundo modos baroclínicos), 72 e 90 dias (segundo modo baroclínico).

a)  $T = 72$  Dias, Segundo Modo Baroclínico

Consideremos primeiro a questão da convergência da distribuição de pressão ao longo do contorno determinada numericamente. O sistema de equações lineares que representa o problema de espalhamento (Seção 6.9) foi resolvido empregando quatro diferentes discretizações da isóbata de 200 m (McCalpin, 1987), cujos elementos de contorno têm comprimentos característicos de 120 km, 120 km, 80 km e 60 km respectivamente (Figura 7.6). A primeira discretização reproduzia a margem continental sul-americana entre  $20^\circ\text{S}$  e  $20^\circ\text{N}$ , a segunda consiste na primeira discretização truncada entre  $14,5^\circ\text{S}$  e  $14,5^\circ\text{N}$ , e as duas últimas correspondem ao trecho da margem entre estas mesmas latitudes. As distribuições obtidas empregando as duas primeiras discretizações (Figura 7.6a) indicam que o trecho de costa com latitudes maiores do que  $14,5^\circ$  faz uma contribuição desprezível para a solução na vizinhança do Equador. Isto pode ser entendido qualitativamente com base no comportamento das funções de influência quando a posição da fonte está além das latitudes extremas  $\pm y_e = \pm 2Q^{1/2}$  (Figura 5.2c): os efeitos da fonte se fazem sentir apenas

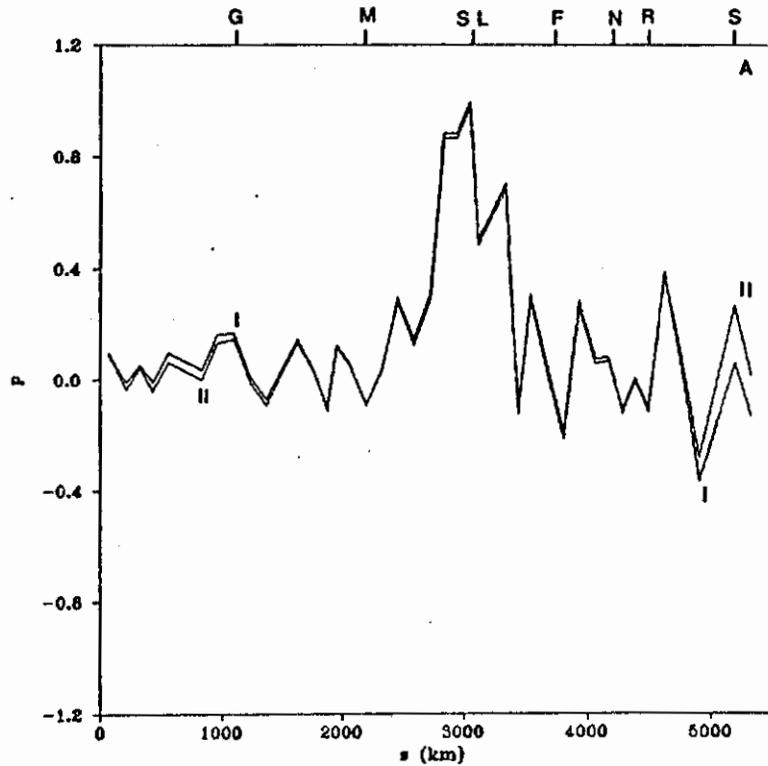


Fig. 7.6 - Distribuição de pressão ao longo da margem continental sul-americana, em um instante fixado, para uma onda de Rossby incidente (primeiro modo meridional, segundo modo baroclínico) com período de 72 dias.

Discretizações em elementos de contorno com diferentes comprimentos médios foram empregadas: (a) 120 km, (b) 80 km e (c) 60 km. A coordenada  $s$  varia entre  $s = 0$  km em  $14,5^\circ$ N até  $s = 5340$  km em  $14,5^\circ$ S. Localidades ao longo da costa são indicadas por G (Georgetown), M (Ilha de Maracá), SL (São Luís), F (Fortaleza), N (Natal), R (Recife) e S (Salvador). Em (a), a curva marcada I foi obtida com uma discretização que se estendia até  $20^\circ$  de latitude, enquanto a curva marcada II foi obtida com a mesma discretização truncada em  $14,5^\circ$  de latitude.

(continua)

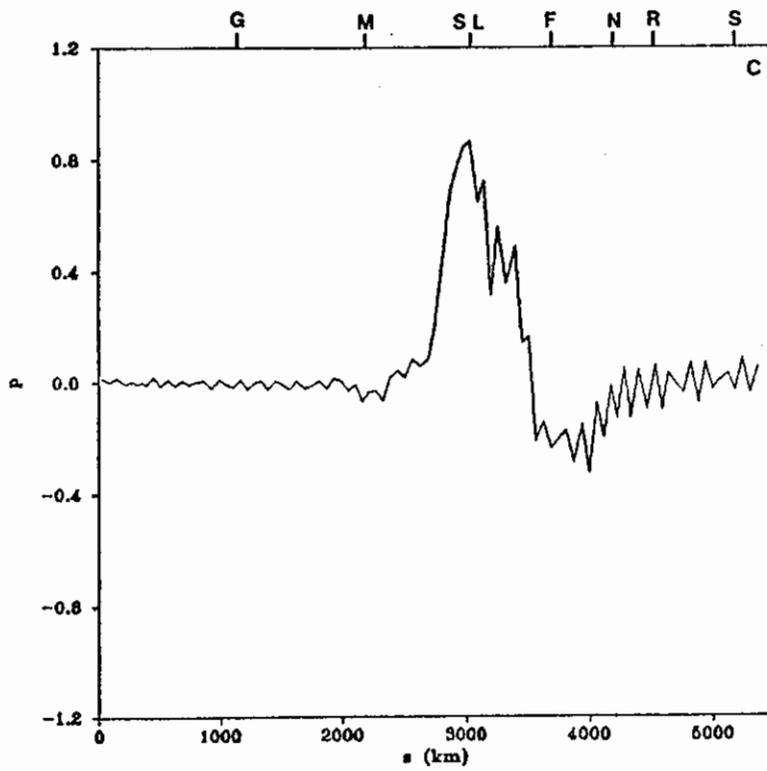
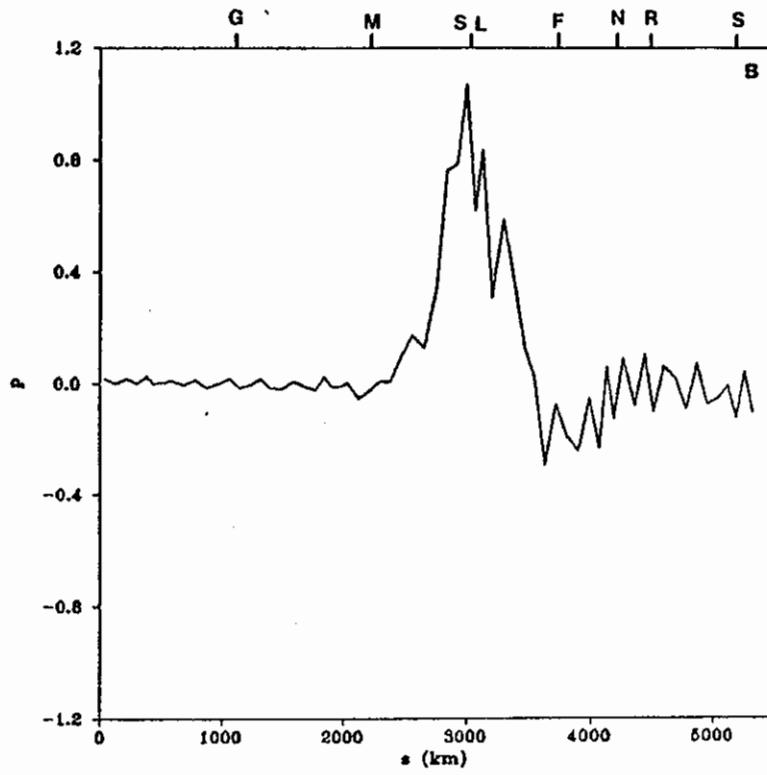


Fig. 7.6 - Conclusão.

até alguns raios de deformação de distância da fonte. Entretanto, a resolução das duas primeiras discretizações não é suficiente para produzir um resultado quantitativamente satisfatório (Figura 7.6b-c). De fato, seria desejável dispor de uma discretização ainda mais fina do que as mencionadas a fim de resolver melhor as ondas curtas de pequena amplitude que aparecem ao sul de Natal e ao norte da Ilha de Maracá. A terceira discretização mencionada acima foi empregada durante as simulações apresentadas no restante desta seção.

A amplitude de oscilação de pressão ao longo do contorno apresenta um máximo largo centrado na posição aproximada de São Luís (Figura 7.7b); a amplitude é muito pequena ao sul de Natal e ao norte da Ilha de Maracá. A propagação de fase ao longo da costa é ilustrada na Figura 7.7a. Entre Natal e São Luís, a propagação se dá na direção noroeste, com uma velocidade 38 km/dia. De acordo com a Tabela 7.2, a velocidade de fase da onda incidente é  $c_p = 0,29^\circ/\text{dia} = 32,5 \text{ km/dia}$  na direção zonal; uma vez que a margem continental entre Natal e São Luís faz um ângulo de aproximadamente  $\theta = 33^\circ$  com o Equador, a velocidade de fase da onda incidente ao longo deste trecho da fronteira é  $c_p/\cos \theta = 39 \text{ km/dia}$ . Assim, entre Natal e São Luís a fase se propaga com a velocidade de fase da onda incidente. Ao norte de São Luís existe um ponto onde a fase é estacionária, e mais ao norte, até a foz do Amazonas a fase se propaga para sudeste, com uma velocidade de 22 km/dia. Um segundo ponto de fase estacionária está situado diante da foz do Amazonas; ao longo da costa do Amapá, a fase se propaga para noroeste com uma velocidade de 22 km/dia. Ao norte do Amapá a solução numérica sugere um trem de ondas curtas que se propaga lentamente para o Equador ao longo da costa, mas que pode não ter sido adequadamente resolvido na solução numérica (Figura 7.6); o mesmo pode ser dito sobre

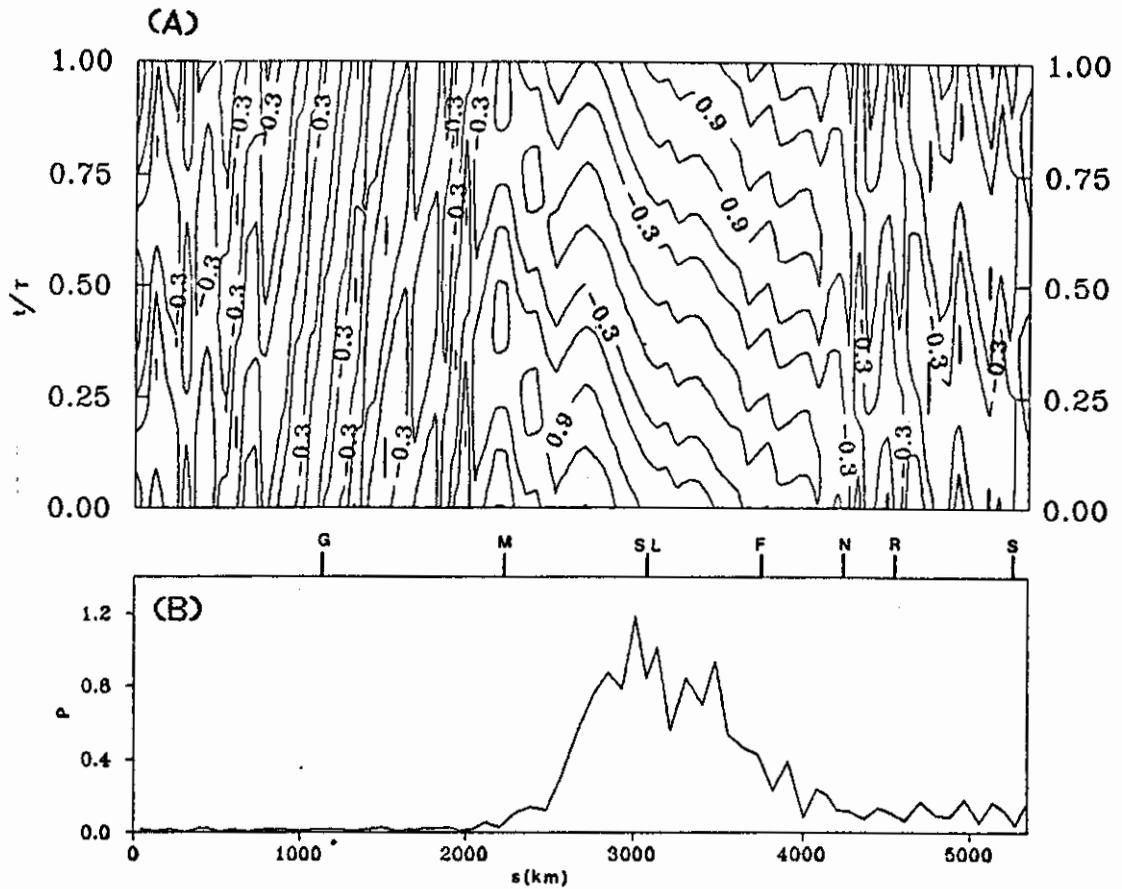


Fig. 7.7 - Distribuição de pressão  $p(s)$  ao longo da margem continental sul-americana para uma onda de Rossby incidente (primeiro modo meridional, segundo modo baroclínico) com período  $T = 72$  dias.

(a) fase (isolinhas de  $\text{Re}(p/|p|)e^{2\pi i t/T}$ ); (b) amplitude,  $P = |p(s)|$ . A escala horizontal ( $s$ ) e as localidades ao longo da costa são as mesmas da Fig. 7.6.

as ondas curtas estacionárias encontradas ao sul de Natal.

TABELA 7.2 - ONDAS EQUATORIAIS COM PERÍODO  $T = 72$  DIAS  
NO SEGUNDO MODO BAROCLÍNICO DO OCEANO ATLÂNTICO

| Modo   | Comprimento de onda (°) | Velocidade de fase (°/dia) |
|--|-------------------------|----------------------------|
| Kelvin   | 71,0                    | 0,99                       |
| Rossby longo $\left\{ \begin{array}{l} n = 0 \\ n = 1 \end{array} \right.$ | 21,1<br>11,0            | 0,26<br>0,15               |
| Rossby curto $\left\{ \begin{array}{l} n = 1 \\ n = 0 \end{array} \right.$ | 3,3<br>2,9              | 0,046<br>0,040             |
| Yanai  | 2,6                     | 0,036                      |

O campo de pressão no interior do oceano mostra uma região de grande amplitude de oscilação que se estende entre  $45^\circ\text{W}$  e  $40^\circ\text{W}$  e entre  $3^\circ\text{N}$  e  $6,5^\circ\text{N}$  (Figura 7.8), próximo à margem continental. Nesta região, ocorrem amplitudes entre duas e três vezes maiores do que as maiores amplitudes encontradas no resto do oceano. A região mencionada está situada no intervalo de longitudes onde aparecem as maiores amplitudes de oscilação ao longo da margem continental, *i.e.*, aproximadamente entre São Luiz e Fortaleza (Figura 7.7b); isto parece sugerir que as grandes amplitudes de oscilação entre  $3^\circ\text{N}$  e  $6,5^\circ\text{N}$  são induzidas por ondas curtas de propagação meridional excitadas no trecho da margem continental ao sul do Equador. Outra evidência em favor desta conclusão é a ocorrência de amplitudes consideráveis entre  $45^\circ\text{W}$  e  $40^\circ\text{W}$  ao norte da latitude extrema  $y_e$ , que neste caso situa-se em  $5,7^\circ\text{N}$ . De fato, sabemos da Seção 3.4 que os modos propagatórios possíveis à frequência  $\omega$  são os de índices meridionais menores que  $M_Q \approx Q-1/2$ . Por (7.1), os raios correspondentes a estes modos ocuparão a região  $|y| < 2(m+3/2)^{1/2} \leq 2(Q+1)^{1/2} \approx y_e$ . A

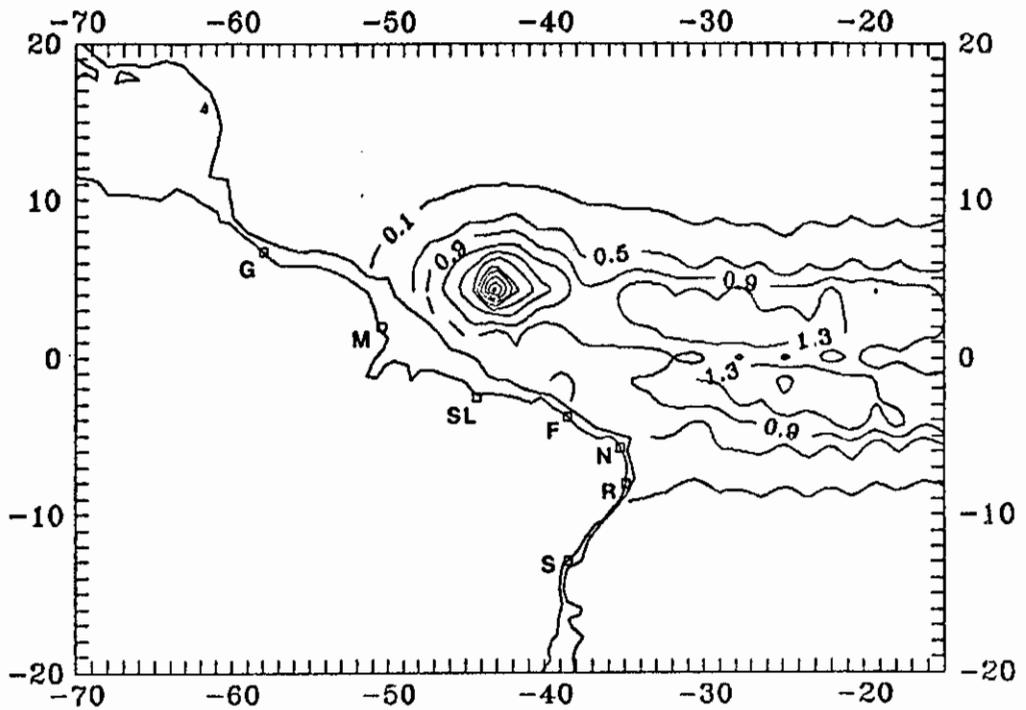


Fig. 7.8 - Amplitude de oscilação do campo de pressão resultante do espalhamento de uma onda de Rossby com período de 72 dias (primeiro modo meridional, segundo modo baroclínico) pela margem continental sul-americana.

A amplitude é dada por  $P = |p(x,y)|$ , e as localidades ao longo da costa são as mesmas da Fig. 7.6.

amplitude dos modos propagatórios na região  $|y| > y_c$  será exponencialmente pequena, e a existência de grandes amplitudes nesta região poderia ser explicada pela presença de modos de índice meridional elevado (i.e., de modos amortecidos). A amplitude a oeste de  $48^\circ\text{W}$  é praticamente desprezível.

A leste de  $30^\circ\text{W}$ , aproximadamente, o comprimento de onda das perturbações de pressão é próximo ao da onda incidente ( $21^\circ$ ); entretanto, a oeste daquele meridiano o campo é dominado por uma superposição complexa de ondas curtas que se propagam mais lentamente do que a onda incidente. A evolução temporal do campo de pressão próximo à costa brasileira é ilustrada pela Figura 7.9, que mostra uma seqüência de quatro fases sucessivas que diferem uma da outra por  $1/8$  do ciclo de 72 dias. A oeste de  $40^\circ\text{W}$ , ao norte do Equador, a velocidade de fase é da ordem de  $0,08^\circ/\text{dia}$ , e o comprimento de onda é próximo de  $5^\circ$ . O número de onda dos modos amortecidos é aproximadamente a média entre os números de onda dos modos de Rossby curto e longo de mesmo índice meridional. Um cálculo simples a partir dos dados da Tabela 7.2 indica que o comprimento de onda dos modos amortecidos é aproximadamente  $5^\circ$ , o que está de acordo com a interpretação da região de grandes amplitudes de oscilação em termos de modos amortecidos.

b)  $T = 90$  Dias, Segundo Modo Baroclínico

A solução neste caso é qualitativamente similar à discutida para a onda de 72 dias. A região de grande amplitude aparece agora entre  $47^\circ\text{W}$  e  $41^\circ\text{W}$  e entre  $4,5^\circ\text{N}$  e  $8^\circ\text{N}$ , exibindo uma migração para noroeste em relação ao caso anterior. Amplitudes consideráveis ocorrem ao norte da latitude extrema  $y_c$ , que está situada neste caso a  $7,1^\circ\text{N}$ .

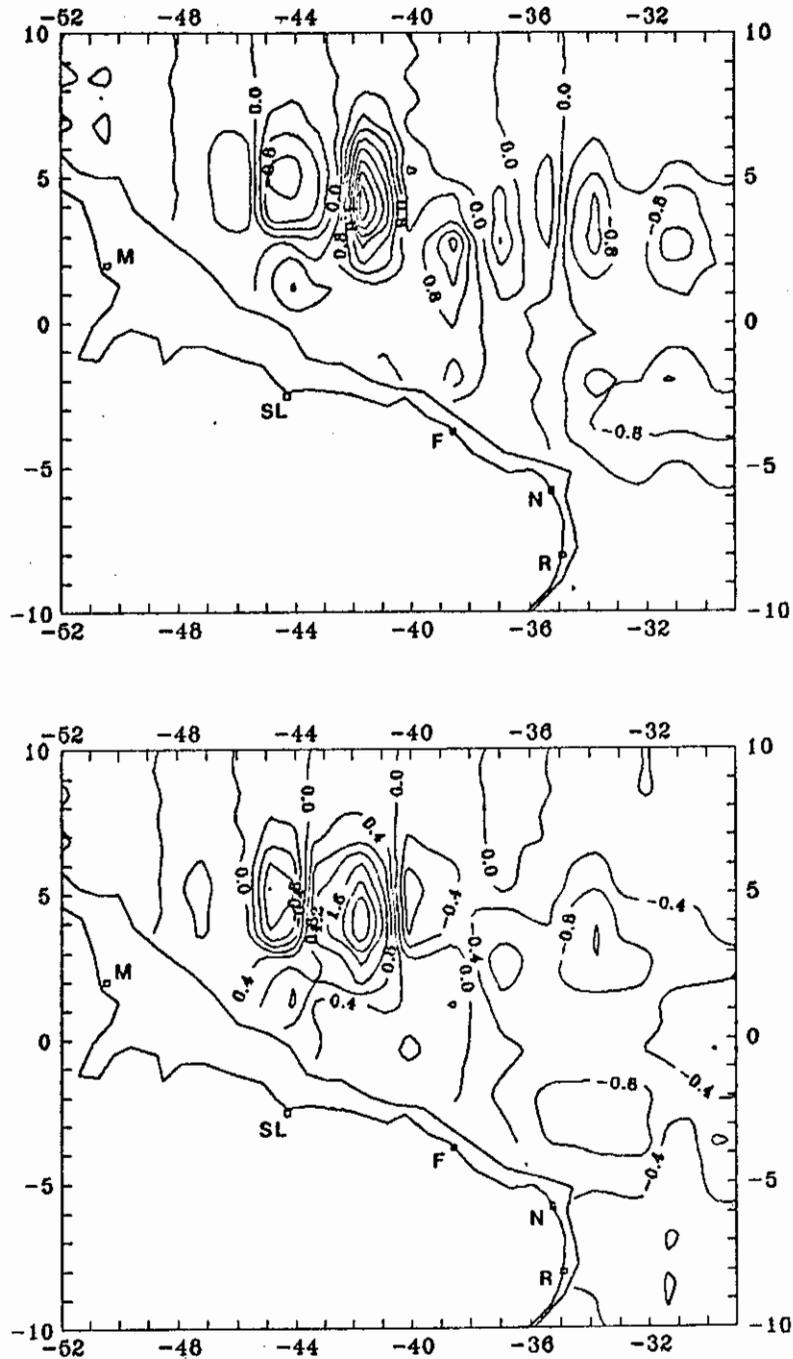


Fig. 7.9 - Evolução temporal do campo de pressão resultante do espalhamento de uma onda de Rossby com período de 72 dias (primeiro modo meridional, segundo modo baroclínico) pela margem continental sul-americana.

