



Ministério da  
Ciência e Tecnologia



INPE-15315-TDI/1359

## INVESTIGAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE MULTIVARIÁVEIS NO CONTROLE DE ATITUDE DE UM SATÉLITE RÍGIDO - FLEXÍVEL

Ximena Celia Méndez Cubillos

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, aprovada em 27 de fevereiro de 2008.

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m17@80/2008/05.16.18.21>>

INPE  
São José dos Campos  
2008

## **PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6911/6923

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

## **CONSELHO DE EDITORAÇÃO:**

### **Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

### **Membros:**

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

## **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Jefferson Andrade Ancelmo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Simone A. Del-Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

## **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Marilúcia Santos Melo Cid - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva e Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

## **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Viveca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
Ciência e Tecnologia



INPE-15315-TDI/1359

## INVESTIGAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE MULTIVARIÁVEIS NO CONTROLE DE ATITUDE DE UM SATÉLITE RÍGIDO - FLEXÍVEL

Ximena Celia Méndez Cubillos

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, aprovada em 27 de fevereiro de 2008.

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m17@80/2008/05.16.18.21>>

INPE  
São José dos Campos  
2008

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

C891i Cubillos, Ximena Celia Méndez.

Investigação de técnicas de controle multivariáveis no controle de atitude de um satélite rígido - flexível/ Ximena Celia Méndez Cubillos. – São José dos Campos: INPE, 2008.

140p. ; (INPE-15315-TDI/1359)

1. Controle multivariável. 2. Estruturas flexíveis. 3. Controle LQR. 4. Controle LQG. 5. Controle  $H_\infty$  I. Título.

CDU (629.783)


---

Copyright © 2008 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, microfílmico, reprográfico ou outros, sem a permissão escrita da Editora, com exceção de qualquer material fornecido especificamente no propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

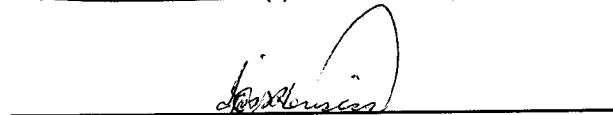
Copyright © 2008 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, microfilming, recording or otherwise, without written permission from the Publisher, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Mestre em  
Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle

Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza

  
\_\_\_\_\_  
Presidente / Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Ijar Milagre da Fonseca

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Álvaro Manoel de Souza Soares

  
\_\_\_\_\_  
Convidado(a) / UNITAU / Taubaté - SP

Dr. André Fenili

  
\_\_\_\_\_  
Convidado(a) / UFABC / Santo André - SP

Aluno (a): Ximena Celia Mendez Cubillos

São José dos Campos, 27 de Fevereiro de 2008



*“El gran enemigo del conocimiento no es la ignorancia, sino la ilusión de conocimiento.” Stephen Hawking*





*Aos meus lindos sobrinhos, Rebeca, Gabriela, Giovanna, André e Giulia, pela admiração que possuem por esta tia que os ama em demasia. Aos meus irmãos, Nelson Romualdo, Orlando Javier e Ruben Andrés pelos conselhos, proteção e carinho. E aos que me proporcionam sempre um apoio incondicional, exemplos de superação, meus pais, Nelson Fernando Méndez Correa e Elsa Catalina del Rosario Cubillos Cofrè; as minhas conquistas sempre serão suas conquistas.*



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos que contribuíram de alguma forma direta e indiretamente para a realização deste trabalho e pela minha evolução como pessoa.

Em especial:

A minha família, sobrinhos, irmãos, cunhadas, principalmente meus pais, pelo apoio sempre imediato, moral e financeiro.

Ao meu orientador Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, pela orientação desde os tempos de bolsa Pibic; a amizade, a admiração e o respeito construídos. Muito obrigada.

Aos membros da banca examinadora, Dr. André Fenili, Dr. Álvaro Manoel de Souza Soares e Dr. Ijar Milagre da Fonseca. Obrigada pelos conselhos, sugestões para redação final desta dissertação e principalmente pela amizade.

Aos meus amigos de turma, boas amizades foram estabelecidas.

A uma tia muito especial, Sra. Celia Abajo Arenas.

Deus; agradeço por tudo que Tens feitos e por tudo que Irás fazer.



## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal a investigação de técnicas de controle para o controle de atitude de um Satélite Rígido - Flexível. Para a investigação, desenvolveu-se um modelo de satélite constituído de um corpo rígido e dois painéis flexíveis. O Regulador Linear Quadrático (LQR), Regulador Linear Gaussiano (LQG) e Controle H – Infinito ( $H^\infty$ ) são as técnicas investigadas. No modelamento do satélite utiliza-se a abordagem lagrangiana e aplica-se uma discretização através do método dos modos assumidos. Obtidas as equações de movimento, escrevem-se as mesmas na forma variáveis de estados. Neste estágio trabalha-se com até três modos de flexão, a fim de averiguar a sua influência no desempenho do sistema. No LQR, a lei de controle apresentou ótimo desempenho. Embora o método só seja aplicado a um sistema com ausência de perturbações e onde todos os estados estão disponíveis, na realidade isso não acontece de fato. Já a aplicação do LQG é mais realista, pois nem todos os estados estão disponíveis e o sistema apresenta perturbações. O desempenho do sistema decai devido à presença do filtro de Kalman. Uma desvantagem de ambos os métodos é a ausência de um procedimento sistemático na escolha das matrizes de peso Q e R, e os ruídos w e v. O método  $H^\infty$  possui uma sistemática totalmente distinta dos outros dois métodos aqui aplicados. Comparando com o LQR e LQG seus resultados neste trabalho foi bem superior no critério tempo de estabilização. Contudo sua maior desvantagem está na necessidade de grande habilidade e experiência necessária para construir os pesos que estão associados ao desempenho do método  $H^\infty$ . Em relação à influência dos modos flexíveis da planta, verificou-se que não houve alteração significativa no desempenho da lei de controle ao amortecer os ângulos e as velocidades angulares do satélite. Porém, nos níveis de vibração dos painéis, os modos de flexão foram mais perceptíveis.



# INVESTIGATION OF MULTIVARIABLE CONTROL TECHNIQUES FOR ATTITUDE CONTROL OF A RIGID SATELLITE - FLEXIBLE

## ABSTRACT

The main objective of this work is the investigation of multivariable control techniques for attitude control of a Rigid Satellite - Flexible. For this investigation, a satellite model was developed consisting of a rigid body and two flexible panels. The investigated techniques are Linear Quadratic Regulator (LQR) method, Linear Quadratic Gaussian (LQG) method and H – Infinity method. The satellite modeling was built following the Lagrangean approach and the discretization was done using the assumed-modes method. The equations of motion obtained were written in its modal state space form. In this phase one works with three modes of vibration, in order to inquire its influence in the performance of the system. In LQR method, the control law shows a good performance, however the method is only applied for system with absence of disturbances and where all the states are available. In reality that does not happen. On the other hand, the LQG method is more realistic, because nor all the states are available and the system presents noises. The LQG controller (Kalman filter + LQR) is better for damping the modes of vibration of panels. However, the performance of the system decays due to presence of the Kalman filter. The disadvantage of both the methods is the absence of a systematic procedure in the choice of weights matrix Q and R, and noises w and v. The H $\infty$  method has a distinct systematic with respect to the other two methods here applied. In comparison with LQR and LQG the H $\infty$  results in this work had been superior. However its great disadvantage is in the need of great ability and necessary experience to build the weights that are associated to the performance of the method H $\infty$ . Regarding to the flexion modes of vibration, the influences were verified for the controller and were more perceptible in the levels of panel vibration.





## SUMÁRIO

Pág.

**LISTA DE FIGURAS**

**LISTA DE TABELAS**

**LISTA DE SÍMBOLOS**

**LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

**CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO..... 27**

**CAPÍTULO 2 - MODELAGEM DO SATÉLITE RÍGIDO-FLEXÍVEL..... 33**

2.1 Modelo Rígido Flexível..... 33

2.2 Equações do Movimento..... 34

2.2.1 Método dos Modos Assumidos ..... 34

2.2.2 Equações de Lagrange ..... 35

2.3 Equações na Forma de Variáveis de Estado ..... 42

2.3.1 Um Modo de Flexão ..... 42

2.3.2 Dois Modos de Flexão..... 44

2.3.3 Três Modos de Flexão..... 46

**CAPÍTULO 3 - CONTROLE MULTIVARIÁVEL..... 49**

3.1 Conceitos Básicos..... 49

3.1.2 Ganhos Principais de Uma Matriz ..... 52

3.1.3 Normas  $\|G\|_2$  e  $\|G\|_\infty$ ..... 53

3.2 Controle de Sistema Multivariáveis ..... 56

3.2.1 Introdução ..... 56

3.2.2 Equacionamento ..... 57

3.2.3 Requisitos de Controle em Termos de Ganhos Principais ..... 59

<b>CAPÍTULO 4 - MÉTODOS DE CONTROLE</b> .....	<b>65</b>
4.1 Regulador Linear Quadrático (LQR).....	65
4.1.1 Introdução .....	65
4.1.2 Teoria .....	65
4.2 Linear Quadrático Gaussiano (LQG).....	68
4.2.1 Introdução .....	68
4.2.2 O Problema do LQG.....	69
4.3 Método H-Infinito ( $H^\infty$ ).....	75
4.3.1 Introdução .....	75
4.3.2 Representação .....	75
<b>CAPÍTULO 5 - CONTROLE ROBUSTO</b> .....	<b>81</b>
5.1 Introdução .....	81
<b>CAPÍTULO 6 - PROJETO DO CONTROLADOR</b> .....	<b>85</b>
6.1 Lei de Controle .....	85
6.2 Condições Iniciais e Parâmetros .....	85
6.3 As Matrizes do Sistema.....	86
6.4 Projeto do LQR.....	88
6.4.1 Gráficos do LQR.....	91
6.5 Projeto do LQG .....	108
6.5.1 Gráficos do LQG .....	109
6.6 Projeto do $H^\infty$ .....	116
6.6.1 Gráficos do $H^\infty$ .....	117
<b>CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES</b> .....	<b>123</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>125</b>

<b>A APÊNDICE A - EXPANSÃO .....</b>	<b>135</b>
<b>B APÊNDICE B - MODELAMENTO DA INCERTEZA .....</b>	<b>137</b>
B.1 Introdução .....	137
B.2 Incerteza Não-Estruturada .....	137
B.3 Estabilidade Robusta .....	138
B.4 Incerteza Estruturada.....	139



## LISTA DE FIGURAS

2.1 - Esboço do SRF.....	33
2.2 - Modos de Flexão de uma Viga Engastada-Livre.....	36
3.1 - Sistema de Controle.....	50
3.2 - Ganhos Principais de G.....	55
3.3 - Representação esquemática do formato desejável de S e T.....	60
3.4 - Especificações típicas para um GK Multivariável.....	63
4.1 - Diagrama de Blocos do LQG.....	68
4.2 - Estrutura do Filtro de Kalman-Bucy.....	71
4.3 - Planta Estruturada do LQG.....	72
4.4 - Configuração Generalizada do $H^\infty$ .....	76
4.5 - Planta Aumentada do $H^\infty$ .....	78
5.1 - Desenvolvimento dos Métodos de Controle.....	82
5.2 - Vantagens e Desvantagens.....	82
5.3 - O Problema Real.....	83
6.1 – Fluxograma.....	91
6.2 - Pólos-LQR para um Modo.....	92
6.3 - Ângulo e Velocidade Angular – 1 Modo.....	93
6.4 - Vibração dos Painéis – 1 Modo.....	94
6.5 - Um Modo - Grupo 1.....	95
6.6 - Um Modo - Grupo 2.....	96
6.7 - Um Modo - Grupo 3.....	97
6.8 Pólos-LQR para 2 Modos.....	98
6.9 Ângulo e Velocidade Angular – 2 Modos.....	99
6.10 Vibração dos Painéis – 2 Modos.....	100
6.11 Dois Modos – Grupo 1.....	101
6.12 Dois Modos – Grupo 2.....	101
6.13 Dois Modos – Grupo 3.....	102
6.14 Pólos-LQR para três Modos.....	103
6.15 Ângulo e Velocidade Angular – 3 Modos.....	104

6.16 Vibração dos Painéis – 3 Modos.....	105
6.17 Três Modos – Grupo 1.....	106
6.18 Três Modos – Grupo 2.....	106
6.19 Três Modos – Grupo 3.....	107
6.20 LQG/LQR Ângulo e Velocidade Angular - 1 Modo.....	110
6.21 LQG/LQR Vibração dos Painéis – 1 Modo.....	111
6.22 LQG/LQR Ângulo e Velocidade Angular - 2 Modos.....	112
6.23 LQG/LQR Vibração dos Painéis – 2 Modos.....	113
6.24 LQG/LQR Ângulo e Velocidade Angular - 3 Modos.....	114
6.25 - LQG/LQR Vibração dos Painéis – 3 Modos.....	115
6.26 Malha Aberta $H^\infty$ .....	118
6.27 Especificação de Desempenho.....	118
6.28 Pólos do $H^\infty$ .....	120
6.29 Ângulo e Velocidade Angular - $H^\infty$ .....	121
6.30 Vibração dos Painéis - $H^\infty$ .....	122

## LISTA DE TABELAS

6.1 - Condições Iniciais.....	85
6.2 - Parâmetros de Configuração.....	86
6.3 - Valores dos Pólos - Um Modo em Malha Fechada.....	92
6.4: Variação dos Pesos.....	95
6.5 - Valores dos Pólos - Dois Modos em Malha Fechada.....	98
6.6 - Valores dos Pólos - Três Modos em Malha Fechada.....	103
6.7 - Pesos do Filtro de Kalman.....	109
6.8 - Transmission Zeros – Controlador $H^\infty$ .....	119
6.9 - Valores dos Pólos - $H^\infty$ .....	119





## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FK	Filtro de Kalman
FKB	Filtro de Kalman Bucy
$H^\infty$	H - Infinito
LQG	Regulador Linear Gaussiano (Linear Quadratic Gaussian)
LQG/LTR	Regulador Linear Gaussiano com Loop Transfer Recovery
LQR	Regulador Linear Quadrático (Linear Quadratic Regulator)
MIMO	Múltipla Entrada – Múltipla Saída
PRLQG	Parâmetro Robusto Regulador Linear Gaussiano
QFT	Teoria Quantitativa da Realimentação
SCA	Sistema de Controle de Atitude
SISO	Entrada Simples - Saída Simples
SRF	Satélites Rígidos – Flexíveis
TFL	Target Feedback Loop
TZ	Transmission Zeros



## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_iL$	Autovalores do sistema livre e não amortecido
$A$	Matriz da dinâmica do sistema
$A'$	Área do Painel
$B$	Matriz dos atuadores
$C$	Matriz dos sensores
$D$	Matriz de influência do controle na saída.
$e(s)$	Sinal de erro
$G(s)$	Matriz função de transferência de um sistema
$G^H$	Matriz conjugada transposta
$J$	Índice de desempenho
$J_0$	Momento de inércia do corpo rígido do satélite
$J_1$	Momento de inércia total do sistema
$J_p$	Momento de inércia do painel
$K_e$	Constante elástica dos painéis
$K_d$	Constante de dissipação
$K_f$	Matriz de ganhos do filtro de Kalman
$K_r$	Matriz de ganhos do regulador LQR
$K(s)$	Função de transferência do controlador
$L^*$	Função Lagrangiana
$L$	Comprimento do painel
$L_s$	Perturbação simples
$m$	Massa do satélite
$M$	Função dissipativa
$M_r$	Valor singular de pico de $\bar{\sigma}$
$P(s)$	Função do pré – filtro
$q_i$	Coordenadas generalizadas do problema
$Q$	Matriz peso que penaliza os estados
$q_{cc}$	Peso referente ao corpo central do satélite
$q_{pf}$	Peso referente as partes flexíveis do satélite

$r(s)$	Sinal de referência
$R$	Matriz peso que penaliza o controle
$S$	Função sensibilidade
$T$	Função de sensibilidade complementar
$u$	Vetor de controle
$v$	Ruído da medida
$v(x, t)$	Deslocamento elástico em relação ao eixo Z.
$V$	Energia potencial
$w$	Ruído do processo
$w_b$	Largura de faixa
$w_c$	Frequência de cruzamento
$y$	Vetor de estado
$y(s)$	Sinal de saída do sistema
$\hat{x}$	Estimativa do estado $x$
$z$	Sinal "erro"
$\alpha_i$	Rigidez centrípeta
$\Gamma$	Matriz de dimensão apropriada
$\Delta_p$	Matriz de perturbação
$\theta$	Ângulo de rotação do satélite
$\dot{\theta}$	Velocidade angular
$\overline{\sigma}(A)$	Máximo valor singular de $A$
$\underline{\sigma}(A)$	Mínimo valor singular de $A$
$\tau$	Torque da roda de reação
$\tau_q$	Atuador sobre o painel solar
$\Phi_i(x)$	Função admissível do $j$ -ésimo modo

## **CAPÍTULO 1**

### **INTRODUÇÃO**

Embora o uso de pequenos satélites artificiais tenha se mostrado um meio relativamente rápido, simples e de baixo custo de alcançar o espaço, em missões espaciais com as mais diversas aplicações (SOUZA, 1999), a conquista do espaço não será possível sem o emprego de estruturas espaciais flexíveis e conseqüentemente, de Satélites Rígidos – Flexíveis (SRF) em missões de maior complexidade (MODI, 1999).

Fatores como a limitação de peso por parte dos foguetes lançadores e o aumento das dimensões dos painéis solares, em face das exigências de consumo de potência, fazem com que a flexibilidade dos componentes estruturais tenha um papel preponderante no projeto do Sistema de Controle de Atitude (SCA) (SILVA E SOUZA, 1998). As aplicações do controle de estruturas flexíveis incluem o controle de manipuladores robóticos (SILVA ET AL. 2003), (FENILI, 2004); o controle da Estação Espacial Internacional (SOUZA, 1992), o controle das asas de avião e o controle de estruturas terrestre como prédios e torres (KRUCK, 2002).

Nos últimos anos vários aspectos associados ao controle de SRF vêm sendo estudados. O livro de Joshi (1989) trata em detalhes o problema de apontamento de um SRF simples, onde as principais tarefas do SCA são: i) apontamento fino de um dos painéis para diferentes pontos, ii) rotação de um dos painéis para seguir um determinado alvo no espaço, e iii) mudança rápida de orientação de um dos painéis de um grande ângulo. Na prática estes problemas dizem respeito ao desempenho do SCA de satélites com antenas e/ou com painéis flexíveis os quais realizam rotações ou manobras de atitudes predefinidas, tendo que em seguida manter uma precisão de apontamento e/ou amortecerem possíveis vibrações estruturais remanescentes (SOUZA, 1999), (MEIROVITCH, 1990, 1999).

Após a fase de apontamento e/ou manobras um SCA deve estabilizar e orientar os satélites durante sua missão, apesar de forças e perturbadores externos. A eficiência do SCA também é função do procedimento de determinação de atitude do satélite usando diferentes tipos de sensores e os métodos para um projeto de SCA podem ser baseados em uma dinâmica linear ou não linear (SOUZA, 2006).

Na maioria dos casos, nem todos os estados estão disponíveis, assim, uma metodologia de estimação torna-se essencial (CUBILLOS, 2007). Um algoritmo eficiente de estimação deve filtrar o ruído indesejável do sinal da medida; a metodologia do Filtro de Kalman (FK) é capaz de fazer esta tarefa. A teoria do filtro de Kalman (ANDERSON E MOORE, 1979; SORENSON, 1985) foi desenvolvida no início da corrida espacial com o objetivo de resolver o problema de navegação de uma espaçonave e desde que então, vem sendo aplicado em diversas áreas. Steyn e Hashida (1999) programaram um tipo de filtro de Kalman durante a fase inicial para determinar todas as medidas angulares dos magnetômetros de um satélite de observação da Terra. Souza et al. (2004) usaram o FK para calcular parâmetros elásticos de um SRF para melhorar o desempenho do SCA. Clements et al, em 2000 desenvolveu um estimador de atitude usando o filtro de Kalman estendido em um SCA de um satélite pequeno.

O acoplamento dinâmico entre o movimento rígido e o flexível (SILVA E SOUZA, 1998) também é um grande problema no projeto do sistema de controle de um SRF, uma vez que o movimento flexível exerce forças sobre a parte rígida e vice-versa. Os efeitos decorrentes do movimento de líquidos no interior dos reservatórios (POCHA, 1986) e o impacto na atitude do satélite devido à abertura dos painéis solares também são dificuldades dinâmicas no projeto do SCA de estruturas rígido/flexíveis (KIRK, 1996). Os efeitos devido a este acoplamento podem ser determinados através de uma modelagem minuciosa como a feita por Fenili (2002, 2003).

A utilização de experimentos em laboratório é uma outra forma de se familiarizar e de melhor entender as dificuldades que surgem na modelagem e na síntese de controladores para estruturas flexíveis (DICHMANN E SEDLAK, 1998). Um aparato experimental foi utilizado por Cannon e Rosenthal (1984) para investigar leis de controle para uma estrutura espacial flexível. Os resultados iniciais demonstraram dificuldades associadas ao controle, em particular quando sensores e atuadores são não colocados. A estrutura flexível utilizada tinha muitos modos de vibração de baixa frequência e um valor pequeno para o coeficiente de amortecimento. O aparato foi projetado para funcionar como uma bancada de teste, na qual permitiu a avaliação das leis de controle com sensores e atuadores na forma colocada e não colocada. Os resultados mostraram que para a configuração não colocada, o controle da estrutura flexível fica extremamente sensível à variação dos parâmetros do sistema, indicando a necessidade de estratégias de controle mais sofisticadas para o bom desempenho do controlador.

Outros estudos experimentais do controle de estruturas flexíveis são encontrados nos trabalhos de Soares et al (a), (b) (1997), Inman, (1989), Juang (1997) e Mook (1990), onde importantes aspectos ligados à identificação de parâmetros do sistema e a utilização de métodos confiáveis para a redução dos modelos são avaliados.

O conceito de valores singulares (DOYLE E STEIN, 1981) passou a ser um conceito chave para o desenvolvimento do método LQG/LTR (Linear Quadratic Gaussian/ Loop Transfer Recovery) com o objetivo de estender os conceitos do diagrama de Bode a sistemas multivariáveis.

Heise et al (1990) estudou o sistema de controle de atitude de uma estrutura espacial flexível considerando a dinâmica não modelada de alta frequência, onde são otimizados o índice de desempenho do método LQG (Linear Quadratic Gaussian) e a norma H-infinito (MACIEJOWSKI, 1989).

Considerando que o maior objetivo de se projetar um sistema de controle com realimentação é alcançar estabilidade e a especificação nominal de desempenho para uma determinada planta. E manter este desempenho independente dos erros existentes entre o modelo de projeto e o modelo real e da larga variação dos parâmetros do sistema. Assim, conclui-se que o procedimento para projetar um sistema de controle é uma tarefa difícil porque os requisitos citados são propriedades conflitantes (SAFONOV, 1981). Além disso, nem sempre é possível incluir ambas as fontes de erros, simultaneamente, no mesmo procedimento de projeto do sistema de controle. O primeiro é usualmente caracterizado por meio de modelos no domínio da frequência, e o segundo é representado através de modelos no espaço de estados.

No trabalho de Sato e Suzuki (1996), uma nova abordagem foi introduzida a fim de atingir as especificações de desempenho no domínio de tempo e as especificações de estabilidade robustas no domínio da frequência. Esta abordagem constitui-se de uma estrutura padrão e um filtro  $H^\infty$ . Primeiramente, uma lei de realimentação de todos os estados é projetada para alcançar a resposta desejável através da estrutura padrão. Em seguida, um estimador de estados é projetado, utilizando o  $H^\infty$ , a fim de dar a resposta e a garantida estabilidade robusta. Esta abordagem foi aplicada no controle de vibração de estruturas flexíveis, na qual demonstrou um desempenho excelente e boa robustez através de simulação e experiências.