As figuras mostram quatro fases sucessivas que diferem entre si por 1/8 do ciclo completo.

(continua)

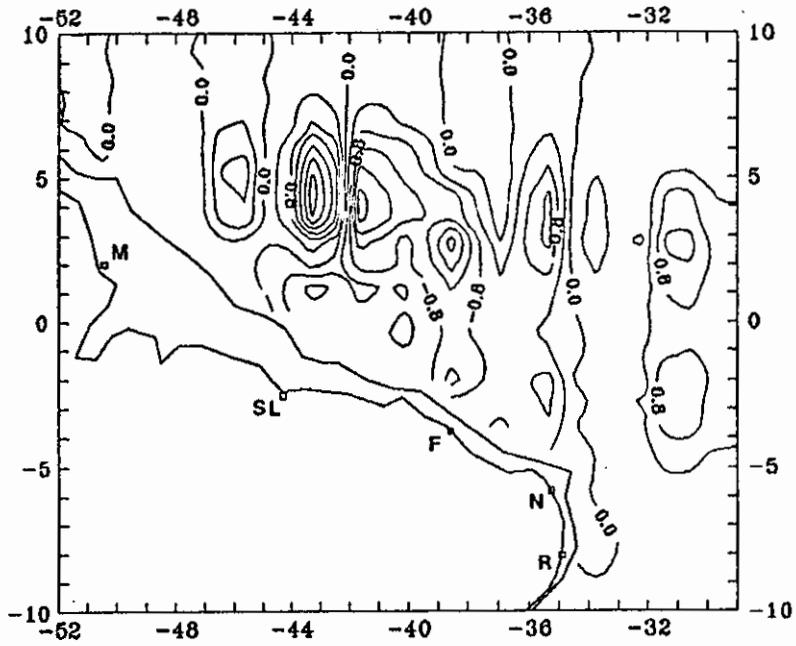
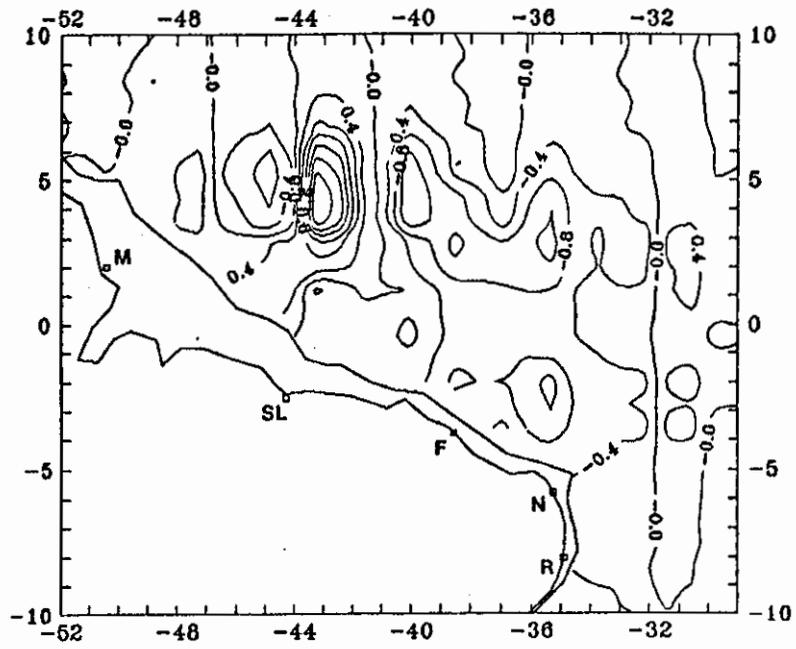


Fig. 7.9 - Conclusão.

c) T = 50 Dias, Segundo Modo Baroclínico

À diferença dos casos discutidos acima, não aparece nenhuma região de grandes amplitudes de oscilação. Além disso, a amplitude a oeste de  $44^{\circ}\text{W}$  é praticamente desprezível.

d) T = 50 Dias, Primeiro Modo Baroclínico

A distribuição de pressão ao longo do contorno é qualitativamente similar à obtida nos casos anteriores. Entre Natal e São Luís, a fase se propaga para noroeste com uma velocidade de  $56 \text{ km/dia}$ , enquanto a velocidade de fase da onda incidente ao longo da costa é de  $64 \text{ km/dia}$ ; os dois valores parecem razoavelmente consistentes. Uma região de grande amplitude de oscilação de pressão aparece entre  $44^{\circ}\text{W}$  e  $35,5^{\circ}\text{W}$  e entre  $2,5^{\circ}\text{N}$  e  $8,5^{\circ}\text{N}$ , mais a leste, portanto, do que a região de grande amplitude correspondente às ondas de 72 e 90 dias no segundo modo baroclínico. Há considerável amplitude ao norte da latitude extrema  $y_0$ , que está situada no presente caso a  $6,7^{\circ}\text{N}$ . As maiores amplitudes ao longo da fronteira (entre São Luís e Fortaleza) ocorrem novamente no intervalo de longitudes ocupado pela região de grandes amplitudes ao norte do Equador. A amplitude é praticamente zero a oeste de  $48^{\circ}\text{W}$ .

Dados obtidos com um correntômetro em  $6^{\circ}\text{N}$ ,  $28^{\circ}\text{W}$  (Richardson e Reverdin, 1987) indicam a existência de oscilações com período em torno de 40 dias na porção oriental da Contracorrente Norte-Equatorial, nas quais o vetor velocidade gira no sentido horário, com uma diferença de fase de aproximadamente  $90^{\circ}$  entre as componentes zonal e meridional. O vetor velocidade calculado em  $6^{\circ}\text{N}$ ,  $28^{\circ}\text{W}$ , resultante do espalhamento da onda de Rossby  $n = 0$  com

período de 50 dias (primeiro modo baroclínico), gira no sentido horário, com uma diferença de fase de  $106^\circ$  entre as componentes zonal e meridional. Ainda que este cálculo não tenha sido efetuado com o período observado de 40 dias, esperamos que uma mudança de período de 50 para 40 dias não modifique drasticamente o vetor velocidade calculado.

Os campos resultantes de espalhamento podem também ser comparados com a oscilação com período de 50 dias observada próximo à Guiana Francesa (Johns et al., 1990). A oscilação foi detectada com dois correntômetros, um em  $7,56^\circ\text{N}$ ,  $52,74^\circ\text{W}$  e outro em  $8,50^\circ\text{N}$ ,  $52,15^\circ\text{W}$ . Os vetores velocidade nos dois sítios giram em sentidos opostas, e há uma diferença de fase de cerca de  $45^\circ$  entre as duas posições, consistente com propagação para oeste. O vetor velocidade gira em um sentido durante metade do ciclo de 50 dias, e no sentido oposto durante a outra metade do ciclo. Os vetores velocidade calculados nas posições dos correntômetros giram em sentidos opostos, e a diferença de fase entre os sítios é de  $38^\circ$ . Por outro lado, os vetores calculados não revertem o sentido de rotação durante parte do ciclo, e a amplitude calculada é pequena a oeste de  $50^\circ\text{W}$ .

Assim, uma única onda de Rossby incidente parece incapaz de gerar certos aspectos da oscilação observada próximo à Guiana Francesa. Uma simulação melhor poderia possivelmente ser obtida incluindo os efeitos de forçamento local e remoto pelo vento, com período de 50 dias. Já que a latitude extrema  $y_0$  para o período de 50 dias (primeiro modo baroclínico) situa-se a  $6,7^\circ\text{N}$ , a resposta próximo ao contorno no intervalo  $7-9^\circ\text{N}$  deve ser dominada pelos modos equatoriais amortecidos. Estes têm um número de onda zonal cuja parte real é dada em unidades não-dimensionais por  $-\omega_0/2\omega$  (cf. (3.20)). Para um período  $T$

= 55 dias, isto implica em um comprimento de onda de 730 km e uma velocidade de fase para oeste de  $13 \text{ km dia}^{-1}$ . Estes valores estão situados dentro dos intervalos estimados das observações (390-740 km e  $7.8\text{-}14.8 \text{ km dia}^{-1}$ ), e são muito similares aos valores calculados por Johns et al. (1990) assumindo que as oscilações representam ondas de Rossby extra-equatoriais.

## 2) Onda de Rossby $n = 1$

As ondas discutidas abaixo têm períodos  $T = 50$  dias (primeiro modo baroclínico), 72 e 90 dias (segundo modo baroclínico).

### a) $T = 50$ Dias, Primeiro Modo Baroclínico

A distribuição de pressão ao longo do contorno (Figura 7.10) difere das distribuições obtidas para a onda  $n = 0$  pela presença de dois pontos de fase estacionária próximos de São Luís. A velocidade de fase entre Natal e Fortaleza é de cerca de 54 km/dia para noroeste; entre os dois pontos de fase estacionária, a velocidade é de 57 km/dia para sudeste; no trecho de costa entre São Luís e a Ilha de Maracá, a propagação é novamente para noroeste, à velocidade de 39 km/dia. Estas velocidades não são imediatamente identificáveis com as velocidades das ondas livres (as ondas de Rossby longas  $n = 0$  e  $n = 1$  têm velocidades de fase de 64 km/dia e 31 km/dia ao longo da costa, respectivamente). A amplitude de oscilação de pressão ao longo da costa exhibe um máximo relativo largo entre São Luís e a Ilha de Maracá, e um máximo absoluto, mais estreito, entre Fortaleza e Natal.

No interior do oceano, a amplitude (Figura 7.11) é praticamente zero a oeste de  $38^\circ\text{W}$ . A leste deste

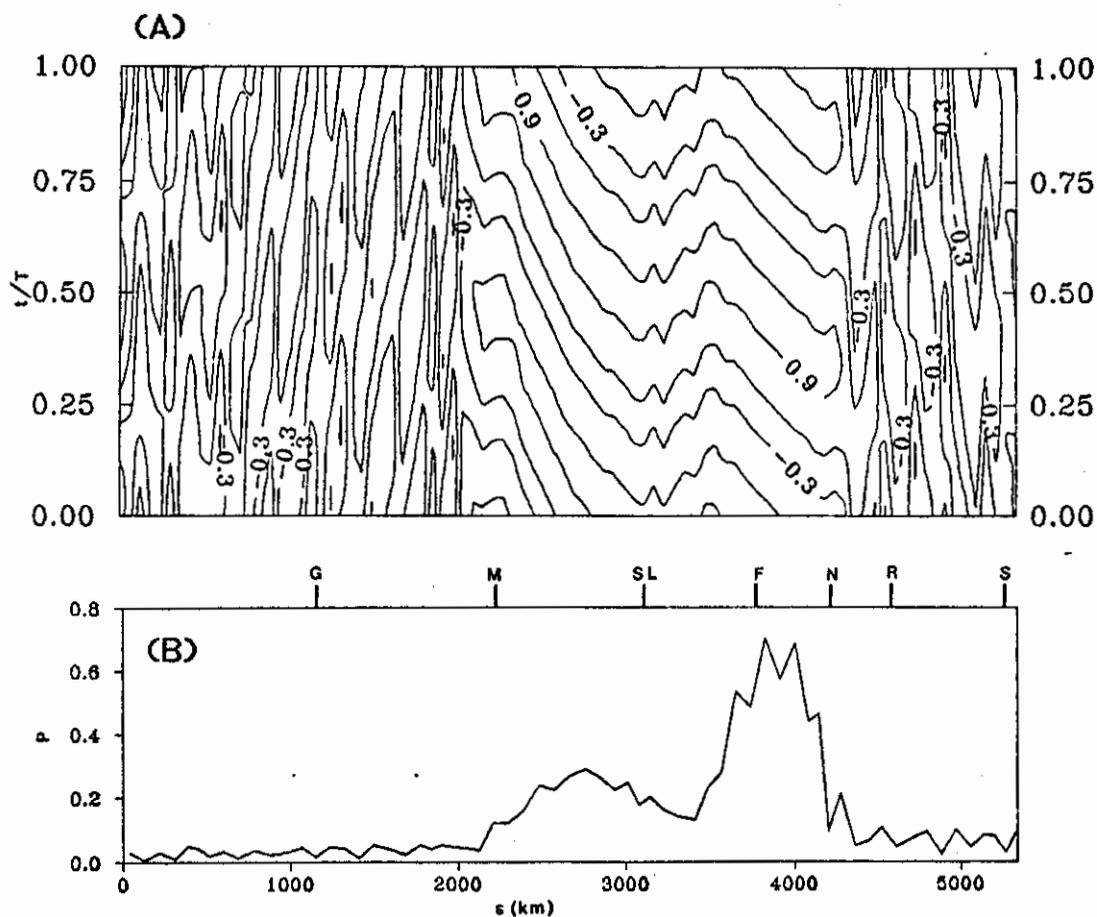


Fig. 7.10 - Distribuição de pressão  $p(s)$  ao longo da margem continental sul-americana para uma onda de Rossby incidente (segundo modo meridional, primeiro modo baroclínico) com período  $T = 50$  dias.

(a) fase (isolinhas de  $\text{Re}(p/|p|)e^{2\pi i t/T}$ ); (b) amplitude,  $P = |p(s)|$ . A escala horizontal ( $s$ ) e as localidades ao longo da costa são as mesmas da Fig. 7.6.

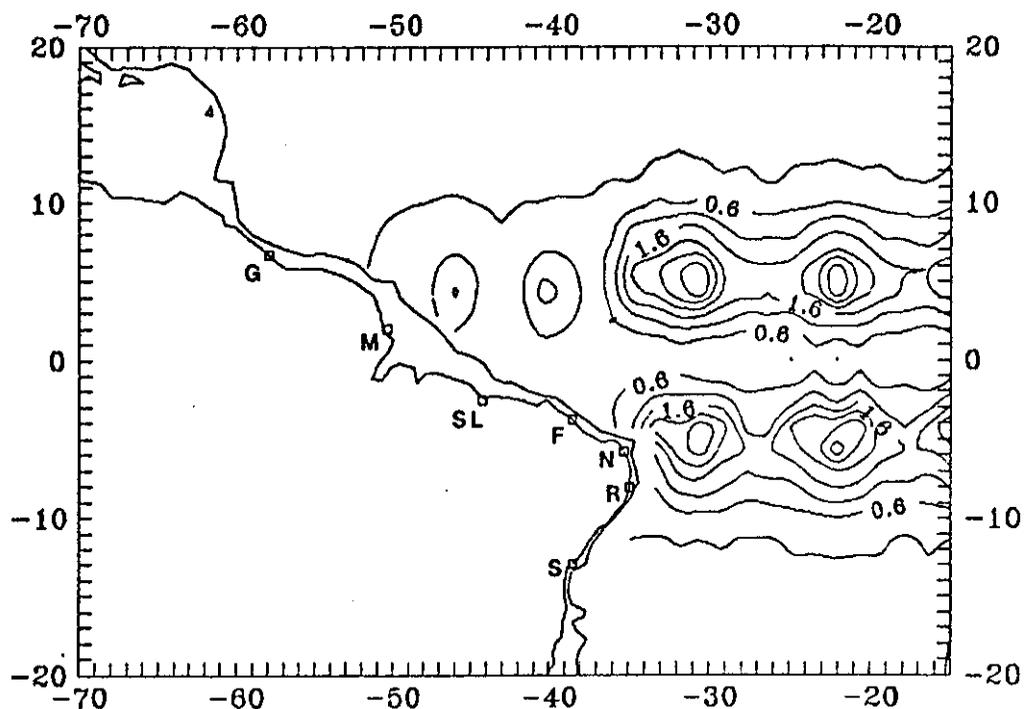


Fig. 7.11 - Amplitude de oscilação do campo de pressão resultante do espalhamento de uma onda de Rossby com período de 50 dias (segundo modo meridional, primeiro modo baroclínico) pela margem continental sul-americana.

A amplitude é dada por  $P = |p(x,y)|$ , e as localidades ao longo da costa são as mesmas da Fig. 7.6.

meridiano, aparecem vários máximos de pouca intensidade, simetricamente dispostos em relação ao Equador em  $5^{\circ}\text{S}$  e  $5^{\circ}\text{N}$ , e espaçados entre si de aproximadamente  $10^{\circ}$  de longitude (a  $31^{\circ}\text{W}$ ,  $21,5^{\circ}\text{W}$ , etc.). A amplitude é pequena além das latitudes extremas  $\pm y_e$ , situadas neste caso a  $\pm 6,7^{\circ}$ , o que sugere que os máximos de amplitude resultam da interferência de modos propagatórios.

b)  $T = 72$  Dias, Segundo Modo Baroclínico

A distribuição de pressão ao longo da margem continental é similar à obtida no caso anterior. Entretanto, nos trechos da costa em que a fase se propaga para noroeste, a velocidade de fase é próxima da velocidade de fase da onda incidente ao longo da costa (20 km/dia). No interior do oceano, aparecem dois máximos de amplitude (Figura 7.12). O máximo situado no hemisfério norte estende-se de  $39,5^{\circ}\text{W}$  a  $34^{\circ}\text{W}$  e de  $2^{\circ}\text{N}$  a  $7^{\circ}\text{N}$ , e o máximo no hemisfério sul de  $34^{\circ}\text{W}$  a  $31,5^{\circ}\text{W}$  e de  $2,5^{\circ}\text{S}$  a  $6^{\circ}\text{S}$ . Ambos os máximos apresentam considerável amplitude além das latitudes extremas  $\pm y_e$ , situadas a  $\pm 5,7^{\circ}$ . O máximo absoluto de amplitude na fronteira (cf. a discussão da onda  $n = 1$  com período de 50 dias) ocorre na longitude do máximo de amplitude situado no hemisfério norte. Este máximo pode estar relacionado com um pico espectral centrado em  $T = 73$  dias, encontrado em dados de ecossonda invertida obtidos em  $3^{\circ}\text{N}$ ,  $38^{\circ}\text{W}$  (Garzoli, 1987). O máximo situado no hemisfério sul está muito próximo da costa, na vizinhança imediata do máximo absoluto de amplitude ao longo da margem. A amplitude a oeste de  $50^{\circ}\text{W}$  é praticamente zero.

c)  $T = 90$  Dias, Segundo Modo Baroclínico

A distribuição de pressão ao longo da margem continental e no interior do oceano é qualitativamente

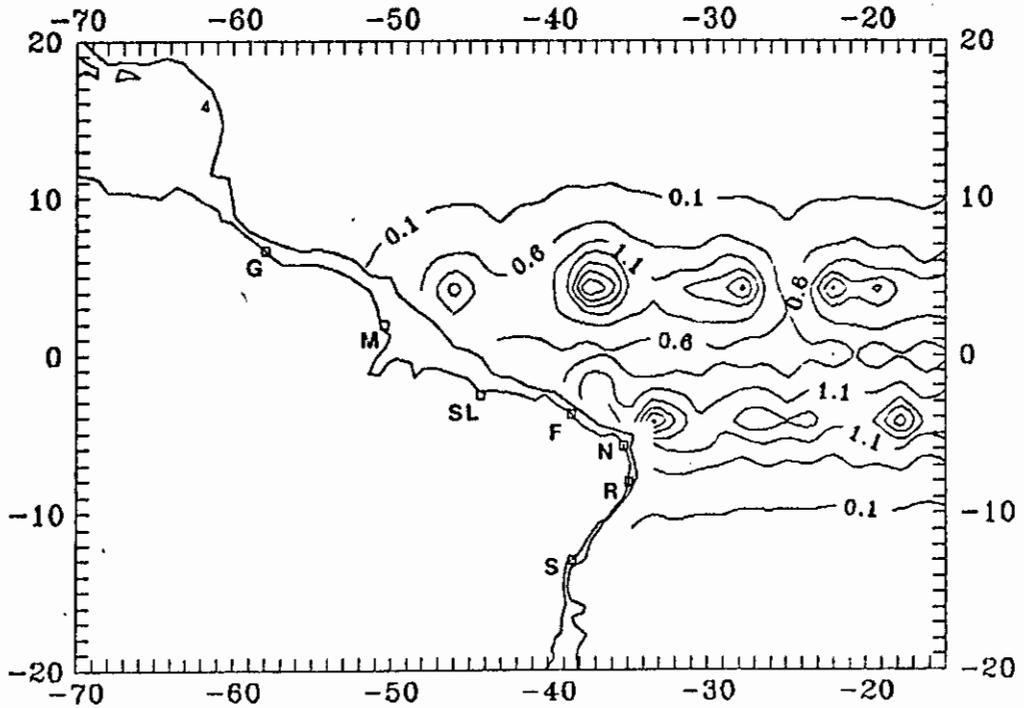


Fig. 7.12 - Amplitude de oscilação do campo de pressão resultante do espalhamento de uma onda de Rossby com período de 72 dias (segundo modo meridional, segundo modo baroclínico) pela margem continental sul-americana.

A amplitude é dada por  $P = |p(x,y)|$ , e as localidades ao longo da costa são as mesmas da Fig. 7.6.

semelhante à do caso da onda de 72 dias. O máximo de amplitude no hemisfério norte move-se consideravelmente para noroeste e tem sua extensão reduzida (situa-se entre  $41^{\circ}\text{W}$  e  $38^{\circ}\text{W}$  e entre  $4,5^{\circ}\text{N}$  e  $7^{\circ}\text{N}$ ). O máximo situado no hemisfério sul não varia de posição, mas sua intensidade diminui bastante em relação ao caso da onda de 72 dias. A amplitude é desprezível a oeste de  $50^{\circ}\text{W}$ .

Os resultados acima descritos indicam que um máximo de amplitude de oscilação aparecerá ao norte do Equador na porção ocidental do Oceano Atlântico equatorial, sempre que a onda de Rossby incidente tenha um período suficientemente longo. De fato, o máximo aparece no espalhamento da onda de Rossby  $n = 0$  no segundo modo baroclínico para períodos  $T = 72$  e  $90$  dias, mas não para  $T = 50$  dias. Verificou-se também que um máximo relativamente fraco aparece quando  $T = 60$  dias. Um máximo no hemisfério norte também aparece no espalhamento da onda de Rossby  $n = 1$  no segundo modo baroclínico, com períodos  $T = 72$  e  $90$  dias. A presença de um máximo no campo resultante do espalhamento da onda de Rossby  $n = 0$  no primeiro modo baroclínico com período  $T = 50$  dias parece então indicar que um máximo também apareceria para  $T > 50$  dias.

Os máximos acima mencionados sempre aparecem no intervalo de longitudes onde amplitudes máximas ocorrem ao longo da margem continental sul-americana. Além disso, o comprimento de onda local na posição dos máximos e a ocorrência ali de grandes amplitudes ao norte da latitude extrema  $y_0$  são consistentes com uma interpretação dos máximos como resultantes da interferência construtiva de modos equatoriais amortecidos. Estes modos, excitados na margem continental ao sul do Equador pela onda de Rossby incidente, podem viajar com pouco amortecimento na direção meridional, já que seu amortecimento se dá apenas na

direção zonal. Desta maneira, os modos amortecidos podem alcançar latitudes em torno de  $y_0$ , fazendo uma contribuição significativa para o campo resultante na região onde aparece o máximo de amplitude. Portanto, é possível que os máximos de interferência construtiva obtidos nas simulações deste trabalho não apareçam quando se usa a aproximação de ondas longas.

A presença dos máximos depende claramente da geometria inclinada da margem continental sul-americana, já que com uma fronteira meridional o padrão de interferência apresentaria simetrias em relação ao Equador. Um máximo de amplitude semelhante àqueles encontrados nos resultados acima apareceu em uma recente simulação de Moore e McCreary (1990), na qual um modelo do Oceano Índico equatorial foi forçado por um vento zonal com período de 60 dias. O modelo incluía uma fronteira reta inclinada de  $45^\circ$  em relação ao Equador, representando a margem continental da África. A fronteira leste do modelo consistia de uma região de viscosidade artificialmente grande, que deveria absorver ondas emitidas da porção oeste do oceano (simulando assim um oceano semi-infinito com uma grade finita). Um máximo de amplitude aparece próximo à fronteira oeste entre  $3^\circ\text{S}$  e  $8^\circ\text{S}$ . Por analogia com os resultados deste capítulo, esperaríamos que o máximo ocorresse no hemisfério sul, já que a inclinação da costa africana, de sudoeste para nordeste, é grosseiramente similar à inclinação da costa sul-americana após uma reflexão sobre o Equador.

Ainda que não tenhamos investigado o espalhamento de ondas com períodos maiores do que 90 dias, os resultados acima sugerem que nestes casos regiões de grande amplitude de oscilação deverão ainda aparecer ao norte do Equador, na porção ocidental do Oceano Atlântico equatorial. Isto por sua vez indica que efeitos de

espalhamento podem ser importantes na interpretação de observações altimétricas recentes de nível do mar no Oceano Atlântico equatorial pelos satélites Geosat (Carton, 1989), GEOS3 e Seasat (Menard, 1988), que exibem feições de grande amplitude ao norte do Equador e a oeste de  $35^{\circ}\text{W}$ .

Um aspecto comum às soluções numéricas aqui obtidas é a pequena amplitude encontrada ao longo do contorno para  $|y| \gg y_0$  (Figuras 7.7b e 7.10b). O comprimento de onda local determinado numericamente nestes trechos do contorno não é muito maior do que o comprimento característico dos elementos de contorno (Figuras 7.7a e 7.10a), o que sugere que a fase não está ali suficientemente bem resolvida. Os resultados de Moore (1968) a respeito dos modos normais de um oceano limitado apenas por duas fronteiras meridionais sugerem que ondas de Kelvin costeiras podem se propagar em direção ao Equador nos trechos de uma fronteira oeste para os quais  $|y| \gg y_0$ . Às frequências consideradas aqui, uma onda de Kelvin teria o comprimento de onda mais longo dentre os modos equatoriais livres (cf. Tabela 7.2), não podendo portanto ser identificada com as "ondas curtas" que aparecem nas soluções numéricas aqui apresentadas, especialmente ao norte de  $5^{\circ}\text{N}$ . Além disso, ondas de Kelvin costeiras transpostariam energia em direção ao Equador ao longo da fronteira oeste (Moore, 1968), o que exigiria a presença de uma fonte de energia em  $y = \pm\infty$ . Em um oceano limitado por duas fronteiras meridionais, esta energia é suprida pelas ondas de Kelvin costeiras que aparecem na fronteira leste, e que transportam energia para os pólos. Em um problema de espalhamento como o que estivemos considerando, a única fonte de energia está situada em  $x = +\infty$ , e portanto não deve ser surpreendente que ondas de Kelvin costeiras não sejam significativamente excitadas. Assim, as pequenas amplitudes encontradas ao longo do contorno para  $|y| \gg y_0$

parecem consistentes com os resultados de Moore (1968).

O estudo numérico aqui apresentado concentrou-se na determinação dos campos resultantes do espalhamento de ondas de Rossby pela margem continental sul-americana. Fluxos de energia e coeficientes de reflexão não foram calculados, devendo ser objeto de estudos posteriores.

CAPÍTULO 8CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Este trabalho apresentou em detalhe os aspectos teóricos de uma formulação integral para o problema da determinação da estrutura horizontal dos modos baroclínicos de um oceano equatorial sobre o plano- $\beta$ . Especificamente, a Equação da Maré de Laplace sobre o plano- $\beta$  equatorial foi formulada, no domínio de frequência, como uma equação integral de contorno para o campo de perturbação de pressão; o campo de velocidade foi expresso em termos do forçamento pelo vento e do gradiente de pressão. As técnicas de cálculo numérico necessárias para a solução do problema pelo método dos elementos de contorno foram também expostas em detalhe.

A equação integral de contorno para o campo de pressão é derivada de uma identidade integral envolvendo o operador linear  $\mathcal{L}$  que aparece na Equação da Maré de Laplace (Seção 2.2). Esta identidade é análoga à identidade de Green usual, que envolve o operador laplaciano  $\nabla^2$ . No processo de obtenção da equação integral de contorno, a identidade integral fornece representações integrais para os campos de pressão e velocidade no interior de uma região oceânica  $B$  (que pode ou não ser limitada por margens continentais) em termos da distribuição de pressão ao longo do contorno  $\partial B$ , da distribuição da componente da velocidade normal a  $\partial B$ , e da distribuição do forçamento pelo vento sobre a região  $B$  (Seção 2.4). Uma possível aplicação destas representações integrais seria a determinação dos campos de pressão e velocidade no interior do oceano em termos de valores medidos de nível do mar ao longo da costa, e de estimativas do forçamento pelo vento. Um esforço nesta direção é o método de Gill (1983) para determinar as

variáveis oceânicas na região equatorial a partir de anomalias de nível do mar na fronteira leste do oceano e do campo de forçamento pelo vento. Gill (1983) empregou este método para reconstruir anomalias de temperatura da superfície do mar e de velocidade zonal durante o El Niño de 1972. Entretanto, no método de Gill é difícil incluir os efeitos de reflexões na fronteira oceânica oeste. As representações integrais (2.22) e (2.24) permitem tratar diretamente o caso geral de uma bacia oceânica de forma arbitrária, além de não imporem qualquer restrição sobre a frequência considerada.

A propagação de influências dinâmicas entre diferentes pontos do oceano é descrita pelos núcleos dos funcionais integrais que aparecem na equação integral de contorno e nas representações integrais mencionadas acima. Todos os núcleos podem ser expressos em termos de derivadas de uma função de Green para a Equação da Maré de Laplace, que representa o campo de perturbação de pressão correspondente a um forçamento pelo vento que exhibe uma singularidade em um ponto arbitrário do plano- $\beta$  equatorial (a fonte). Por conveniência, assume-se um oceano ilimitado na definição da função de Green. Isto permite representar a função de Green como uma integral de Fourier sobre o número de onda zonal, a qual pode ser calculada pelo método dos resíduos (Seção 3.4). Resulta então uma expansão para a função de Green em termos de ondas equatoriais livres, descritas por funções de Hermite da latitude. Por diferenciação, expansões análogas são obtidas para todos os demais núcleos.

Até a presente data, expansões em funções de Hermite tem sido usadas principalmente para representar soluções de problemas de dinâmica equatorial cuja geometria é particularmente simples, envolvendo fronteiras retilíneas

meridionais (Moore, 1968; Cane e Moore, 1981; Clarke, 1983). A formulação integral deste trabalho estende a aplicabilidade de tais expansões a geometrias arbitrárias. Além disso, não é preciso empregar uma expansão diferente para cada nova geometria considerada: é suficiente desenvolver métodos para a computação da função de Green e suas derivadas.

A computação dos núcleos é dificultada pela lenta convergência das expansões em funções de Hermite em um intervalo de longitudes com extensão de alguns raios de deformação em torno da longitude da fonte (Seção 3.4). Neste intervalo, um grande número de modos zonalmente amortecidos emitidos pela fonte contribui para o campo da função de Green. A fim de evitar o uso de aproximações como a de ondas longas e a de baixas frequências, estes modos não são descartados na formulação deste trabalho, e sua contribuição é explicitamente calculada através de métodos assintóticos especialmente desenvolvidos (Capítulo 4).

Apesar de sua lenta convergência, as expansões para os núcleos em funções de Hermite são absolutamente convergentes, exceto ao longo do meridiano da fonte. Sobre este meridiano, a expansão para a função de Green converge condicionalmente, enquanto que as expansões para os demais núcleos divergem (Capítulo 5). Isto motivou o uso de métodos de somabilidade no cálculo dos núcleos; dentre os métodos existentes, optou-se pelo método de somabilidade de Abel por sua compatibilidade natural com a forma das autofunções de um oceano equatorial sobre o plano- $\beta$  (Seção 4.3). Expressões assintóticas para o resto de expansões em funções de Hermite cujos coeficientes decaem algebricamente com o índice meridional  $m$  foram obtidas com o auxílio da fórmula do somatório de Poisson. Este caso parece suficiente para tratar a maioria das

aplicações de séries de Hermite em oceanografia equatorial, incluindo as séries para os núcleos das equações integrais deste trabalho. Análises análogas poderiam ser tentadas quando os coeficientes têm um comportamento assintótico diferente com  $m \rightarrow \infty$ . Um importante desenvolvimento futuro relacionado aos métodos assintóticos de computação de séries de Hermite seria a obtenção de limitantes explícitos para os erros envolvidos nas aproximações assintóticas aqui empregadas.

Por outro lado, resultados recentes (Seção 4.1) indicam que métodos usuais de somabilidade baseados em médias aritméticas, tais como os métodos de Cesàro e de Hutton, podem ser usados para a computação das expansões de Hermite de uma grande variedade de funções. Entretanto, à diferença dos métodos assintóticos deste trabalho, os métodos baseados em médias aritméticas não fornecem estimativas rigorosas para o número de termos que é necessário calcular a fim de obter um resultado preciso.

O tratamento numérico de problemas de circulação forçada pelo vento e de espalhamento de ondas equatoriais livres em bacias oceânicas de forma arbitrária pelo método dos elementos de contorno (Capítulo 6) segue basicamente os procedimentos empregados para problemas mais usuais do tipo potencial, como os que envolvem as equações de Laplace e Helmholtz (Brebbia et al., 1984). Peculiaridades dos problemas aqui tratados incluem a ocorrência de núcleos bastante complicados (Capítulos 3 e 5) e a presença de uma ressonância no campo de velocidades próximo das latitudes  $y = \pm \text{Re } y_0$  (Seções 6.7 e 6.8).

No processo de solução numérica pelo método dos elementos de contorno, torna-se necessário computar integrais singulares ou quase-singulares envolvendo os

núcleos das equações integrais (Capítulo 6). Para isso, é necessário conhecer a forma assintótica dos núcleos próximo à posição da fonte; esta forma normalmente incluirá alguns termos singulares. Devido à complexidade dos núcleos, tais termos singulares não são imediatamente aparentes das expansões em séries de Hermite. No Capítulo 5, os termos singulares foram calculados com o auxílio das mesmas expansões assintóticas que permitem a computação dos núcleos nos casos em que as expansões em funções de Hermite convergem lentamente. Este resultado analítico confere uma dupla importância aos métodos assintóticos desenvolvidos nos Capítulos 4 e 5.

A formulação integral de problemas de espalhamento de ondas equatoriais (Seção 6.9) permitiu pela primeira vez o cálculo dos campos resultantes do espalhamento de ondas de Rossby de frequência intermediária pela margem continental sul-americana (Seção 7.3). A geometria horizontal desta margem entre  $14,5^{\circ}\text{S}$  e  $14,5^{\circ}\text{N}$  foi descrita fielmente com menos de 100 elementos de contorno, e todas as simulações apresentadas foram realizadas em um microcomputador. Ainda que haja poucas observações de oscilações com períodos entre 1 e 6 meses no Oceano Atlântico equatorial, os resultados numéricos parecem consistentes com observações de oscilações com períodos entre 40 e 50 dias na Contracorrente Norte-Equatorial (Richardson e Reverdin, 1987) e com a ocorrência em  $3^{\circ}\text{N}$ ,  $38^{\circ}\text{W}$  de um pico espectral centrado no período de 73 dias (Garzoli, 1987).

Ao longo da margem continental sul-americana, as maiores amplitudes de oscilação induzidas por uma onda de Rossby incidente de frequência intermediária ocorrem no Hemisfério Sul, entre o Equador e  $5^{\circ}\text{S}$ . A propagação de fase nesta parte do contorno é geralmente para noroeste, mas o

sentido de propagação se inverte em certos trechos (Seção 7.3). A propagação de fase ao longo do contorno ao norte da Guiana Francesa e ao sul de Recife não ficou definitivamente resolvida pelas simulações numéricas, requerendo aparentemente o uso de elementos de contorno mais curtos. Entretanto, as baixas amplitudes ali calculadas parecem consistentes com a análise de modos normais de Moore (1968), já que a presença de ondas de Kelvin costeiras transportando energia em direção ao Equador requereria a existência de uma fonte de energia em altas latitudes, a qual não é prescrita no problema de espalhamento que foi considerado.

O aspecto mais notável dos campos resultantes do espalhamento de ondas de Rossby de frequência intermediária é a formação de máximos de amplitude de oscilação ao norte do Equador, na porção ocidental do Oceano Atlântico Equatorial. Estes máximos foram interpretados como o resultado de interferência construtiva entre modos equatoriais livres excitados na margem continental ao sul do Equador. Os modos zonalmente amortecidos, de índice meridional elevado, contribuem significativamente para os campos de pressão e velocidade na posição dos máximos de amplitude; assim, este efeito estaria possivelmente ausente em uma simulação que empregasse a aproximação de ondas longas. A inclinação da margem continental sul-americana de noroeste para sudeste é também importante para a formação dos máximos.

Até o presente momento, parece não haver dados publicados que demonstrem a existência ou não de regiões de grande amplitude de oscilação com períodos entre 1 e 6 meses nas posições indicadas pelas simulações deste trabalho. Entretanto, alguma sugestão de atividade de grande amplitude com escala de tempo de alguns meses

aparece ao norte do Equador e a oeste de  $35^{\circ}\text{W}$  em dados altimétricos de satélite (Menard, 1988; Carton, 1989).

A metodologia empregada acima para o Oceano Atlântico poderia ser imediatamente utilizada em um estudo do espalhamento de ondas de Rossby equatoriais pela fronteira oeste do Oceano Pacífico. Este problema tem sido estudado no contexto das aproximações de ondas longas e de baixas frequências (du Penhoat e Cane, 1989; Clarke, 1989), em vista de sua importância como parte de muitos dos mecanismos propostos para explicar a variabilidade interanual do sistema acoplado oceano-atmosfera no Oceano Pacífico equatorial. Os resultados obtidos empregando geometrias costeiras altamente idealizadas, tais como barreiras meridionais interrompidas em vários pontos, são altamente sensíveis à geometria do modelo; isto indica que resultados confiáveis somente poderão ser obtidos através de um estudo numérico de alta resolução incorporando detalhadamente a geometria irregular das ilhas do Pacífico ocidental (du Penhoat e Cane, 1989). O *software* descrito no Apêndice B deste trabalho pode ser diretamente empregado no cálculo dos padrões de espalhamento de ondas de Rossby de frequências arbitrárias (intermediárias e baixas) pela fronteira oeste do Oceano Pacífico, levando-se em conta a geometria horizontal real desta fronteira. Em um computador de pequeno porte, seria possível atingir uma resolução ao longo dos contornos da ordem de 30-60 km (Seções 7.2 e 7.3), a qual é similar à resolução de modelos globais de diferenças finitas (Kindle et al., 1989). Em um contexto semelhante, simulações no domínio do tempo através do método dos elementos de contorno (v. item 5, abaixo) poderiam ser empregadas no cálculo do transporte de massa entre os oceanos Pacífico e Índico (Kindle et al., 1989).

Outra aplicação relevante da presente metodologia seria o cálculo do ciclo sazonal dos oceanos equatoriais, incluindo modelos realistas para os forçamentos pelo vento em freqüências maiores do que a anual e para a geometria horizontal das bacias oceânicas. A estrutura vertical poderia ser obtida por superposição de modos normais verticais. No caso particular do Oceano Atlântico, os resultados poderiam ser comparados com os de Busalacchi e Picaut (1983) e du Penhoat e Treguier (1985). Com o método dos elementos de contorno, seria possível empregar um coeficiente de dissipação tão baixo quanto se deseje, o que poderia revelar efeitos que foram eliminados em simulações por diferenças finitas que empregam uma viscosidade artificialmente grande para evitar instabilidades numéricas (Busalacchi e Picaut, 1983; McCreary et al., 1984).

Finalmente, a metodologia deste trabalho poderia ser generalizada em várias direções:

1) Estados Básicos Diferentes do de Repouso

Se o estado básico consiste de uma corrente  $\vec{U}(x,y)$ , por exemplo, a presença de termos da forma  $\vec{U} \cdot \nabla \vec{u}$  nas equações de movimento impedirá a obtenção de uma única equação escalar para o campo de pressão, tal como foi feito no Capítulo 2. Entretanto, os resultados deste trabalho poderiam ser aproveitados em um esquema iterativo de solução, no qual os termos de advecção são incorporados ao forçamento pelo vento  $\vec{F}$  (Brebbia et al., 1984). Na primeira iteração, os termos de advecção seriam ignorados, e o problema resolvido como descrito no Capítulo 6, obtendo-se uma solução  $p_1, \vec{u}_1$ . Na segunda iteração, o forçamento consistiria do forçamento pelo vento propriamente dito, somado aos termos de advecção calculados a partir da

solução  $\vec{u}_1$ . O método de solução descrito no Capítulo 6 seria novamente empregado, produzindo uma solução  $p_2, \vec{u}_2$ , e o procedimento seria repetido até a convergência da solução.

## 2) Termodinâmica Mais Elaborada

Se a temperatura  $T$  é incluída como uma variável adicional, pode-se em alguns casos procurar obter um par de equações integrais de contorno envolvendo a pressão e a temperatura. Este processo poderia ser tentado, por exemplo, com as equações do modelo II de Hirst (1986), cujo estado básico inclui um gradiente zonal de temperatura  $\bar{T}_x$ .

## 3) Topografia

A topografia do fundo do oceano poderia ser incluída em um modelo do tipo considerado neste trabalho através da consideração de uma função de Green tri-dimensional, a qual seria obtida por superposição de modos normais verticais. Um domínio conveniente para a definição da função de Green seria um oceano de fundo chato cuja estratificação vertical coincide com a do oceano que apresenta topografia de fundo. Em tal formulação, integrais sobre a linha de costa seriam substituídas por integrais sobre a superfície e sobre o fundo do oceano. A solução numérica das equações integrais de contorno correspondentes seria então realizada com o auxílio de elementos de contorno bi-dimensionais (Brebbia et al., 1984).

## 4) Previsão de Marés

A Equação da Maré de Laplace sobre a esfera poderia ser formulada como uma equação integral de

contorno, incluindo a geometria real dos contornos continentais em um modelo de previsão de marés. Neste caso, seria provavelmente possível expressar a função de Green em séries de funções de Legendre (Longuet-Higgins, 1964, 1965). Eventuais dificuldades com a convergência de tais séries poderiam ser tratadas por métodos assintóticos análogos aos empregados aqui para séries de funções de Hermite.

#### 5) Simulações no Domínio do Tempo

A formulação deste trabalho foi apresentada no domínio de frequência, já que a aplicação de uma transformação integral no tempo facilita o cálculo analítico da função de Green. Para realizar simulações no domínio do tempo, seria necessário dispor de uma função de Green dependente do tempo  $G(x,y,t;x',y',t')$ . Tal função pode ser determinada a partir da função de Green  $G(y_c;x,y;x',y')$  deste trabalho através da aplicação de uma transformada inversa de Laplace (Vianna, 1991). O tratamento numérico de problemas transientes envolveria então o uso de elementos de contorno ao longo da fronteira no plano  $(x,y)$  e de integração numérica no tempo (Brebbia et al., 1984).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowitz, M.; Stegun, I. *Handbook of mathematical functions*. New York, Dover, 1965. 1046 p.
- Azevedo, J.P.S.; Brebbia, C.A. An efficient technique for reducing domain integrals to the boundary. In: *Boundary Elements X*. Southampton, 1988. *Proceedings*. Southampton, Computational Mechanics Publications, 1988, v. 1, p. 347-361.
- Boyd, J.P.; Moore, D.W. Summability methods for Hermite functions. *Dyn. Atmos. Oceans*, 10:51-62, 1986.
- Brebbia, C.A.; Telles, J.C.F.; Wrobel, L.C. *Boundary element techniques*. Berlin, Springer-Verlag, 1984. 463 p.
- Bryan, K. A numerical method for the study of the circulation of the world ocean. *J. Comput. Phys.*, 4:347-376, 1969.
- Busalacchi, A.J.; Picaut, J. Seasonal variability from a model of the tropical Atlantic Ocean. *J. Phys. Oceanogr.*, 13:1564-1588, 1983.
- Butkov, E. *Mathematical physics*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1968. 735 p.
- Cane, M.A.; Sarachik, E.S. Forced baroclinic ocean motions. I. The linear equatorial unbounded case. *J. Mar. Res.*, 34:629-665, 1976.

- \_\_\_\_\_ The response of a linear baroclinic equatorial ocean to periodic forcing. *J. Mar. Res.*, 39:651-693, 1981.
- Cane, M.A.; Moore, D.W. A note on low-frequency equatorial basin modes. *J. Phys. Oceanogr.*, 11:1578-1584, 1981.
- Cane, M.A.; Gent, P.R. Reflection of low-frequency equatorial waves at arbitrary western boundaries. *J. Mar. Res.*, 42:487-502, 1984.
- Cane, M.A.; Patton, R.J. A numerical model for low-frequency equatorial dynamics. *J. Phys. Oceanogr.*, 14:1853-1863, 1984.
- Carton, J.A. Estimates of sea level in the tropical Atlantic ocean using Geosat altimetry. *J. Geophys. Res.*, C94:8029-8039, 1989.
- Clarke, A.J. The reflection of equatorial waves from oceanic boundaries. *J. Phys. Oceanogr.*, 13:1193-1207, 1983.
- \_\_\_\_\_ On the reflection and transmission of low frequency energy at the irregular western Pacific Ocean boundary - a preliminary report. In: Western Pacific International Meeting and Workshop on TOGA COARE. Nouméa, New Caledonia, 1989. *Proceedings*. Nouméa, New Caledonia, Centre ORSTOM de Nouméa, 1989, p. 423-434.
- du Penhoat, Y.; Treguier, A.M. The seasonal linear response of the tropical Atlantic Ocean. *J. Phys. Oceanogr.*, 15:316-329, 1985.