Uma generalização do método LQG/LTR denominado de PRLQG (Parameter Robust Linear-Quadratic-Gaussian) foi proposto por Tahk e Speyer (1987), na tentativa de melhorar a robustez de estabilidade e reduzir a sensibilidade do sistema a perturbações devido a variações dos parâmetros da planta. A idéia fundamental neste método é formular a estrutura da variação do parâmetro como uma realimentação interna, usando o conceito de decomposição de entrada-saída (MORTON E MCAFFOS, 1985), a fim de incorporar a variação



do parâmetro na representação do sistema na forma de espaço de estado. Também, neste trabalho foi observado que a sensibilidade e a robustez são objetivos conflitantes, os quais passam a ser requisitos cruciais para um bom desempenho do SCA.

O principal objetivo deste trabalho é fazer um estudo extensivo e comparativo de diferentes estratégias de controle multivariáveis visando o projeto de um SCA. Inicia-se o estudo pelo método de controle LQR (Linear Quadratic Regulator), (CUBILLOS, 2005), o qual permite se projetar um controlador de forma iterativa, baseando-se no fato de que todos os estados estão disponíveis. Este método possui a desvantagem de não existir um procedimento sistemático para a determinação das matrizes pesos Q e R. Um segundo método tradicional a ser estudado é o LQG (Linear Quadratic Gaussian) (ROLF, 2004), o qual também é iterativo e sofre da mesma desvantagem da não existência de um procedimento sistemático para a determinação das matrizes pesos Q, R, W e V. Entretanto, este pode ser aplicado para casos em que nem todos os estados estejam disponíveis, pois a presença de um estimador de estado permite a obtenção dos estados que não são diretamente medidos. Neste método, se perde o desempenho alcançado pelo LQR sobre o SCA, que através do método LQG/LTR, esse desempenho é recuperado.

O método H-infinito como proposto por Glover e Doyle (1988) é mais uma alternativa a ser estudada, embora seja conhecido que neste método a tarefa de determinar e envolver as funções pesos na sistemática do projeto do controlador não é tarefa das mais simples.

No Capítulo 2 desenvolve-se o modelo matemático do SRF, constituído de um corpo rígido, de forma cúbica, mais dois painéis flexíveis, tratados como vigas engastadas-livres e uma roda de reação. O Capítulo 3 são apresentados os conceitos básicos da teoria de controle de sistemas multivariáveis, algumas

definições e a teoria desenvolvida baseada na modelagem dos ganhos principais do sistema. Os métodos de controle utilizados neste trabalho estão descritos no Capítulo 4. No Capítulo 5, tem-se uma introdução sobre a teoria de controle robusto. A seguir, no Capítulo 6, mostra como foi projetado cada método de controle utilizado no trabalho além da lei de controle, os parâmetros, as condições iniciais e os gráficos obtidos. Por fim, a conclusão no capítulo 7 e sugestões para trabalhos vindouros.

## CAPÍTULO 2

### MODELAGEM DO SATÉLITE RÍGIDO-FLEXÍVEL

#### 2.1 Modelo Rígido Flexível

Neste capítulo será desenvolvido o modelo matemático de um SRF, constituído de um corpo rígido, de forma cúbica ligado a dois painéis flexíveis e uma roda de reação, ver figura (2.1). Os painéis flexíveis são idênticos e diametralmente opostos, sendo considerados como vigas engastadas-livres. O centro de massa do satélite está no ponto O origem do sistema de referência inercial (X, Y, Z). Para derivar as equações de movimento para este modelo, será empregada a formulação Lagrangiana (JUNKINS E KIM, 1993) e é feita uma discretização utilizando o Método dos Modos Assumidos (MEIROVITCH, 1975) e (JUNKINS E KIM, 1993).

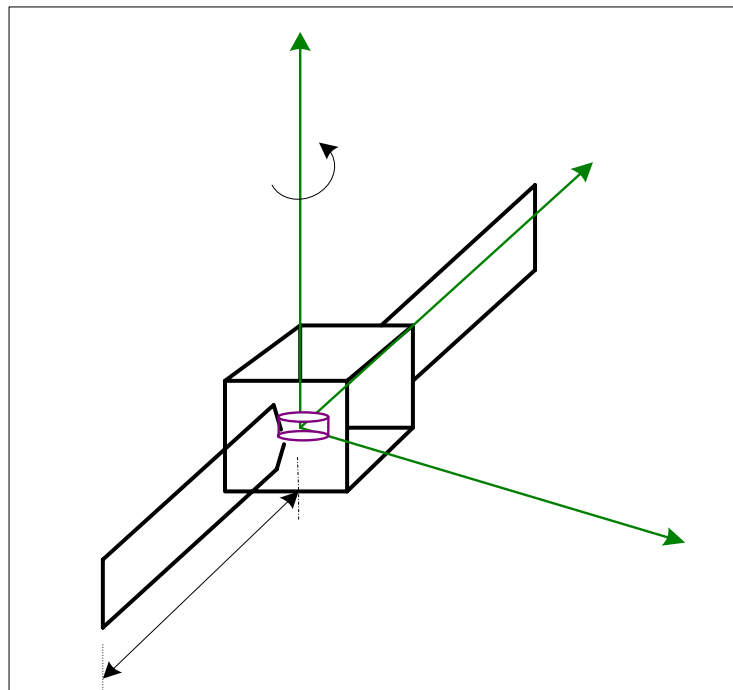


Figura 2.1 Esboço do SRF

O comprimento do painel é representado por  $L$ ,  $m$  sua massa e  $v(x, t)$  o seu deslocamento elástico em relação ao eixo  $Z$ . O momento de inércia do corpo rígido do satélite em relação ao centro de massa é  $J_0$ . O momento de inércia do painel em relação ao seu próprio centro de massa é dado por  $J_p$ . O ângulo de rotação do satélite em torno do eixo  $Y$  é  $\theta$ .

## 2.2 Equações do Movimento

### 2.2.1 Método dos Modos Assumidos

O método dos modos assumidos possui uma formulação similar ao Método Rayleigh – Ritz (Meirovitch, 1975). No método dos modos assumidos, a deflexão elástica (deslocamento elástico) de estruturas elásticas contínuas é modelada por uma série finita de autofunções dependentes do espaço multiplicadas por coordenadas generalizadas dependentes no tempo (VALDIVIA, 2005).

O método assume a solução do valor de contorno associado com sistema contínuo conservativo na forma:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.1)$$

onde  $\Phi_i(x)$  são as funções admissíveis e os  $q_i(t)$  são as coordenadas generalizadas, e usa-se esta solução em conjunto com as equações de Lagrange para obter uma formulação aproximada da equação do movimento do sistema. É essencial considerar o sistema contínuo como um sistema de  $n$  graus de liberdade de maneira similar ao método de Rayleigh-Ritz (MEIROVITCH, 1975).

Convém notar que  $v(x, t)$  representa o movimento de vibração da viga, que pode ser descomposto em vários modos;  $\Phi_i(x)$  representa a forma de deformação do  $i$ -ésimo modo; e  $q_i$  representa a variação deste modo no tempo. A função admissível  $\Phi_i(x)$  da equação (2.1), é representada como se segue (CRAIG, 1981) e (JUNKINS E KIM, 1993):

$$\phi_i(x) = \cosh(a_i x) - \cos(a_i x) - \alpha_i (\sinh(a_i x) - \sin(a_i x)) \quad (2.2)$$

Sendo que (Junkins e Kim, 1993):

$$\alpha_i = \frac{\cosh(a_i L) + \cos(a_i L)}{\sinh(a_i L) + \sin(a_i L)} \quad (2.3)$$

$a_i L$  está associado aos autovalores do sistema livre e não amortecido.

A representação gráfica dos três primeiros modos de vibração da viga-engastada livre é vista na figura (2.2), (MEIROVITCH, 1975) e (FENILI, 2006),

### 2.2.2 Equações de Lagrange

Na abordagem Lagrangiana são considerados o movimento de rotação do satélite em torno do eixo Y e o deslocamento elástico dos painéis (o movimento de translação do satélite é desconsiderado). A existência da roda de reação será tomada em conta somente o seu torque, neste trabalho a sua dinâmica não será trabalhada.

As equações de Lagrange, (MEIROVITCH, 1998), para o problema em questão são escritas na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial \theta} = \tau \quad (2.4)$$

E (MEIROVITCh, 1975):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} + \frac{\partial M}{\partial q_i} = 0 \quad (2.5)$$

onde  $L^*$  é a função lagrangiana,  $L^* = T - V$  (energia cinética – energia potencial elástica). Na equação (2.4),  $\theta$  é o ângulo de rotação do satélite em torno do eixo  $Y$  e  $\tau$  torque da roda de reação. Já na equação (2.5),  $M$  é a função dissipativa associada à deformação do painel,  $q_i$  representa cada uma das coordenadas generalizadas do problema.

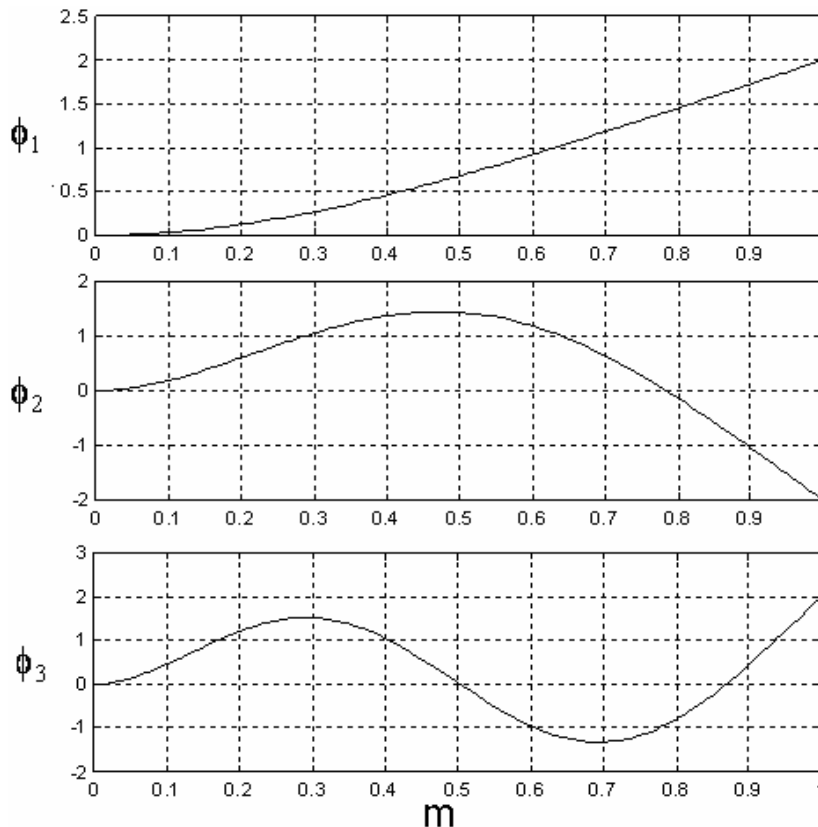


Figura 2.2 Modos de Flexão de uma Viga Engastada-Livre

Para uma representação mais completa do sistema, a expressão total da energia cinética  $T$  é dada  $T = T_{\text{satélite}} + T_{\text{painel}}$ , portanto:

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \left[ \rho A' \int_0^L \left[ \dot{v}(x,t)^2 + 2(\dot{v}(x,t))x\dot{\theta} + (x\dot{\theta})^2 + (\dot{\theta} \cdot \dot{v}(x,t))^2 \right] dx \right] \quad (2.6)$$

onde  $\rho$  é a densidade dos painéis e  $A'$  é a área do mesmo.

A energia potencial, que é devido à deformação do painel tem a forma:

$$V = \frac{1}{2} v(x,t)^2 \cdot K \quad (2.7)$$

onde  $K$  é constante elástica dos painéis. Devido ao satélite possuir painéis (tratados como vigas no modelamento) a expressão da energia potencial ficará da seguinte forma (DESOUZA, 2006):

$$V = (v(x,t))^2 K \quad (2.8)$$

A função dissipativa associada à deformação do painel é dada na forma:

$$M = 2 \left( \frac{1}{2} \dot{v}(x,t)^2 K_d \right) = \dot{v}(x,t)^2 K_d \quad (2.9)$$

onde  $K_d$  é a constante de dissipação.

Então  $L^* = T - V$ :

$$L^* = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \left[ \rho A' \int_0^L \left[ \dot{v}(x,t)^2 + 2(\dot{v}(x,t))x\dot{\theta} + (x\dot{\theta})^2 + (\dot{\theta} \cdot \dot{v}(x,t))^2 \right] dx \right] - v(x,t)^2 \cdot K \quad (2.10)$$

Substituindo equação (2.10) na equação (2.5) e iniciando a discretização:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \rho A' \int_0^L \left[ \left( \sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i \right)^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i \right) x \dot{\theta} \right] dx \right) \right) -$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left( \left( \dot{\theta} \sum_{i=1}^n \phi_i q_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n \phi_i q_i \right)^2 \cdot K dx \right) = 0 \quad (2.11)$$

Adicionando à equação (2.11) a equação (2.9):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \int_0^L \rho A' \left( \sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i \right)^2 dx \right) \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \int_0^L \rho A' \cdot 2 \cdot \left( \sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i \right) x \dot{\theta} dx \right) \right) -$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left( \int_0^L \rho A' \left( \dot{\theta} \sum_{i=1}^n \phi_i q_i \right)^2 dx \right) + K \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \int_0^L \left( \sum_{i=1}^n \phi_i q_i \right)^2 dx \right) +$$

$$K_d \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \int_0^L \left( \sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i \right)^2 dx \right) = 0 \quad (2.12)$$

Ou:

$$\rho A' \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \int_0^L \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i \phi_j \dot{q}_i \dot{q}_j dx \right) \right) + 2 \rho A' \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \dot{\theta} \int_0^L x \sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i dx \right) \right) +$$

$$K \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \int_0^L \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i \phi_j q_i q_j dx \right) + K_d \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \int_0^L \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i \phi_j \dot{q}_i \dot{q}_j dx \right) = 0 \quad (2.13)$$



Reescrevendo:

$$\begin{aligned}
& \rho A' \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i \dot{q}_j \int_0^L \phi_i \phi_j dx \right) \right) + 2\rho A' \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \dot{\theta} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \int_0^L x \phi_i dx \right) \right) - \\
& \rho A' \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i q_j \int_0^L \phi_i \phi_j dx \right) + K \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i q_j \int_0^L \phi_i \phi_j dx \right) + \quad (2.14) \\
& K_d \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i \dot{q}_j \int_0^L \phi_i \phi_j dx \right) = 0
\end{aligned}$$

Através da propriedade de ortogonalização dos modos próprios (HASSMANN E FENILI, 2007):

$$\int_0^L \phi_i \phi_j dx = 1 \quad \text{se} \quad i = j. \quad \int_0^L \phi_i \phi_j dx = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j. \quad (2.15)$$

Com isso, temos que:

$$\begin{aligned}
& \rho A' \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 \right) \right) + 2\rho A' \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \dot{\theta} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \int_0^L x \phi_i dx \right) \right) - \\
& \rho A' \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^n q_i^2 \right) + K \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_{i=1}^n q_i^2 \right) + K_d \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 \right) = 0 \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Através da expansão apresentada no apêndice A, chega-se a simplificação:

$$\rho A' \frac{d}{dt}(2\dot{q}_i) + 2\rho A' \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta} \int_0^L x \phi_i dx \right) - 2\rho A' \dot{\theta}^2 q_i + 2Kq_i + 2K_d \dot{q}_i = 0 \quad (2.17)$$

Ou,

$$2\rho A' \ddot{q}_i + 2\rho A' \ddot{\theta} \left( \int_0^L x \phi_i dx \right) - 2\rho A' \dot{\theta}^2 q_i + 2Kq_i + 2K_d \dot{q}_i = 0 \quad (2.18)$$

Definido as constantes,

$$\alpha_i = \int_0^L x \phi_i dx \quad \frac{K}{\rho A'} = c \quad \frac{K_d}{\rho A'} = d \quad (2.19)$$

Sabe-se que  $K$  é constante elástica dos painéis,  $K_d$  é a constante de dissipação e o termo não linear  $\alpha_i$  é denominado rigidez centrípeta. Por fim chega-se a equação que representa o deslocamento elástico dos painéis:

$$\ddot{q}_i + \alpha_i \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 q_i + d \dot{q}_i + c q_i = 0 \quad (2.20)$$

A equação de movimento que descreve o movimento de rotação do satélite é trabalhada a seguir, substituindo a equação (2.10) na equação (2.4):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \frac{J_0}{2} \dot{\theta}^2 \right) + 2\rho A' \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left( \dot{\theta} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \int_0^L x \phi_i dx \right) \right] + \quad (2.21)$$

$$\rho A' \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta}^2 \int_0^L x^2 dx \right) + \rho A' \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta}^2 q_i^2 \right) = \tau$$

Com a propriedade da equação (2.15) e a expansão apresentada no apêndice A, chega-se na simplificação:

$$\frac{J_0}{2} \frac{d}{dt} (2\dot{\theta}) + 2\rho A' \alpha_i \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \right) + 2\rho A' \frac{L^3}{3} \frac{d}{dt} (\dot{\theta}) + 2\rho A' \sum_{i=1}^n q_i^2 \frac{d}{dt} (\dot{\theta}) = \tau \quad (2.22)$$

E então:

$$J_0 \ddot{\theta} + 2\rho A' \alpha_i \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i + 2m \frac{L^2}{3} \ddot{\theta} + 2\rho A' \sum_{i=1}^n q_i^2 \ddot{\theta} = \tau \quad (2.23)$$

Definindo as constantes,

$$\frac{mL^2}{3} = J_p \quad 2\rho A' = b \quad J_1 = J_0 + 2J_p \quad (2.24)$$

Lembrando que,  $L$  é o comprimento,  $\rho$  é a densidade e  $A'$  é a área do painel;  $\tau$  torque da roda de reação;  $J_0$  é o momento de inércia do corpo rígido,  $J_p$  é o momento de inércia do painel e a soma dos dois momentos representa o momento de inércia total do sistema  $J_1$ .

$$J_1 \ddot{\theta} + \alpha_i b \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i + b \sum_{i=1}^n q_i^2 \ddot{\theta} = \tau \quad (2.25)$$

Simplificando, finalmente:

$$\ddot{\theta} \left( 1 + a \sum_{i=1}^n q_i^2 \right) + \alpha_i a \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i = \frac{1}{J_1} \tau \quad * \frac{b}{J_1} = a \quad (2.26)$$

Enfim, o conjunto de equações do movimento obtidas, que representam a dinâmica do movimento de rotação do satélite e o deslocamento elástico dos painéis, respectivamente:

$$\ddot{\theta} \left( 1 + a \sum_{i=1}^n q_i^2 \right) + \alpha_i a \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i = \frac{1}{J_1} \tau \quad (2.27)$$

$$\ddot{q}_i + \alpha_i \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 q_i + d \dot{q}_i + c q_i = 0 \quad (2.20)$$

## 2.3 Equações na Forma de Variáveis de Estado

### 2.3.1 Um Modo de Flexão

Fazendo uma mudança de variáveis considerando um modo (i=1) apenas:

$$\begin{aligned} \theta &= Y_1, & \dot{Y}_1 &= Y_2 = \dot{\theta}, & \dot{Y}_2 &= \ddot{Y}_1 = \ddot{\theta} \\ q_1 &= Y_3, & \dot{Y}_3 &= Y_4 = \dot{q}_1, & \dot{Y}_4 &= \ddot{Y}_3 = \ddot{q}_1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

As técnicas a serem aplicadas neste trabalho são fundamentalmente para sistemas lineares, portanto, linearizando as equações do movimento e aplicando a mudança de variáveis da equação (2.28) tem-se que:

$$\begin{aligned}
\dot{Y}_1 &= Y_2 \\
\dot{Y}_2 + a.\alpha_1\dot{Y}_4 &= \frac{1}{J_1}\tau \\
\dot{Y}_3 &= Y_4 \\
\dot{Y}_4 + \alpha_1\dot{Y}_2 &= -d.Y_4 - c.Y_3
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Para colocar o conjunto de equações (2.29) na forma de variáveis de estados e matricial  $\dot{x} = Ax + Bu$ , que por enquanto possui a forma  $\tilde{A}\dot{Y} = Y + \tilde{B}\tau$ . Ou seja:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_1.a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{Y}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -c & -d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1/J_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \tau \tag{2.30}$$

A fim de isolar  $\dot{Y}$ , deve-se encontrar a inversa de  $\tilde{A}$ , e multiplicando ambos os lados da equação matricial acima, pois  $\tilde{A} * \tilde{A}^{-1} = 1$ . Logo:

$$\dot{Y} = \tilde{A}^{-1} * Y + \tilde{A}^{-1} * \tilde{B} * \tau \tag{2.31}$$

Na equação (2.31) tem-se que:

$$\tilde{A}^{-1} * Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{-1+\alpha_1^2.a} & 0 & \frac{\alpha_1.a}{-1+\alpha_1^2.a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1}{-1+\alpha_1^2.a} & 0 & -\frac{1}{-1+\alpha_1^2.a} \end{pmatrix}}_A * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

E:

$$\tilde{A}^{-1} * \tilde{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{-1+\alpha_1^2.a} & 0 & \frac{\alpha_1.a}{-1+\alpha_1^2.a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1}{-1+\alpha_1^2.a} & 0 & -\frac{1}{-1+\alpha_1^2.a} \end{pmatrix}}_B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/J_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Deste modo, a equação matricial para um modo de flexão,  $\dot{Y} = AY + B.\tau$  possui esta forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{Y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_1.a.c}{-1+\alpha_1^2.a} & -\frac{\alpha_1.a.d}{-1+\alpha_1^2.a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{c}{-1+\alpha_1^2.a} & \frac{d}{-1+\alpha_1^2.a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\alpha_1}{(-1+\alpha_1^2.a).J_1} \end{pmatrix} \cdot \tau \quad (2.34)$$

### 2.3.2 Dois Modos de Flexão

Para as equações do movimento com dois modos de flexão, um conjunto de três equações é formado. Pois, dois modos de flexão significam duas equações governantes da viga, equação (2.36).

$$\ddot{\theta}(1 + a.q_1^2 + a.q_2^2) + \alpha_1.a.\ddot{q}_1 + \alpha_2.a.\ddot{q}_2 = \frac{1}{J_1}\tau \quad (2.35)$$

$$\ddot{q}_1 + \alpha_1\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 q_1 + d.\dot{q}_1 + c.q_1 = 0 \quad (2.36)$$

$$\ddot{q}_2 + \alpha_2\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 q_2 + d.\dot{q}_2 + c.q_2 = 0$$

A mudança de Variáveis,

$$\begin{aligned} \theta &= Y_1, & \dot{Y}_1 &= Y_2 = \dot{\theta}, & \dot{Y}_2 &= \ddot{Y}_1 = \ddot{\theta} \\ q_1 &= Y_3, & \dot{Y}_3 &= Y_4 = \dot{q}_1, & \dot{Y}_4 &= \ddot{Y}_3 = \ddot{q}_1 \\ q_2 &= Y_5, & \dot{Y}_5 &= Y_6 = \dot{q}_2, & \dot{Y}_6 &= \ddot{Y}_5 = \ddot{q}_2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

De tal modo, aplicando a mudança de variáveis e linearizando:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= Y_2 \\ \dot{Y}_2 + a.\alpha_1\dot{Y}_4 + a.\alpha_2\dot{Y}_6 &= \frac{1}{J_1}\tau \\ \dot{Y}_3 &= Y_4 \\ \dot{Y}_4 + \dot{Y}_2\alpha_1 &= -dY_4 - cY_3 \\ \dot{Y}_5 &= Y_6 \\ \dot{Y}_6 + \dot{Y}_2\alpha_2 &= -dY_6 - cY_5 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Seguindo os mesmos procedimentos apresentados no subcapítulo (2.3.1), para um modo de flexão, a estrutura das matrizes  $A$  e  $B$  da equação matricial para

dois modos de flexão  $\dot{Y} = AY + B.\tau$  são respectivamente apresentadas através das equações (2.39) e (2.40).

$$A = \begin{array}{c|ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ac.\alpha_1}{-1+a\alpha_1^2+a\alpha_2^2} & \frac{ad.\alpha_1}{-1+a\alpha_1^2+a\alpha_2^2} & \frac{ac.\alpha_2}{-1+a\alpha_1^2+a\alpha_2^2} & \frac{ad.\alpha_2}{-1+a\alpha_1^2+a\alpha_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-1+a\alpha_1^2)c}{-1+a\alpha_1^2+a\alpha_2^2} & \frac{(-1+a\alpha_1^2)d}{-1+a\alpha_1^2+a\alpha_2^2} & \frac{ac.\alpha_1.\alpha_2}{-1+a\alpha_1^2+a\alpha_2^2} & \frac{ad.\alpha_1.\alpha_2}{-1+a\alpha_1^2+a\alpha_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{ac.\alpha_1.\alpha_2}{-1+a\alpha_1^2+a\alpha_2^2} & \frac{ad.\alpha_1.\alpha_2}{-1+a\alpha_1^2+a\alpha_2^2} & \frac{(-1+a\alpha_2^2)c}{-1+a\alpha_1^2+a\alpha_2^2} & \frac{(-1+a\alpha_2^2)d}{-1+a\alpha_1^2+a\alpha_2^2} \end{array} \quad (2.39)$$

$$B = \begin{array}{c|c} 0 \\ 1 \\ \hline \frac{(-1+a.\alpha_1^2+a.\alpha_2^2)J_1}{0} \\ \frac{\alpha_1}{(-1+a.\alpha_1^2+a.\alpha_2^2)J_1} \\ \hline \frac{0}{\alpha_2} \\ \frac{(-1+a.\alpha_1^2+a.\alpha_2^2)J_1}{0} \end{array} \quad (2.40)$$

### 2.3.3 Três Modos de Flexão

As equações não-lineares do movimento para três modos são da seguinte maneira:

$$\ddot{\theta}(1+a.q_1^2+a.q_2^2+a.q_3^2)+\alpha_1.a.\ddot{q}_1+\alpha_2.a.\ddot{q}_2+\alpha_3.a.\ddot{q}_3=\frac{1}{J_1}\tau \quad (2.41)$$



$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 q_1 + d \dot{q}_1 + c q_1 &= 0 \\
\ddot{q}_2 + \alpha_2 \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 q_2 + d \dot{q}_2 + c q_2 &= 0 \\
\ddot{q}_3 + \alpha_3 \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 q_3 + d \dot{q}_3 + c q_3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Novamente, fazendo a mudança de variáveis:

$$\begin{aligned}
\theta &= Y_1, & \dot{Y}_1 &= Y_2 = \dot{\theta}, & \dot{Y}_2 &= \ddot{Y}_1 = \ddot{\theta} \\
q_1 &= Y_3, & \dot{Y}_3 &= Y_4 = \dot{q}_1, & \dot{Y}_4 &= \ddot{Y}_3 = \ddot{q}_1 \\
q_2 &= Y_5, & \dot{Y}_5 &= Y_6 = \dot{q}_2, & \dot{Y}_6 &= \ddot{Y}_5 = \ddot{q}_2 \\
q_3 &= Y_7, & \dot{Y}_7 &= Y_8 = \dot{q}_3, & \dot{Y}_8 &= \ddot{Y}_7 = \ddot{q}_3
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Então, linearizando e fazendo a mudança de variáveis:

$$\begin{aligned}
\dot{Y}_1 &= Y_2 \\
\dot{Y}_2 + a \alpha_1 \dot{Y}_4 + a \alpha_2 \dot{Y}_6 + a \alpha_3 \dot{Y}_8 &= \frac{1}{J_1} \tau \\
\dot{Y}_3 &= Y_4 \\
\dot{Y}_4 + \dot{Y}_2 \alpha_{1=3} &= -d Y_4 - c Y_3 \\
\dot{Y}_5 &= Y_6 \\
\dot{Y}_6 + \dot{Y}_2 \alpha_2 &= -d Y_6 - c Y_5 \\
\dot{Y}_7 &= Y_8 \\
\dot{Y}_8 + \dot{Y}_2 \alpha_3 &= -d Y_8 - c Y_7
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Ao seguir os mesmos procedimentos apresentado para um, anteriormente apresentados, de maneira análoga obteremos as matrizes A, B. Representadas pelas equações (2.45) e (2.46).

$$A = \begin{array}{c|cccccc}
 \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \frac{-ac\alpha_1}{\beta} \\ 0 \\ \frac{(-1+\alpha_1^2)c}{\beta} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{ac\alpha_1\alpha_3}{\beta} \\ 0 \\ \frac{ac\alpha_1\alpha_3}{\beta} \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \frac{-ad\alpha_1}{\beta} \\ 1 \\ \frac{(-1+\alpha_1^2)d}{\beta} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{ad\alpha_1\alpha_3}{\beta} \\ 0 \\ \frac{ad\alpha_1\alpha_3}{\beta} \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \frac{-ac\alpha_2}{\beta} \\ 0 \\ \frac{ac\alpha_1\alpha_2}{\beta} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{ac\alpha_2\alpha_3}{\beta} \\ 0 \\ \frac{ac\alpha_2\alpha_3}{\beta} \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \frac{-ad\alpha_2}{\beta} \\ 0 \\ \frac{ad\alpha_1\alpha_2}{\beta} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{ad\alpha_2\alpha_3}{\beta} \\ 0 \\ \frac{ad\alpha_2\alpha_3}{\beta} \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \frac{-ac\alpha_3}{\beta} \\ 0 \\ \frac{ac\alpha_1\alpha_3}{\beta} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(-1+\alpha_3^2)c}{\beta} \\ 0 \\ \frac{(-1+\alpha_3^2)c}{\beta} \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \frac{-ad\alpha_3}{\beta} \\ 0 \\ \frac{ad\alpha_1\alpha_3}{\beta} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(-1+\alpha_3^2)d}{\beta} \\ 1 \\ \frac{(-1+\alpha_3^2)d}{\beta} \end{array} \\
 \end{array} \quad (2.45)$$

$$*\beta = (-1 + a\alpha_1^2 + a\alpha_2^2 + a\alpha_3^2)$$

$$B = \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} \hline \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{l} (-1 + a\alpha_1^2 + a\alpha_2^2 + a\alpha_3^2).J_1 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{array} & \begin{array}{l} \hline \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{l} (-1 + a\alpha_1^2 + a\alpha_2^2 + a\alpha_3^2).J_1 \\ 0 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{array}{l} \hline \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{l} (-1 + a\alpha_1^2 + a\alpha_2^2 + a\alpha_3^2).J_1 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{array} & \begin{array}{l} \hline \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{l} (-1 + a\alpha_1^2 + a\alpha_2^2 + a\alpha_3^2).J_1 \end{array} & \begin{array}{l} \hline \\ \hline \end{array} \\
 \end{array} \quad (2.46)$$

## CAPÍTULO 3

### CONTROLE MULTIVARIÁVEL

Neste capítulo apresentam-se os conceitos relacionados com controle multivariável, no qual estão baseados na utilização de conceitos tais como ganhos principais e matrizes sensibilidade e sensibilidade complementar (VALDIVIA, 2005).

#### 3.1 Conceitos Básicos

a) Função Racional e Própria (MACIEJOWSKI, 1989) → Seja  $G(s)$  a matriz função transferência de um sistema. Então, cada elemento  $g_{ij}(s)$  de  $G(s)$  é uma função transferência relacionando a  $i$ -ésima saída com a  $j$ -ésima entrada do sistema.  $G(s)$  é dita racional e própria se cada um de seus elementos forem racionais e próprios, ou seja:

$$\left| g_{ij} \right| \in \mathfrak{R} \qquad \left| g_{ij} \right| < \infty \qquad (3.1)$$

b) Realização de  $G(s)$  (MACIEJOWSKI, 1989) → Dado o sistema cuja matriz função transferência é  $G(s)$ , este pode ser escrito na forma de variáveis de estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx + Du \qquad (3.2)$$

Sendo

$$G = C(sI - A)^{-1}B + D \qquad (3.3)$$

Denomina-se “realização de  $G$ ” (denotado por  $(A, B, C, D)$ ) conjunto das matrizes  $A$  (matriz da dinâmica do sistema),  $B$  (matriz dos atuadores),  $C$  (matriz dos sensores), e  $D$  (matriz de influência do controle na saída).

c) Razão de Retorno (SAFONOV ET AL, 1981) → Seja o sistema da Figura 3.1. Denomina-se, respectivamente, “razão de retorno em  $y$ ” e “razão de retorno em  $u$ ” as matrizes:

$$H_y = GK \quad (3.4)$$

$$H_u = KG \quad (3.5)$$

Na figura (3.1),  $G(s)$  representa a função transferência da planta, cujos sinais de entrada e saída são, respectivamente  $u(s)$  e  $y(s)$ ,  $K(s)$  representa a função transferência do compensador,  $P(s)$  a função transferência do pré-filtro,  $r(s)$  representa o sinal de referencia a ser seguido pela saída  $y(s)$ ,  $e(s)$  representa o erro entre  $r(s)$  e  $y(s)$ ,  $d(s)$  representa as perturbações e  $m(s)$  o ruído de medida.

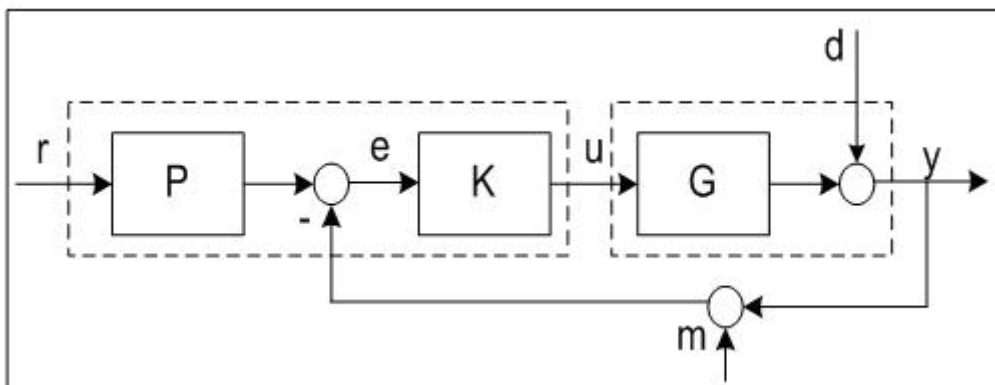


Figura 3.1 Sistema de Controle

O conjunto formado por  $K(s)$  e  $P(s)$ , chamado de controlador, é o objetivo do projeto (VALDIVIA, 2005), calculado de maneira a capacitar o sistema em suprir os requisitos que lhe são impostos.

d) Diferença de retorno (SAFONOV ET AL, 1981) → Dado o sistema da figura (3.1), denomina-se, respectivamente, “diferença de retorno em  $y$ ” e “diferença de retorno em  $u$ ”, as matrizes:

$$F_y = I + H_y \quad F_u = I + H_u \quad (3.6)$$

e) Sistema Internamente Estável (MACIEJOWSKI, 1989) → um sistema de controle, cuja matriz função transferência é  $G(s)$ , é dito internamente estável se, e somente se, a matriz  $G(s)$  é exponencialmente estável.

f) Matriz Exponencialmente Estável (MACIEJOWSKI, 1989) → uma matriz é dita exponencialmente estável se, e somente se, ela é própria e não possui pólos no semi-plano direito.

g) Estabilidade (STEIN E ATHANS, 1987) → é a habilidade de um sistema em apresentar saídas limitadas para toda entrada e perturbações limitadas.

h) Desempenho (STEIN E ATHANS, 1987) → é a capacidade de um sistema em seguir a referência. Independentemente de das perturbações, mantendo pequeno o erro.

i) Robustez (STEIN E ATHANS, 1987) → é a aptidão de um sistema em manter suas características de estabilidade e de desempenho na presença de incertezas no modelo da planta.

j) Freqüência de Cruzamento de Ganho (MACIEJOWSKI, 1989) →  $w_c$  é a freqüência para a qual o ganho de malha aberta é unitário (0 dB).

k) Largura de Faixa (MACIEJOWSKI, 1989) →  $w_b$  definida como a menor freqüência para a qual se tem:

$$|T(w_b)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |T(0)| \quad (3.7)$$

Na qual  $T$  é a função transferência de malha aberta do sistema. A largura de faixa é inversamente proporcional ao tempo de resposta do sistema. Isso quer dizer, diminuindo-se a largura de faixa  $w_b$ , o sistema torna-se mais lento. Para sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO),  $w_b$  é definida em relação ao menor valor singular de  $T$ . Em geral  $w_b$  é próxima de  $w_c$ , valendo a relação:

$$w_c \leq w_b \leq 2w_c \quad (3.8)$$

### 3.1.2 Ganhos Principais de Uma Matriz

Os ganhos principais de uma matriz desempenham um papel importante para o controle de sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO). De um modo geral, os ganhos de uma matriz (que são grandezas escalares) estão relacionados à idéia do tamanho desta matriz (STEIN E ATHANS, 1987).

A norma euclidiana do vetor  $x$  denota-se como  $\|x\|$ , portanto a “norma espectral” ou “norma Hilbert” da matriz  $G$  é:

$$\bar{\sigma} = \|G\|_s = \sup_x \frac{\|Gx\|}{x} \quad (3.9)$$

na qual  $\bar{\sigma}^2$  é o máximo autovalor de  $G^H H$  ( ou de  $GG^H$  conforme a dimensão de  $G$ ). As raízes quadradas dos autovalores de  $G^H G$ ,  $\sigma$ , são chamadas de “valores singulares de  $G$ ”. Se, ao invés de  $G$ , se tem  $G(s)$ , então estes valores

singulares ( $\sigma(s)$ ) são chamados de ganhos principais de  $G(s)$ ,  $\bar{\sigma}$  é o máximo valor singular e  $\underline{\sigma}$  o mínimo valor singular. Algumas das propriedades principais dos ganhos são apresentadas a seguir (MACIEJOWSKI, 1989):

$$\underline{\sigma}(A) = \bar{\sigma}(A)^{-1} \quad (3.10a)$$

$$\bar{\sigma}(A) = \underline{\sigma}(A)^{-1} \quad (3.10b)$$

$$\bar{\sigma}(\alpha A) = |\alpha| \bar{\sigma}(A) \quad (3.10c)$$

$$\bar{\sigma}(A + B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (3.10d)$$

$$\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B) \quad (3.10e)$$

$$\max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \leq \bar{\sigma}([A \ B]) \leq \sqrt{2} \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \quad (3.10f)$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma^2 = \text{Traço}(A^H A) \quad (3.10g)$$

$$\max(0, \bar{\sigma}(A) - 1) \leq \bar{\sigma}(A + 1) \leq \bar{\sigma}(A) + 1 \quad (3.10h)$$

$$\max(0, \underline{\sigma}(A) - 1) \leq \underline{\sigma}(A + 1) \leq \underline{\sigma}(A) + 1 \quad (3.10i)$$

### 3.1.3 Normas $\|G\|_2$ e $\|G\|_\infty$

Como visto anteriormente, os ganhos principais de uma matriz  $G(s)$  fornece uma informação sobre o tamanho da matriz para um espectro de freqüências, ou sobre o ganho associado a um canal de entrada e saída do sistema. No entanto, é favorável ter-se uma medida para este ganho e que seja independente da freqüência (MACIEJOWSKI, 1989). Duas destas medidas são as normas operadoras  $\|G\|_2$  e  $\|G\|_\infty$  definidas a seguir:

$$\|G\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traço}(G^H G) \right\}^{1/2} \quad (3.11)$$

$$\|G\|_{\infty} = \sup_w \overline{\sigma}(G) \quad (3.12)$$

Estas normas são chamadas de operadoras, pois quando relacionadas à matriz função transferência de um sistema, indica a amplificação que este sistema opera. Considerando-se o sistema definido por equação (3.2) e equação (3.3), supondo  $D=0$  e  $u$  um ruído branco, pode-se mostrar que (MACIEJOWSKI, 1989):

$$E\{y^T y\} = \|G\|_2^2 \quad (3.13)$$

Ou seja, indica o ganho de potência de  $y$ . Quando esta norma é aplicada a um sinal, por exemplo, substituindo-se  $G$  por  $u$  na equação (3.11). - sendo  $u$  um sinal qualquer, pelo Teorema de Parseval,

$$\|u\|_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} u^T u dt \right\}^{1/2} \quad (3.14)$$

Ou seja, equação (3.14) indica a energia do sinal  $u$ . O significado  $\|G\|_{\infty}$  da pode ser entendido através da relação (MACIEJOWSKI, 1989):



$$\sup_u \left( \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \right) = \|G\|_\infty \quad (3.15)$$

sendo  $u$  limitado e  $G(s)$  assintoticamente estável, própria e sem pólos no eixo imaginário. Ou seja,  $\|G\|_\infty$  indica o maior aumento de energia que pode ocorrer entre a entrada e a saída de um sistema.

O valor desta norma pode ser lido diretamente num gráfico tal como mostrado na figura (3.2), (VALDIVIA, 2005) na qual  $\|G\|_\infty$  é o valor do pico indicado por  $M_r$ .

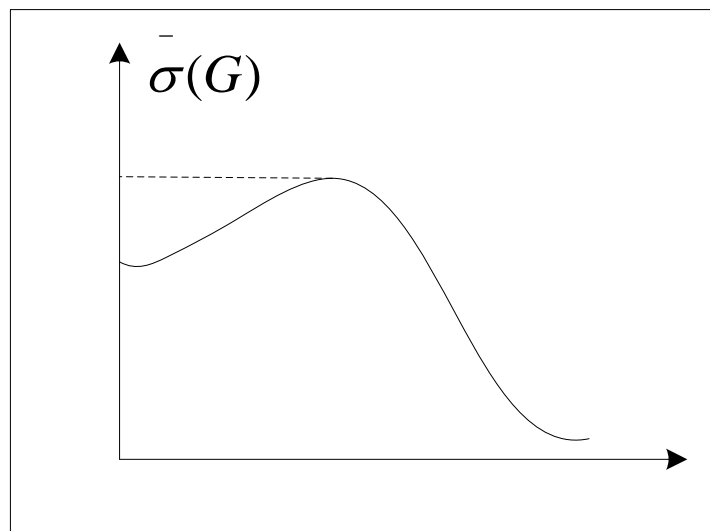


Figura 3.2 Ganhos Principais de  $G$ .

## 3.2 Controle de Sistema Multivariáveis

### 3.2.1 Introdução

Os fundamentos necessários da teoria de controle para o entendimento dos métodos de controle no controle de atitude do satélite serão estabelecidos. Tendo como referência o sistema apresentado na figura (3.1).

Os requisitos de controle podem ser definidos como Maciejowski (1989):

- a) Sensibilidade → minimizar os efeitos das perturbações  $d$ , minimizando o erro  $e$ ;
- b) Rejeição a Ruídos → minimizar os efeitos dos ruídos  $m$ ;
- c) Acompanhamento do Sinal de referencia → maximizar a habilidade do sistema em seguir  $r$ ;
- d) Minimização da Energia do Controlador.

O emprego de realimentação nos sistemas de controle, ou seja, o projeto do compensador  $K$ , visa satisfazer os três primeiros requisitos dados acima (SAFONOV E ATHANS, 1977). Propriedades do sistema tais como a resposta ao impulso, função transferência e outras relacionadas a respostas a comandos não são afetadas pelo uso da realimentação.

Estas propriedades podem ser modificadas por alterações diretamente aplicadas sobre a malha aberta do sistema. As respostas a comandos tais como a função impulso, por exemplo, podem ser convenientemente acertadas através do projeto do pré-filtro. Na verdade, este projeto pode ser feito independente do projeto do compensador  $K$ . Como este trabalho visa às características de malha fechada do sistema (estabilidade, sensibilidade e

robustez), a atenção está voltada apenas para o compensador  $K$ . Sendo assim, o controlador da figura (3.1) é constituído exclusivamente pelo compensador  $K$ , razão pela qual no decorrer deste trabalho não se faz distinção entre os termos “controlador” e “compensador”. Consideram-se (MACIEJOWSKI, 1989) o ruído  $m$  como um processo estocástico e as perturbações  $d$  do sistema devido às imprecisões do modelo.

### 3.2.2 Equacionamento

O equacionamento (VALDIVIA, 2005) em relação à figura (3.1):

$$y = d + GK(\text{Pr} - m - y) \quad (3.16)$$

Portanto,

$$(I + GK)y = d + GK(\text{Pr} - m) \quad (3.17)$$

O aparecimento do termo  $(I + GK)$  representa a diferença de retorno na saída da planta Maciejowski (1989).

Definido:

$$S = F^{-1} = (I + GK)^{-1} \quad (3.18)$$

$$T = (I + GK)^{-1} GK = SGK \quad (3.19)$$

Sendo  $S$  a “função sensibilidade” e  $T$  a “função sensibilidade complementar” ou “função transferência de malha fechada”, se pode escrever como:

$$y = Sd + TPr - Tm \quad (3.20)$$

Neste ponto se pode ver que o projeto do pré-filtro se relaciona apenas com os parâmetros de malha aberta. Ou seja, o pré-filtro age diretamente nos comandos de referência e não interferem nos efeitos das funções indesejadas  $d$  e  $m$ , relacionados à malha fechada.

Em aplicações praticas (MACIEJOWSKI, 1989), considera-se primeiramente  $P=I$  e projeta-se  $K$  visando apenas às características de  $S$  e  $T$ . depois num segundo passo, projeta-se  $P$  para o compensador  $K$  já projetado. Daqui por diante, se considera então  $P=I$  no sistema representado pela figura (3.1). Passando a ser:

$$y = Sd + Traço - Tm \quad (3.21)$$

Das equações (3.18) e (3.19) observa-se que as funções sensibilidade  $S$  e sensibilidade complementar  $T$  são interdependentes, estando vinculadas pela relação:

$$S + T = I \quad (3.22)$$

Da figura (3.1) tem-se:

$$u = K(r - m - d - Gu) \quad (3.23)$$

Considerando a diferença de retorno na entrada da planta dada pela equação (3.6), então a equação (3.23) pode ser escrita como:

$$F_u u = K(r - m - d) \tag{3.24}$$

$$u = F^{-1} K(r - m - d)$$

Ainda da figura (3.1), considerando a equação (3.18),

$$e = r - d - Gu - m \tag{3.25}$$

$$e = S(r - d - m)$$

### 3.2.3 Requisitos de Controle em Termos de Ganhos Principais

Analisando as equações (3.21), (3.24) e (3.25), consistente com a teoria exposta sobre os ganhos principais, se pode estabelecer os requisitos de projeto em termos dos ganhos principais das matrizes  $S$  e  $T$  (VALDIVIA, 2005).