- du Penhoat, Y.; Cane, M.A. Effect of low latitude western boundary gaps on the reflection of equatorial motions. In: Western Pacific International Meeting and Workshop on TOGA COARE. Nouméa, New Caledonia, 1989. *Proceedings*. Nouméa, New Caledonia, Centre ORSTOM de Nouméa, 1989, p. 335-342.
- Friedman, B. *Principles and techniques of applied mathematics*. New York, John Wiley & Sons, 1956. 315 p.
- Garzoli, S.L. Forced oscillations on the equatorial Atlantic basin during the Seasonal Response of the Equatorial Atlantic Program (1983-1984). *J. Geophys. Res.*, C92:5089-5100, 1987.
- Gill, A.E. An estimation of sea-level and surface-current anomalies during the 1972 El Niño and consequent thermal effects. *J. Phys. Oceanogr.*, 13:586-606, 1983.
- Hardy, G.H. *Divergent series*. Oxford, Clarendon Press, 1956. 396 p.
- Henrici, P. *Applied and computational complex variables*. New York, John Wiley & Sons, 1977. 2 v.
- Hildebrand, F.B. *Advanced calculus for applications*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1965. 646 p.
- Hirst, A.C. Unstable and damped equatorial modes in simple coupled ocean-atmosphere models. *J. Atm. Sci.*, 43:606-630, 1986.
- Holvorcem, P.R. Asymptotic summation of Hermite series. Submetido ao *Journal of Physics A*, 1991.

- Holvorcem, P.R.; Vianna, M.L. Integral equation approach to tropical ocean dynamics. Part II - Rossby wave scattering from the equatorial Atlantic western boundary. Submetido ao *Journal of Marine Research*, 1991.
- Jacobs, S.J. An asymptotic solution of the tidal equations. *J. Fluid Mech.*, 30:417-438, 1967.
- Johns, W.E.; Lee, T.N.; Schott, F.A.; Zantopp, R.J.; Evans, R.H. The North Brazil Current retroflection: seasonal structure and eddy variability. *J. Geophys. Res.*, C95: 22103-22120, 1990.
- Kindle, J.C.; Hurlburt, H.E.; Metzger, E.J. On the seasonal and interannual variability of the Pacific to Indian Ocean throughflow. In: Western Pacific International Meeting and Workshop on TOGA COARE. Nouméa, New Caledonia, 1989. *Proceedings*. Nouméa, New Caledonia, Centre ORSTOM de Nouméa, 1989, p. 355-365.
- Laplace, P.S. *Celestial mechanics*. [Traité de Mécanique Céleste]. New York, Chelsea, 1966. 4 v.
- Lighthill, M.J. Dynamic response of the Indian Ocean to the onset of the Southwest Monsoon. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A265:45-93, 1969.
- Longuet-Higgins, M.S. Planetary waves on a rotating sphere. *Proc. Roy. Soc. London*, A279:446-473, 1964.
- \_\_\_\_\_ Planetary waves on a rotating sphere. II. *Proc. Roy. Soc. London*, A284:40-54, 1965.

- Markett, C. Norm estimates for  $(C, \delta)$  means of Hermite expansions and bounds for  $\delta_{\text{eff}}$ . *Acta Math. Hungar.*, 43:187-198, 1984.
- Matsuno, T. Quasi-geostrophic motions in the equatorial area. *J. Met. Soc. Japan*, 44:25-43, 1966.
- Mattioli, F. A weak formulation of the shallow-water equations for a rotating basin. *J. Phys. Oceanogr.*, 11:1680-1682, 1981.
- McCalpin, J.D. A note on the reflection of low-frequency Rossby waves from realistic western boundaries. *J. Phys. Oceanogr.*, 17:1944-1949, 1987.
- McCreary, J.P. A linear stratified ocean model of the Equatorial Undercurrent. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A298:603-635, 1981.
- McCreary, J.P.; Picaut, J; Moore, D.W. Effects of remote annual forcing in the eastern tropical Atlantic Ocean. *J. Mar. Res.*, 42:45-81, 1984.
- McCreary, J.P. Modeling equatorial ocean circulation. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 17:359-409, 1985.
- Menard, Y. Observing the seasonal variability in the tropical Atlantic from altimetry. *J. Geophys. Res.*, C93:13967-13978, 1988.
- Moore, D.W. *Planetary-gravity waves in an equatorial ocean*. (Ph.D. Thesis) - Harvard University, Cambridge, Mass., 1968. 201 p.

- Moore, D.W.; McCreary, J.P. Excitation of intermediate frequency equatorial waves at a western ocean boundary, with application to observations from the Indian Ocean. *J. Geophys. Res.*, C95:5219-5231, 1990.
- Olver, F.W.J. Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions of large orders. *J. Res. NBS*, 63B:131-169, 1959.
- \_\_\_\_\_. *Asymptotics and special functions*. New York, Academic Press, 1974. 572 p.
- Picaut, J; Verstraete, J.-M. Mise en évidence d'une onde de 40-50 jours de période sur les côtes du golfe de Guinée. *Cahiers de l'ORSTOM*, XIV:3-14, 1976.
- Richardson, P.L; Reverdin, G. Seasonal cycle of velocity in the Atlantic North Equatorial Countercurrent as measured by surface drifters, current meters, and ship drifts. *J. Geophys. Res.*, C92:3691-3708, 1987.
- Ripa, P. Rays in the equatorial oceans. *Tropical Ocean-Atmosphere Newsletter* (48):1-5, 1989.
- Rowlands, P.B. The flow of equatorial Kelvin waves and the equatorial undercurrent around islands. *J. Mar. Res.*, 40:915-936, 1982.
- Saks, S.; Zygmund, A. *Analytic functions*. 3.ed. Amsterdam, Elsevier; Warsaw, Polish Scientific Publishers, 1971. 504 p.
- Schwid, N. The asymptotic forms of the Hermite and Weber functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 37:339-362, 1935.

Thangavelu, S. Summability of Hermite expansions. I.  
*Trans. Amer. Math. Soc.*, 314:119-142, 1989.

Vianna, M.L. Boundary integral equation formulation for ocean circulation modelling. *Ocean Modelling*, (73):7-9, 1987.

\_\_\_\_\_ Stratified tropical ocean dynamics: effects of coastal geometry on the linear response to wind by boundary integral equation formulation. In: Boundary Elements X. Southampton, 1988. *Proceedings*. Southampton, Computational Mechanics Publications, 1988, v. 2, p. 289-300.

Vianna, M.L.; Holvorcem, P.R. Integral equation approach to tropical ocean dynamics. Part I - Theory and computational methods. Aceito para publicação no *Journal of Marine Research*, 1991.

Vianna, M.L. São José dos Campos, jan. 1991. Comunicação pessoal.

Vijayakumar, S.; Cormack, D.E. An invariant imbedding method for singular integral evaluation on finite domains. *SIAM J. Appl. Math.*, 48:1335-1349, 1988.

Yoon, J.-H. Effects of islands on equatorial waves. *J. Geophys. Res.*, C86:10913-10920, 1981.



APÊNDICE AEXPRESSÕES PARA O CÁLCULO DOS COEFICIENTES  $q_n$  E DA  
INTEGRAL EXPONENCIAL  $E_1(z)$ 

Este apêndice inclui expressões para os primeiros coeficientes  $q_n$  que aparecem em (4.59) e a descrição de um algoritmo numérico simples para calcular a integral exponencial  $E_1(X)$ .

Os coeficientes  $q_n$  são definidos pela relação

$$\exp [-i\omega(\delta, \mu, x, y)] = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \nu^{-n}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\nu = \bar{\mu}^{1/2}$ . Em vista de (4.49), podemos expressar  $q_1, q_2, \dots$  em termos de  $\xi_1, \xi_2, \dots$ :

$$q_0 = 1, \quad q_1 = -\xi_1, \quad q_2 = \frac{1}{2} \xi_1^2,$$

$$q_3 = -\left(\xi_2 + \frac{1}{6} \xi_1^3\right), \quad q_4 = \xi_1 \left(\xi_2 + \frac{1}{24} \xi_1^3\right),$$

$$q_5 = -\left(\xi_3 + \frac{1}{2} \xi_1^2 \xi_2 + \frac{1}{120} \xi_1^5\right),$$

$$q_6 = \xi_1 \xi_3 + \frac{1}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{6} \xi_1^3 \xi_2 + \frac{1}{720} \xi_1^6,$$

$$q_7 = -\left(\xi_4 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2^2 + \frac{1}{2} \xi_1^2 \xi_3 + \frac{1}{24} \xi_1^4 \xi_2 + \frac{1}{5040} \xi_1^7\right),$$

$$q_8 = \xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_3 + \frac{1}{4} \xi_1^2 \xi_2^2 + \frac{1}{6} \xi_1^3 \xi_3 + \frac{1}{120} \xi_1^5 \xi_2 + \\ + \frac{1}{40320} \xi_1^8,$$

$$q_9 = -\left(\xi_5 + \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \frac{1}{2} \xi_1^2 \xi_4 + \frac{1}{6} \xi_2^3 + \frac{1}{12} \xi_1^3 \xi_2^2 + \\ + \frac{1}{24} \xi_1^4 \xi_3 + \frac{1}{720} \xi_1^6 \xi_2 + \frac{1}{362880} \xi_1^9\right),$$

$$\begin{aligned}
q_{10} = & \xi_1 \xi_5 + \xi_2 \xi_4 + \frac{1}{2} \xi_3^2 + \frac{1}{2} \xi_1^2 \xi_2 \xi_3 + \frac{1}{6} \xi_1 \xi_2^3 + \\
& + \frac{1}{6} \xi_1^3 \xi_4 + \frac{1}{48} \xi_1^4 \xi_2^2 + \frac{1}{120} \xi_1^5 \xi_3 + \frac{1}{5040} \xi_1^7 \xi_2 + \\
& + \frac{1}{3628800} \xi_1^{10}.
\end{aligned}
\tag{A.2}$$

A integral exponencial (Abramowitz e Stegun, 1965) pode ser computada a partir de sua série de potências

$$E_1(X) = -\ln X - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-X)^n}{(n!)n}, \tag{A.3}$$

onde  $\gamma$  é a constante de Euler<sup>1</sup>, ou de sua fração contínua

$$E_1(X) = \frac{e^{-X}}{X+} \frac{1}{1+} \frac{1}{X+} \frac{2}{1+} \frac{2}{X+} \cdots \frac{k}{1+} \frac{k}{X+} \cdots, \tag{A.4}$$

que é válida para  $|\arg X| < \pi$  (Esta condição é satisfeita, já que  $\operatorname{Re} X = \tilde{M}^{1/2} \operatorname{Re} \xi = \tilde{M}^{1/2} \delta > 0$ ). Através de experimentação numérica com ambas as representações, verificamos que uma precisão uniforme (erro relativo geralmente muito menor que 1%) pode ser obtida para  $\operatorname{Re} X \geq 0$  usando (A.3) truncada em  $n = 5$  quando  $|X| < 0,4$ , e (A.4) truncada em  $k = 30$  quando  $|X| > 0,4$ .

---

<sup>1</sup> Não confundir com o coeficiente  $\gamma$  definido em (4.25).

APÊNDICE BSOFTWARE PARA SIMULAÇÕES DA DINÂMICA DOS OCEANOS  
EQUATORIAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Este apêndice descreve um conjunto de programas e subrotinas em FORTRAN 77<sup>1</sup> que permitem efetuar automaticamente a maior parte do processo de simulação de um oceano equatorial através da metodologia exposta no presente trabalho. Com a apresentação deste *software*, espera-se facilitar o uso do método dos elementos de contorno em problemas oceanográficos, uma vez que o esforço necessário para programar os passos básicos do método (computação de funções de influência, soluções particulares, etc.) provavelmente desencorajaria muitos usuários em potencial.

Os programas e subrotinas a serem apresentados abaixo podem ser divididos em quatro grupos:

. Subrotinas Para o Cálculo de Funções

Estas subrotinas efetuam o cálculo das funções de influência e de soluções particulares das equações de movimento empregando as expressões analíticas e assintóticas desenvolvidas nos Caps. 3 a 6.

. Programas Para Descrição da Geometria

Um dos programas deste grupo calcula os

---

<sup>1</sup> Os programas foram escritos em FORTRAN 77 Versão 3.30, da Microsoft, para microcomputadores IBM-PC, e também podem ser compilados e executados em VAX FORTRAN, da Digital Equipment Company. Quando se utiliza o IBM-PC, um coprocessador aritmético reduzirá drasticamente (cerca de 20 vezes) os tempos de processamento.

parâmetros que definem o tamanho e a orientação dos elementos de contorno em uma geometria oceânica particular.

. Programas Para Montagem e Solução de Sistemas de Equações Lineares

A partir da descrição da geometria do problema (programa do segundo grupo), os programas deste grupo calculam os coeficientes da versão discreta das equações integrais de contorno (Cap. 6). Como resultado, obtém-se a distribuição de pressões ao longo das fronteiras. Durante sua execução, os programas deste grupo recorrem freqüentemente às subrotinas do primeiro grupo.

. Programas Para Computação da Solução no Interior do Oceano

Os programas deste grupo utilizam a descrição da geometria do problema (programa do segundo grupo) e a distribuição de pressões ao longo da fronteira (programas do terceiro grupo) para calcular a pressão e a velocidade em um conjunto especificado de pontos do interior do oceano, através das representações integrais discutidas no Cap. 6. As subrotinas do primeiro grupo também são necessárias à execução dos programas deste grupo.

1) Subrotinas Para o Cálculo de Funções

As rotinas deste grupo são as seguintes:

- . Subroutine Her
- . Function Ex
- . Subroutine Aux
- . Subroutine CoefGKJD
- . Subroutine GKJD

- . Subroutine UP
- . Subroutine Part
- . Subroutine IncPU
- . Subroutine NearSng.

As funções de influência propriamente ditas são calculadas pela rotina GKJD. Esta rotina é auxiliada por CoefGKJD, que calcula os coeficientes  $G_r^{\sigma\epsilon\kappa}$ ,  $K_r^{\sigma\epsilon\kappa}$ , etc., que aparecem nas expansões assintóticas (5.15) e (5.24)-(5.26), e por Aux, que calcula as séries  $A_r^{\epsilon\kappa}$  que aparecem nestas mesmas expansões. A função Ex fornece o valor de  $\Gamma(0,z) = E_1(z)$  que é necessário na avaliação de  $A_r^{\epsilon\kappa}$  através de (5.18) e (5.21). As funções de Hermite necessárias para a computação das funções de influência são calculadas pela subrotina Her.

A subrotina Part calcula as soluções particulares  $p^{(P)}(\vec{r})$  e  $\vec{u}^{(P)}(\vec{r})$  (Seção 6.4), empregando os valores das funções  $\vec{P}(a,b;y)$  e  $\mathcal{U}(a,b;y)$  calculados pela subrotina UP.

A subrotina IncPU calcula os campos de pressão e velocidade de uma onda de Kelvin ou de Rossby longa, que são necessários durante a solução de problemas de espalhamento de ondas equatoriais livres.

A subrotina NearSng calcula as integrais quase-singulares das funções de influência  $G$  e  $\vec{J}$  ao longo de elementos de contorno retilíneos de orientação arbitrária (Cf. Apêndice D). Estas integrais ocorrem no cálculo da solução de problemas forçados em pontos do interior do oceano.

a) Subroutine Her(y,H,M)

Esta rotina calcula por recorrência o valor das funções de Hermite  $\psi_k(y/\sqrt{2})$ ,  $k = 0, 1, \dots, M+1$ , e armazena a seqüência resultante no vetor de dupla precisão H, de dimensão 400;<sup>2</sup> o valor de  $\psi_0$  é armazenado em H(1), o de  $\psi_1$  em H(2), etc.

```

subroutine Her(y,H,M)
real*8 H,q
dimension H(400),r(399)
c=.751125544
if (y .eq. 0.) then
  H(1)=c
  do 1 k=0,M-1,2
1    H(k+3)=-sqrt((k+1.)/(k+2.))*H(k+1)
  do 2 k=1,M+1,2
2    H(k+1)=0.
else
  r(1)=y
  do 3 k=1,M
3    r(k+1)=(y-sqrt(k+0.)/r(k))/sqrt(k+1.)
  q=alog(c)-y*y/4
  s=1.
  H(1)=dexp(q)
  do 4 k=1,M+1
    q=q+alog(abs(r(k)))
    s=sign(1.,r(k))*s
4    H(k+1)=s*dexp(q)
endif
return
end

```

b) Function Ex(z)

Esta função complexa calcula a integral exponencial  $E_1(z)$  para valores complexos de z, empregando o procedimento discutido no Apêndice A.

---

<sup>2</sup> Este dimensionamento é considerado suficiente para a maioria das simulações, em vista das estimativas do ponto de truncamento M discutidas na Seção 5.3). Se necessário, pode-se aumentar a dimensão do vetor H em todos os programas e subrotinas que referenciam a subrotina Her.

```

complex*8 function Ex(z)
complex*8 z
if (cabs(z) .lt. .4) then
  Ex=-clog(z)-.5772156649+z-z*z/4+z**3/18-z**4/96+
*   z**5/600
else
  Ex=0.
  do 1 k=30,1,-1
1   Ex=k/(1.+k/(z+Ex))
  Ex=cexp(-z)/(z+Ex)
endif
return
end

```

c) Subroutine Aux(M,Q,d1,x1,y1,A)

Esta subrotina calcula as séries auxiliares  $A_r^{\epsilon\kappa}$ , discutidas na Seção 5.2, para  $r = 0, 1, \dots, 5$  e  $\epsilon, \kappa = \pm 1$ . Os parâmetros de entrada são  $M, Q$  (variável complexa),  $d1, x1$  e  $y1$ , correspondendo respectivamente a  $M, Q, |x-x'|, y$  e  $y'$  na notação da Seção 5.2. As séries auxiliares são armazenadas no array complexo  $A$ , de dimensão  $(6, 2, 2)$ , de modo que  $A(r+1, i, j)$  contém o valor de  $A_r^{\epsilon\kappa}$  para  $\epsilon = 2i-3$  e  $\kappa = 2j-3$ . Esta subrotina requer a presença da função  $Ex$  durante a compilação.

```

subroutine Aux(M,Q,d1,x1,y1,A)
complex*8 A,c,Ex,f,f1,f2,f3,g,g1,g2,g3,hQ,i,k0,Q,rQ,
*   Xi
complex*16 d,k1,k2,k3,k4,k5,p,x,y
dimension A(6,2,2),g(16),p(11)
i=(0.,1.)
d=dcmplx(d1)
x=dcmplx(x1)
y=dcmplx(y1)
hM=M+1.5
rM=sqrt(hM)
Rk=hM*(d*d+(x-y)**2)
hQ=hM-Q
rQ=csqrt(hQ)
tx=x/(2*rM)
ty=y/(2*rM)
rx=sqrt(1-tx*tx)
ry=sqrt(1-ty*ty)
ux=tx/rx
uy=ty/ry

```

```

sx=atan(ux)
sy=atan(uy)
cx=sx+tx*rx
cy=sy+ty*ry
do 1 j=1,2
  do 2 n=1,2
    e=2*j-3
    k=2*n-3
    k0=d+i*(e*x+k*y)
    k1=-Q*d/2-i*(e*x**3+k*y**3)/24
    c=cexp(-rQ*d-i*hM*(e*cx+k*cy))
    if (j .eq. n) then
      do 3 l=0,5
3        A(l+1,j,n)=(-1)**M*c*(1+(k0+l/rM-(k0**3/48+
*          k1)/hM)/(4*rM)-(1+1)*k0*k0/
*          (64*hM*hM))/(2*rM**l)
      else
        if (Rk .lt. 625.) then
          k2=- (Q*Q*d+i*(e*x**5+k*y**5)/80)/8
          k3=- (Q**3*d+i*(e*x**7+k*y**7)/448)/16
          k4=-5*(Q**4*d+i*(e*x**9+k*y**9)/2304)/128
          k5=-7*(Q**5*d+i*(e*x**11+k*y**11)/11264)/256
          p(1)=1.
          p(2)=-k1
          p(3)=k1*k1/2
          p(4)=- (k2+k1**3/6)
          p(5)=k1*(k2+k1**3/24)
          p(6)=- (k3+k1*k1*k2/2+k1**5/120)
          p(7)=k1*k3+k1**3*k2/6+k2*k2/2+k1**6/720
          p(8)=- (k4+k1*(k2*k2+k1*k3)/2+k1**4*k2/24+
*            k1**7/5040)
          p(9)=k1*k4+k2*k3+k1*k1*k2*k2/4+k1**3*k3/6+
*            k1**5*k2/120+k1**8/40320
          p(10)=- (k5+k1*k2*k3+k1*k1*(k4+k1*k2*k2/6+
*            k1*k1*k3/12)/2+k1**6*(k2+k1**3/504)/720
*            +k2**3/6)
          p(11)=k1*(k5+k2**3/6)+k2*k4+k1*k1*(k2*k3+k1*
*            k4/3+k1*k1*k2*k2/24)/2+k1**5*(k3+k1*k1*
*            k2/42+k1**5/30240)/120+k3*k3/2
          Xi=rM*k0
          f=cexp(-Xi)
          g(1)=(1+Xi)*f
          g(2)=f
          g(3)=Ex(Xi)
          do 4 l=4,16
4            g(l)=(g(l-1)-Xi**(3-l)*f)/(3.-l)
          do 5 l=0,5
            A(l+1,j,n)=0.
            do 6 n1=0,10
6              A(l+1,j,n)=A(l+1,j,n)+2*p(n1+1)*k0**(n1+
*                l-2)*g(n1+1+1)
5            continue
          else

```

```

f1=d*rM/rQ+2*i*rM*(e*sx+k*sy)-k0
f2=d*(1-hM/hQ)/rQ+2*i*(e*(sx-ux)+k*(sy-uy))
f3=3*d*rM*(hM/hQ-1)/(rQ*hQ)+2*i*(e*ux**3+k*
*      uy**3)/rM
do 7 l=0,5
  l1=l-1
  g1=f1+l1/rM
  g2=f2-l1/hM
  g3=f3+2*l1/(rM*hM)
7  A(l+1,j,n)=2*c*(1-g1/k0+(g1*g1-g2)/(k0*k0)-
*      (g1*(g1*g1-3*g2)-g3)/k0**3)/
*      (k0*rM**l1)
  endif
do 8 l=0,5
8  A(l+1,j,n)=A(l+1,j,n)+c*(1+(k0+l/rM-(k0**3/
*      240+k1)/hM)/(12*rM)-(l+1)*k0*k0/(960*hM*
*      hM))/(2*rM**l)
  endif
2  continue
1  continue
return
end