- a) Sensibilidade  $\rightarrow$  manter  $S$  pequena, ou seja, manter  $\bar{\sigma}(S)$  pequeno.
- b) Rejeição a Ruídos  $\rightarrow$  manter  $T$  pequena, isso quer dizer, manter  $\bar{\sigma}(T)$  pequeno.
- c) Acompanhamento do Sinal de Referência  $\rightarrow$  manter  $T$  grande, isso significa, manter  $\bar{\sigma}(T)$  grande.

d) Minimizar a energia de Controle  $\rightarrow$  manter  $F_u^{-1}K$  pequena, ou seja,  $\bar{\sigma}(F_u^{-1}K)$  pequeno.

Levando em consideração que deve haver o equilíbrio entre  $S$  e  $T$ , equação (3.22), se conclui que os requisitos acima são conflitantes. A solução destes conflitos consiste em se moldar os ganhos  $S$  e  $T$  favoravelmente, de tal maneira que  $S$  e  $T$  sejam “grandes” ou “pequenas” em determinadas faixas de frequência, mantendo sempre válida a relação da equação (3.22).

A figura (3.3), (VALDIVIA, 2005) mostra uma representação esquemática desta solução. Usualmente o espectro das perturbações  $d$  e do sinal de referência  $r$  restringe-se a baixas frequências, sendo, portanto conveniente ter  $S$  pequena e  $T$  grande nesta faixa (MACIEJOWSKI, 1989).

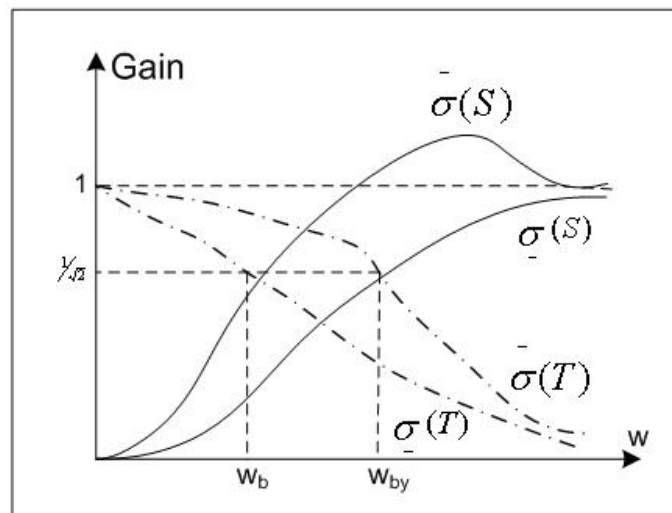


Figura 3.3 Representação esquemática do formato desejável de  $S$  e  $T$ .

Os ruídos de medida, em geral, ocorrem em altas frequências, tornando conveniente que  $T$  seja feita pequena acima de certa frequência (largura de faixa).

A diante, os conflitos entre os requisitos serão analisados em detalhes. Em vários pontos desta análise faz-se o uso da relação:

$$A(I + A)^{-1} = (I + A)^{-1}A = I - (I + A)^{-1} = (I + A^{-1})^{-1}$$

a) Sensibilidade (MACIEJOWSKI, 1989):

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(S) &= \bar{\sigma}((I + GK)^{-1}) = (\underline{\sigma}(I + GK))^{-1} \\ \bar{\sigma}(S) &\leq (\underline{\sigma}(GK))^{-1} \\ \bar{\sigma}(S) &\sim 0 \quad \text{se} \quad \underline{\sigma}(GK) \quad \text{for} \quad \text{grande}\end{aligned}\tag{3.26}$$

b) Rejeição de Ruídos (MACIEJOWSKI, 1989):

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(T) &= \bar{\sigma}(I - (I + GK)^{-1})^{-1} = (\underline{\sigma}(I + (GK)^{-1}))^{-1} \\ \bar{\sigma}(T) &\sim 0 \quad \text{se} \quad \underline{\sigma}(GK) \quad \text{for} \quad \text{pequeno.}\end{aligned}\tag{3.27}$$

c) Acompanhamento da Referência (MACIEJOWSKI, 1989):

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}(T) &= \underline{\sigma}(I - (I + (GK)^{-1})) \\ \underline{\sigma}(T) &\sim 1 \quad \text{se} \quad (I + GK)^{-1} \sim 0\end{aligned}\tag{3.28}$$

d) Energia de Controle (MACIEJOWSKI, 1989):

$$F^{-1}K = (I + KG)^{-1} K \bar{\sigma}(K) (\underline{\sigma}(F))^{-1}$$

$$F^{-1}K \sim 0 \quad \text{se } \underline{\sigma}(F) \gg \bar{\sigma}(k) \text{ o que implica em}$$

$$(\bar{\sigma}(K))^{-1} + \bar{\sigma}(G) \gg 1$$

$$F^{-1}K \sim 0 \quad \text{se } \bar{\sigma}(G) \text{ grande ou } \bar{\sigma}(K) \text{ pequeno} \quad (3.29)$$

Dos requisitos e expressões apresentadas podem-se resumir os termos de ganhos de malha aberta:

a) Sensibilidade:  $\underline{\sigma}(GK)$  grande;

b) Rejeição a Ruído:  $\bar{\sigma}(GK)$  pequeno;

c) Acompanhamento da Referência:  $\underline{\sigma}(GK)$  grande;

d) Energia de Controle:  $\bar{\sigma}(K)$  pequeno.

Os conflitos entre os requisitos para malha aberta são tratados da mesma forma que os de malha fechada. Para baixas frequências faz-se GK grande para altas frequências faz-se GK pequeno. A figura (3.4), (VALDIVIA, 2005) mostra uma representação esquemática destes requisitos.



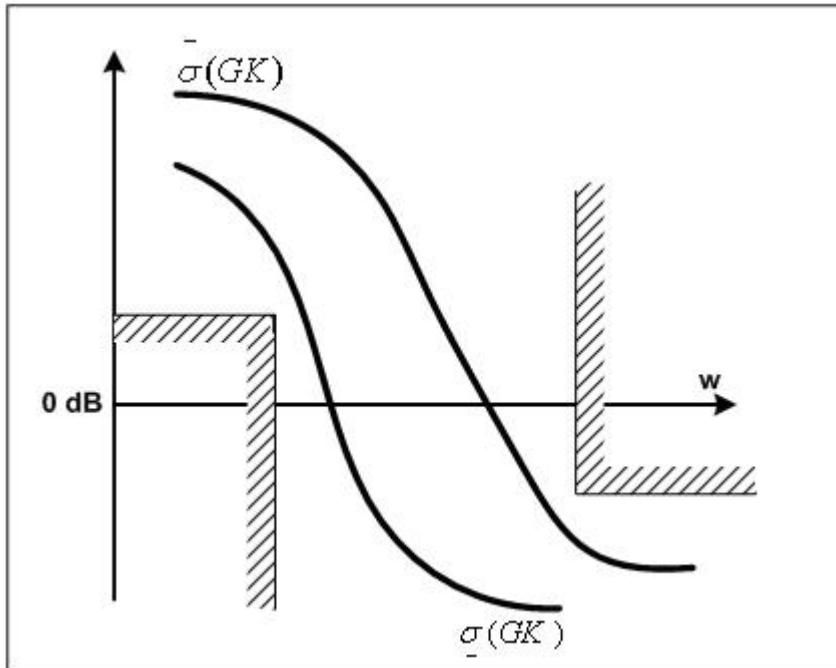


Figura 3.4 Especificações típicas para um GK Multivariável.



## CAPÍTULO 4

### MÉTODOS DE CONTROLE

Neste capítulo são apresentados a teoria dos métodos de controle utilizados neste trabalho.

#### 4.1 Regulador Linear Quadrático (LQR)

##### 4.1.1 Introdução

A teoria de controle ótimo e, em particular, a do Regulador Linear Quadrático (LQR), supõem a adoção de um índice de desempenho através do qual é possível otimizar grandezas físicas. A separação das condições de contorno e a sofisticação dos índices de desempenho (por exemplo, a minimização de tempo, combustível e energia) contribuem para o aparecimento das maiores dificuldades na determinação da solução do problema, principalmente na forma analítica (CUBILLOS, 2005). Entretanto, tal solução pode ser obtida e possui a vantagem de poder ser expressa em função do estado. A seguir apresenta-se um resumo da teoria do LQR.

##### 4.1.2 Teoria

A planta do regulador linear quadrático variante no tempo é dada pelo sistema de equações:

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \tag{4.1}$$
$$X(t_0) = X_0 \in R^N$$

onde  $A(t)$  e  $B(t)$  são funções matriciais variantes no tempo, de dimensão  $n \times n$  e  $n \times m$ , contínua por partes em relação a  $t$ , respectivamente.

O índice de desempenho a ser minimizado é dado por:

$$J(X_0, u(\cdot), t_0, t_f) = \frac{1}{2} \cdot X^T(t_f) H \cdot X(t_f) + \frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^{t_f} (X^T(t) Q(t) X(t) + U^T(t) R(t) U(t)) dt \quad (4.2)$$

onde:  $t_0$  é o instante inicial;  $t_f$  é o instante final;  $H$  é uma matriz,  $Q(t)$  e  $R(t)$  são funções matriciais, reais, simétricas, sendo as duas primeiras semidefinidas positivas e a última definida positiva, todas contínuas por partes em relação à  $t$ .

Esta teoria foi iniciada por Kalman (1960) e pode ser encontrado com mais detalhe em livros como Kwakernaak (1972) e Kailath (1980). Os valores selecionados para as matrizes  $H$ ,  $Q(t)$  e  $R(t)$  representam as penalizações impostas ao estado final, ao estado obtido e ao controle empregado ao longo do tempo, respectivamente. Como não há um processo sistemático para a escolha destes pesos, ela se torna trabalhosa e difícil, sendo normalmente feita por tentativa e erro (CUBILLOS, 2004, 2005).

A lei de controle que satisfaz a equação (4.1) e minimiza a equação (4.2) é dada por:

$$U(t) = R^{-1}(t) B^T(t) P(t) \quad (4.3)$$

onde  $P(t)$  é o vetor de variáveis adjuntas ou co-estado. A existência de  $R^{-1}(t)$  é assegurada, pois  $R(t)$  é uma matriz definida positiva. Essa lei de controle representa a solução do problema em malha aberta. Prova-se também que  $P(t)$  pode ser dado por:

$$P(t) = K(t) X(t) \quad (4.4)$$

onde  $K(t)$  é a solução da equação diferencial matricial de Riccati, dada na sua forma geral por:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) \quad (4.5)$$

com condição de contorno final  $K(t_f) = H$ . Substituindo a equação (4.4) na equação (4.3) obtém-se:

$$U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X(t) \quad (4.6)$$

que exprime  $U(t)$  como função linear, variante no tempo do estado do sistema, e representa a lei de controle ótimo em malha fechada.

A situação em que o processo é controlável para um intervalo de duração infinita merece uma atenção especial (CUBILLOS, 2005). Kalman (1960) mostrou que se em adição:

- 1) o sistema é completamente controlável,
- 2)  $H = 0$  e
- 3)  $A$ ,  $B$ ,  $R$  e  $Q$  são matrizes constantes; então a solução  $K(t)$  da equação (4.5) tende para um valor constante  $K$ , para quando  $t_f \rightarrow \infty$ . As implicações práticas deste resultado são muito importantes uma vez que  $\dot{K}(t) = 0$  facilita a solução da equação (4.5) que, neste caso, fica na forma:

$$0 = -KA - A^T K - Q + KBR^{-1}B^T K(t) \quad (4.7)$$

que é a equação algébrica matricial de Riccati.

## 4.2 Linear Quadrático Gaussiano (LQG)

### 4.2.1 Introdução

A metodologia do Linear Quadrático Gaussiano (LQG), introduzida por Doyle e Stein (1981), habilita o projeto de um controlador combinando técnicas no domínio de frequência e no domínio do tempo para um sistema de mínima-fase. O problema do LQG passou por uma importante evolução de interpretação. Os diversos parâmetros envolvidos (covariâncias dos ruídos e funções peso), antes manipulados de modo a se obter uma minimização de erros quadráticos, passaram a ser interpretados como parâmetros “sintonizadores”, ou “dispositivos para moldar” as funções de transferências tomadas em determinadas pontos da malha visando obter as melhores características de sensibilidade e desempenho (VALDIVIA, 2005).

A figura (4.1) representa o diagrama de blocos do LQG.

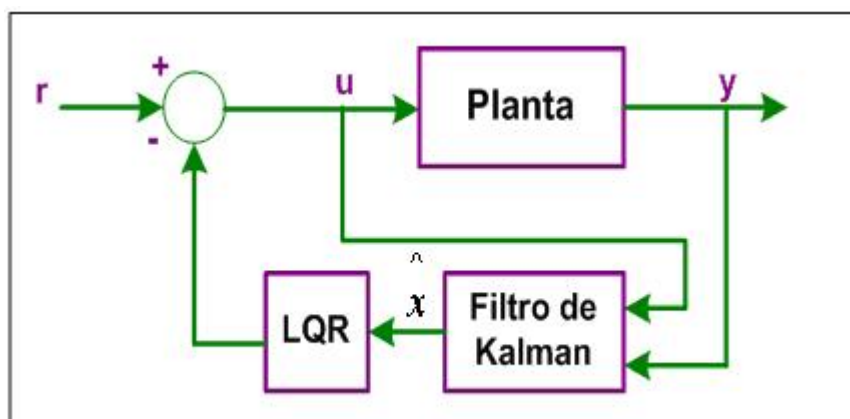


Figura 4.1 Diagrama de Blocos do LQG

### 4.2.2 O Problema do LQG

A metodologia do LQG é apresentada como segue. Dada uma planta representada na forma de estado-espço:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w \quad (4.8)$$

$$y = Cx + v \quad (4.9)$$

onde  $x$  é o vetor de estado,  $u$  o vetor de controle,  $y$  é o vetor de saída medido;  $\Gamma$  é uma matriz de dimensão apropriada;  $w$  e  $v$  são o ruído branco gaussiano com covariância dada, respectivamente, por:

$$E \{ww^T\} = W \geq 0 \quad (4.10)$$

$$E \{vv^T\} = V > 0 \quad (4.11)$$

O problema é então projetar uma lei de controle que minimiza o funcional quadrático:

$$J = \lim_{c \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^t (z^T Q z + u^T R u) dt \right\} \quad (4.12)$$

onde  $z = Hx$  é alguma combinação linear dos estados, e  $Q = Q^T \geq 0$ ,  $R = R^T > 0$  são matrizes peso.

A solução do problema LQG é descrita pelo princípio da separação (KWAKERNAAK, 1972) no qual se reduz para dois subproblemas. O primeiro é o problema de LQR que consiste em dada à planta:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.13)$$

Encontrar o controle que minimizará o funcional quadrático determinístico:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4.14)$$

A solução é usar uma lei de controle u função linear de estado na forma:

$$u = -K_r x \quad (4.15)$$

onde a matriz de realimentação de estado  $K_r$  é dado por:

$$K_r = R^{-1} B^T P_r \quad (4.16)$$

e  $P_r$  satisfaz a equação algébrica de Riccati:



$$A^T P_r + P_r A - P_r B R^{-1} B^T P_r + H^T Q H = 0 \quad (4.17)$$

com  $P_r = P_r^T \geq 0$ .

O segundo problema é o filtro de Kalman Bucy (FKB) que é um estimador de estado da forma:

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_f C)\hat{x} + B u + K_f y \quad (4.18)$$

com uma lei de controle  $u = -K_r \hat{x}$ , onde  $\hat{x}$  é o estado estimado. A estrutura do FKB é visto na figura (4.2).

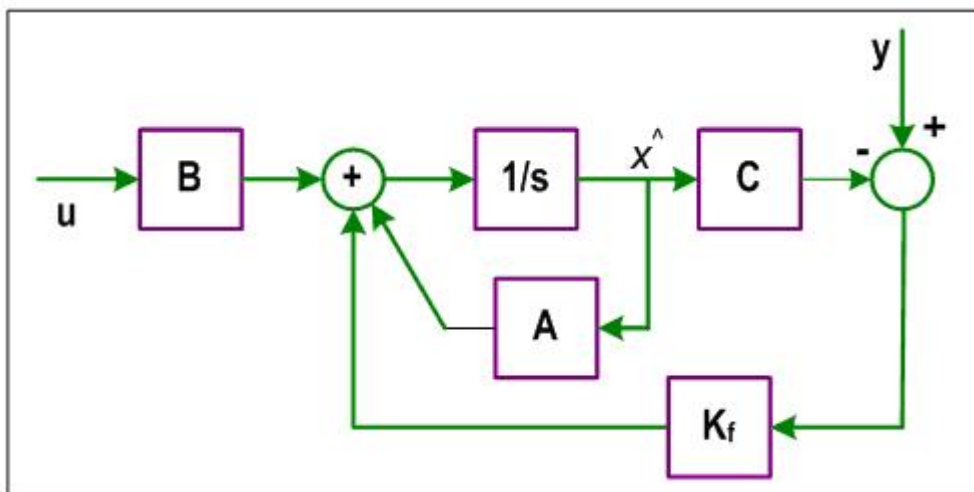


Figura 4.2 Estrutura do Filtro de Kalman-Bucy.

O ganho do FKB é  $K_f$  dado por:

$$K_f = P_f C^T V^{-1} \quad (4.19)$$

e  $P_f$  satisfaz outra equação algébrica de Riccati:

$$A^T P_f + P_f A - P_f C V^{-1} C^T P_f + \Gamma W \Gamma^T = 0 \quad (4.20)$$

com  $P_f = P_f^T \geq 0$ .

As matrizes  $K_r$  e  $K_f$  existem, e o sistema de malha-fechada é internamente estável. O sistema é estabilizável e detectável, isto é, qualquer modo não-controlável ou não-observável é assintoticamente estável (todos os autovalores desses modos têm partes reais negativas, não sendo permitidas partes reais nulas).

Quando a teoria LQG é usada como um método para sintetizar controladores, as matrizes  $Q$ ,  $R$ ,  $W$  e  $V$  são parâmetros de ajustes. Basicamente, projeta-se um compensador com uma estrutura interna particular a qual está conectada em série com um filtro de Kalman, estrutura apresentada na figura (4.3).

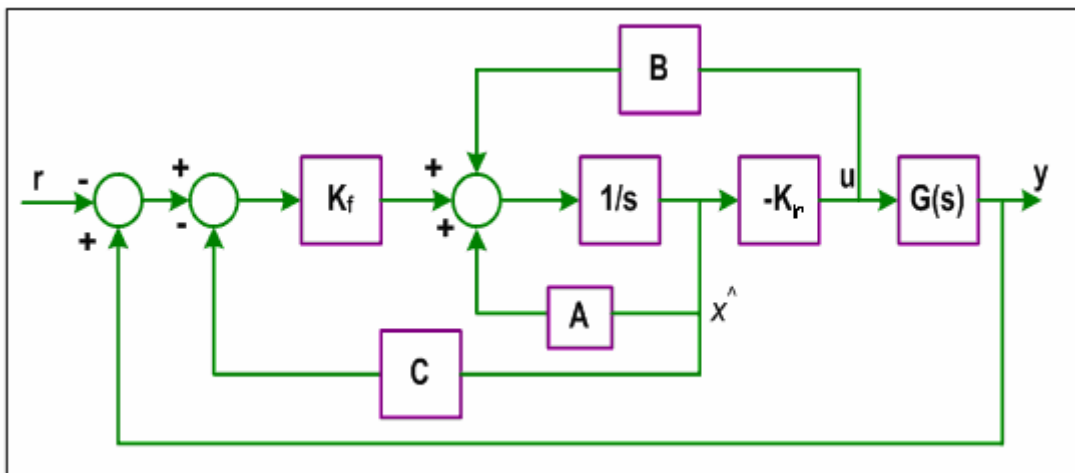


Figura 4.3 Planta Estruturada do LQG.

As propriedades do controlador podem ser avaliadas introduzindo a lei de controle  $u = -K_r \hat{x}$  nas equações (4.8) e (4.18). Usando a equação (4.9), temos a nova combinação filtro de Kalman e o estado realimentado dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_r & BK_f \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Gamma w \\ \Gamma w - K_f v \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Os autovalores de malha-fechada do LQG da planta compensada é a união dos autovalores do esquema do estado ótimo de realimentação com aqueles do filtro de Kalman.

Considerando  $u = -K_f \hat{x} + v$ , onde  $v$  é o comando ou referência de entrada. Substituindo  $u$  nas equações (4.8) e (4.18), e desconsiderando o ruído temos:

$$\dot{(x - \hat{x})} = (A - K_f C) \cdot (x - \hat{x}) \quad (4.22)$$

Introduzindo  $u$  na equação (4.8), pode-se então escrever:

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK_f)x + BK_r(x - \hat{x}) + Bv \quad (4.23)$$

Assim, usando as equações (4.8), (4.9), (4.22) e (4.23) obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_r & BK_f \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (4.24)$$

$$y = [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Considerando a entrada  $v$  e a saída  $y$ , a planta-controlador possui a seguinte matriz função de transferência:

$$G_{yv} = C[sI - (A - BK_f)]^{-1} B \quad (4.26)$$

A equação (4.26) mostra que os pólos de malha-aberta da planta, correspondentes aos zeros da expressão:  $\det [sI - A]$ ; são trocados pelos zeros da expressão:  $\det [sI - A + BK_r]$ .

## **4.3 Método H-Infinito ( $H^\infty$ )**

### **4.3.1 Introdução**

O aumento crescente de sistemas mais complexos e de processos que requerem ser controlados tem proporcionado o desenvolvimento de métodos tanto de análise como de projeto de sistemas de controle mais sofisticados. Muitos desses métodos nasceram nos centros de pesquisas e universidade (RODRIGUEZ, 2000).

A Teoria de Controle  $H^\infty$ , introduzida por Zames (1981), combina ambas as respostas do domínio do tempo e da frequência a fim de fornecer uma solução unificada. O  $H^\infty$  teve um impacto significativo no desenvolvimento de sistemas de controle durante as décadas de 1980 e 1990, atualmente a técnica tem amadurecido e suas aplicações em problemas industriais são cada vez maiores (RODRÍGUEZ, 2000).

Cabe mencionar que depois do método de controle  $H^\infty$ , outras técnicas também robustas surgiram com a síntese- $\mu$  por J. Doyle (1983) e simultaneamente a síntese- $K_m$  por M. Safonov (1983), a Teoria Quantitativa da Realimentação (QFT, Quantitative Feedback Theory) por I. Horowitz (1982) e os métodos baseados na incerteza estruturada de Kharitonov (Barmish, 1993), na qual seguem em desenvolvimento.

### **4.3.2 Representação**

A vantagem de usar o método  $H^\infty$  está na sua habilidade de incluir, em seu equacionamento, a solução de um problema de otimização. No qual, se incorpora os objetivos de desempenho como: a banda passante (bandwidth) e a resolução da função de custo (KRUCK, 2002). Na figura (4.4), uma configuração generalizada do sistema é mostrada.

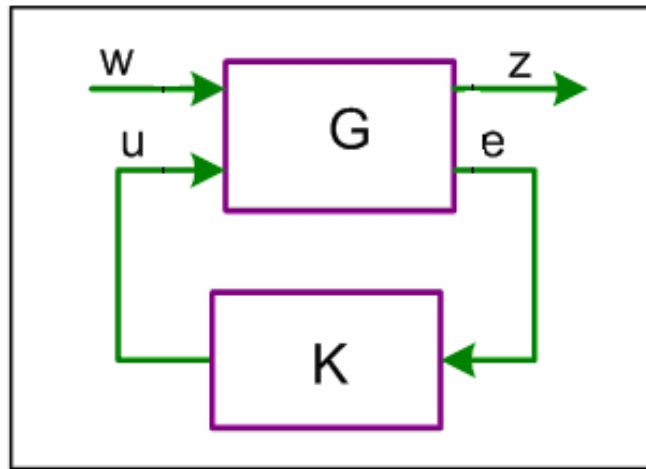


Figura 4.4 Configuração Generalizada do  $H^\infty$

Sendo que, o sinal  $w$  representa as entradas externas ao sistema;  $z$  é o sinal “erro”, composto por todos aqueles sinais necessários para caracterizar o comportamento de malha fechada do sistema;  $u$  é o sinal de controle;  $e$  é o sinal de diferença entre a saída  $y$  e as entradas  $w$ . O problema de controle é determinar um controlador  $K$  que estabilize  $G$  (uma planta generalizada) e minimize as funções transferência entre  $w$  e  $z$ .

O projeto de sistemas de controle robustos se baseia na formulação matricial:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.27}$$

$$y = Cx + Du$$

que considera o modelo generalizado do sistema (equação (4.28) e figura (4.4)) e necessita que as seguintes condições (equação 4.28) sejam atendidas (SAFONOV, 1989)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 W(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = P$$

1. O par  $(A, B_2)$  seja estabilizável<sup>1</sup>.
2. O par  $(A, C_2)$  seja detectável<sup>2</sup>.
3. A matriz  $D_{12}$  tenha inversa à esquerda<sup>3</sup> se  $D_{12}$  for escalar, então  $D_{12} \neq 0$ .
4. A matriz  $[A-sI \ B_2; C_1 \ D_{12}]$  tenha inversa à esquerda para todo  $s=jw, w \in \mathfrak{R}$ .
5. A matriz  $D_{21}$  tenha inversa à direita (se  $D_{21}$  for escalar, então  $D_{21} \neq 0$ ).
6. A matriz  $[A-sI \ B_1; C_2 \ D_{21}]$  tenha inversa à esquerda para todo  $s=jw, w \in \mathfrak{R}$ .
7.  $D_{11}=0, D_{22}=0$ .

A “planta aumentada” é formada pelas funções peso  $W_1, W_2$  e  $W_3$ , como demonstrado na figura (4.5), (KRUCK, 2002). A fim de alcançar os objetivos de desempenho, as saídas foram escolhidas a serem funções peso de transferência,  $z_1 = W_1 e; z_2 = W_2 y$  e  $z_3 = W_3 u$ .

---

<sup>1</sup> Um par  $A, B$  é estabilizável se existe uma matriz  $F$  tal que  $(A + BF)$  seja estável, ou seja, a parte real de cada autovalor de  $(A + BF)$  é negativa.

<sup>2</sup> Semelhante ao conceito da estabilizabilidade.

<sup>3</sup>  $B$  é a inversa à esquerda de  $A$  se  $BA = I$ , e  $B$  é a inversa à direita de  $A$  se  $AB = I$

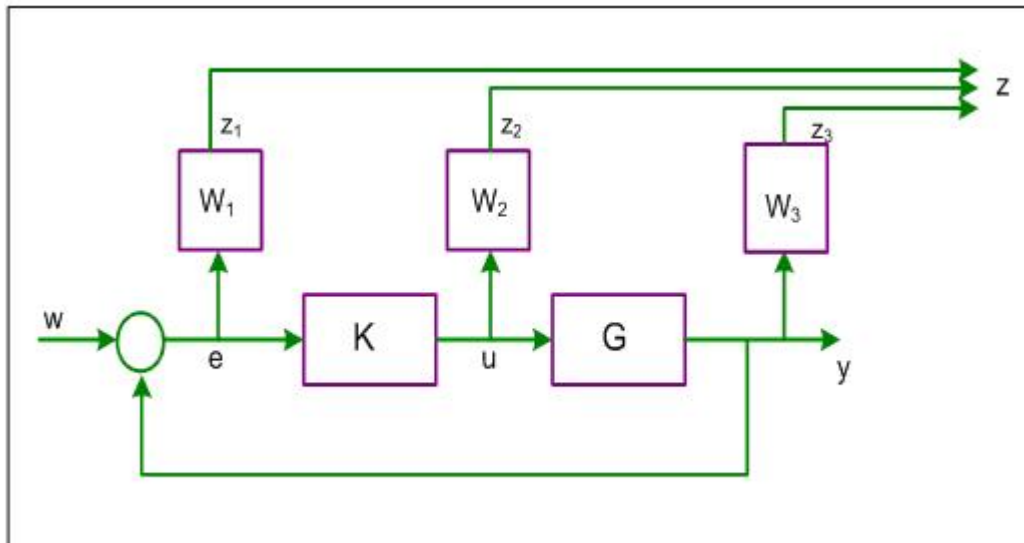


Figura 4.5 Planta Aumentada do  $H^\infty$

Sendo que, no controle  $H^\infty$  a função custo de sensibilidade mista é dada por:

$$T_{y|w} = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 R \\ W_3 T \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} S &= (I + GK)^{-1} \\ R &= K(I + GK)^{-1} \\ T &= GK(I + GK)^{-1} \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde  $S$  é chamada de sensibilidade,  $T$  sensibilidade complementar e  $R$  não possui nome algum. A função custo de sensibilidade mista é assim nomeada, pois penaliza ao mesmo tempo  $S$ ,  $R$  e  $T$ ; também pode ser dita como requisito de projeto.

Da figura (4.5) e da equação (4.29) é dito que a função de transferência de  $w$  a  $z_1$  é a função peso de sensibilidade,  $W_1 S$ , que caracteriza o desempenho do rastreamento; a função de transferência de  $w$  a  $z_2$  é a função da sensibilidade complementar  $T$ , cuja minimização assegura ganhos baixos do controle em altas frequências, e a função de transferência de  $w$  a  $z_3$  é o  $KS$ , que mede o



esforço do controle. Também são atribuídos os obstáculos na entrada do controle; por exemplo, os limites de saturação.

A função peso  $W_1$  põe um limite mais baixo sobre a largura de faixa do sistema de malha fechada. No problema  $H^\infty$ , esta preocupação de rejeição do ruído é refletida pela medida peso, introduzida pela função sensibilidade complementar  $T$ .



## CAPÍTULO 5

### CONTROLE ROBUSTO

Neste capítulo o conceito de controle robusto é apresentado. Comenta-se o desenvolvimento dos métodos de controle, as vantagens e desvantagens de cada método.

#### 5.1 Introdução

A teoria de controle clássico fornece os fundamentos para a estabilidade do sistema em geral. Os conceitos de margem de ganho e margem de fase foram propostos para avaliar a estabilidade relativa de sistemas SISO (Entrada Simples - Saída Simples), sob dois tipos de incerteza na planta: mudanças puras no ganho e na rotação de fase (por exemplo, causadas devido a alterações de comportamento em sensores e atuadores).

A teoria de controle ótimo fornece técnicas para incorporar a otimização de critérios de desempenho, além de garantir a estabilidade. A figura (5.1) demonstra o desenvolvimento dos Métodos da Teoria de Controle, com uma divisão em três períodos mais significativos (VON ZUBEN, 2003).

A teoria de controle robusto, campo ativo de pesquisa desde o final dos anos 70, também visa à garantia de estabilidade e o atendimento ótimo de critérios de desempenho, mas as ações de controle (por realimentação) devem realizar estas tarefas mesmo com incertezas no modelo da planta, na dinâmica e na operação dos sensores e atuadores.

A teoria de controle robusta, geralmente voltada para o caso de sistemas MIMO (Múltipla Entrada - Múltipla Saída), não deve ser vista como substituta

incondicional de técnicas de controle clássico, geralmente voltadas para o caso de sistemas SISO (Entrada Simples - Saída Simples), mas sim como uma extensão e/ou complementação (VON ZUBEN, 2003).

	<b>Controle Clássico</b> 1930 – 1960	<b>Controle Moderno</b> 1960 - 1980	<b>Controle Robusto</b> 1980 – nossos dias
<b>análise</b>	Diagramas de Bode Critério de Nyquist Critério de Routh – Hurwitz Lugar das Raízes Margens de Ganho e Fase	Modelo por Espaço de Estados Controlabilidade Observabilidade Processos Estocásticos	Decomposição em Valores Singulares Análise $\mu$ Fatorização Espectral Inequações Matriciais
<b>síntese</b>	Controladores PID Compensação Lead - Lag	Filtro de Kalman PLQ PLQG	síntese $H^\infty$ síntese $H_2/H^\infty$ síntese $\mu$
<b>paradigma</b>	Domínio da frequência SISO	Domínio do tempo MIMO	Domínio da frequência, com modelos por espaço de estados

Figura 5.1 Desenvolvimento dos Métodos de Controle

Na figura (5.2) estão resumidos todos os métodos disponíveis, bem como as suas vantagens e desvantagens (CHIANG, 1998).

<b>MÉTODOS</b>	<b>VANTAGENS</b>	<b>DESVANTAGENS</b>
<b>LQR</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>garante a estabilidade da margem</li> <li>ganho puro do controlador</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>necessita de todos os estados disponíveis</li> <li>necessita de um modelo exato</li> <li>permite muitas iterações</li> </ul>
<b>LQG</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>utiliza os dados disponíveis do ruído</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>não garante a estabilidade da margem</li> <li>necessita de um modelo exato</li> <li>permite muitas iterações</li> </ul>
<b>LQG/LTR</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>garante a estabilidade da margem</li> <li>procedimento do projeto sistemático</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ganho elevado do controlador</li> <li>permite muitas iterações</li> <li>o projeto enfoca um único ponto</li> </ul>
<b><math>H^2</math></b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>designa estabilidade e sensibilidade</li> <li>forma uma malha quase exata</li> <li>malha fechada sempre estável</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>permite muitas iterações</li> </ul>
<b>H - Infinito</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>designa estabilidade e sensibilidade</li> <li>forma uma malha exata</li> <li>procedimento direto</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>requer uma atenção especial para a robustez paramétrica da planta</li> </ul>
<b><math>\mu</math> - síntese</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>incerteza estruturada/ não estruturada combinadas no projeto</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>o problema é não - convexo</li> <li>o tamanho do controlador é gigantesco</li> </ul>

Figura 5.2 Vantagens e Desvantagens

O problema real no projeto de um sistema de controle robusto multivariável está representado na figura (5.3). Sendo que o objetivo do controlador é encontrar uma lei de controle que forneça os sinais de resposta apesar das incertezas do sistema (Apêndice B), tais como, perturbações (incerteza não estruturada), ruído do sensor (incerteza estruturada) e o controle.

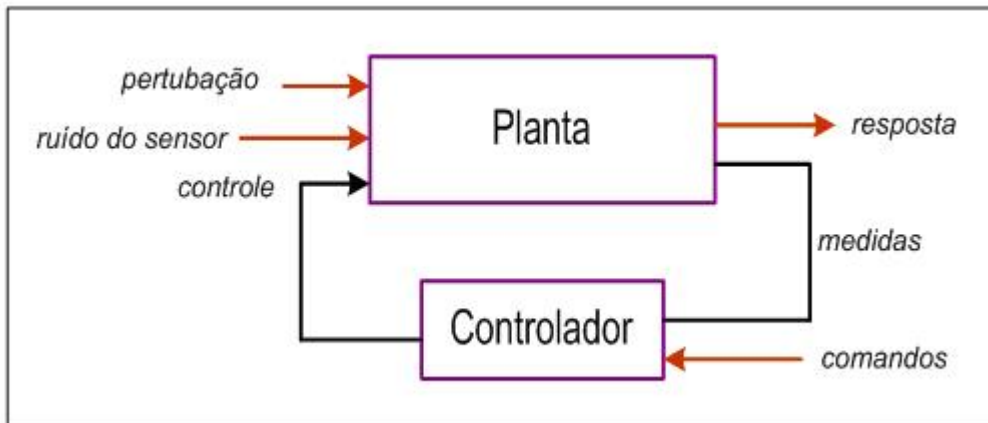


Figura 5.3 O Problema Real



## CAPÍTULO 6

### PROJETO DO CONTROLADOR

Este capítulo aborda como será feito o projeto de cada controlador, usando os métodos de controle apresentados no capítulo 4. A lei de controle utilizada e os parâmetros associados a cada um dos métodos, como matrizes pesos e ruídos, serão também apresentados. Juntamente as análises dos gráficos obtidos do sistema, sem controle e com os métodos de controle.

#### 6.1 Lei de Controle

Para o controle do ângulo, da velocidade angular do satélite e da deformação elástica do painel, iremos substituir o torque por uma lei de controle do tipo proporcional mais derivativa. Onde os ganhos  $K_1$  e  $K_2$  foram determinados através das simulações encontradas em DeSouza, 2006 e matematicamente representados por:

$$\tau_1 = -K_1\theta - K_2\dot{\theta} \quad (6.1)$$

#### 6.2 Condições Iniciais e Parâmetros

Nas tabelas (6.1) e (6.2) são apresentados as condições iniciais e os parâmetros utilizados em todo o trabalho.

TABELA 6.1: Condições Iniciais

	<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>
Ângulo	$\theta$	0.001 rad
Velocidade Angular	$\dot{\theta}$	0 rad/s

TABELA 6.2: Parâmetros de Configuração

Parâmetros	Símbolo	Valor
Momento de Inércia do corpo rígido do satélite	$J_0$	720 Kg.m <sup>2</sup>
Momento de Inércia do Painel	$J_p$	40 Kg.m <sup>2</sup>
Constante Elástica dos Painéis	K	320 Kg.rad <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Constante de Dissipação	$K_d$	0,48 Kg.rad <sup>2</sup> /s
Comprimento do Painel	L	2 m
Massa do Satélite	m	20 kg

### 6.3 As Matrizes do Sistema

- Para um modo de flexão:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6681 & 0.0010 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -32.5485 & -0.0488 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 813.7119 \\ 0 \\ -0.8351 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(6.2)



- Para dois modos de flexão:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6861 & 0.0010 & 0.8508 & 0.0013 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -32.8661 & -0.0493 & -0.6985 & -0.0010 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.6985 & -0.0010 & -32.5633 & -0.0488 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 835.7353 \\ 0 \\ -0.8577 \\ 0 \\ -1.0635 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(6.3)

- Para três modos de flexão:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7045 & 0.0011 & 0.8735 & 0.0013 & 0.8572 & 0.0013 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -33.7457 & -0.0506 & -0.7172 & -0.0011 & -0.7038 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7172 & -0.0011 & -33.4348 & -0.0502 & 0.8727 & -0.0013 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.7038 & -0.0011 & 0.8727 & 0.0013 & -33.4677 & -0.0502 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 858.1013 \\ 0 \\ -0.8806 \\ 0 \\ -1.0919 \\ 0 \\ -1.0716 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(6.4)

#### 6.4 Projeto do LQR

Usualmente esta seleção consiste em verificar, após várias simulações do problema, quais os valores destas matrizes que melhor satisfazem a certos critérios de desempenho e robustez (como por exemplo, porcentagem de sobrelevação, máximo controle e tempo de estabilização), que quando alcançados, refletem um melhor desempenho do sistema.

É usual adotar-se a forma diagonal para  $Q$ , e a forma vetor para  $R$ , como representado nas equações (6.5), (6.6) e (6.7). Pois assim, se possibilita que as componentes do estado e do controle sejam penalizadas individualmente, facilitando o ajuste e a interpretação física destas.

- Um modo de flexão:

$$Q = \begin{vmatrix} q_{cc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{cc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{pf} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{pf} \end{vmatrix} \quad R = |r| \quad (6.5)$$

- Dois modos de flexão:

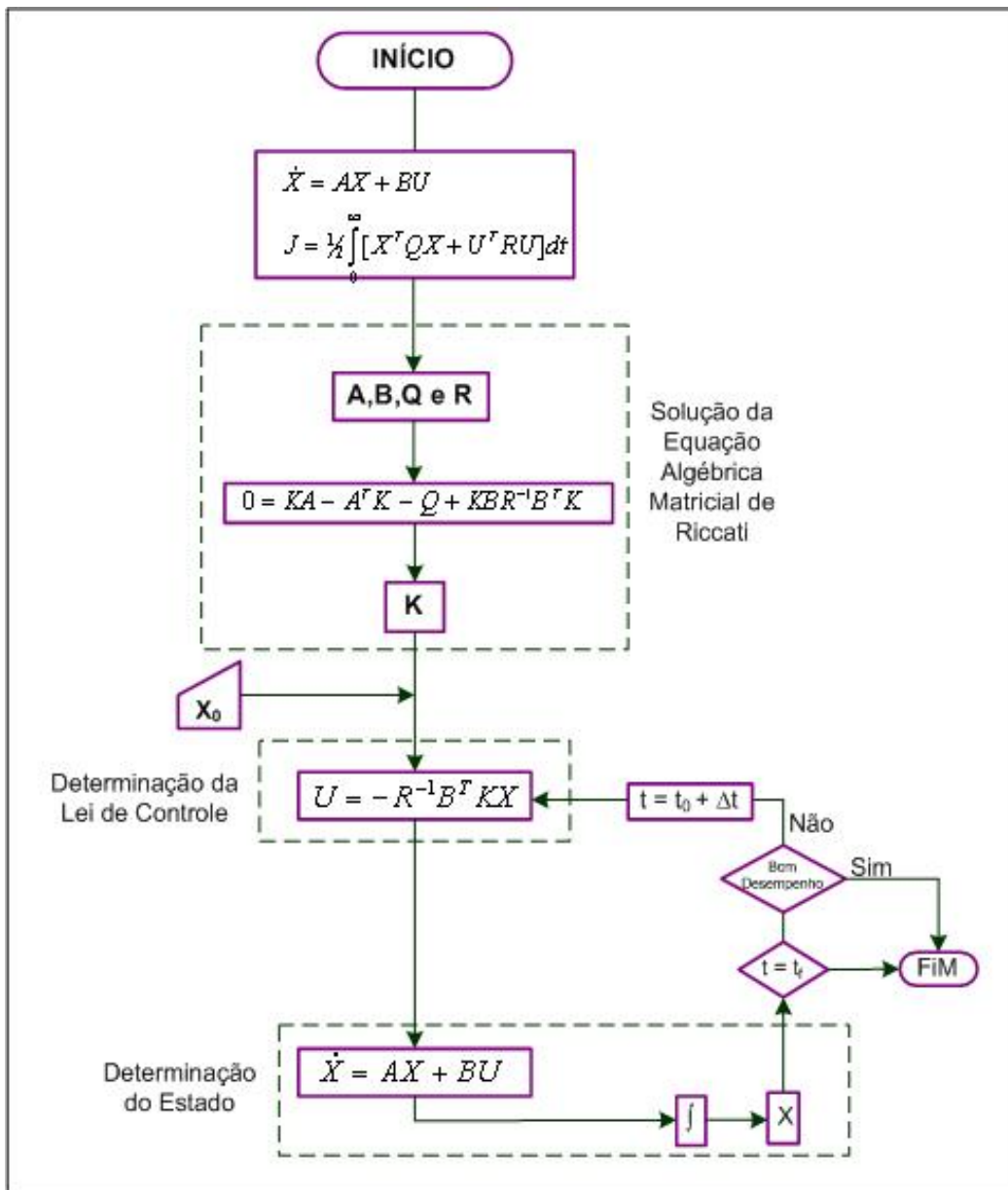
$$Q = \begin{vmatrix} q_{cc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{cc} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{pf} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{pf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{pf} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{pf} \end{vmatrix} \quad R = |r| \quad (6.6)$$

- Três modos de flexão:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{cc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{cc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{pf} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{pf} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{pf} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{pf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{pf} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{pf} \end{pmatrix} \quad R = |r| \quad (6.7)$$

A sistemática empregada neste trabalho para a seleção das matrizes pesos constitui inicialmente de várias simulações em busca dos melhores valores de  $q$ . Que através de tentativas e erros, o critério utilizado foi relacionado com o tempo de estabilização. Com esses resultados foi feito um aperfeiçoamento do desempenho da lei de controle, fazendo simulações mais específicas com os pesos  $q_{cr}$  (referente ao corpo central do satélite) e  $q_{pf}$  (referente as partes flexíveis do satélite). A configuração da matriz  $R$  é a mesma em todos os modos.

É interessante ressaltar que toda essa seleção está diretamente relacionada com a equação (diferencial ou algébrica) matricial de Riccati e a lei de controle  $U$ . Existem vários métodos numéricos para a solução da equação algébrica matricial de Riccati. Entre eles pode-se citar: integração direta, Kalman-Englar, diagonalização e Newton-Raphson (KWAKERNAAK E SIVAN, 1972). Na figura (6.1) há um fluxograma do programa implementado (CUBILLOS, 2004).



6.1 Fluxograma

### 6.4.1 Gráficos do LQR

O principal objetivo da análise do LQR é verificar a influência do número de modos no desempenho do controlador através dos pólos. E o que ocorre quando se modifica os pesos Q e R, observando o nível de sobrelevação ou sobre-sinal (overshoot) e o tempo de resposta. Lembrando que Q penaliza os estados e R o controle.

- Um modo de flexão:

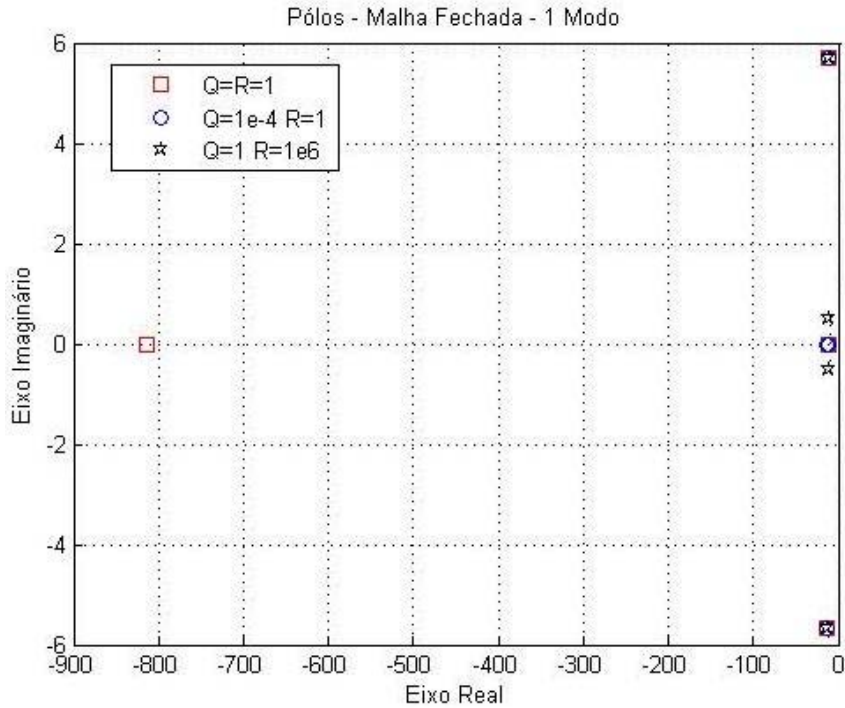


Figura 6.2 Pólos-LQR para um Modo.

TABELA 6.3: Valores dos Pólos - Um Modo em Malha Fechada

<b>Q=R = 1</b>	<b>Q=1e-4 R=1</b>	<b>Q=1 R=1e6</b>
-813.7100	-1.1080	-0.7566±0.4912i
-1	-2.3224	-0.0244±5.7051i
-0.022±5.7100i	-0.0244±5.7051i	

Através da figura (6.2) e da tabela (6.3) pode-se ver que pelos valores dos polos do LQR encontrados, variando os pesos  $q_{cc}$ ,  $q_{pf}$  e  $r$ . A variação que demonstra que o sistema será mais estável, com um melhor desempenho é quando temos os seguintes valores de  $q_{cc}=q_{pf}=r=1$ . Esse melhor desempenho é visto na figura (6.3), onde em Ângulo x Tempo temos que o tempo de

estabilização fica em torno de 4 segundos, e a sobrelevação está bem próximo da origem, melhor que as outras duas curvas.