```

d) Subroutine CoefGKJD(sg,y1,y2,yc,G,K,J,D)

Esta rotina calcula os coeficientes  $G_r^{\sigma\epsilon\kappa}$ ,  $K_r^{\sigma\epsilon\kappa}$ ,  $J_r^{\sigma\epsilon\kappa}$  e  $D_r^{\sigma\epsilon\kappa}$ , definidos na Seção 5.2; os coeficientes são armazenados respectivamente nos arrays complexos  $G(4,2,2)$ ,  $K(4,2,2,2)$ ,  $J(4,2,2,2)$  e  $D(4,2,2,2,2)$  (os números entre parênteses indicam a dimensão dos arrays). O primeiro índice de cada um destes arrays corresponde sempre a  $r+1$ ; os dois últimos índices correspondem a  $\epsilon, \kappa$  através da mesma convenção usada para o array A na subroutine Aux acima. Nos arrays K e J, o segundo índice indica a componente ( $1 \rightarrow \hat{x}$ ,  $2 \rightarrow \hat{y}$ ); no array D, as componentes são indicadas pelo segundo e terceiro índices ( $(1,1) \rightarrow \hat{x}\hat{x}$ ,  $(1,2) \rightarrow \hat{x}\hat{y}$ , etc.). Os parâmetros de entrada sg, y1, y2 e yc (variável complexa) correspondem, na notação da Seção 5.2, a  $\sigma$ , y, y' e  $Y_c$ .

```

subroutine CoefGKJD(sg,y1,y2,yc,G,K,J,D)
complex*8 C,c1,c2,c3,c4,D,G,i,J,K,t,U,V,W,yc,z
dimension C(4),D(4,2,2,2,2),G(4,2,2),J(4,2,2,2),

```

```

*           K(4,2,2,2),U(4,2,2),V(4,2,2,2,2),
*           W(4,2,2,2,2),z(4,2,3,2), t(4,2,3,2)
i=(0.,1.)
c1=sg*yc
c2=yc*yc
c3=2*(1/c2+c2)
c4=1/yc+yc
do 1 l=1,2
  sl=2.*l-3.
  y=y1
  if (l .eq. 2) y=y2
  yq=y*y
  z(1,1,1,1)=1.
  z(1,2,1,1)=0.
  z(1,1,2,1)=0.
  z(1,2,2,1)=sg*i*sl
  z(1,1,3,1)=c1
  z(1,2,3,1)=y
  z(2,1,1,1)=i*c1/2
  z(2,2,1,1)=0.
  z(2,1,2,1)=0.
  z(2,2,2,1)=-sl*c4/2
  z(2,1,3,1)=i*(c2-1)/2
  z(2,2,3,1)=i*c1*y/2
  z(3,1,1,1)=- (yq+4*c2)/16
  z(3,2,1,1)=-c1*y/4
  z(3,1,2,1)=0.
  z(3,2,2,1)=i*sl*sg*(yq-4-c3)/16
  z(3,1,3,1)=c1*(4-yq-c3)/16
  z(3,2,3,1)=y*(yq-4*c2)/16
  z(4,1,1,1)=i*c1*(4-c3-yq)/32
  z(4,2,1,1)=i*y*(3-2*c2)/16
  z(4,1,2,1)=sl*sg*y/16
  z(4,2,2,1)=sl*(4-yq)*c4/32
  z(4,1,3,1)=i*(4*(c2-1)-yq*(c2+1))/32
1  z(4,2,3,1)=i*c1*y*(yq+6-c3)/32
  do 2 ik=1,2
    sk=2.*ik-3.
    do 3 ir=1,4
      do 4 ia=1,3
        do 5 l=1,2
          5      t(ir,ik,ia,1)=z(ir,1,ia,1)+sk*z(ir,2,ia,1)
          4      continue
          3      continue
          2      continue
        do 6 ir=1,4
          do 7 ie=1,2
            do 8 ik=1,2
              U(ir,ie,ik)=0.
              do 9 is=1,ir
                9      U(ir,ie,ik)=U(ir,ie,ik)+t(is,ie,3,1)*
                *           t(ir-is+1,ik,3,2)
                do 10 ia=1,2

```

```

V(ir,1,ia,ie,ik)=0.
V(ir,2,ia,ie,ik)=0.
do 11 is=1,ir
  V(ir,1,ia,ie,ik)=V(ir,1,ia,ie,ik)+t(is,ie,
*           3,1)*t(ir-is+1,ik,ia,2)
11  V(ir,2,ia,ie,ik)=V(ir,2,ia,ie,ik)+t(is,ie,
*           ia,1)*t(ir-is+1,ik,3,2)
  do 12 ib=1,2
    W(ir,ia,ib,ie,ik)=0.
    do 13 is=1,ir
13      W(ir,ia,ib,ie,ik)=W(ir,ia,ib,ie,ik)+
*          t(is,ie,ia,1)*t(ir-is+1,ik,ib,2)
12      continue
10      continue
8        continue
7        continue
6        continue
C(1)=1.
C(2)=-i*c1
C(3)=(1/c2-3*c2)/8
C(4)=0.
do 14 ir=1,4
  do 15 ie=1,2
    do 16 ik=1,2
      G(ir,ie,ik)=0.
      do 17 is=1,ir
17      G(ir,ie,ik)=G(ir,ie,ik)+C(ir-is+1)*
*          U(is,ie,ik)
    do 18 ia=1,2
      K(ir,ia,ie,ik)=0.
      J(ir,ia,ie,ik)=0.
      do 19 is=1,ir
*          K(ir,ia,ie,ik)=K(ir,ia,ie,ik)+C(ir-is+1)*
*          V(is,1,ia,ie,ik)
19      J(ir,ia,ie,ik)=J(ir,ia,ie,ik)+C(ir-is+1)*
*          V(is,2,ia,ie,ik)
    do 20 ib=1,2
      D(ir,ia,ib,ie,ik)=0.
      do 21 is=1,ir
21      D(ir,ia,ib,ie,ik)=D(ir,ia,ib,ie,ik)+
*          C(ir-is+1)*W(is,ia,ib,ie,ik)
20      continue
18      continue
16      continue
15      continue
14      continue
return
end

```

e) Subroutine GKJD(y1,y2,dx,yc,H1,c,w,b,ind,  
G,K,J,D)

Esta subrotina retorna os valores dos núcleos  $G$ ,  $\vec{K}$ ,  $\vec{J}$  e  $D$  nas variáveis complexas de precisão dupla  $G$  (variável simples),  $K$ ,  $J$  (vetores de dimensão 2) e  $D$  (matriz  $2 \times 2$ ). Os parâmetros de entrada são:

- .  $y1$  e  $y2$ , as latitudes não-dimensionais do ponto de observação e da fonte, respectivamente.
- .  $dx$ , a diferença entre as longitudes não-dimensionais do ponto de observação e da fonte.
- .  $yc$ , uma variável complexa que representa a frequência complexa não-dimensional.
- .  $H1$ , um vetor de dimensão 400 (dupla precisão) contendo os valores das funções de Hermite  $\psi_k(y1/\sqrt{2})$ ; este vetor pode ser calculado através de uma chamada prévia call Her(y1,H1,398).
- .  $c$ , usado para determinar o valor de  $M$  nos casos em que a rotina aplica as expressões assintóticas (5.15) e (5.24)-(5.26). O valor de  $M$  é dado por  $M = c \max \{1, (y1)^2/4, (y2)^2/4, |Q|\}$ , onde  $Q = \frac{1}{4} [(yc)^2 + (yc)^{-2}]$ . Geralmente, usa-se um valor de  $c$  entre 3 e 5; valores maiores geralmente produzem resultados mais precisos, mas demandam um maior esforço na computação das somas parciais que aparecem em (5.15) e (5.24)-(5.26). Ao escolher o valor de  $c$ , deve-se cuidar para que o valor de  $M$  calculado pela expressão acima não ultrapasse a dimensão do vetor  $H1$  (que por default é 400, mas pode ser alterada se necessário).

- .  $w$ , usado para escolher o método de cálculo dos núcleos. Se  $|dx| < w$ , a rotina empregará as expansões assintóticas (5.15) e (5.24)-(5.26), e se  $|dx| > w$ , as expansões (3.46) e (3.52)-(3.54) com o truncamento dado por (3.48). Geralmente, o valor de  $w$  está entre 0,5 e 1.
- .  $b$ , usado em (3.48) para determinar o valor de  $M$  quando  $|dx| > w$ :  $M = \text{Re } Q + (b/dx)^2$ . Normalmente,  $b$  varia entre 6 e 10. Ao escolher os valores de  $b$  e  $w$ , é preciso cuidar para que  $\text{Re } Q + (b/w)^2$  não supere a dimensão do vetor  $H1$  (i.e., 400).
- .  $\text{ind}$ , que permite escolher entre o cálculo dos valores dos núcleos, quando  $\text{ind} = 0$ , ou de suas partes regulares (Seção 5.5), quando  $\text{ind} = 1$ . Em ambos os casos, os resultados retornam através das variáveis  $G, K, J$  e  $D$ .

Esta subrotina requer a presença das subrotinas  $\text{Her}$ ,  $\text{Aux}$  e  $\text{CoefGKJD}$  e da função  $\text{Ex}$  durante a compilação.

```

subroutine GKJD(y1,y2,dx,yc,H1,c,w,b,ind,G,K,J,D)
real*8 H1,H2,y12,y22
complex*8 A,cD,cG,cJ,cK,i,p,Q,Q1,yc,yc2,f3,f4,f5,f6,
*      f9
complex*16 D,f1,f2,f7,f8,G,J,K,z
dimension A(6,2,2),cD(4,2,2,2,2),cG(4,2,2),
*      cJ(4,2,2,2),cK(4,2,2,2),D(2,2),H1(400),
*      H2(400),J(2),K(2), z(3,2)
parameter(i=(0.,1.),pi=3.141592654,c1=.3989422804,
*      c2=1.414213562)
yc2=yc*yc
y12=y1*y1/4
y22=y2*y2/4
p=i/(2*yc)
Q=(1/yc2+yc2)/4
Q1=(1/yc+yc)/2
f1=c1*dexp(-y12-y22)
sg=sign(1.,-dx)

```

```

if (abs(dx) .lt. w) then
  t=1.
  if (t .lt. cabs(Q)) t=cabs(Q)
  if (t .lt. y12) t=y12
  if (t .lt. y22) t=y22
  Mmax=int(c*t+1)
else
  Mmax=int(real(Q)+(b/dx)**2)
endif
call Her(y2,H2,Mmax-1)
if (sg .lt. 0.) then
  f2=f1*cexp(-i*dx*(yc/2-1/yc))
  G=f1*cexp(-i*dx*yc/2)+f2*y1*y2
  K(1)=-G/2
  K(2)=2*f2*p*y1
  J(1)=-K(1)
  J(2)=2*f2*p*y2
  D(1,1)=G/4
  D(1,2)=-K(2)/2
  D(2,1)=J(2)/2
  D(2,2)=-4*f2*p*p
else
  G=0.
  do 1 l=1,2
    K(l)=0.
    J(l)=0.
    do 2 n=1,2
      D(l,n)=0.
2
1 continue
endif
do 3 m=0,Mmax-1
  f1=sqrt(m+1.)
  f2=csqrt(m+1.5-Q)
  f3=sg*i*f2-Q1
  f4=1+yc*f3
  f5=m+1+f4/2
  f6=cexp(dx*(p+sg*f2))/(2*c2*i*f2*f3*f4)
  do 4 l=1,2
    sl=2*l-3
    if (l .eq. 1) then
      y=y1
      f7=H1(m+1)
      f8=f1*H1(m+2)
    else
      y=y2
      f7=H2(m+1)
      f8=f1*H2(m+2)
    endif
    z(1,l)=y*f8/2-f5*f7
    z(2,l)=sl*i*f3*f8
4
    z(3,l)=y*f8+f4*f7
    G=G-f6*z(3,1)*z(3,2)
  do 5 l=1,2

```

```

        K(1)=K(1)+f6*z(3,1)*z(1,2)
        J(1)=J(1)-f6*z(1,1)*z(3,2)
        do 6 n=1,2
6          D(1,n)=D(1,n)-f6*z(1,1)*z(n,2)
5      continue
3  continue
  if (abs(dx) .lt. w) then
    call CoefGKJD(sg,y1,y2,yc,cG,cK,cJ,cD)
    call Aux(Mmax,Q,abs(dx),y1,y2,A)
    f2=cexp(p*dx)/(8*pi*yc)
    f3=i*f2
    do 7 m=0,3
      do 8 ie=1,2
        do 9 ik=1,2
          G=G+f3*A(m+3,ie,ik)*cG(m+1,ie,ik)
          do 10 l=1,2
            K(1)=K(1)+f2*A(m+2,ie,ik)*cK(m+1,l,ie,ik)
            J(1)=J(1)-f2*A(m+2,ie,ik)*cJ(m+1,l,ie,ik)
            do 11 n=1,2
11              D(1,n)=D(1,n)-f3*A(m+1,ie,ik)*
*                  cD(m+1,l,n,ie,ik)
10          continue
9      continue
8  continue
7  continue
endif
if (ind .eq. 1) then
  dy=y1-y2
  dx2=dx*dx
  dy2=dy*dy
  R2=dx2+dy2
  R4=R2*R2
  al=alog(R2/2)
  f2=i/(2*pi*yc)
  f3=al*y1/yc
  f4=(dx2-dy2)/R4
  f5=4*f4*(1+p*dx)
  f6=4*dy*(2*dx/R4+p*f4)
  f7=(y1*y1+yc2)/2
  f8=-1/(2*yc2)
  f9=i*yc*y1*al
  G=G-f2*(y1*y1-yc2)*al
  f2=i*f2/2
  K(1)=K(1)+f2*(-2*(i*y1*dy+yc*dx)/R2+i*al)
  K(2)=K(2)+f2*(2*(i*y1*dx-yc*dy)/R2-f3)
  J(1)=J(1)+f2*(2*(-i*y1*dy+yc*dx)/R2-i*al)
  J(2)=J(2)+f2*(2*(i*y1*dx+yc*dy)/R2-f3)
  f2=f2/(2*i)
  D(1,1)=D(1,1)+f2*(f5+(f7+f8)*al)
  D(1,2)=D(1,2)+f2*(f6-f9)
  D(2,1)=D(2,1)+f2*(f6+f9)
  D(2,2)=D(2,2)+f2*(-f5+8*p*dx/R2+(f7+3*f8)*al)
endif

```

```
return
end
```

f) Subroutine UP(a,b,y,yc,c,ind,U,P)

Esta subrotina calcula as funções  $\vec{P}(a,b;y)$  e  $U(a,b;y)$ , definidas na Seção 6.4. Os valores de  $\vec{P}(a,b;y)$  e  $U(a,b;y)$  retornam através das variáveis complexas de precisão dupla P (vetor de dimensão 2) e U (matriz 2x2). O argumento complexo yc representa a frequência complexa  $y_c$ . O argumento c é usado para determinar o valor de M nas expansões assintóticas (6.35) e (6.36), através da expressão  $M = c \max \{1, y^2/4, a^2, b^2, |Q|\}$ , onde  $Q = \frac{1}{4} [(yc)^2 + (yc)^{-2}]$ . Geralmente, usa-se um valor de c entre 3 e 5. Uma vez que a rotina UP faz referência à rotina Her, deve-se cuidar para que o valor calculado de M não ultrapasse 400. O argumento ind permite escolher entre o cálculo de  $\vec{P}$  e U (ind = 1) ou apenas de U (ind = 0). A subrotina UP deve ser compilada junto com a subrotina Her.

```
subroutine UP(a,b,y,yc,c,ind,U,P)
real*8 H1,H2,bp
complex*8 cP,cU,c4,c5,D,f3,f4,f5,f6,f7,f9,h,i,i1,Q,
*      Q1,x,x1,yc,yc2
complex*16 f1,f2,f8,P,U,z
dimension cP(4,2),cU(4,2,2),D(6),H1(400),H2(400),
*      P(2),U(2,2),z(3,2)
parameter(i=(0.,1.),c1=.7071067812,c2=1.253314137,
*      c3=1.772453851)
ir=5
if (ind .eq. 1) ir=6
c4=-1/(8*c3*yc)
c5=c4/i
yc2=yc*yc
Q=(yc2+1/yc2)/4
Q1=(yc+1/yc)/2
y2=y*y/4
a2=a*a
b2=b*b
bp=y2+b2
bm=y2-b2
f1=c1*dexp(-bp)
```

```

t=1.
if (t .lt. cabs(Q)) t=cabs(Q)
if (t .lt. y2) t=y2
if (t .lt. a2) t=a2
if (t .lt. b2) t=b2
Mmax=int(c*t)+1
hM=Mmax+1.5
rM=sqrt(hM)
ty=y/(2*rM)
tb=b/rM
ry=sqrt(1-ty*ty)
rb=sqrt(1-tb*tb)
cy=hM*(atan(ty/ry)+ty*ry)
cb=hM*(atan(tb/rb)+tb*rb)
call Her(y,H1,Mmax-1)
call Her(2*b,H2,Mmax-1)
f2=2*f1/(a+yc/2-1/yc)
P(1)=-i*f1/(a+yc/2)+f2*b*y
P(2)=-f2*y/yc
U(1,1)=P(1)/2
U(1,2)=P(2)/2
U(2,1)=i*f2*b/yc
U(2,2)=-i*f2/yc2
do 1 m=0,Mmax-1
  f1=sqrt(m+1.)
  f2=csqrt(m+1.5-Q)
  f9=c2*i**m/(2*f2)
  do 2 is=1,2
    s=2*is-3
    f3=s*i*f2-Q1
    f4=1+yc*f3
    f5=m+1+f4/2
    f6=s*f9/(f3*(a+f3+yc/2)*f4)
    f8=f1*H1(m+2)
    if (ind .eq. 1) z(3,1)=y*f8+f4*H1(m+1)
    z(1,1)=y*f8/2-f5*H1(m+1)
    z(2,1)=-i*f3*f8
    f8=f1*H2(m+2)
    z(3,2)=2*b*f8+f4*H2(m+1)
    z(2,2)=2*f3*f8
    if (ind .eq. 1) then
      P(1)=P(1)+f6*z(3,1)*z(3,2)
      P(2)=P(2)+f6*z(3,1)*z(2,2)
    endif
  do 3 l=1,2
    U(1,1)=U(1,1)+f6*z(1,1)*z(3,2)
    U(1,2)=U(1,2)+f6*z(1,1)*z(2,2)
  3
  2 continue
1 continue
f1=1-a*yc
f2=f1*f1
f3=16*f2/yc
f4=16*a/yc

```

```

f5=yc2-4*b2
f6=4*(yc2-bp)
f7=4*(bm-yc2)
f8=4*yc*(yc2+bm)
f9=4*(yc2+bp)
do 4 ie=1,2
  e=2*ie-3
  g2=e*y
  do 5 ik=1,2
    k=2*ik-3
    g1=2*k*b
    g3=g1*g2
    i1=i*e*k
    if (ind .eq. 1) then
      cP(1,1)=2*i*(yc2+g3)
      cP(1,2)=-4*k*yc
      cP(2,1)=2*f1*(g1+g2)
      cP(2,2)=-4*i*k*g2*a
      cP(3,1)=i*(yc2*f6-16*f2+g3*(f4*f1+4*bp))/8
      cP(3,2)=-k*(16*a*f1-yc*f7)/4
      cP(4,1)=(g1*(a*(f3+yc*f7)-f5)+g2*(a*(f3-f8)-
*          yc2+y*y))/8
      cP(4,2)=-i*(k*g2*(a*(f9+f4*f1)+yc)-2*b*yc)/4
    endif
    cU(1,1,1)=-2*i*g1
    cU(1,1,2)=0.
    cU(1,2,1)=-2*e*yc
    cU(1,2,2)=-4*i1
    cU(2,1,1)=-2*f1
    cU(2,1,2)=4*i*k*a
    cU(2,2,1)=-2*i*e*g1*a
    cU(2,2,2)=0.
    cU(3,1,1)=i*(2*g2*yc2+k*b*(4*bm-f4*f1))/4
    cU(3,1,2)=-k*g2*yc
    cU(3,2,1)=-e*(16*a*f1+f8)/8
    cU(3,2,2)=-i1*(f9-16*a2)/4
    cU(4,1,1)=(g3*(1+4*f1)+a*yc*f6-f4*f2+y*y)/8
    cU(4,1,2)=-i*k*a*(f7-f4*f1)/4
    cU(4,2,1)=i*(y*yc-e*g1*(a*(f4*f1+f9)+yc))/8
    cU(4,2,2)=-k*y+2*e*b)/4
    h=i**(-e*k*Mmax)*cexp(-i*(e*cy+k*cb))/2
    x=i*(e*y+g1)
    x1=(e*y**3+8*k*b**3)/(24*i)
    do 6 l=1,ir
      6   D(l)=h*(1-i1+(x+(1+i1*x*x/4)/rM-(x*(x*x/3-i1*(
*         2*l+1))/4+x1)/hM)/(2*rM)+(i1*(1*l+2-2*x1*
*         x-5*x**4/48)-(1+1)*x*x)/(8*hM*hM))/rM**l
    do 7 l=0,3
      if (ind .eq. 1) then
        P(1)=P(1)+c4*D(l+3)*cP(l+1,1)
        P(2)=P(2)+c4*D(l+2)*cP(l+1,2)
      endif
    do 8 n=1,2

```

```

      U(n,1)=U(n,1)+c5*D(1+2)*cU(1+1,n,1)
8      U(n,2)=U(n,2)+c5*D(1+1)*cU(1+1,n,2)
7      continue
5      continue
4      continue
      return
      end

```

g) Subroutine Part(Na,Nb,A,B,Fx,Fy,x,y,Yc,c,  
ind,p0,u0)

Esta subrotina retorna o valor de uma solução particular  $\{p^{(P)}(x,y,\omega), \vec{u}^{(P)}(x,y,\omega)\}$  das equações de movimento forçadas pelo campo de vento com dependência espacial

$$\vec{F}(x,y) = \sum_{j=1}^{N_a} \sum_{k=1}^{N_b} \vec{F}_{jk} \exp [i(a_j x + b_k y)] \quad (\text{B.1})$$

e que varia no tempo como  $e^{i\omega t}$ . A solução é construída superpondo as soluções apresentadas na Seção 6.4. Os argumentos de entrada e saída são os seguintes:

- . Na e Nb, que correspondem a  $N_a$  e  $N_b$  na expressão acima.
- . A e B, vetores de dimensão 10, correspondendo a  $a_j$  e  $b_k$ .
- . Fx e Fy, matrizes complexas  $10 \times 10$  que contêm respectivamente as componentes zonal e meridional de  $\vec{F}_{jk}$ .
- . x e y, a longitude e a latitude não-dimensionais onde a solução particular será calculada.