Na mesma figura (6.3), analisando a curva da Velocidade Angular x tempo, temos que seu tempo de estabilização é cerca de 5 segundos e a sobrelevação está “praticamente” sobre a origem. Lembrando que, o comportamento do overshoot é importante quando se deseja proceder manobras no satélite, associado com as exigências estritas de precisão de apontamento.

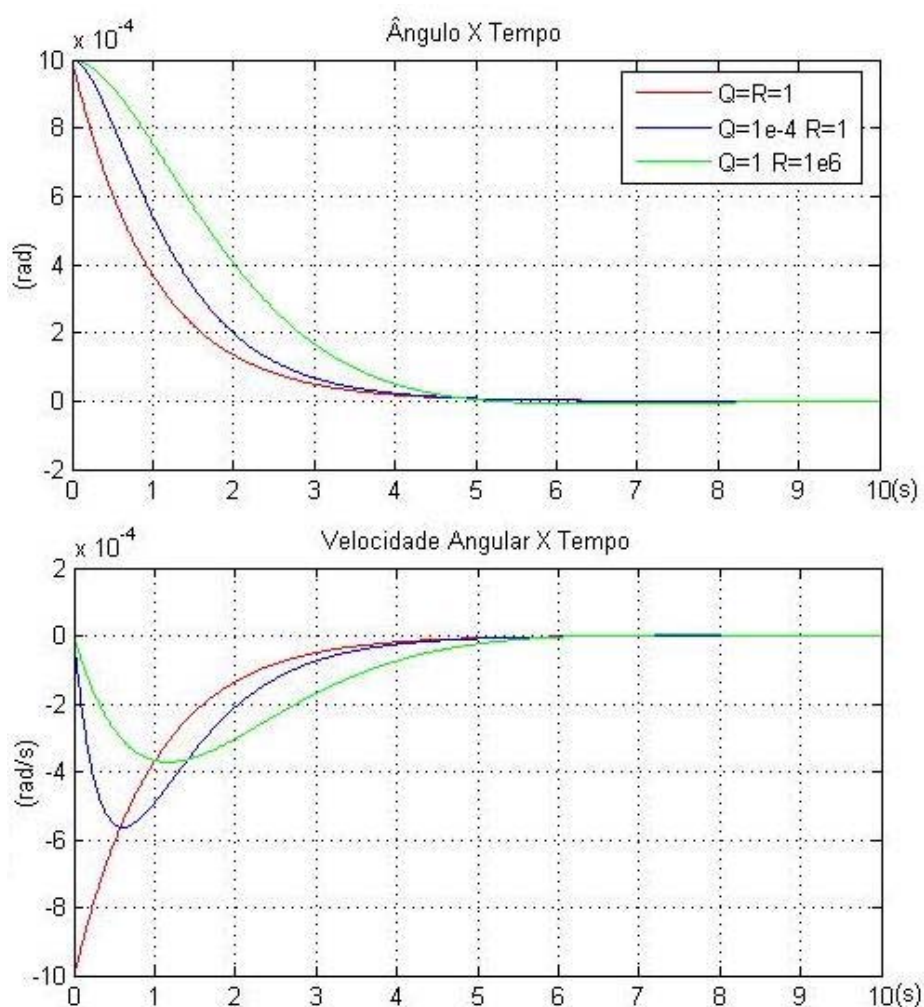


Figura 6.3 Ângulo e Velocidade Angular – 1 Modo.

Sobre a vibração dos painéis, representado pela figura (6.4), a melhor resposta é obtida através dos pesos  $Q = 1$  e  $R = 1e6$ , os valores dos pólos estão na tabela (6.4). Penalizando o controle através de  $R$  o nível de vibração diminui, porém o tempo de estabilização passa dos 60 segundos, como visto na figura (6.4).

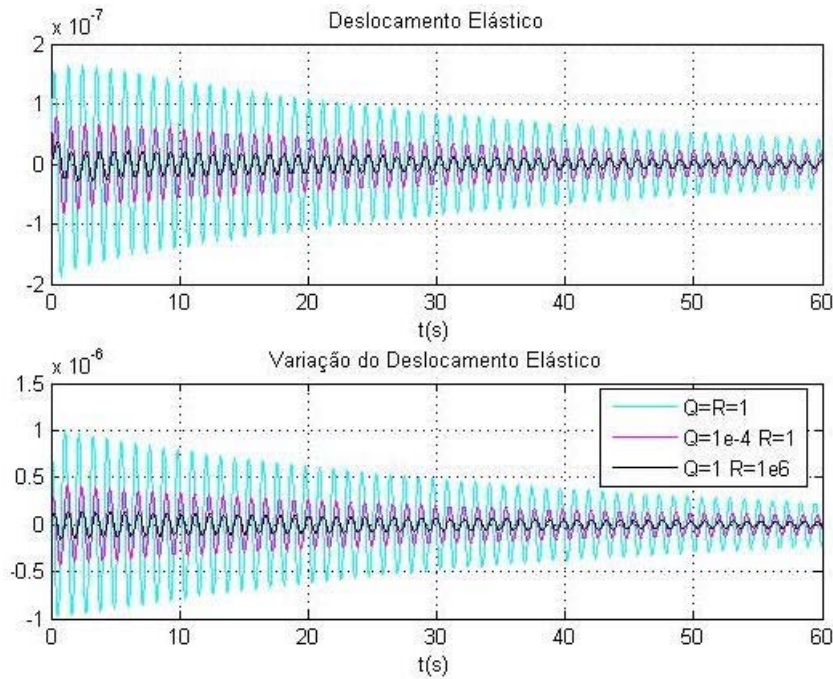


Figura 6.4 Vibração dos Painéis – 1 Modo.

Agora trataremos a matriz peso  $Q$  com pesos distintos em sua diagonal, ou seja, valores para  $q_{cc}$  (referente ao corpo central do satélite) distintos de  $q_{pf}$  (referente à parte flexível do satélite), equação (6.5). Com o interesse de analisar qual será a resposta do sistema em tal situação. A ponderação da Matriz  $R$ , peso  $r$  será mantida o mesmo valor em todas as situações, pois o objetivo aqui é estudar somente o comportamento da matriz  $Q$ . Os valores adotados nos gráficos a seguir estão na tabela (6.4).



TABELA 6.4: Variação dos Pesos

	$q_{cc}$	$q_{pf}$	$r$
<b>Grupo 1</b>	1	1000	1
<b>Grupo 2</b>	1000	1	1
<b>Grupo 3</b>	0.01	100	1

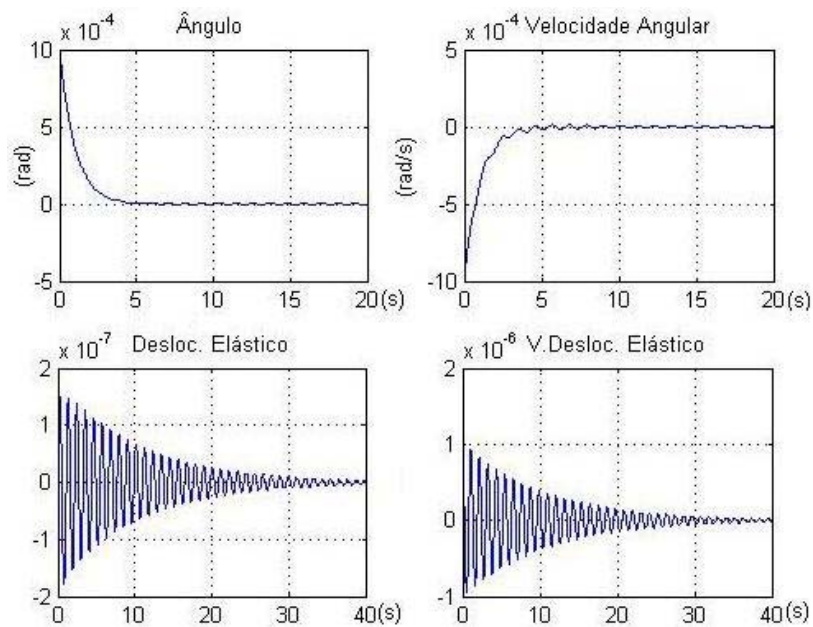


Figura 6.5 Um Modo – Grupo 1.

Da figura (6.5), ao aumentar do peso que se refere à parte flexível do satélite,  $q_{pf}$ , o seu tempo de estabilização dos níveis de vibração são bem menores, comparado à figura (6.6), onde o peso  $q_{cc}$ , referente à parte central do corpo, é aumentado, veja a tabela (6.4). No caso da figura (6.6), o tempo de estabilização nem em 40 segundos demonstrou uma boa convergência.

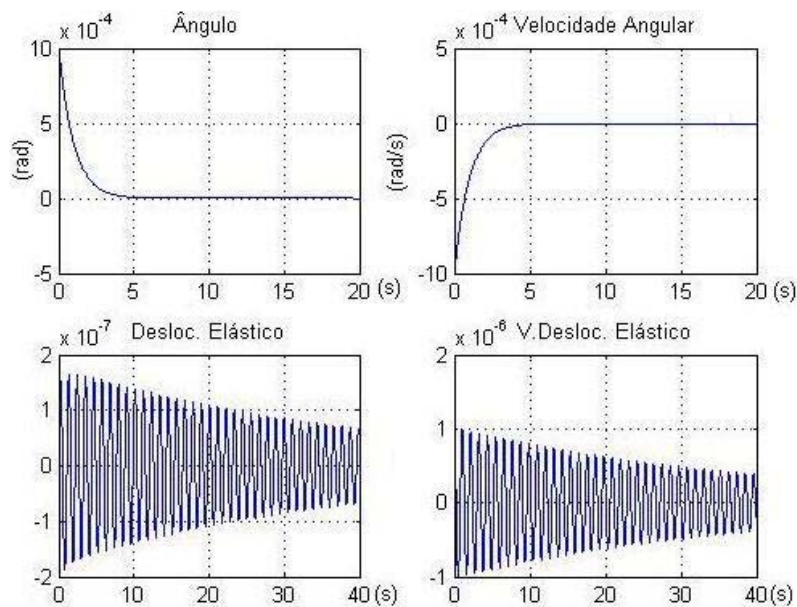


Figura 6.6 Um Modo – Grupo 2.

Nos gráficos de ângulo e velocidade angular, de ambas as figuras, (6.5) e (6.6), encontra-se outro resultado. Isso quer dizer, um resultado diferente, pois a melhor resposta é obtida com o aumento do peso  $q_{cc}$ . Porque seu tempo estabilização é de 5 segundos e com o overshoot próximo a origem, figura (6.6). Na figura (6.5), as resposta de ângulo e velocidade angular, possuem sobrepicos e um tempo de estabilização não definido, apesar de que seu traçado seja igual ao da figura (6.6).

Do resultado dessas duas figuras (6.5) e (6.6), com seus respectivos grupo de pesos aplicados, partiu-se em busca de um equilíbrio do sistema, ou seja, uma resposta onde tanto para ângulo e velocidade angular como para os níveis de vibração dos painéis, apresentem num só conjunto de pesos um bom desempenho, figura (6.7).

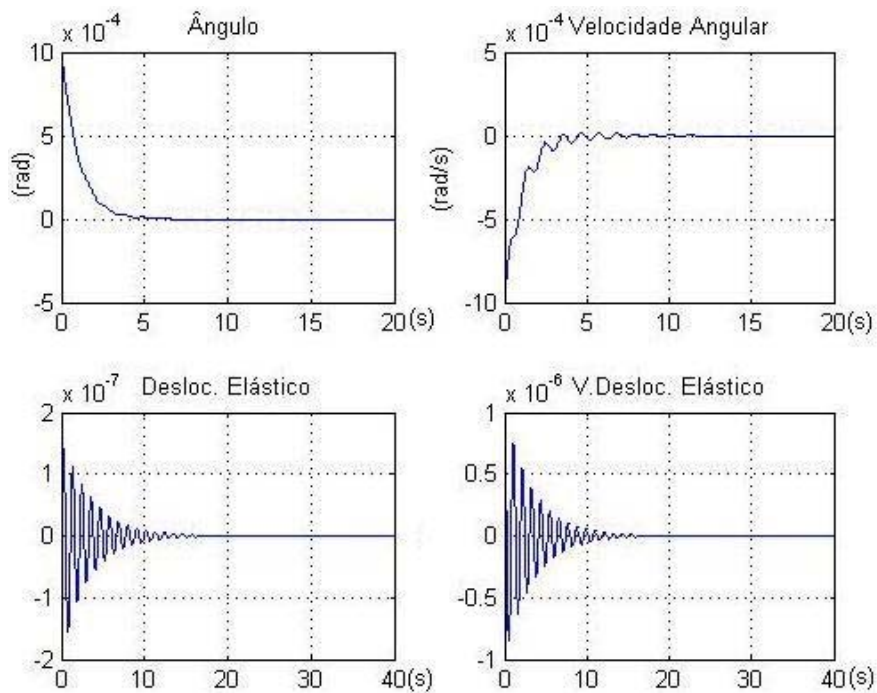


Figura 6.7 Um Modo – Grupo 3.

Na figura (6.7), após diversas simulações, com o conjunto de pesos representado na tabela (6.4), encontrou-se um bom resultado, tanto para ângulo e velocidade angular como para os níveis de vibração. Mesmo que o tempo de estabilização para ângulo e velocidade angular não tenha sido em torno de 5 segundos como obtido na figura (6.6) e sem sobrepicos. Deve-se considerar que num mesmo conjunto de pesos, o tempo de estabilização dos níveis de vibração dos painéis também foi alcançado. Ou seja, com o grupo 3, tabela (6.4), alcança-se bom resultado para o sistema como um todo.

A seguir, deve-se analisar como se comportará o LQR no tempo de estabilização e o nível de sobrelevação com os outros modos de flexão.

- Dois Modos de flexão:

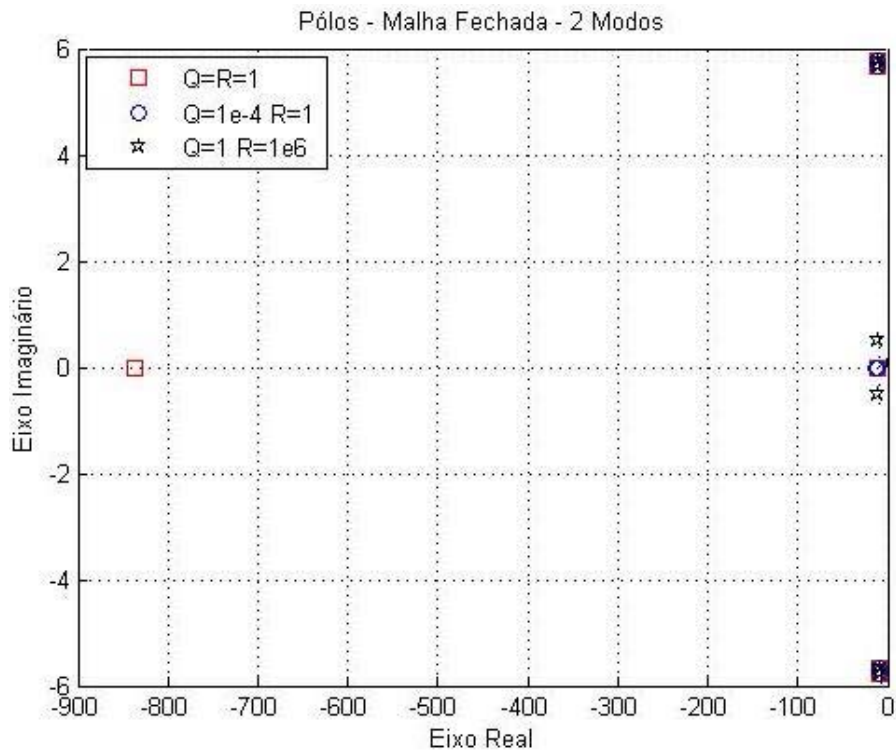


Figura 6.8 Pólos-LQR para 2 Modos.

TABELA 6.5: Valores dos Pólos - Dois Modos em Malha Fechada

<b>Q = R = 1</b>	<b>Q = 1e-4 R = 1</b>	<b>Q = 1 R = 1e6</b>
-835.74	-2.4030	--0.7697±0.4932i
-1	-1.0998	-0.0251±5.7818i
-0.030±5.780i	-0.0251±5.7817i	0.024±5.6568i
-0.02±5.660i	-0.024±5.6568i	

Na figura (6.9), nota-se que as curvas são totalmente idênticas à figura (6.3), para um modo de flexão, isso acontece porque as amplitudes dos modos de flexão são pequenas.

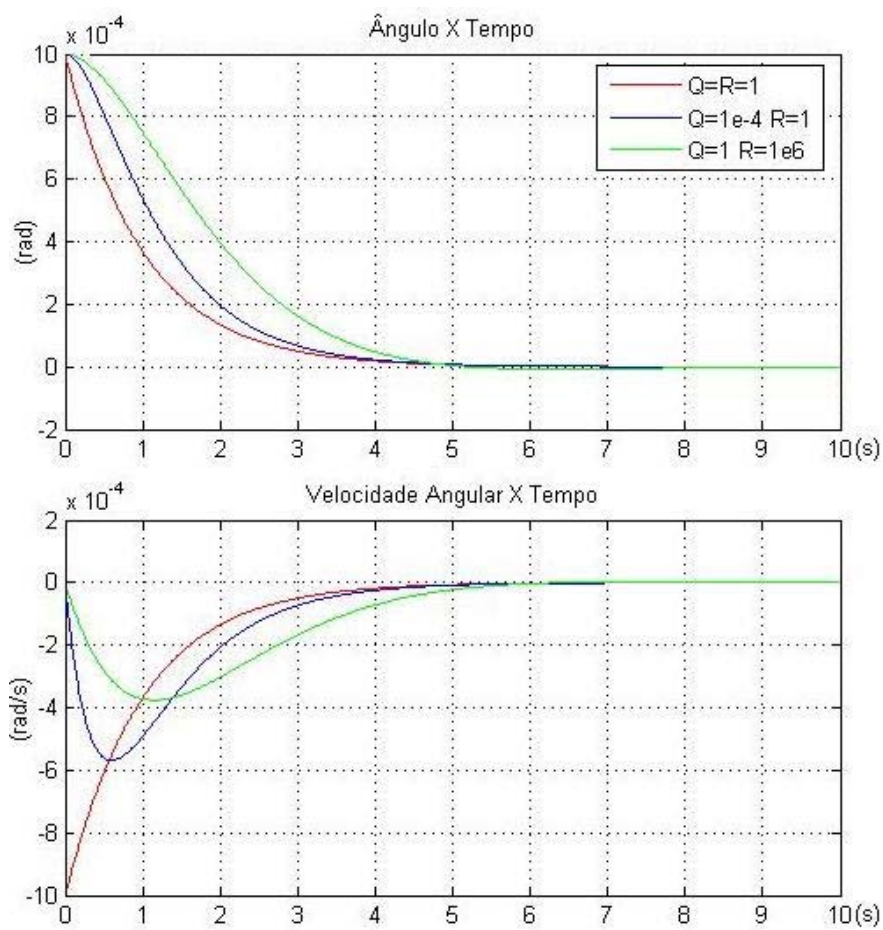


Figura 6.9 Ângulo e Velocidade Angular – 2 Modos.

Sobre a figura (6.10), a melhor resposta é obtida, novamente através dos pesos  $Q= 1$  e  $R=1e6$ . O nível de vibração é menor, e converge mais rapidamente.

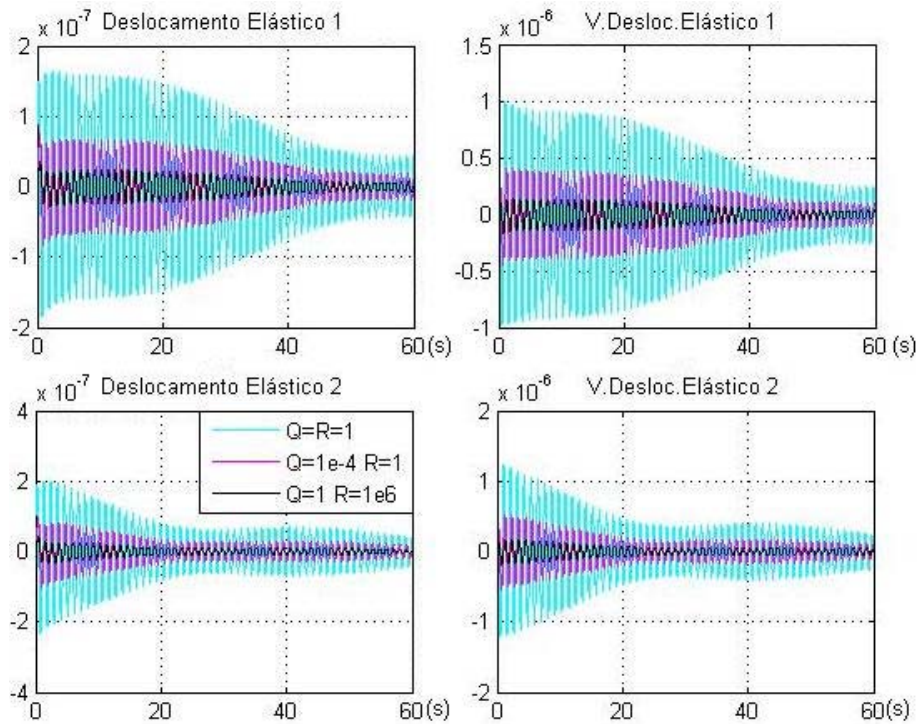


Figura 6.10 Vibração dos Painéis – 2 Modos.

Como tratado antes para um modo, agora também para dois modos analisar-se-á a matriz  $Q$  com os pesos distintos em sua diagonal, veja equação (6.6). Para se comparar aos gráficos para um modo de flexão se usará as mesmas etapas e valores de peso, vide tabela (6.4).

Nas figuras (6.11) e (6.12), pode-se ver o resultado encontrado. Como ocorrido nos gráficos de um modo de flexão, figura (6.5) e (6.6), o grupo 1 se saiu melhor nos níveis de vibração dos painéis e o grupo 2 para ângulo e velocidade angular. O traçado de ambos os gráficos são iguais ao demonstrados para um modo de flexão. Isso se deve as amplitudes pequenas dos modos. Há um novo gráfico nos níveis de vibração, que são: Deslocamento Elástico 2 e Variação do Deslocamento Elástico 2, na qual se refere ao segundo modo de vibração.

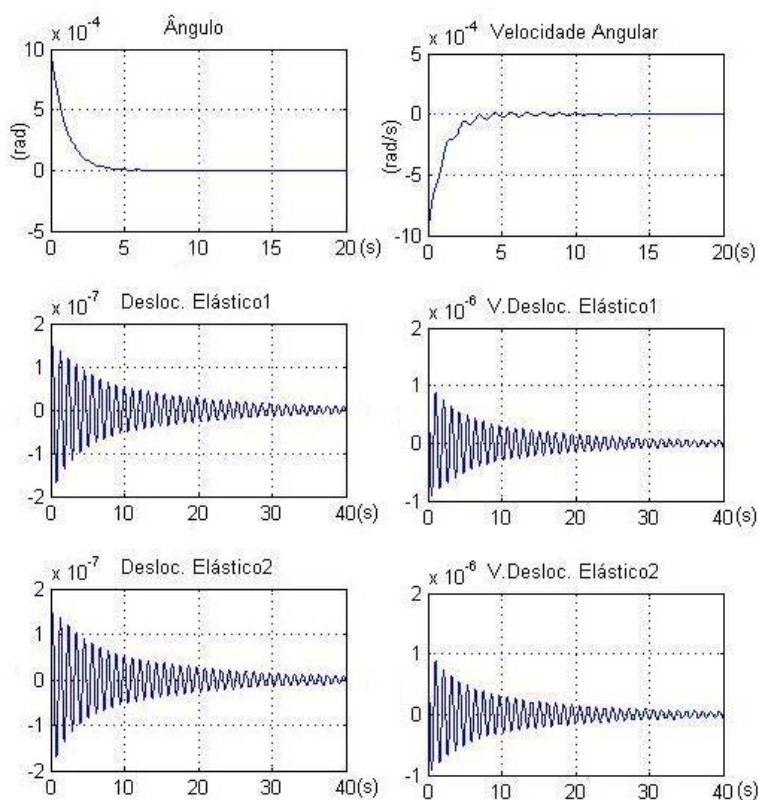


Figura 6.11 Dois Modos – Grupo 1.

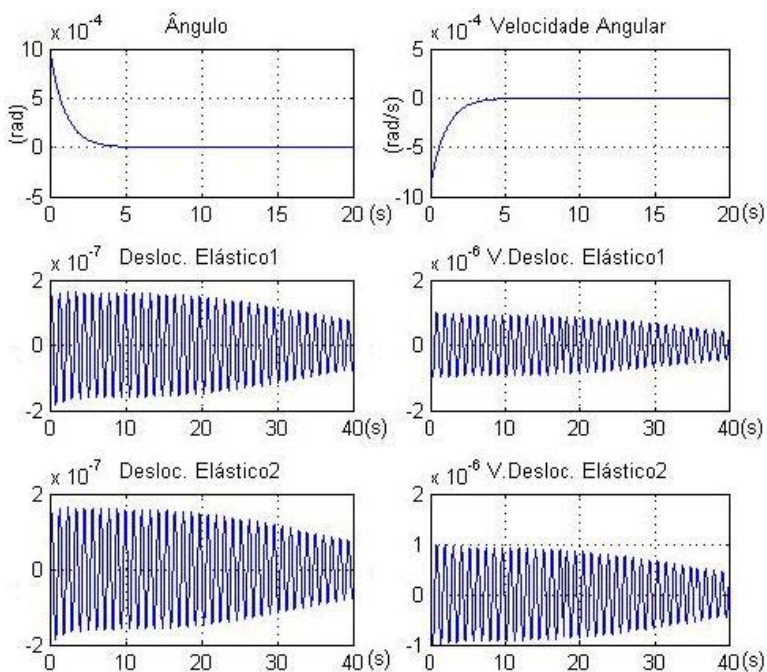


Figura 6.12 Dois Modos – Grupo 2.

Na figura (6.13) está a aplicação do grupo 3, tabela (6.4). Ao se comparar com a figura (6.7) tem-se que o tempo de estabilização dos gráficos ângulo e velocidade angular foi exatamente igual. Nos níveis de vibração, apesar de sua boa convergência, houve um tempo maior para estabilização do sistema, ultrapassando os 40 segundos. Mas no geral, o conjunto de pesos do grupo 3, obteve um ótimo desempenho.

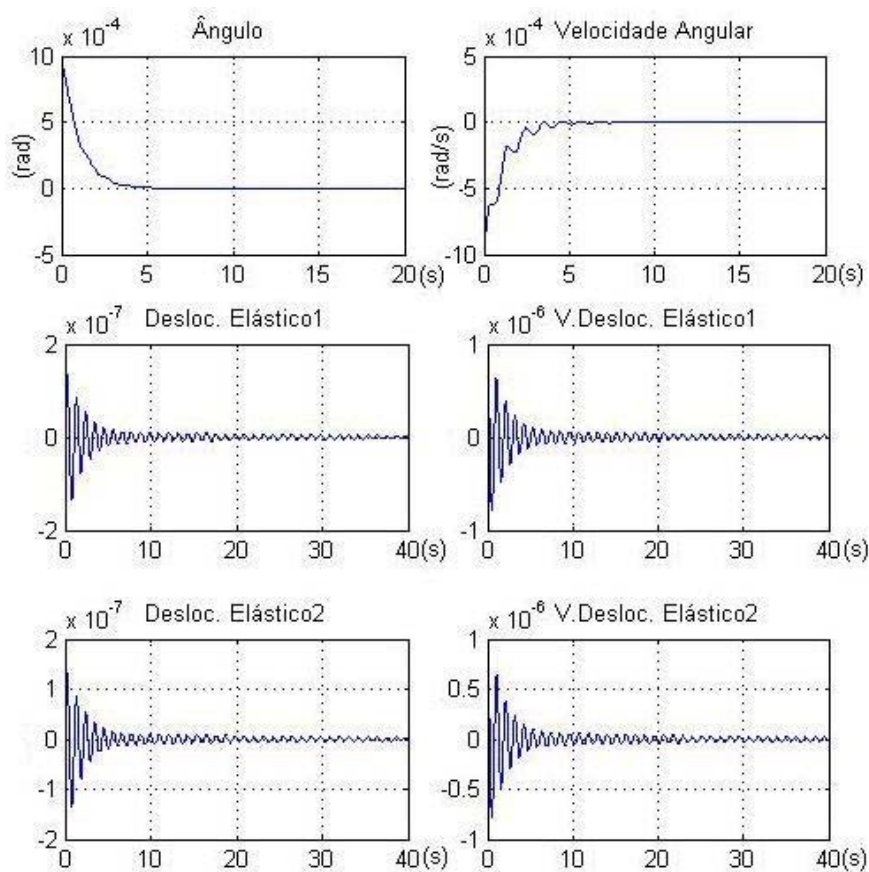


Figura 6.13 Dois Modos – Grupo 3.



- Três modos de flexão:

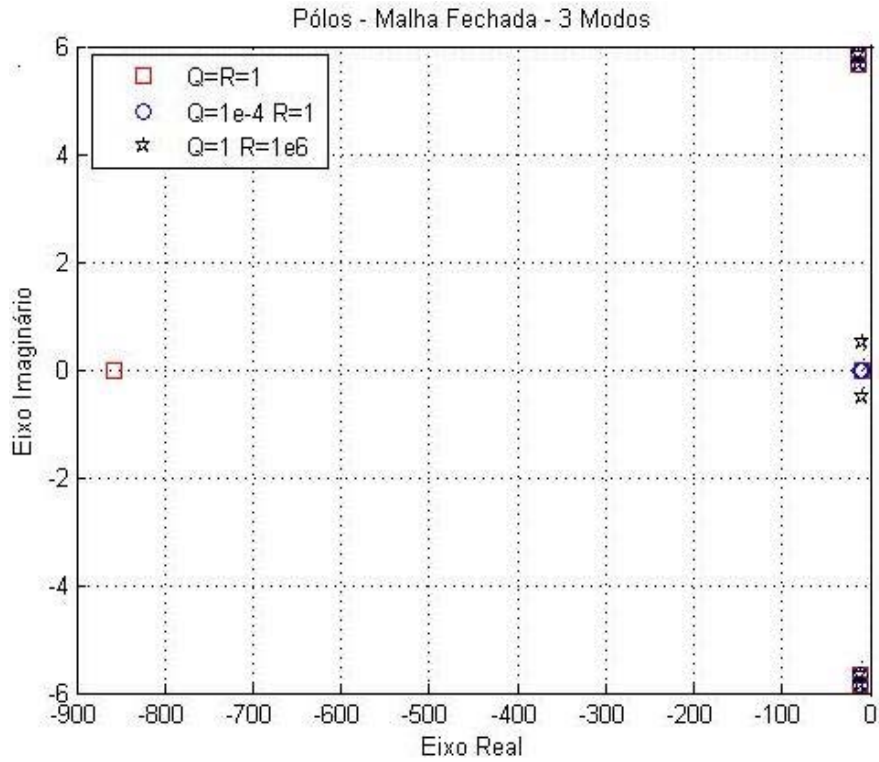


Figura 6.14 Pólos-LQR para três Modos.

Na figura (6.14) estão os pólos do LQR encontrados para três modos de flexão, sendo seus respectivos valores na tabela (6.6).

TABELA 6.6: Valores dos Pólos - Três Modos em Malha Fechada

<b>Q=R=1</b>	<b>Q=1e-4 R=1</b>	<b>Q=1 R=1e6</b>
-858.10	-2.4837	-0.7830±0.4949i
-1	-1.0925	-0.0245±5.6568i
-0.02±5.66i	-0.0245±5.6568i	-0.0258±5.8586i
-0.03±5.86i	-0.0259±5.8586i	-0.0252±5.8586i
-0.03±5.86i	-0.0252±5.8586i	

Na figura (6.15), observa-se que as curvas são totalmente iguais as das figuras (6.3) e (6.9), figuras que representam um e dois modos de flexão respectivamente. Conclui-se que o LQR controla da mesma maneira o sistema não importando os números de modos que estejam atuando. Isso acontece por causa das amplitudes pequenas dos modos, talvez se fossem modos com amplitudes maiores haveria outros resultados.

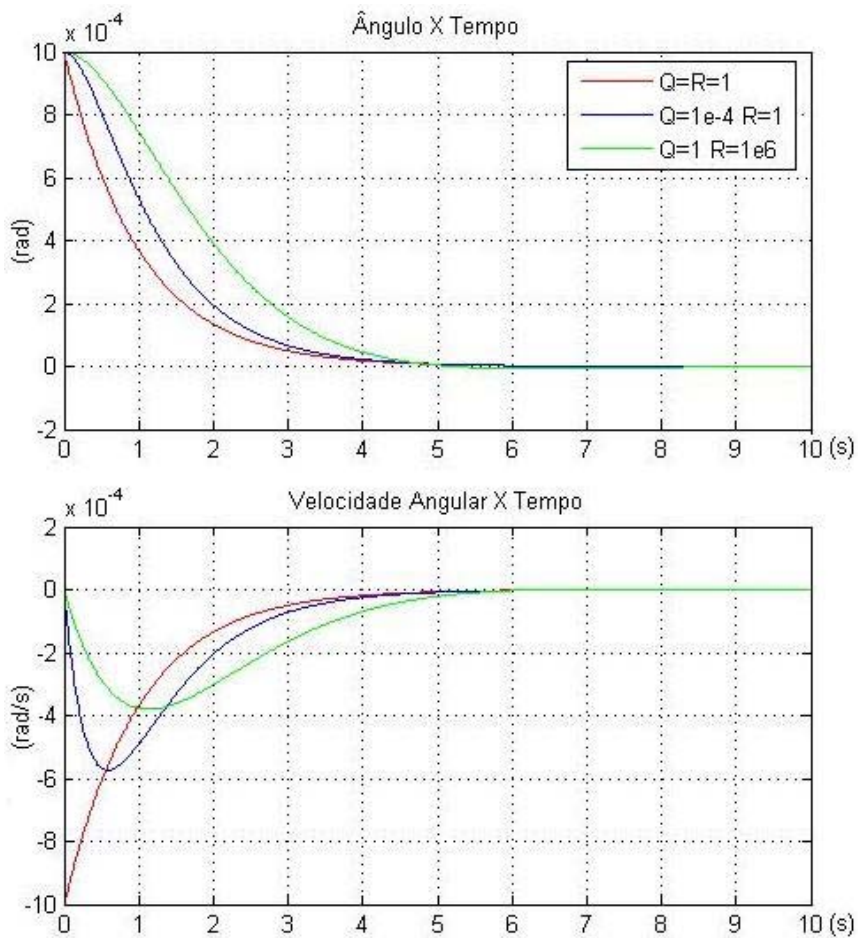


Figura 6.15 Ângulo e Velocidade Angular – 3 Modos.

Não se pode dizer o mesmo sobre a figura (6.16), ou seja, que há uma igualdade entre os gráficos sobre os níveis de vibração dos painéis. Pois, a resposta do LQR aos níveis de vibração é totalmente distinta aos encontrados nas figuras (6.4) e (6.10), devido aos modos de flexão que estão atuando.

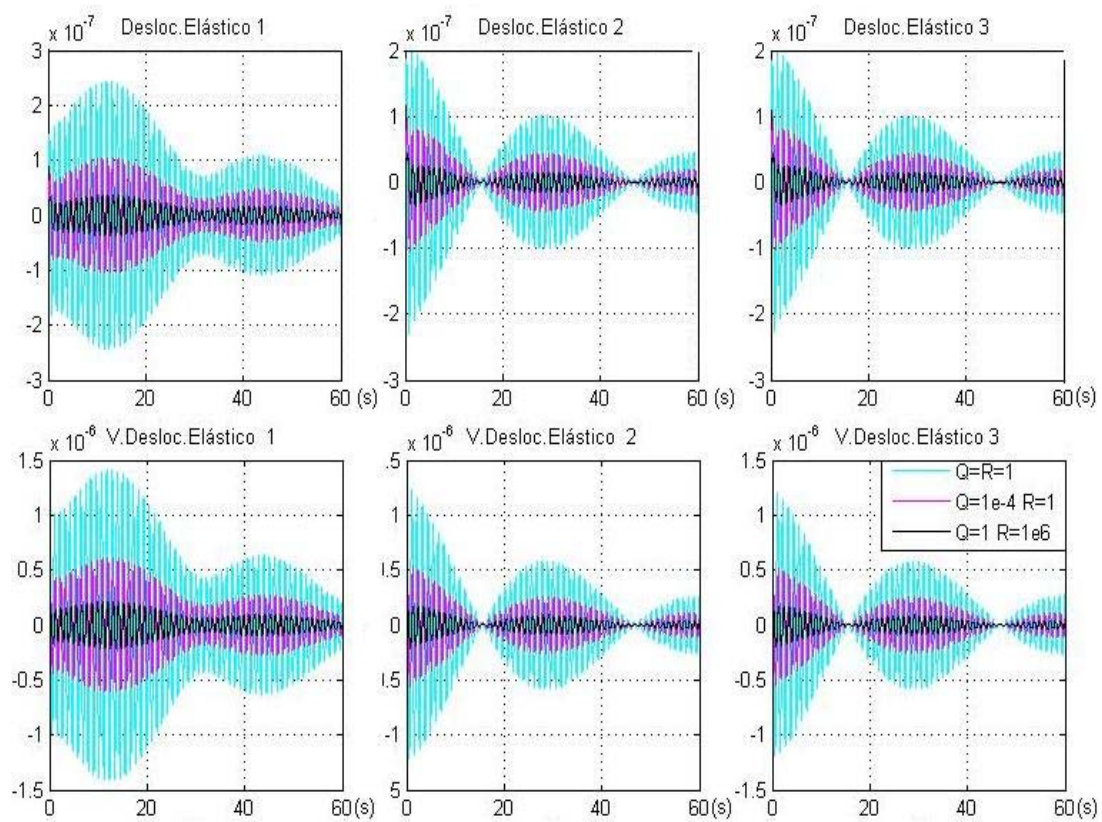


Figura 6.16 Vibração dos Painéis – 3 Modos.

Aplicando os dados da tabela (6.4), temos os seguintes resultados, apresentados pelas figuras (6.17), (6.18) e (6.19).

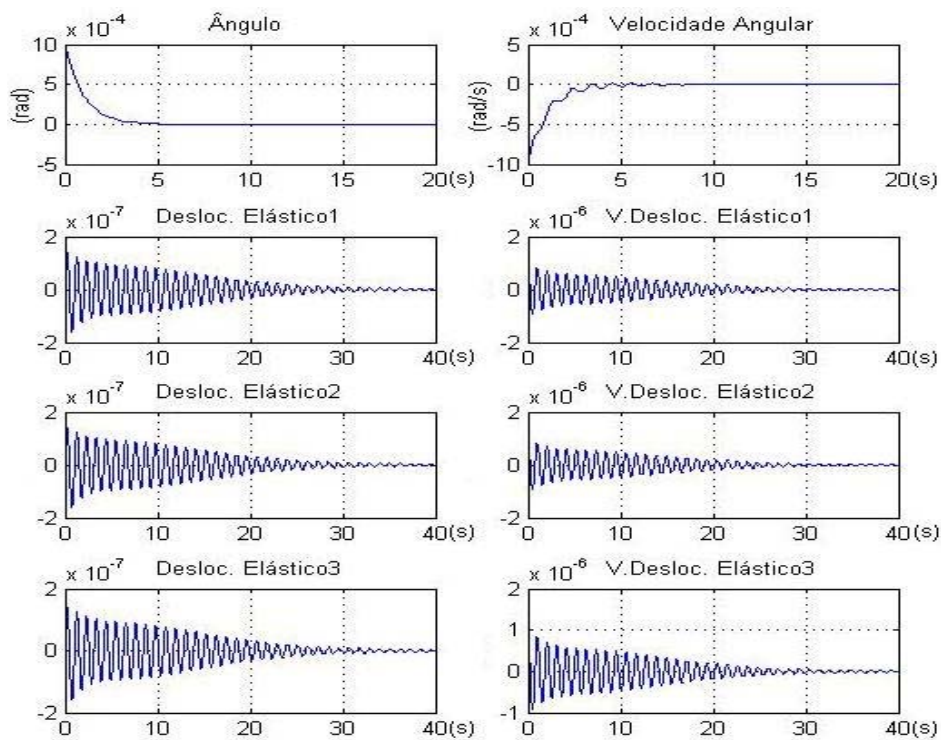


Figura 6.17 Três Modos – Grupo 1.

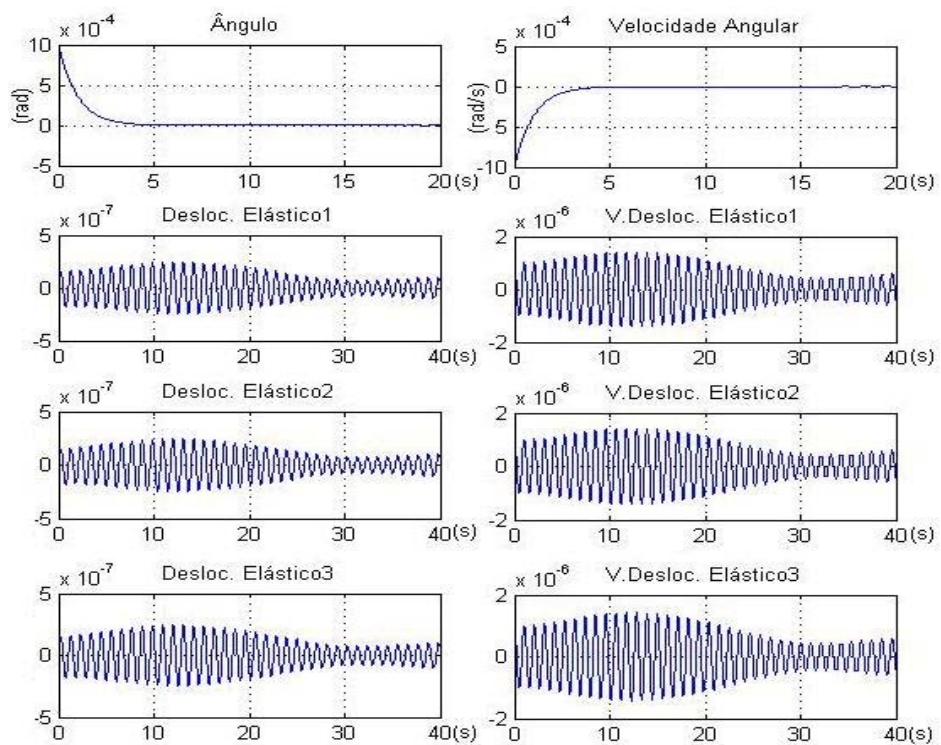


Figura 6.18 Três Modos – Grupo 2.

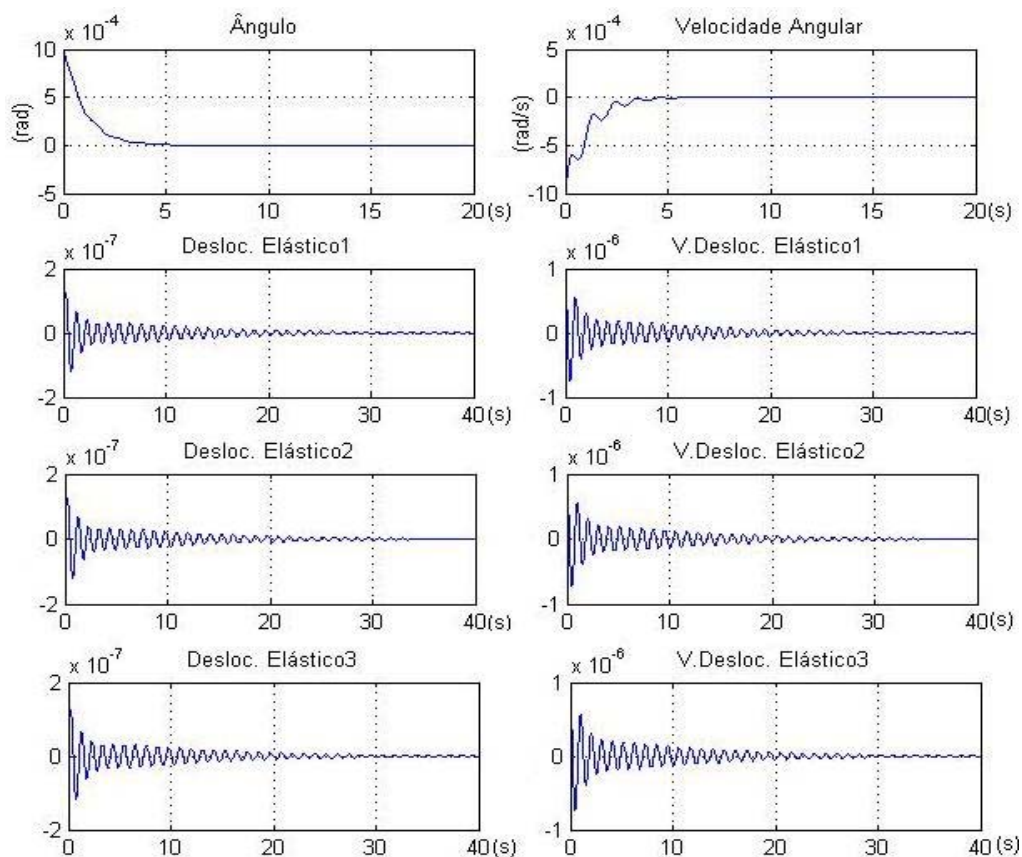


Figura 6.19 Três Modos – Grupo 3.

Como ocorrido anteriormente, na aplicação dos dados da tabela (6.4). A figura (6.19), que representa o grupo 3 tem o melhor resultado. Porque seus níveis de vibração, em relação aos três modos de flexão possuem amplitudes menores e uma convergência mais rápida para o tempo de estabilização. Sobre os gráficos relacionados a ângulo e velocidade angular da mesma figura (6.19), apesar da existência de alguns sobrepicos, há o controle do sistema, tendo que o tempo de estabilização de ambos é cerca de 5 segundos.

## 6.5 Projeto do LQG

Os estados flexíveis foram estimados por um filtro de Kalman que associado ao LQR constitui a técnica conhecida como LQG (Linear Quadrático Gaussiano). Por isso, existem semelhanças no projeto do LQG com o projeto do LQR. O critério de escolha das matrizes pesos Q e R, utilizadas da mesma forma, tanto para um modo de flexão como para dois modos de flexão ou três, representado nas equações (6.5), (6.6) e (6.7).

A diferença está na inclusão dos ruídos do sistema (filtro de Kalman), equação (6.8), (6.9) e (6.10). Onde,  $w$  é o ruído do processo e  $v$  é o ruído da medida. Ambos, ruídos brancos gaussianos, equações (4.8) e (4.9), as matrizes pesos do filtro de Kalman  $W$  e  $V$  são usadas como parâmetros de projeto para as matrizes pesos Q e R, equação (4.18). O formato das estruturas é demonstrado a seguir.