- .  $yc$ , uma variável complexa que representa a frequência complexa não-dimensional  $y_c$ , definida na Seção 2.1.
- .  $c$  e  $ind$ , que são utilizados como argumentos em chamadas da forma `call UP(A(j),B(k),y,yc,c,ind,U,P)`. Como mencionado na discussão da subrotina `UP`, o valor de  $c$  geralmente é escolhido entre 3 e 5; além disso, deve-se cuidar para que a quantidade  $M = c \max \{1, y^2/4, \max \{A(j)^2\}, \max \{B(k)^2\}, |Q|\}$  não supere 400, onde  $Q = \frac{1}{4} [(yc)^2 + (yc)^{-2}]$ . Quando  $ind = 1$ , calcula-se as soluções particulares para pressão e velocidade; quando  $ind = 0$ , apenas a velocidade.
- .  $p0$ , uma variável complexa que retorna o valor de  $\gamma p^{(P)}$ , onde  $\gamma$  é o recíproco do raio de deformação equatorial (Seção 2.1).
- .  $u0$ , um vetor complexo de dimensão 2 que retorna o valor de  $\rho_0 \omega_0 \vec{u}^{(P)}$ , onde  $\rho_0$  é uma escala de densidade da água e  $\omega_0 = \beta/\gamma$ .

A subrotina `Part` deve ser compilada junto com `UP` e `Her`.

```

subroutine Part(Na,Nb,A,B,Fx,Fy,x,y,yc,ct,ind,p0,u0)
complex*8 f,Fx,Fy,f1,f2,i,p0,u0,yc
complex*16 P,U
dimension A(10),B(10),Fx(10,10),Fy(10,10),P(2),
*          U(2,2),u0(2)
i=(0.,1.)
p0=0.
u0(1)=0.
u0(2)=0.
f=y*y-yc*yc
do 1 n=1,Na
  f1=cexp(i*A(n)*x)
  do 2 k=1,Nb
    call UP(A(n),B(k),y,yc,ct,ind,U,P)
    f2=cexp(i*B(k)*y)

```

```

      if (ind .eq. 1) p0=p0+f1*(Fx(n,k)*P(1)+Fy(n,k)*
*          P(2))
      u0(1)=u0(1)+f1*(f2*(i*yc*Fx(n,k)+y*Fy(n,k))/f+
*          U(1,1)*Fx(n,k)+U(1,2)*Fy(n,k))
2      u0(2)=u0(2)+f1*(f2*(i*yc*Fy(n,k)-y*Fx(n,k))/f+
*          U(2,1)*Fx(n,k)+U(2,2)*Fy(n,k))
1 continue
  return
end

```

h) Subroutine IncPU(x,y,yc,ind,n,p,u,L)

Esta subrotina calcula o valor das perturbações de pressão e velocidade associadas com uma onda de Kelvin ou de Rossby longa, dadas por (6.62)-(6.65). Os argumentos de entrada e saída são:

- . x,y, as coordenadas não-dimensionais dos pontos onde a pressão e a velocidade serão calculadas.
- . yc, uma variável complexa que representa a frequência complexa não-dimensional  $y_c$  (Seção 2.1).
- . ind, usado para escolher entre uma onda de Kelvin (ind = 0) e uma onda de Rossby longa (ind = 1).
- . n, o índice meridional (n = 0,1,2,...) da onda de Rossby; quando ind = 0, pode-se usar qualquer valor de n.
- . p, uma variável complexa de precisão dupla que retorna o valor da pressão (a constante arbitrária  $p_0$  que aparece em (6.63)-(6.65) é tomada com o valor 1).
- . u, um vetor complexo de precisão dupla e dimensão 2 que retorna o valor de  $\rho_0 \vec{c}u$ .

- . L, uma variável complexa que retorna o valor da constante  $\lambda$ , definida na Seção 6.9.

A subrotina IncPU deve ser compilada junto com a subrotina Her.

```

subroutine IncPU(x,y,yc,ind,n,p,u,L)
real*8 H
complex*8 f,f2,f3,f4,f5,i,L,Q,yc
complex*16 p,u
parameter(i=(0.,1.))
dimension H(400),u(2)
if (ind .eq. 0) then
  L=1.
  call Her(y,H,1)
  p=cexp(-i*yc*x/2)*H(1)
  u(1)=p
  u(2)=0.
else
  Q=(yc*yc+1/(yc*yc))/4
  f1=sqrt(n+1.)
  f2=csqrt(n+1.5-Q)
  f3=i*f2-(1/yc+yc)/2
  f4=1+yc*f3
  f5=n+1+f4/2
  L=-((n+1)*(1+2*yc*f3)+f4*f4)/(2*i*f2*f3*f4)
  call Her(y,H,n+1)
  f=cexp(x*(f2+i/(2*yc)))
  p=f*(y*f1*H(n+2)+f4*H(n+1))
  u(1)=2*f*(y*f1*H(n+2)/2-f5*H(n+1))
  u(2)=-2*i*f*f1*f3*H(n+2)
endif
return
end

```

i) Subroutine NearSng(x0,y0,x1,y1,x2,y2,yc,G)

Esta subrotina calcula as integrais das partes singulares das funções de influência  $G$  e  $\vec{J}$  ao longo de um elemento de contorno retilíneo  $\Gamma$  de orientação arbitrária. Como no Apêndice D, denotemos por  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  as extremidades do elemento e por  $\vec{r}'$  um ponto de observação arbitrário, que não está sobre o elemento. Os argumentos de entrada e saída são:

- .  $x_0, y_0$ , as coordenadas não-dimensionais de  $\vec{r}'$ .
- .  $x_1, y_1, x_2, y_2$ , as coordenadas não-dimensionais de  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ , respectivamente.
- .  $y_c$ , uma variável complexa que representa a frequência complexa não-dimensional  $y_c$  (Seção 2.1).
- .  $G$ , um vetor complexo de dimensão 3;  $G(1)$ ,  $G(2)$  e  $G(3)$  retornam respectivamente os valores de

$$\begin{aligned} \frac{4\pi y_c}{d_{12}} \int_{\Gamma} G^{(s)}(\vec{r}'; \vec{r}) ds, & \quad \frac{4\pi y_c}{d_{12}} \hat{x} \cdot \int_{\Gamma} \vec{J}^{(s)}(\vec{r}'; \vec{r}) ds, \\ \frac{4\pi y_c}{d_{12}} \hat{y} \cdot \int_{\Gamma} \vec{J}^{(s)}(\vec{r}'; \vec{r}) ds, & \end{aligned} \quad (B.2)$$

onde  $d_{12}$  é a distância adimensional entre  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ .

```

subroutine NearSng(x0,y0,x1,y1,x2,y2,yc,G)
complex*8 G,i,yc
dimension G(3)
i=(0.,1.)
x01=x0-x1
y01=y0-y1
x12=x1-x2
y12=y1-y2
A=x12**2+y12**2
B=2*(x12*x01+y12*y01)
C=x01**2+y01**2
D=4*A*C-B*B
rD=sqrt(D)
T=(atan((2*A+B)/rD)-atan(B/rD))/rD
S=A+B+C
H1=2*T
H2=(alog(S/C)/2-B*T)/A
H3=(T*D+B*alog(S/C)/2)/A+alog(S)-2
G(1)=i*(y0*y0-yc*yc)*H3
G(2)=2*(yc*(x01*H1+x12*H2)-i*y0*(y01*H1+y12*H2))-
*   i*H3/2
G(3)=2*(i*y0*(x01*H1+x12*H2)+yc*(y01*H1+y12*H2))-
*   y0*H3/(2*yc)
return
end

```

2) Programas Para Descrição da Geometria

Os programas deste grupo são:

- . Boundary
- . Grd.

O primeiro destes programas produz um arquivo contendo a descrição da fronteira discretizada, em um formato padronizado que pode ser lido pelo terceiro e quarto grupos de programas. As coordenadas  $(x,y)$  dos pontos da fronteira são calculados através da projeção de Mercator (Jacobs, 1967),

$$x = R\lambda, \quad y = R \log \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right), \quad (\text{B.3})$$

onde  $\lambda$  é a longitude,  $\theta$  é a latitude (ambos em radianos) e  $R$  é o raio da Terra. O segundo programa serve para calcular as coordenadas  $(x,y)$  de um conjunto de pontos no interior do oceano onde a solução será calculada pelo quarto grupo de programas.

a) Boundary

Inicialmente, este programa solicita o nome de um

arquivo de latitudes e longitudes [.DEG]:

a ser fornecido pelo usuário, o qual descreve a fronteira discretizada em termos das coordenadas geográficas (em graus) das extremidades dos elementos de contorno. Se a fronteira se compõe das curvas  $C_1, C_2, \dots, C_M$ , discretizadas respectivamente como as linhas poligonais

$$\begin{array}{c} \vec{r}_{11}, \dots, \vec{r}_{1, N_1+1} \\ \dots \\ \vec{r}_{M,1}, \dots, \vec{r}_{M, N_M+1} \end{array}$$

o arquivo pedido pelo programa deve ter a forma

$$\begin{array}{c} M \\ N_1 \\ \dots \\ N_M \\ \lambda_{11} \quad \theta_{11} \\ \dots \\ \lambda_{1, N_1+1} \quad \theta_{1, N_1+1} \\ \dots \\ \lambda_{M,1} \quad \theta_{M,1} \\ \dots \\ \lambda_{M, N_M+1} \quad \theta_{M, N_M+1} \end{array}$$

onde  $\vec{r} = (\lambda, \theta)$  em coordenadas geográficas. Quando um contorno é fechado, o primeiro e o último vértice da linha poligonal correspondente devem coincidir. Para fins de padronização, recomenda-se o uso da extensão .DEG para os arquivos contendo coordenadas geográficas em graus.

A seguir, o programa pede o nome do arquivo de saída:

arquivo de descrição da fronteira [.MTR]:.

Este arquivo terá a forma

$$\begin{array}{c} N \\ x_1 \quad y_1 \quad A_1 \quad B_1 \quad d_1 \\ \dots \end{array}$$

$$x_N \quad y_N \quad A_N \quad B_N \quad d_N ,$$

onde  $N = N_1 + \dots + N_M$  é o número total de elementos de contorno,  $(x_k, y_k)$  são as coordenadas do centro do  $k$ -ésimo elemento na projeção de Mercator (expressas em metros),  $(A_k, B_k)$  é o vetor unitário normal exterior ao  $k$ -ésimo elemento e  $d_k$  é o seu comprimento (em metros). Recomenda-se empregar a extensão .MTR para os arquivos contendo coordenadas da projeção de Mercator. O dimensionamento previsto permite  $M \leq 50$  e  $N \leq 200$ .

```

program boundary
character*64 arq1,arq2
dimension N(50),d(200),x(200),y(200),A(200),B(200)
parameter(pi=3.141592654,R=6.378e6)
Rd(t)=pi*t/180.
XM(z)=R*Rd(z)
YM(t)=R*log((1+sin(Rd(t)))/cos(Rd(t)))
write(*,*) 'Arquivo de longitudes e latitudes [.DEG]:'
read(*,'(A)') arq1
write(*,*) 'Arquivo de descricao da fronteira [.MTR]:'
read(*,'(A)') arq2
open(1,file=arq1,status='old')
read(1,*) k
Nt=0
do 1 l=1,k
  read(1,*) N(l)
1  Nt=Nt+N(l)
open(2,file=arq2,status='new')
write(2,*) Nt
do 2 l=1,k
  read(1,*) z1,t1
  x1=XM(z1)
  y1=YM(t1)
  do 3 j=1,N(l)
    read(1,*) z2,t2
    x2=XM(z2)
    y2=YM(t2)
    x(j)=(x1+x2)/2
    y(j)=(y1+y2)/2
    d(j)=sqrt((x1-x2)**2+(y1-y2)**2)
    A(j)=(y2-y1)/d(j)
    B(j)=(x1-x2)/d(j)
    x1=x2
3  y1=y2
  do 4 j=1,N(l)
4  write(2,*) x(j),y(j),A(j),B(j),d(j)

```

```

2 continue
endfile 2
close(2,status='keep')
close(1,status='keep')
end

```

b) Grd

Este programa solicita o nome de um arquivo contendo as coordenadas geográficas (em graus) de um conjunto de pontos no interior do oceano onde se deseja calcular a solução de um problema de circulação oceânica,

arquivo de longitudes e latitudes [.DEG]:;

o arquivo deve ter a forma

$$\begin{array}{cc}
 N_P & \\
 \lambda_1 & \theta_1 \\
 \dots & \dots \\
 \lambda_{N_P} & \theta_{N_P} ,
 \end{array}$$

onde  $N_P$  é o número total de pontos e  $\vec{r} = (\lambda, \theta)$  é o vetor posição em coordenadas geográficas. A seguir, o programa pede o nome do arquivo de saída,

arquivo em coordenadas de Mercator [.MTR]:,

que terá a forma

$$\begin{array}{cc}
 N_P & \\
 x_1 & y_1 \\
 \dots & \dots \\
 x_{N_P} & y_{N_P} ,
 \end{array}$$

onde  $\vec{r} = (x, y)$  é o vetor posição em coordenadas de

Mercator.

```

program grd
character*64 arq1,arq2
parameter(pi=3.141592654,R=6.378e6)
Rd(t)=pi*t/180.
XM(z)=R*Rd(z)
YM(t)=R*log((1+sin(Rd(t)))/cos(Rd(t)))
write(*,*) 'Arquivo de longitudes e latitudes
* [.DEG]:'
read(*,'(A)') arq1
write(*,*) 'Arquivo em coordenadas de Mercator
* [.MTR]:'
read(*,'(A)') arq2
open(1,file=arq1,status='old')
read(1,*) NPt
open(2,file=arq2,status='new')
write(2,*) NPt
do 2 l=1,NPt
  read(1,*) z,t
  x=XM(z)
  y=YM(t)
2 write(2,*) x,y
endfile 2
close(2,status='keep')
close(1,status='keep')
end

```

### 3) Programas Para Montagem e Solução de Sistemas de Equações Lineares

Os programas deste grupo são:

- . Mat
- . RightSca
- . NorFlow
- . Qk
- . Gauss.

O programa Mat calcula os coeficientes  $T_{kj}$  definidos por (6.6), empregando os métodos numéricos discutidos na Seção 6.3. O programa RightSca calcula o vetor de termos independentes  $Q_k$  no sistema de equações

(6.5) quando este descreve o espalhamento de uma onda equatorial livre (Seção 6.9). O programa NorFlow calcula o fluxo normal  $\vec{u}^{(P)} \cdot \hat{n}$  ao longo da fronteira, onde  $\vec{u}^{(P)}$  é uma solução particular das equações de movimento correspondente a um forçamento arbitrário. O programa Qk utiliza a saída de NorFlow para calcular o vetor de termos independentes  $Q_k$  no sistema (6.43), que descreve um problema forçado. Finalmente, o programa Gauss emprega o algoritmo de eliminação gaussiana para resolver um sistema da forma (6.43) ou (6.5) para a distribuição de pressões ao longo da fronteira.

a) Mat

Este programa calcula os coeficientes  $T_{kj}$ , definidos por (6.6). Inicialmente, o programa solicita alguns dados numéricos,

$c, Av, \omega, const, w, b, Mmax$ :

cujos significados são os seguintes:

- .  $c$  é o autovalor vertical do modo baroclínico considerado (m/s).
- .  $Av$  é o coeficiente de dissipação  $A$  definido na Seção 2.1 ( $m^2/s^3$ ).
- .  $\omega$  é a frequência angular  $\omega$  ( $s^{-1}$ ).
- .  $const, w$  e  $b$ , empregados em chamadas à rotina GKJD, que têm o mesmo significado que os argumentos  $c, w$  e  $b$  discutidos em conexão com aquela rotina.
- .  $Mmax$ , usado para definir a ordem máxima das funções

de Hermite que serão calculadas durante a execução do programa. Se  $Y$  é a extensão latitudinal máxima da fronteira (em raios de deformação), o valor de  $M_{\max}$  pode ser calculado de

$$M_{\max} = \max \{ \text{const} \max \{ 1, Y^2/4, |Q| \}, \text{Re } Q + (b/w)^2 \}, \quad (\text{B.4})$$

onde  $Q$  foi definido na discussão da rotina GKJD. Devido a limitações de dimensionamento, o valor de  $M_{\max}$  não deve exceder 400.

A seguir, o programa pede o nome de um arquivo contendo os dados da fronteira discretizada,

arquivo de descrição da fronteira [.MTR]:,

o qual deve ter sido gerado pelo programa Boundary, discutido previamente. O dimensionamento previsto no programa admite o uso de até 200 elementos de contorno.

Finalmente, deve-se fornecer o nome do arquivo de saída,

arquivo contendo a matriz  $T(k,j)$  [.MAT]:,

para o qual recomenda-se o uso da extensão .MAT. O andamento do programa pode ser acompanhado através da mensagem

Linha no. 1 de  $N$   
 Linha no. 2 de  $N$   
 . . . . .  
 Linha no.  $N$  de  $N$

que aparece na tela, indicando a linha da matriz  $T_{kj}$  que está sendo calculada. O programa Mat deve ser compilado junto com as subrotinas Her, GKJD, CoefGKJD e Aux e a função Ex.

```

program mat
character*64 arq1,arq2
real*8 H1
complex*8 i,yc
complex*16 Ga,Da,Ja,Q,T
dimension A(200),B(200),Da(2,2),H1(400),Ja(2),Q(2),
*          s(200),T(200),x(200),y(200)
parameter(i=(0.,1.),be=2.28e-11,p4=12.56637061,
*          h=.2886751)
write(*,*) 'c,Av,omega,const,w,b,Mmax:'
read(*,*) c,Av,w,ct,wi,bk,Mmax
write(*,*) 'Arquivo de descricao da fronteira
* [.MTR]:'
read(*,'(A)') arq1
write(*,*) 'Arquivo contendo a matriz T(k,j) [.MAT]:'
read(*1,'(A)') arq2
yc=(w-i*Av/(c*c))/sqrt(be*c/2)
r=sqrt(c/(2*be))
open(2,file=arq1,status='old')
read(2,*) NE1
do 2 n=1,NE1
  read(2,*) x(n),y(n),A(n),B(n),s(n)
  x(n)=x(n)/r
  y(n)=y(n)/r
2   s(n)=s(n)/r
close(2,status='keep')
open(3,file=arq2,status='new')
write(3,*) NE1
do 3 l=1,NE1
  write(*,*) ' Linha no. ',l,' de ',NE1
  call Her(y(l),H1,Mmax)
  do 4 n=1,NE1
    if (l .eq. n) then
      ind=1
      T(n)=s(l)*(alog(s(l)/2)-1)*(i*A(l)-y(l)*B(l)/
*          yc)/(p4*yc)
    else
      ind=0
      T(n)=0.
    endif
  do 5 m=-1,1,2
    call GKJD(y(l),y(n)+m*h*s(n)*A(n),x(l)-x(n)+m*
*          h*s(n)*B(n),yc,H1,ct,wi,bk,ind,Ga,Q,Ja,Da)
5   T(n)=T(n)+s(n)*(A(n)*Q(1)+B(n)*Q(2))/2
4   continue

```

```

do 6 n=1,NE1
6   write(3,*) T(n)
3   continue
endfile 3
close(3,status='keep')
end

```

b) Rightsca

Este programa calcula os termos independentes  $-Q_k = \lambda p^{(1)}(\vec{r}'_k)$  no sistema de equações lineares (6.5), quando este representa o espalhamento de uma onda de Kelvin ou de Rossby longa com campo de pressão  $p^{(1)}(\vec{r})$  (Cf. Seção 6.9; o programa assume que a constante arbitrária  $p_0$  em (6.62) e (6.64) é igual a 1).

O programa solicita os dados numéricos

$c, Av, \omega, (0=Kelvin, 1=Rossby), n(Rossby):,$

onde:

- .  $c, Av$  e  $\omega$  foram discutidos em conexão com o programa Mat.
- .  $(0=Kelvin, 1=Rossby)$  permite escolher entre o espalhamento de uma onda de Kelvin (0) ou de Rossby (1).
- .  $n(Rossby)$  é o índice meridional ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) da onda de Rossby incidente (qualquer valor pode ser usado no caso de uma onda de Kelvin incidente).

Em seguida, como no programa Mat, pede-se o nome de um arquivo com os dados da fronteira discretizada. Finalmente, pede-se o nome do arquivo de saída contendo os coeficientes  $-Q_k$ ,

Arquivo de saída [.RGT]:,

para o qual recomendamos a extensão .RGT. O programa Rightsca deve ser compilado junto com a subrotina Her.

```

program RightSca
real*8 H
complex*8 f2,f3,f4,i,L,Q,yc
complex*16 P
character*64 arq1,arq2
parameter(i=(0.,1.),be=2.28e-11)
dimension H(400)
write(*,*) 'c,Av,omega,(0=Kelvin,1=Rossby),n(Rossby)'
read(*,*) c,Av,w,ind,n
write(*,*) 'Arquivo de descricao da fronteira
* [.MTR]:'
read(*,'(A)') arq1
write(*,*) 'Arquivo de saida [.RGT]:'
read(*,'(A)') arq2
yc=(w-i*Av/(c*c))/sqrt(be*c/2)
r=sqrt(c/(2*be))
if (ind .eq. 1) then
  Q=(yc*yc+1/(yc*yc))/4
  f1=sqrt(n+1.)
  f2=csqrt(n+1.5-Q)
  f3=i*f2-(1/yc+yc)/2
  f4=1+yc*f3
  L=-((n+1)*(1+2*yc*f3)+f4*f4)/(2*i*f2*f3*f4)
endif
open(1,file=arq1,status='old')
read(1,*) NE1
open(2,file=arq2,status='new')
write(2,*) NE1
do 1 j=1,NE1
  read(1,*) x,y,A,B,d
  x=x/r
  y=y/r
  if (ind .eq. 0) then
    call Her(y,H,1)
    p=cexp(-i*yc*x/2)*H(1)
  else
    call Her(y,H,n+1)
    p=L*cexp(x*(f2+i/(2*yc)))*(y*f1*H(n+2)+f4*H(n+1))
  endif
1 write(2,*) p
close(1,status='keep')
endfile 2
close(2,status='keep')
end

```

c) NorFlow

Este programa calcula o fluxo normal  $\vec{u}^{(P)} \cdot \hat{n}$  de uma solução particular das equações de movimento em certos pontos de uma fronteira discretizada. O programa NorFlow deve ser executado antes do programa Qk, que calcula os termos independentes  $Q_k$  no sistema (6.43). Assume-se que o forçamento é dado pela expressão (B.1).

Inicialmente, são solicitados os dados numéricos

```
c,Av,omega,const;
```

c, Av e omega já foram discutidos em conexão com o programa Mat, e const faz o papel do parâmetro c da subrotina UP.

O programa solicita o nome de um arquivo com os dados do forçamento,

```
arquivo de descrição do forçamento [.FCG]:,
```

que deve ter a forma

```
Na   Nb
a(1)
...
a(Na)
b(1)
...
b(Nb)
Fx(1,1)  Fy(1,1)
. . . . .
Fx(1,Nb) Fy(1,Nb)
. . . . .
```

```

Fx(Na,1)  Fy(Na,1)
. . . . .
Fx(Na,Nb) Fy(Na,Nb),

```

onde Na, Nb, a, b, Fx e Fy foram discutidos em conexão com a subrotina Part. Recomenda-se a extensão .FCG para este tipo de arquivo.

A seguir, pede-se o nome de um arquivo contendo os dados da fronteira discretizada, exatamente como no programa Mat. Finalmente, pede-se o nome do arquivo de saída, que conterà o valor de  $\rho_0 \omega_0 \vec{u}^{(P)}(\vec{r}) \cdot \hat{n}$  ( $\rho_0$  é uma escala de densidade da água e  $\omega_0 = (\beta c/2)^{1/2}$ ) em três pontos ao longo de cada elemento de contorno (no centro e nos nodos da regra de quadratura de Gauss-Legendre de ordem 2),

arquivo de saída [.NFL]:,

para o qual recomenda-se a extensão .NFL. O andamento do cálculo pode ser acompanhado por uma mensagem na tela, semelhante àquela fornecida pelo program Mat. O program NorFlow deve ser compilado junto com as subrotinas Her e UP.

```

program NorFlow
character*64 arq,arq1,arq2
real*4 nx,ny
complex*8 f,Fx,Fy,f1,i,un,yc
complex*16 P,U
dimension A(10),B(10),Fx(10,10),Fy(10,10),nx(200),
*          ny(200),s(200),x(200),y(200),U(2,2),P(2)
parameter(i=(0.,1.),be=2.28e-11,h=.2886751)
write(*,*) 'c,Av,omega,const'
read(*,*) c,Av,w,ct
write(*,*) 'Arquivo de descricao do forcamento
* [.FCG]:'
read(*,'(A)') arq
write(*,*) 'Arquivo de descricao da fronteira
* [.MTR]:'

```

```

read(*,'(A)') arq1
write(*,*) 'Arquivo de saida [.NFL]:'
read(*,'(A)') arq2
write(*,*)
yc=(w-i*Av/(c*c))/sqrt(be*c/2)
r=sqrt(c/(2*be))
open(1,file=arq,status='old')
read(1,*) Na,Nb
do 1 j=1,Na
1  read(1,*) a(j)
do 2 j=1,Nb
2  read(1,*) b(j)
do 3 j=1,Na
do 4 k=1,Nb
4  read(1,*) Fx(j,k),Fy(j,k)
3  continue
close(1,status='keep')
open(2,file=arq1,status='old')
read(2,*) NE1
do 5 n=1,NE1
read(2,*) x(n),y(n),nx(n),ny(n),s(n)
x(n)=x(n)/r
y(n)=y(n)/r
5  s(n)=s(n)/r
close(2,status='keep')
open(3,file=arq2,status='new')
do 6 l=1,NE1
write(*,*) ' Elemento no. ',l,' de ',NE1
do 7 m=-1,1
x0=x(1)-m*h*s(1)*ny(1)
y0=y(1)+m*h*s(1)*nx(1)
f=y0*y0-yc*yc
un=0.
do 8 j=1,Na
f1=cexp(i*a(j)*x0)
do 9 k=1,Nb
call UP(a(j),b(k),y0,yc,ct,0,U,P)
9  un=un+f1*(cexp(i*b(k)*y0)*(i*yc*(nx(1)*
*      Fx(j,k)+ny(1)*Fy(j,k))+y0*(nx(1)*Fy(j,k)-
*      ny(1)* Fx(j,k)))/f+nx(1)*(U(1,1)*Fx(j,k)+
*      U(1,2)* Fy(j,k))+ny(1)*(U(2,1)*Fx(j,k)+
*      U(2,2)*Fy(j,k)))
8  continue
7  write(3,*) un
6  continue
endfile 3
close(3,status='keep')
end

```

d) Qk

Este programa calcula os coeficientes  $Q_k$  no sistema de equações (6.43) que descreve um problema forçado arbitrário. Antes de executar este programa, é preciso usar o programa NorFlow para gerar um arquivo contendo os fluxos normais de uma solução particular através da fronteira do problema.

Inicialmente, o programa Qk solicita os mesmos dados numéricos pedidos pelo programa Mat. Em seguida, são pedidos os nomes de arquivos contendo os dados do forçamento (este arquivo é descrito em detalhe na discussão do programa NorFlow), a descrição da fronteira (este arquivo é gerado pelo programa Boundary) e os fluxos normais de uma solução particular através da fronteira (gerado pelo programa NorFlow). Finalmente, pede-se o nome do arquivo de saída, que conterá os coeficientes  $-Q_k$ ,

arquivo de saída [.RGT];;

recomenda-se o uso da extensão .RGT para este arquivo. O andamento do cálculo é indicado por uma mensagem na tela, semelhante à do programa Mat. O programa Qk deve ser compilado junto com as subrotinas Her, GKJD, CoefGKJD e Aux e a função Ex.

```

program Qk
character*64 arq,arq1,arq2,arq3
real*8 H1
complex*8 f,f1,f2,Fx,Fx1,Fy,Fy1,i,Q,un,yc
complex*16 Da,G0,G1,Ja,Ka
dimension A(10),B(10),Da(2,2),H1(400),Ja(2),Ka(2),
*          s(200),un(3,200),nx(200),ny(200),Fx(10,10),
*          Fy(10,10),x(200),y(200)
parameter(i=(0.,1.),be=2.28e-11,p2=6.2831854,
*          h=.2886751)
write(*,*) 'c,Av,omega,const,w,b,Mmax:'
read(*,*) c,Av,w,ct,wi,bk,Mmax
write(*,*) 'Arquivo de descr. do forçamento [.FCG]:'
```

```

read(*,'(A)') arq
write(*,*) 'Arquivo de descricao da fronteira
* [.MTR]:'
read(*,'(A)') arq1
write(*,*) 'Arquivo contendo os fluxos normais
* [.NFL]:'
read(*,'(A)') arq2
write(*,*) 'Arquivo de saida [.RGT]:'
read(*,'(A)') arq3
write(*,*)
yc=(w-i*Av/(c*c))/sqrt(be*c/2)
r=sqrt(c/(2*be))
open(1,file=arq,status='old')
read(1,*) Na,Nb
do 1 j=1,Na
1 read(1,*) A(j)
do 2 j=1,Nb
2 read(1,*) B(j)
do 3 j=1,Na
do 4 k=1,Nb
4 read(1,*) Fx(j,k),Fy(j,k)
3 continue
close(1,status='keep')
open(2,file=arq1,status='old')
read(2,*) NE1
do 5 n=1,NE1
read(2,*) x(n),y(n),nx(n),ny(n),s(n)
x(n)=x(n)/r
y(n)=y(n)/r
5 s(n)=s(n)/r
close(2,status='keep')
open(3,file=arq2,status='old')
do 6 n=1,NE1
do 7 j=1,3
7 read(3,*) un(j,n)
6 continue
close(3,status='keep')
open(4,file=arq3,status='new')
write(4,*) NE1
do 8 k=1,NE1
write(*,*) ' Elemento no. ',k,' de ',NE1
Q=0.
call Her(y(k),H1,Mmax)
f2=i*(y(k)**2-yc*yc)/(p2*yc)
do 9 j=1,NE1
if (j .eq. k) Q=Q+un(2,k)*f2*s(k)*(alog(s(k)/2)
* -1)
sl=0.
if (abs(real(yc)-y(j)) .lt. s(j)*abs(nx(j))/2)
* sl=1.
if (abs(real(yc)+y(j)) .lt. s(j)*abs(nx(j))/2)
* sl=-1.
if (sl .ne. 0.) then
y1=sl*real(yc)

```

```

x1=x(j)-ny(j)*(y1-y(j))/nx(j)
call GKJD(y(k),y1,x(k)-x1,yc,H1,ct,wi,bk,0,G1,
*           Ka,Ja,Da)
Fx1=0.
Fy1=0.
do 10 ia=1,Na
  do 11 ib=1,Nb
    f=cexp(i*(A(ia)*x1+B(ib)*y1))
    Fx1=Fx1+Fx(ia,ib)*f
11    Fy1=Fy1+Fy(ia,ib)*f
10  continue
f1=s1*G1*(nx(j)+i*s1*ny(j))*(i*Fx1+s1*Fy1)/2
Q=Q+f1*(clog(y(j)-s1*yc+nx(j)*s(j)/2)-clog(
*           y(j)-s1*yc-nx(j)*s(j)/2))/nx(j)
endif
do 12 m=-1,1,2
  x0=x(j)-m*h*s(j)*ny(j)
  y0=y(j)+m*h*s(j)*nx(j)
  call GKJD(y(k),y0,x(k)-x0,yc,H1,ct,wi,bk,G0,Ka,
*           Ja,Da)
  Q=Q+s(j)*un(m+2,j)*G0/2
  if (j .eq. k) Q=Q-s(k)*un(2,k)*f2*alog(h*s(k))
*           /2
  if (s1 .ne. 0.) Q=Q-s(j)*f1/(2*(y0-s1*yc))
12  continue
9  continue
8  write(4,*) r*Q
endfile 4
close(4,status='keep')
end

```

#### e) Gauss

Este programa emprega o algoritmo de eliminação gaussiana para resolver o sistema de equações lineares (6.5) ou (6.43). Antes de executá-lo, é preciso gerar dois arquivos, um contendo a matriz  $T_{kj}$  (Equação (6.6)) e outro contendo os coeficientes  $-Q_k$ , dados por (6.44) no caso de um problema forçado e por  $Q_k = -\lambda p^{(1)}(\vec{r}'_k)$  no caso do problema do espalhamento de ondas equatoriais livres (Cf. Seção 6.9). O primeiro arquivo deve ser gerado pelo programa Mat, e o segundo pelos programas Qk (problemas forçados) ou RightSca (espalhamento de ondas equatoriais). O resultado do programa é um arquivo da forma

$N$   
 $P_1$   
 $\dots$   
 $P_N$

onde  $N$  é o número de elementos de contorno e  $p_k$  representa a pressão total ao longo do  $k$ -ésimo elemento de contorno (no caso do problema de espalhamento) ou a solução homogênea para a pressão  $p_k^{(H)}$  (no caso de um problema forçado). Observe-se que os  $p_k$  são números complexos.

Durante a execução, o programa solicita sucessivamente o nome dos arquivos contendo a matriz  $T_{kj}$ , os coeficientes  $-Q_k$  e a solução para as pressões no contorno. Recomenda-se o uso da extensão .GSS para este último arquivo. O andamento dos cálculos é indicado por uma mensagem na tela, semelhante à fornecida pelo programa Mat.

```

program Gauss
character*64 arq
real*8 r
complex*8 X,T
complex*16 D,s
integer P,Q
dimension arq(3),D(150,150),P(150),Q(150),T(150),
*          X(150)
write(*,*) 'Arquivos:'
write(*,*) ' Arquivo com a matriz T(k,j) [.MAT]'
```

```

read(*,'(A)') arq(1)
write(*,*) ' Arquivo com os coeficientes Q(k) [.RGT]'
```

```

read(*,'(A)') arq(2)
write(*,*) ' Arquivo contendo as pressoes [.GSS]'
```

```

read(*,'(A)') arq(3)
do 12 k=1,2
12  open(k,file=arq(k),status='old')
read(1,*) N
read(2,*) N
do 13 i=1,N
do 14 j=1,N
read(1,*) D(i,j)
if (i .eq. j) then
D(i,j)=.5-D(i,j)
else
D(i,j)=-D(i,j)

```

```

        endif
14  continue
13  read(2,*) X(i)
    do 9 k=1,2
  9  close(k,status='keep')
    do 1 m=1,N
      write(*,*) ' Linha no. ',m,' de ',N
      r=0.
      do 2 i=1,N
        if (P(i) .eq. 1) goto 2
        do 3 j=1,N
          if (Q(j) .eq. 1) goto 3
          if (cdabs(D(i,j)) .gt. r) then
            i1=i
            j1=j
            r=cdabs(D(i,j))
          endif
        3  continue
      2  continue
      P(i1)=1
      Q(j1)=1
      s=D(i1,j1)
      do 4 j=1,N
  4  D(i1,j)=D(i1,j)/s
      X(i1)=X(i1)/s
      do 5 i=1,N
        if (i .eq. i1) goto 5
        s=D(i,j1)
        do 6 j=1,N
  6  D(i,j)=D(i,j)-s*D(i1,j)
        X(i)=X(i)-s*X(i1)
      5  continue
    1  continue
      do 7 i=1,N
        do 8 j=1,N
          if (cdabs(D(i,j)) .gt. .5) T(j)=X(i)
  8  continue
  7  continue
      open(3,file=arq(3),status='new')
      write(3,*) N
      do 11 i=1,N
11  write(3,*) T(i)
      endfile 3
      close(3,status='keep')
      end

```

#### 4) Programas Para Computação da Solução no Interior do Oceano

Os programas e rotinas deste grupo são:

- . TD
- . Scatt
- . IncWave
- . WindFcd.

A fim de computar as perturbações de pressão e velocidade em um ponto no interior do oceano a partir da distribuição de pressões ao longo da fronteira, é necessário calcular os coeficientes  $T_k$  e  $\vec{D}_k$ , definidos por (6.53); este cálculo pode ser realizado com o auxílio do programa TD. Em seguida, a solução propriamente dita pode ser calculada através dos programas Scatt (problemas de espalhamento de ondas equatoriais livres) e WindFcd (problemas forçados). Um arquivo contendo os campos de pressão e velocidade associados com uma onda de Kelvin ou de Rossby longa pode ser gerado pelo programa IncWave.

##### a) TD

Este programa calcula os coeficientes  $T_k$  e  $\vec{D}_k$ , definidos por (6.53), para um conjunto de pontos  $\vec{r}'_k$  escolhidos arbitrariamente no interior do oceano. Inicialmente, o programa pede o nome de um arquivo contendo os dados da fronteira, exatamente como no programa Mat. A seguir, pede-se o nome de um arquivo contendo as coordenadas de Mercator de um conjunto de pontos no interior do oceano onde se deseja computar a solução do problema de circulação oceânica,

arquivo contendo os pontos interiores [.MTR]:;

este arquivo deve ser gerado com o auxílio do programa Grd. São então solicitados dados numéricos,

$c, Av, \omega, \text{const}, w, b, M_{\max}, d_{\min}:$ ,

dos quais  $c, Av, \omega, \text{const}, w, b$  e  $M_{\max}$  já foram discutidos em conexão com o programa Mat; aqui, o valor de  $M_{\max}$  deve ser calculado por (B.4), mas o parâmetro  $Y$  que aparece nesta expressão representará a máxima extensão latitudinal da fronteira e do conjunto de pontos interiores contido no arquivo mencionado acima. Os coeficientes  $T_k$  e  $\vec{D}_k$  serão calculados através de (6.56) quando a distância não-dimensional entre o ponto interior  $\vec{r}'$  e o centro do elemento  $\Gamma_k$  for menor do que  $d_{\min}$ . Quando esta distância for maior, os coeficientes são calculados por quadratura gaussiana. Usualmente,  $d_{\min}$  varia de 0,5 a 2. Finalmente, o programa pede o nome do arquivo de saída, que conterá os coeficientes  $T_k$  e  $\vec{D}_k$ :

arquivo contendo  $T(k)$  e  $D(k)$  [.TDK]:.

Recomenda-se empregar a extensão .TDK para este tipo de arquivo. O andamento do cálculo é indicado por uma mensagem na tela, semelhante à fornecida pelo programa Mat. O programa TD deve ser compilado junto com as subrotinas Her, GKJD, CoefGKJD e Aux e a função Ex.

```

program TD
character*64 arq1,arq2,arq3
real*4 I1,I2,I3,I4,I5,I6
real*8 H1
complex*8 f,i,yc,yc2
complex*16 D,Dx,Dy,Ga,Ja,K,T
dimension A(200),B(200),D(2,2),Dx(200),Dy(200),
*          H1(400),Ja(2),K(2),s(200),T(200),x(200),
*          y(200)
parameter(i=(0.,1.),be=2.28e-11,h=.2886751,
*          pi=3.141592654)
write(*,*) 'Arquivo de descricao da fronteira

```

```

* [.MTR]:'
  read(*,'(A)') arq1
  write(*,*) 'Arquivo contendo os pontos interiores
* [.MTR]:'
  read(*,'(A)') arq2
  write(*,*) 'c,Av,omega,const,w,b,Mmax,dmin:'
  read(*,*) c,Av,w,ct,wi,bk,Mmax,dmin
  write(*,*) 'Arquivo contendo T(k) e D(k) [.TDK]:'
  read(*,'(A)') arq3
  yc=(w-i*Av/(c*c))/sqrt(be*c/2)
  yc2=yc*yc
  f=1/(2*pi*yc)
  r=sqrt(c/(2*be))
  open(2,file=arq1,status='old')
  read(2,*) NE1
  do 2 n=1,NE1
    read(2,*) x(n),y(n),A(n),B(n),s(n)
    x(n)=x(n)/r
    y(n)=y(n)/r
  2 s(n)=s(n)/r
  close(2,status='keep')
  open(3,file=arq2,status='old')
  read(3,*) NPt
  open(4,file=arq3,status='new')
  write(4,*) NPt,NE1
  do 3 l=1,NPt
    write(*,*) ' Ponto no. ',l,' de ',NPt
    read(3,*) x0,y0
    x0=x0/r
    y0=y0/r
    call Her(y0,H1,Mmax)
    do 4 n=1,NE1
      if (sqrt((x0-x(n))**2+(y0-y(n))**2) .lt. dmin)
*then
      ind=1
      x01=x0-x(n)-s(n)*B(n)/2
      y01=y0-y(n)+s(n)*A(n)/2
      x12=s(n)*B(n)
      y12=-s(n)*A(n)
      A1=s(n)**2
      B1=2*(x12*x01+y12*y01)
      C1=x01**2+y01**2
      D1=4*A1*C1-B1*B1
      rD=sqrt(D1)
      T1=(atan((2*A1+B1)/rD)-atan(B1/rD))/rD
      S1=A1+B1+C1
      I1=2*T1
      I2=(alog(S1/C1)/2-B1*T1)/A1
      I3=(T1*D1+B1*alog(S1/C1)/2)/A1+alog(S1)-2
      I4=(4*C1*T1-(B1+2*C1)/S1)/D1
      I5=((2*A1+B1)/S1-2*B1*T1)/D1
      I6=(4*A1*T1+(A1*(2*C1-B1)-B1*B1)/(C1*S1))/D1
      f1=x01*y12-x12*y01

```

```

f2=B1/2
f3=y01**2-x01**2
T(n)=f*((yc*f1+i*y0*f2)*I1+i*y0*A1*I2-(x12*y0/
* yc+i*y12)*I3/4)
Dx(n)=(f/i)*(A1*(y12*I4+2*y01*I5)+(2*x12*x01*
* y01+y12*f3)* I6+(i/yc)*(f1*((y12**2-x12**
* 2)*I4+f3*I6)/2-(x01*x12-y01*y12)*f1*I5)-
* (y12*(y0*y0+yc2-1/yc2)+2*i*x12*y0*yc)*I3/
* 16)
Dy(n)=(f/i)*(-A1*(x12*I4+2*x01*I5)-(2*y12*x01*
* y01-x12*f3)*I6+(i/(2*yc))*(f3*(f2*I6+2*
* A1*I5)+(y01*y12*(y12**2+3*x12**2)-x01*
* x12*(x12**2+3*y12**2))*I4+A1*I2+2*x12*
* x01*I1)+(x12*(y0*y0+yc2-3/yc2)-2*i*y12*
* y0*yc)*I3/16)
else
ind=0
T(n)=0.
Dx(n)=0.
Dy(n)=0.
endif
do 5 m=-1,1,2
call GKJD(y0,y(n)+m*h*s(n)*A(n),x0-x(n)+m*h*
* s(n)*B(n),yc,H1,ct,wi,bk,ind,Ga,K,Ja,D)
T(n)=T(n)+s(n)*(A(n)*K(1)+B(n)*K(2))/2
Dx(n)=Dx(n)+s(n)*(D(1,1)*A(n)+D(1,2)*B(n))/2
5 Dy(n)=Dy(n)+s(n)*(D(2,1)*A(n)+D(2,2)*B(n))/2
4 continue
do 6 n=1,NE1
6 write(4,*) T(n),Dx(n),Dy(n)
3 continue
close(3,status='keep')
endfile 4
close(4,status='keep')
end

```

b) Scatt

Este programa calcula a solução de um problema de espalhamento de ondas de Kelvin ou de Rossby longas em um conjunto especificado de pontos no interior do oceano. Inicialmente, o programa solicita o nome de um arquivo contendo a solução para o campo de pressão ao longo da fronteira,

arquivo com as pressões na fronteira [.GSS];;

este arquivo é gerado pelo programa Gauss. A seguir, pede-se o nome de um arquivo contendo as coordenadas de Mercator de um conjunto de pontos interiores onde se deseja calcular a solução, exatamente como no programa TD. Em seguida, é solicitado o nome de um arquivo contendo os coeficientes  $T_k$  e  $\vec{D}_k$  (Equação (6.53)) correspondente ao conjunto especificado de pontos interiores; este arquivo é gerado pelo programa TD. Os dados numéricos solicitados são

$c, Av, \omega, (0=Kelvin, 1=Rossby), n(Rossby),$

e já foram discutidos em conexão com o programa RightSca. Assume-se que a onda incidente é descrita por (6.62)-(6.65) com  $p_0 = 1$ . O nome do arquivo de saída é então pedido,

arquivo contendo os campos  $p$  e  $u$  [.SCT];;

este terá o formato

$$\begin{array}{cccccccc}
 N_p & & & & & & & \\
 \lambda_1 & \theta_1 & \text{Re } p_1 & \text{Im } p_1 & \text{Re } u_1 & \text{Im } u_1 & \text{Re } v_1 & \text{Im } v_1 \\
 \dots & \dots \\
 \lambda_{N_p} & \theta_{N_p} & \text{Re } p_{N_p} & \text{Im } p_{N_p} & \text{Re } u_{N_p} & \text{Im } u_{N_p} & \text{Re } v_{N_p} & \text{Im } v_{N_p}
 \end{array}$$

onde  $N_p$  é o número total de pontos e  $(\lambda, \theta)$  são as coordenadas geográficas (em graus). O campo de velocidade no arquivo de saída está na realidade multiplicado por  $\frac{1}{2} \rho_0 c$ , onde  $\rho_0$  é uma escala de densidade da água e  $c$  é o autovalor vertical. Recomenda-se o uso da extensão .SCT para o arquivo de saída de Scatt. O andamento do cálculo é indicado por uma mensagem na tela, semelhante à fornecida pelo programa Mat. O programa Scatt deve ser compilado junto com as subrotinas Her e IncPU.

```

program Scatt
character*64 arq, arq1, arq2, arq3
complex*8 i, Lb, p, yc
complex*16 Dx, Dy, p0, p1, T, u0, u1, v0
dimension Dx(200), Dy(200), p(200), T(200), u1(2)
parameter(pi=3.14159265, i=(0., 1.), be=2.28e-11,
*      RE=6.378e6)
Deg(z)=180*z/pi
Gr(x)=Deg(x/RE)
Th(y)=Deg(atan((1-exp(-2*y/RE))/(2*exp(-y/RE))))
write(*,*) 'Arquivo com as pressoes na fronteira
* [.GSS]:'
read(*, '(A)') arq
write(*,*) 'Arquivo contendo os pontos interiores
* [.MTR]:'
read(*, '(A)') arq1
write(*,*) 'Arquivo contendo T(k) e D(k) [.TDK]:'
read(*, '(A)') arq2
write(*,*) 'Arquivo contendo os campos p e u [.SCT]:'
read(*, '(A)') arq3
write(*,*) 'c, Av, omega, (0=Kelvin, 1=Rossby), n(Rossby)'
read(*,*) c, Av, w, ind, n
yc=(w-i*Av/(c*c))/sqrt(be*c/2)
r=sqrt(c/(2*be))
open(1, file=arq, status='old')
read(1,*) NEL
do 1 k=1, NEL
1  read(1,*) p(k)
   close(1, status='keep')
   open(2, file=arq1, status='old')
   read(2,*) NPt
   open(3, file=arq2, status='old')
   read(3,*) NPt, NEL
   open(4, file=arq3, status='new')
   write(4,*) NPt
   do 2 j=1, NPt
     write(*,*) 'Ponto no. ', j, ' de ', NPt
     do 3 k=1, NEL
3      read(3,*) T(k), Dx(k), Dy(k)
       read(2,*) x, y
       call IncPU(x/r, y/r, yc, ind, n, p1, u1, Lb)
       p0=Lb*p1
       u0=Lb*u1(1)
       v0=Lb*u1(2)
       do 4 k=1, NEL
4          p0=p0+p(k)*T(k)
           u0=u0-2*p(k)*Dx(k)
           v0=v0-2*p(k)*Dy(k)
2          write(4,*) Gr(x), Th(y), real(p0), aimag(p0), real(
*          u0/2), aimag(u0/2), real(v0/2), aimag(v0/2)
       endfile 4
       do 5 j=2, 4
5          close(j, status='keep')

```

end

c) IncWave

Este programa calcula os campos de pressão e velocidade associados com uma onda de Kelvin ou de Rossby longa em um conjunto especificado de pontos do interior do oceano. Inicialmente, é solicitado o nome de um arquivo contendo as coordenadas de Mercator do conjunto especificado de pontos, exatamente como no programa TD. Em seguida, pede-se o nome do arquivo de saída, que terá um formato idêntico ao do arquivo de saída do programa Scatt. Os dados numéricos solicitados,

$c, Av, \omega, (0=Kelvin, 1=Rossby), n(Rossby) :$ ,

já foram discutidos em conexão com o programa Scatt. O programa IncWave deve ser compilado junto com as subrotinas Her e IncPU.

```

program IncWave
character*64 arq1,arq3
complex*8 i,Lb,yc
complex*16 p1,u1
dimension u1(2)
parameter(pi=3.14159265,i=(0.,1.),be=2.28e-11,
*          RE=6.378e6)
Deg(z)=180*z/pi
Gr(x)=Deg(x/RE)
Th(y)=Deg(atan((1-exp(-2*y/RE))/(2*exp(-y/RE))))
write(*,*) 'Arquivo contendo os pontos interiores
* [.MTR]:'
read(*,'(A)') arq1
write(*,*) 'Arquivo contendo os campos p e u
* [.INC]:'
read(*,'(A)') arq3
write(*,*) 'c,Av,omega,(0=Kelvin,1=Rossby),n(Rossby)'
read(*,*) c,Av,w,ind,n
yc=(w-i*Av/(c*c))/sqrt(be*c/2)
r=sqrt(c/(2*be))
open(2,file=arq1,status='old')
read(2,*) NPt
open(4,file=arq3,status='new')

```

```

write(4,*) NPt
do 2 j=1,NPt
  read(2,*) x,y
  call IncPU(x/r,y/r,yc,ind,n,p1,u1,Lb)
2  write(4,*) Gr(x),Th(y),real(p1),aimag(p1),real(
*      u1(1)/2),aimag(u1(1)/2),real(u1(2)/2),
*      aimag(u1(2)/2)
endfile 4
close(2,status='keep')
close(4,status='keep')
end

```

d) WindFcd

Este programa calcula a solução de um problema forçado em um conjunto especificado de pontos do interior do oceano. Os seguintes nomes de arquivos são solicitados:

- . Arquivo contendo as pressões na fronteira, que é gerado pelo programa Gauss.
- . Arquivo com os dados da fronteira, gerado pelo programa Boundary.
- . Arquivo contendo os fluxos normais através do contorno, correspondentes a uma solução particular das equações de movimento; este arquivo é gerado pelo programa NorFlow.
- . Arquivo contendo os dados do forçamento, no formato descrito em conexão com o programa NorFlow.
- . Arquivo contendo um conjunto de pontos interiores onde se deseja calcular a solução, gerado pelo programa Grd.
- . Arquivo contendo os coeficientes  $T_k$  e  $\vec{D}_k$  (Equação (6.53)), gerado pelo programa TD.

- . Arquivo contendo os campos de pressão e velocidade, no formato descrito na discussão do programa Scatt. Recomenda-se a extensão .WFC para os arquivos contendo a solução de problemas forçados.

Os dados numéricos solicitados pelo programa,

`c,Av,omega,const,w,b,Mmax,dmin:,`

já foram discutidos em conexão com o programa TD. O andamento do cálculo é indicado por uma mensagem na tela, semelhante à fornecida pelo programa Mat. O programa WindFcd deve ser compilado junto com as subrotinas Her, GKJD, CoefGKJD, Aux, UP, Part e NearSng e a função Ex.

```

program WindFcd
character*64 arq
real*4 nx,ny
real*8 H1
complex*8 f,f1,f2,Fx,Fy,Fx1,Fy1,G,i,p,p0,p1,unp,u0,
*      u1,yc
complex*16 Da,Dx,Dy,G0,G1,J0,J1,Ka,T
dimension A(10),B(10),Dx(200),Dy(200),Fx(10,10),
*      Fy(10,10),T(200),H1(400),x(200),y(200),
*      nx(200),ny(200),un(3,200),J0(2),J1(2),
*      arq(7),u0(2),u1(2),G(3),p(200),s(200),
*      Da(2,2),Ka(2)
parameter(pi=3.14159265,i=(0.,1.),be=2.28e-11,
*      RE=6.378e6)
Deg(z)=180*z/pi
Gr(z)=Deg(z/RE)
Th(z)=Deg(atan((1-exp(-2*z/RE))/(2*exp(-z/RE))))
write(*,*) 'Arquivo com as pressoes na fronteira
* [.GSS]:'
read(*,'(A)') arq(1)
write(*,*) 'Arquivo de descricao da fronteira
* [.MTR]:'
read(*,'(A)') arq(2)
write(*,*) 'Arquivo contendo os fluxos normais
* [.NFL]:'
read(*,'(A)') arq(3)
write(*,*) 'Arquivo de descricao do forçamento
* [.FCG]:'
read(*,'(A)') arq(4)
write(*,*) 'Arquivo contendo os pontos interiores

```

```

* [.MTR]:'
  read(*, '(A)') arq(5)
  write(*, *) 'Arquivo contendo T(k), D(k) [.TDK]:'
  read(*, '(A)') arq(6)
  write(*, *) 'Arquivo com os campos p e u [.WFC]:'
  read(*, '(A)') arq(7)
  write(*, *) 'c, Av, omega, const, w, b, Mmax, dmin'
  read(*, *) c, Av, w, ct, wi, bk, Mmax, dmin
  yc=(w-i*Av/(c*c))/sqrt(be*c/2)
  r=sqrt(c/(2*be))
  do 1 k=1,4
1  open(k, file=arq(k), status='old')
  read(1, *) NE1
  read(1, *) (p(k), k=1, NE1)
  read(2, *) NE1
  do 2 k=1, Nel
    read(2, *) x(k), y(k), nx(k), ny(k), s(k)
    x(k)=y(k)/r
    y(k)=y(k)/r
2  s(k)=s(k)/r
  read(3, *) ((un(j, k), j=1, 3), k=1, NE1)
  read(4, *) Na, Nb
  read(4, *) (A(k), k=1, Na)
  read(4, *) (B(k), k=1, Nb)
  read(4, *) ((Fx(j, k), Fy(j, k), k=1, Nb), j=1, Na)
  do 3 k=1,4
3  close(k, status='keep')
  open(5, file=arq(5), status='old')
  read(5, *) NPT
  open(6, file=arq(6), status='old')
  read(6, *) NPT, NE1
  open(7, file=arq(7), status='new')
  write(7, *) NPT
  do 9 j=1, NPT
    write(*, *) ' Ponto no. ', j, ' de ', NPT
    do 10 k=1, NE1
10  read(6, *) T(k), Dx(k), Dy(k)
    read(5, *) x0, y0
    x0=x0/r
    y0=y0/r
    call Part(Na, Nb, A, B, Fx, Fy, x0, y0, yc, ct, 1, p0, u0)
    do 13 k=1, NE1
      p0=p0+p(k)*T(k)/r
      u0(1)=u0(1)-p(k)*Dx(k)/r
13  u0(2)=u0(2)-p(k)*Dy(k)/r
    call Her(y0, H1, Mmax)
    do 14 k=1, NE1
      s0=-ny(k)*(x0-x(k))+nx(k)*(y0-y(k))
      d0=(x0-x(k))**2+(y0-y(k))**2
      sd=0.
      if ((abs(s0) .lt. s(k)/2) .and. (d0 .lt. dmin**
*          2)) then
          sd=1.

```

```

xp=x(k)-s0*ny(k)
yp=y(k)+s0*nx(k)
call Part(Na,Nb,A,B,Fx,Fy,xp,yp,yc,ct,0,p1,u1)
unp=nx(k)*u1(1)+ny(k)*u1(2)
rx=s(k)*nx(k)/2
ry=s(k)*ny(k)/2
call NearSng(x0,y0,x(k)+ry,y(k)-rx,x(k)-ry,
*           y(k)+rx,yc,G)
f=s(k)/(4*pi*yc)
p0=p0+unp*f*G(1)
u0(1)=u0(1)+unp*f*G(2)
u0(2)=u0(2)+unp*f*G(3)
endif
sl=0.
if (abs(real(yc)-y(k)) .lt. abs(rx)) sl=1.
if (abs(real(yc)+y(k)) .lt. abs(rx)) sl=-1.
if (sl .ne. 0.) then
y1=sl*real(yc)
x1=x(k)-ny(k)*(y1-y(k))/nx(k)
call GKJD(y0,y1,x0-x1,yc,H1,ct,wi,bk,0,G1,Ka,
*           J1,Da)
Fx1=0.
Fy1=0.
do 17 ia=1,Na
do 18 ib=1,Nb
f=cexp(i*(A(ia)*x1+B(ib)*y1))
Fx1=Fx1+Fx(ia,ib)*f
18 Fy1=Fy1+Fy(ia,ib)*f
17 continue
f1=sl*(nx(k)+i*sl*ny(k))*(i*Fx1+sl*Fy1)/2
f2=f1*(clog(y(k)-sl*yc+nx(k)*s(k)/2)-clog(y(k)-
* sl*yc-nx(k)*s(k)/2))/nx(k)
p0=p0+f2*G1
u0(1)=u0(1)+f2*J1(1)
u0(2)=u0(2)+f2*J1(2)
endif
do 19 m=-1,1,2
x2=x(k)-m*h*s(k)*ny(k)
y2=y(k)+m*h*s(k)*nx(k)
call GKJD(y0,y2,x0-x2,yc,H1,ct,wi,bk,0,G0,Ka,
*           J0,Da)
p0=p0+s(k)*un(m+2,k)*G0/2
do 4 l=1,2
4 u0(l)=u0(l)+s(k)*un(m+2,k)*J0(l)/2
if (sd .ne. 0.) then
f=unp*s(k)/(8*pi*yc)
x02=x0-x2
y02=y0-y2
R2=x02**2+y02**2
al=alog(R2)
p0=p0-i*f*(y0*y0-yc*yc)*al
u0(1)=u0(1)-f*(2*(yc*x02-i*y0*y02)/R2-i*al/2)

```

```

      u0(2)=u0(2)-f*(2*(i*y0*x02+yc*y02)/R2-y0*a1/
*          (2*yc))
      endif
      if (s1 .ne. 0.) then
        f1=f1/(2*(y2-s1*yc))
        p0=p0-s(k)*f1*G1
        do 5 l=1,2
5          u0(l)=u0(l)-s(k)*f1*J1(l)
        endif
19      continue
14      continue
9      write(7,*) Gr(r*x0),Th(r*y0),real(r*p0),aimag(
*          r*p0),real(r*u0(1)),aimag(r*u0(1)),real(
*          r*u0(2)),aimag(r*u0(2))
      endfile 7
      do 20 j=5,7
20      close(j,status='keep')
      end

```



APÊNDICE CCOEFICIENTES PARA O CÁLCULO ASSINTÓTICO DE $\vec{P}(a,b;\gamma)$  E  $u(a,b;\gamma)$ 

Os coeficientes  $P_r^{\epsilon\kappa}$ ,  $Q_r^{\epsilon\kappa}$ ,  $\vec{U}_r^{\epsilon\kappa}$  e  $\vec{V}_r^{\epsilon\kappa}$ , definidos por (6.38), podem ser calculados diretamente a partir de (5.8)-(5.10), (6.28) e (6.31)-(6.34). Os resultados são

$$P_0^{\epsilon\kappa} = 2i(y_c^2 + 2\epsilon\kappa by),$$

$$P_1^{\epsilon\kappa} = 2(1 - ay_c)(2\kappa b + \epsilon\gamma),$$

$$P_2^{\epsilon\kappa} = \frac{i}{8} [y_c^2(4y_c^2 - 4b^2 - y^2) - 16(1 - ay_c)^2 + 2\epsilon\kappa by(16(a/y_c)(1 - ay_c) + y^2 + 4b^2)],$$

$$P_3^{\epsilon\kappa} = \frac{1}{8} \left\{ 2\kappa b [a(y_c(y^2 - 4y_c^2 - 4b^2) + (16/y_c)(1 - ay_c)^2 - y_c^2 + 4b^2)] + \epsilon\gamma [a(y_c(4b^2 - 4y_c^2 - y^2) + (16/y_c)(1 - ay_c)^2 - y_c^2 + y^2)] \right\}, \quad (C.1)$$

$$Q_0^{\epsilon\kappa} = -4\kappa y_c, \quad Q_1^{\epsilon\kappa} = -4i\epsilon\kappa ay,$$

$$Q_2^{\epsilon\kappa} = -\frac{\kappa}{4} [16a(1 - ay_c) + y_c(4b^2 - y^2 + 4y_c^2)],$$

$$Q_3^{\epsilon\kappa} = -\frac{i}{4} \left\{ \epsilon\kappa\gamma [a(y^2 + 4b^2 + 4y_c^2 + 16(a/y_c)(1 - ay_c)) + y_c] - 2by_c \right\}, \quad (C.2)$$

$$\begin{aligned}
\vec{U}_0^{\varepsilon\kappa} &= -4i\kappa b \hat{x} - 2\varepsilon y_c \hat{y}, \\
\vec{U}_1^{\varepsilon\kappa} &= -2(1-ay_c) \hat{x} - 4i\varepsilon\kappa ab \hat{y}, \\
\vec{U}_2^{\varepsilon\kappa} &= \frac{i}{4} [2\varepsilon y_c^2 y + \kappa b(y^2 - 4b^2 - 16(a/y_c)(1-ay_c))] \hat{x} - \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{8} [16a(1-ay_c) + y_c(4y_c^2 + y^2 - 4b^2)] \hat{y}, \\
\vec{U}_3^{\varepsilon\kappa} &= -\frac{1}{8} [2\varepsilon\kappa by(4ay_c - 5) + ay_c(4b^2 + y^2 - 4y_c^2) + \\
&\quad + 16(a/y_c)(1-ay_c)^2 - y^2] \hat{x} + \\
&\quad + \frac{i}{8} \left\{ 2\varepsilon\kappa b [a(16(a/y_c)(ay_c - 1) - \right. \\
&\quad \left. - 4y_c^2 - y^2 - 4b^2) - y_c] + yy_c \right\} \hat{y}, \tag{C.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{V}_0^{\varepsilon\kappa} &= -4i\varepsilon\kappa \hat{y}, & \vec{V}_1^{\varepsilon\kappa} &= 4i\kappa a \hat{x}, \\
\vec{V}_2^{\varepsilon\kappa} &= -\varepsilon\kappa y_c y \hat{x} - \frac{i}{4} \varepsilon\kappa (y^2 + 4y_c^2 + 4b^2 - 16a^2) \hat{y}, \\
\vec{V}_3^{\varepsilon\kappa} &= -\frac{i}{4} \kappa a [y^2 - 4b^2 - 4y_c^2 - 16(a/y_c)(1-ay_c)] \hat{x} - \\
&\quad - \frac{1}{4} (\kappa y + 2\varepsilon b) \hat{y}. \tag{C.4}
\end{aligned}$$

APÊNDICE DINTEGRAIS QUASE-SINGULARES

Neste apêndice calculamos as integrais das partes singulares das funções de influência ao longo de um elemento de contorno retilíneo. Como discutido na Seção 6.8, estas integrais aparecem no cálculo de (6.53)-(6.55) quando o ponto  $\vec{r}'$  está muito próximo do elemento  $\Gamma_k$ .

As partes singulares das funções de influência são combinações lineares de funções homogêneas de  $\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r}$  e de funções logarítmicas de  $R = |\vec{R}|$  (cf. Seção 5.5). Consideremos um elemento de contorno retilíneo  $\Gamma = \{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$  e um ponto  $\vec{r}'$  que não está sobre  $\Gamma$ . O elemento de comprimento ao longo de  $\Gamma$  é

$$ds = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| d\xi = d_{12} d\xi, \quad (D.1)$$

onde  $0 \leq \xi \leq 1$ , o vetor normal a  $\Gamma$  é

$$\hat{n} = d_{12}^{-1} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \hat{z} \quad (D.2)$$

e quando  $\vec{r}$  está sobre  $\Gamma$  temos

$$\begin{aligned} \vec{R} &= (\vec{r}' - \vec{r}_1) + \xi (\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \\ R^2 &= A\xi^2 + B\xi + C, \end{aligned} \quad (D.3)$$

com

$$\begin{aligned} A &= d_{12}^2, \quad B = 2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_1), \\ C &= |\vec{r}' - \vec{r}_1|^2. \end{aligned} \quad (D.4)$$

Definindo os parâmetros

$$x_{01} = x' - x_1, \quad y_{01} = y' - y_1,$$

$$x_{12} = x_1 - x_2, \quad y_{12} = y_1 - y_2, \quad (\text{D.5})$$

obtemos de (5.31)-(5.34)

$$\int_{\Gamma} \mathbf{G}^{(s)}(\vec{r}'; \vec{r}) ds = \frac{id_{12}}{4\pi y_c} (y'^2 - y_c^2) I_3, \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \int_{\Gamma} \vec{K}^{(s)}(\vec{r}'; \vec{r}) ds &= \frac{1}{2\pi y_c} \left\{ [y_c(x_{01}y_{12} - x_{12}y_{01}) + \right. \\ &\quad \left. + iy'(x_{01}x_{12} + y_{01}y_{12})] I_1 + \right. \\ &\quad \left. + iy'd_{12}^2 I_2 - \frac{1}{4} [x_{12}y'/y_c + iy_{12}] I_3 \right\}, \quad (\text{D.7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{J}^{(s)}(\vec{r}'; \vec{r}) ds &= \frac{d_{12}}{4\pi y_c} \left\{ 2(iy'\hat{z} \times + y_c) [I_1(\vec{r}' - \vec{r}_1) + \right. \\ &\quad \left. + I_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] - \frac{1}{2} I_3(i\hat{x} + \frac{y'}{y_c} \hat{y}) \right\}, \quad (\text{D.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \int_{\Gamma} \mathcal{D}^{(s)}(\vec{r}'; \vec{r}) \cdot \hat{n} ds &= \frac{1}{2\pi i y_c} \left\{ d_{12}^2 (y_{12} I_4 + 2y_{01} I_5) + \right. \\ &\quad \left. + [2x_{12}x_{01}y_{01} + y_{12}(y_{01}^2 - x_{01}^2)] I_6 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{y_c} \left[ \frac{1}{2} (x_{01}y_{12} - x_{12}y_{01}) [(y_{12}^2 - x_{12}^2) I_4 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (y_{01}^2 - x_{01}^2) I_6] + (x_{01}x_{12} - y_{01}y_{12}) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (x_{12}y_{01} - y_{12}x_{01}) I_5 \right] - \frac{1}{16} [y_{12}(y'^2 + y_c^2 - \right. \\ &\quad \left. - y_c^{-2}) + 2ix_{12}y'y_c] I_3 \right\}, \quad (\text{D.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{y} \cdot \int_{\Gamma} \mathcal{D}^{(S)}(\vec{r}'; \vec{r}) \cdot \hat{n} \, ds &= \frac{1}{2\pi i y_c} \left\{ -d_{12}^2 (x_{12} I_4 + 2x_{01} I_5) - \right. \\
&- [2y_{12} x_{01} y_{01} - x_{12} (y_{01}^2 - x_{01}^2)] I_6 + \\
&+ \frac{i}{2y_c} \left[ (y_{01}^2 - x_{01}^2) [(x_{12} x_{01} + y_{12} y_{01}) I_6 + \right. \\
&+ 2d_{12}^2 I_5] + [y_{01} y_{12} (y_{12}^2 + 3x_{12}^2) - x_{01} x_{12} (x_{12}^2 + \\
&+ 3y_{12}^2)] I_4 + d_{12}^2 I_2 + 2x_{12} x_{01} I_1 \left. \right] + \\
&+ \frac{1}{16} [x_{12} (y_c'^2 + y_c^2 - 3y_c^{-2}) - 2iy_{12} y_c'] I_3 \left. \right\}, \quad (D.10)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \frac{d\xi}{R^2}, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{R^2}, \quad I_3 = \int_0^1 \log(R^2) d\xi, \\
I_4 &= \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{R^4}, \quad I_5 = \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{R^4}, \quad I_6 = \int_0^1 \frac{d\xi}{R^4}. \quad (D.11)
\end{aligned}$$

Em vista de (D.3), as integrais  $I_1, \dots, I_6$  podem ser expressas como

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2T, \quad I_2 = -\frac{1}{\Delta} \left[ BT - \frac{1}{2} \log \frac{S}{C} \right], \\
I_3 &= \frac{1}{\Delta} \left[ T\Delta + \frac{1}{2} B \log \frac{S}{C} \right] + \log S - 2, \\
I_4 &= \frac{1}{\Delta} \left[ 4CT - \frac{B+2C}{S} \right], \quad I_5 = -\frac{1}{\Delta} \left[ 2BT - \frac{2A+B}{S} \right], \\
I_6 &= \frac{1}{\Delta} \left[ 4AT + \frac{A(2C-B) - B^2}{CS} \right], \quad (D.12)
\end{aligned}$$

onde

$$\Delta = 4AC - B^2, \quad S = A + B + C,$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[ \tan^{-1} \frac{(2A+B)}{\sqrt{\Delta}} - \tan^{-1} \frac{B}{\sqrt{\Delta}} \right]. \quad (\text{D.13})$$