- Um modo de flexão:

$$W = |w.w'| \quad V = \begin{vmatrix} v.v' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v.v' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v.v' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v.v' \end{vmatrix} \quad (6.8)$$

- Dois modos de flexão:

$$W = |w.w'| \quad V = \begin{vmatrix} v.v' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v.v' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v.v' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v.v' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v.v' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v.v' \end{vmatrix} \quad (6.9)$$

- Três modos de flexão:

$$W = |w.w'| \quad V = \begin{vmatrix} v.v' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v.v' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v.v' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v.v' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v.v' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v.v' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v.v' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v.v' \end{vmatrix} \quad (6.10)$$

### 6.5.1 Gráficos do LQG

Os gráficos a seguir serão analisados através da variação dos parâmetros  $w$  e  $v$ , proporcionados em três casos apresentados na tabela (6.7). Com o objetivo principal de verificar o que ocorre com o desempenho do sistema quando se introduz o filtro de Kalman, usado como um estimador dos estados flexíveis, no processo.

TABELA 6.7: Pesos do Filtro de Kalman

	<b>w</b>	<b>v</b>
<b>Caso 1</b>	0.0001	0.1
<b>Caso 2</b>	0.001	$10^{-6}$
<b>Caso 3</b>	$10^{-6}$	0.01

Ambos os casos serão comparados entre si e também com a melhor resposta obtida no projeto do LQR, ou seja, o grupo 3. Quando a diagonal da matriz  $Q$  é tratada com pesos distintos, peso referente a parte rígida do satélite e peso referente as partes flexíveis, equações (6.5), (6.6) e (6.7).

- Um modo de flexão:

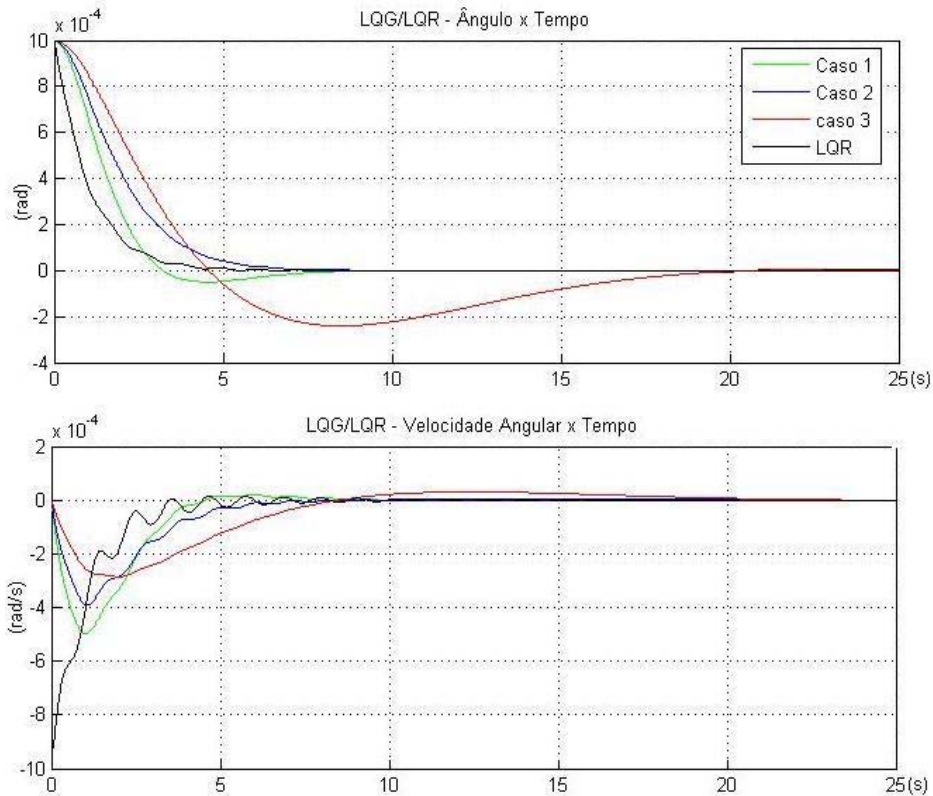


Figura 6.20 LQG/LQR Ângulo e Velocidade Angular - 1 Modo

Na figura (6.20), têm-se o desempenho do LQR e o desempenho do LQG em curvas representadas por três casos. Fazendo uma comparação dos casos do LQG entre si, o pior resultado é obtido pelo caso 3, com um tempo de estabilização maior que 20 segundos, e a sobrelevação bem distante da origem. Entretanto, comparando o LQG com o LQR, vê-se uma melhora nos sobrepicos das curvas, tanto para ângulo como para a velocidade angular. Isso se deve ao filtro de Kalman, usado como um estimador dos estados flexíveis.

Porém, nem todas as curvas do LQG alcançam o tempo de estabilização do LQR e a sobrelevação das curvas se encontram mais afastadas da origem.



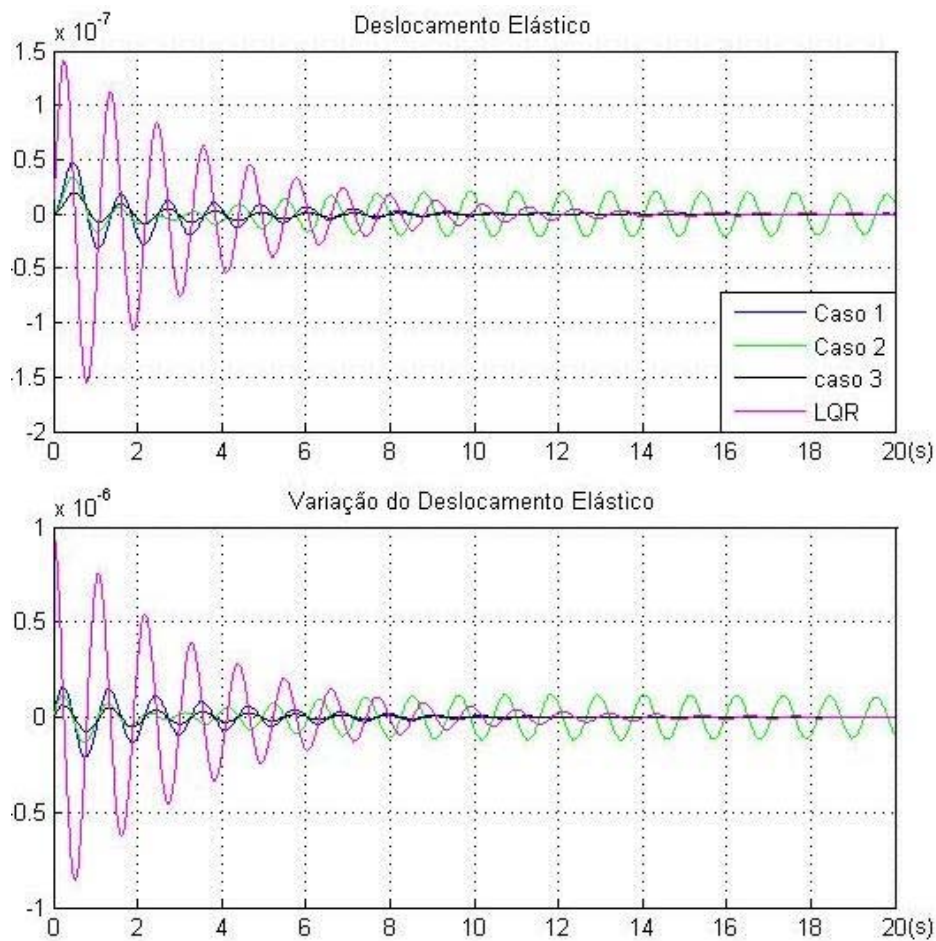


Figura 6.21 LQG/LQR Vibração dos Painéis – 1 Modo.

Nos resultados da figura (6.21), tem-se que o uso do filtro de Kalman como um estimador dos estados flexíveis do satélite, forneceu ao sistema um ótimo resultado em comparação ao resultado do LQR. Com exceção do caso 2, que não converge no tempo de 20 segundos, os outros casos demonstram um tempo de estabilização superior ao LQR. Mais especialmente no caso 3, na qual demonstrou um tempo de estabilização de cerca de doze segundos. As amplitudes de vibração também foram são bem menores, principalmente no caso 3, comparado ao LQR e aos outros casos.

- Dois modos de flexão:

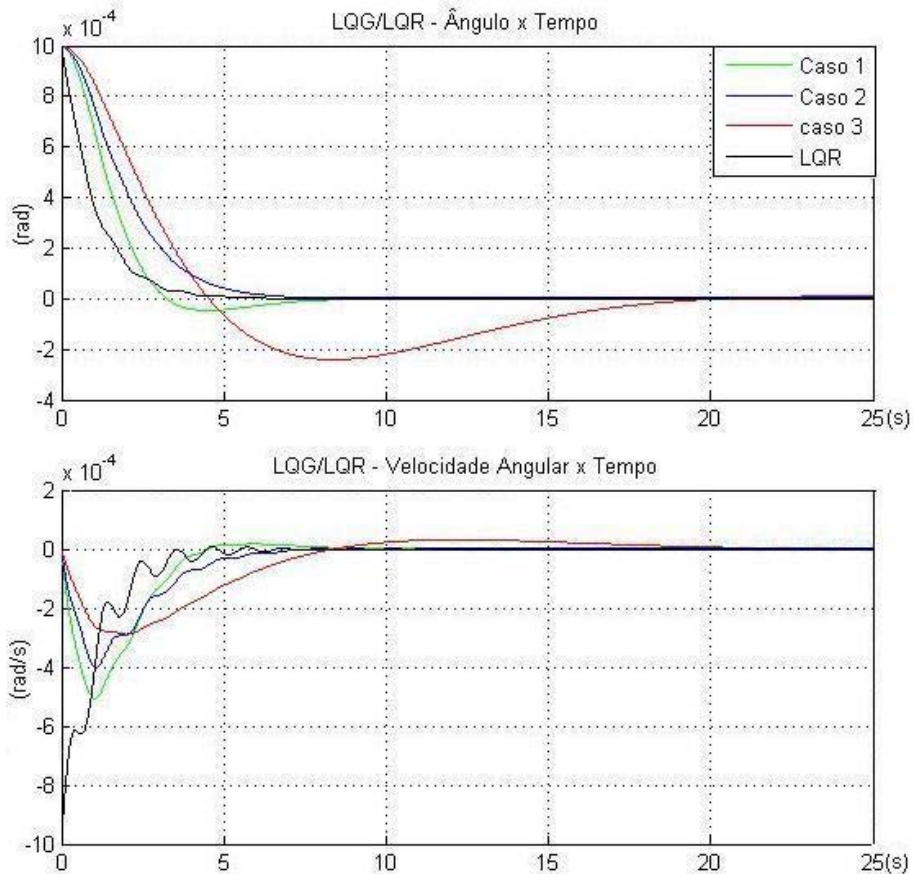


Figura 6.22 LQG/LQR Ângulo e Velocidade Angular - 2 Modos

Como ocorrido anteriormente nos gráficos do LQR para ângulo e velocidade angular, há a igualdade do gráfico para um modo de flexão. Isso acontece por causa das pequenas amplitudes dos modos, provavelmente se os modos fossem com amplitudes maiores haveria outros resultados. Portanto, assim sendo, o mesmo comentário dito antes sobre a figura (6.20) corresponde também para a figura (6.22).

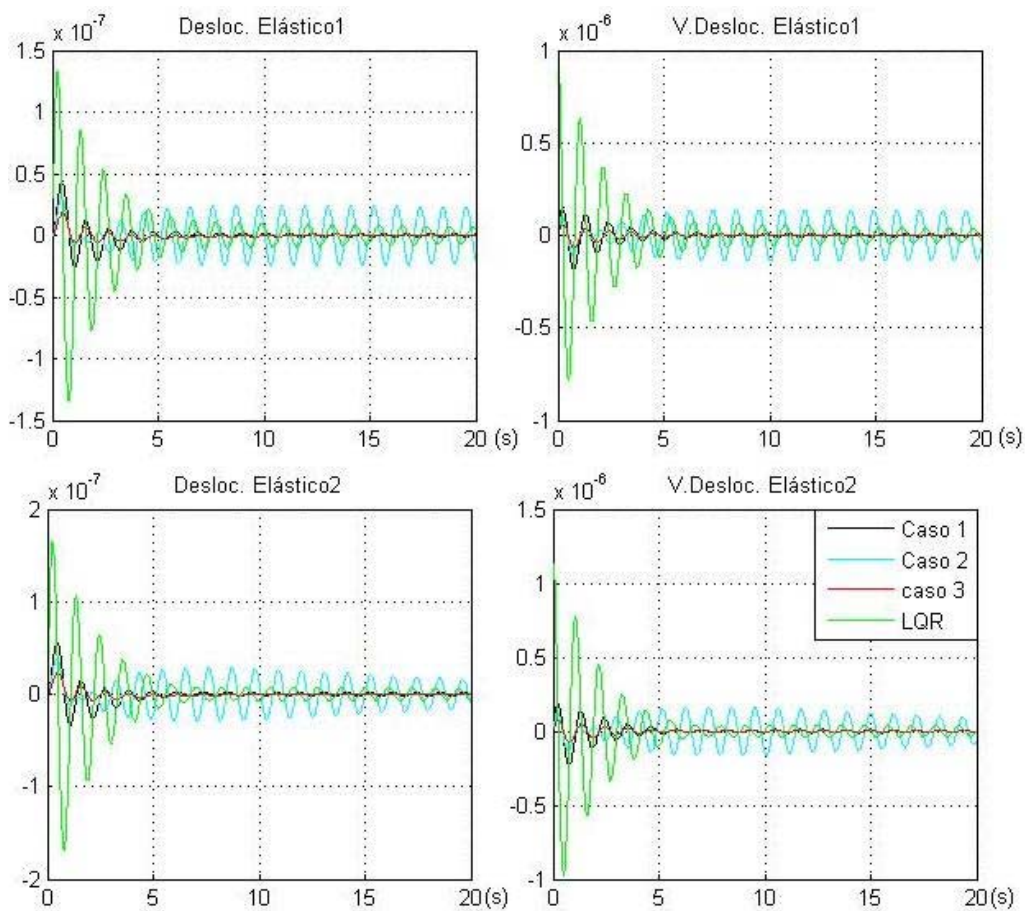


Figura 6.23 LQG/LQR Vibração dos Painéis – 2 Modos.

A figura (6.23) é praticamente igual à figura (6.21), tendo a mesma representação gráfica. O melhor comportamento da resposta do LQG é novamente o caso 3. Uma diferença que se pode notar em relação à figura (6.21) é que o tempo de estabilização fora antes cerca de doze segundos para um modo de flexão, agora para dois modos de flexão o tempo de estabilização é quase vinte segundos. Novamente, se comprova que, a introdução do filtro de Kalman como estimador dos estados flexíveis forneceu ao sistema um melhor comportamento em comparação ao LQR quando se trata dos níveis de vibração dos painéis.

- Três modos de flexão:

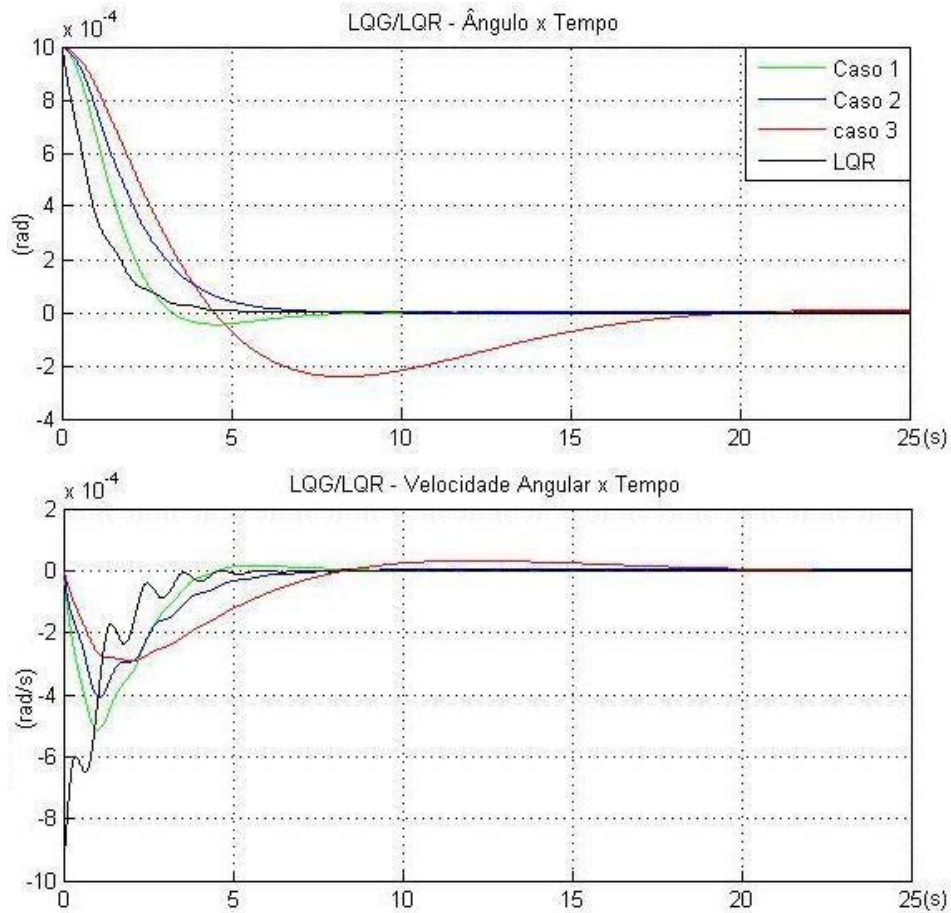


Figura 6.24 LQG/LQR Ângulo e Velocidade Angular - 3 Modos

A figura (6.24) reforça que isso acontece por causa das pequenas amplitudes dos modos de flexão usados neste trabalho. Conseqüentemente a igualdade nas respostas ângulo e velocidade angular, parte rígida do satélite, tanto para o LQR como para o LQG. Provavelmente, se as amplitudes tivessem valores maiores, a sua representação seria mais evidente. Assim sendo, vale as mesmas conclusões tomadas anteriormente para o LQG nas figuras sobre ângulo e velocidade angular.

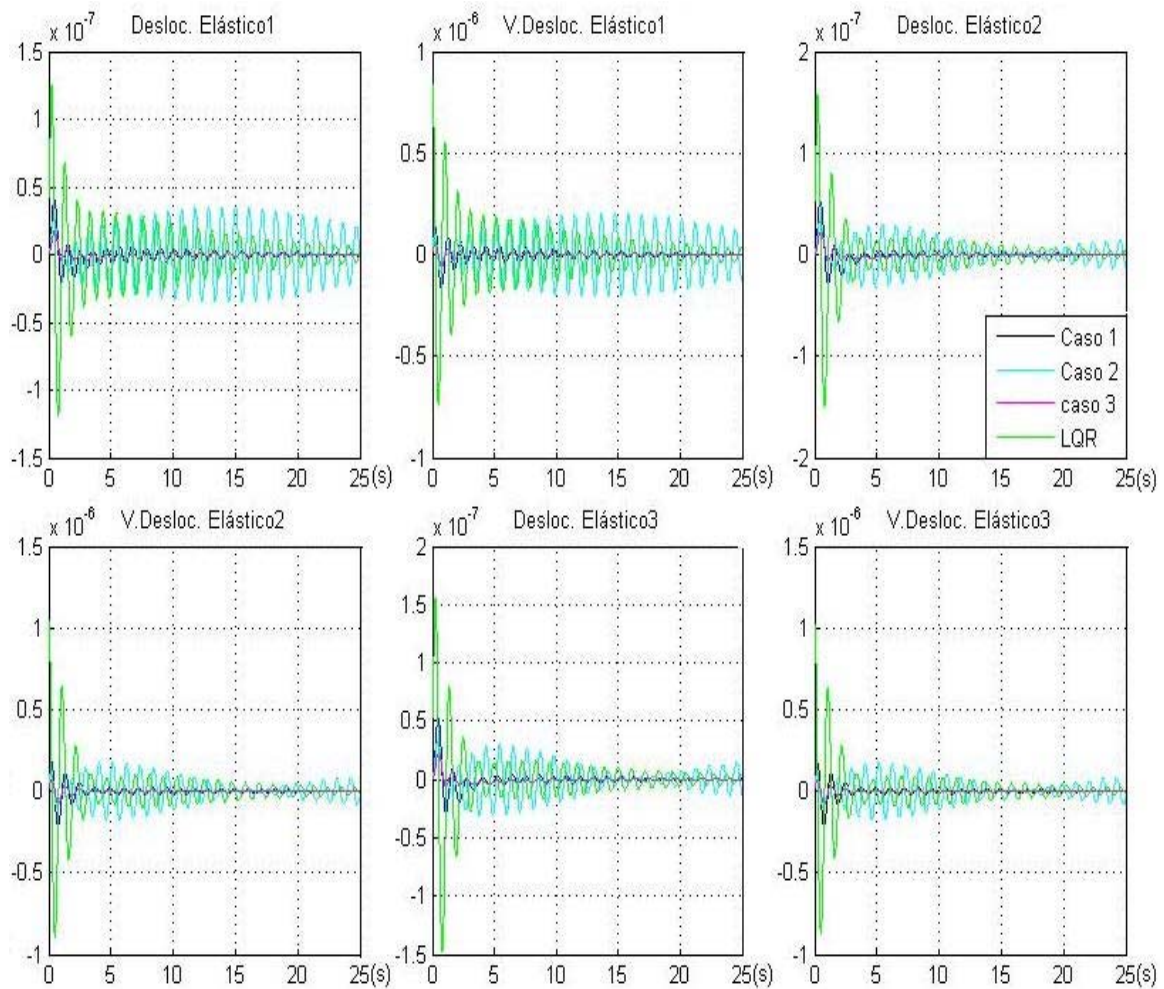


Figura 6.25 LQG/LQR Vibração dos Painéis – 3 Modos.

Na figura (6.25), os caso 1 e 3, são os que representam as melhores repostas do LQG. Em especial o caso 3, uma amplitude de vibração bem pequena e um tempo de estabilização de um pouco mais de 25 segundos. Pode-se concluir sobre o LQG, que com a utilização do filtro de Kalman, usado como um estimador dos estados flexíveis houve uma melhora significativa nos sobrepicos das repostas ângulo e velocidade angular. Porém o tempo de estabilização foi um pouco maior em relação ao LQR.

Já sobre a atuação do filtro de Kalman no resultado da vibração dos painéis, apresentou um ótimo resultado. Diga-se de passagem, que não em todos os seus casos apresentados, pois o caso 2 não se saiu muito bem. Entretanto, os outros dois casos foram espetaculares em tempo de estabilização e níveis de sobrelevação comparando ao LQR. Tornando primordial a importância do uso dos pesos do filtro de Kalman.

## 6.6 Projeto do $H^\infty$

O procedimento do projeto do  $H^\infty$  é diferente dos outros projetos de controle, LQR e LQG, que utilizam matrizes peso. A diferença do projeto  $H^\infty$  é o uso de funções pesos de transferência, dadas por  $W_1$ ,  $W_2$  e  $W_3$  e também a “planta aumentada” como citado no capítulo 4, equação (4.28).

A simulação do  $H^\infty$  neste trabalho tem como base de programação o exemplo “josedemo” (Demo of H-Infinity Design for Large Space Structure) feito por Chiang e Safonov, 1998; encontrado no programa Matlab 7.0.

Para tal uso do programa foi necessário fazer algumas mudanças no modelamento, pois o mesmo apresenta duas entradas no sistema. Portanto, para este trabalho, essa segunda entrada no sistema é considerada como um torque no deslocamento elástico dos painéis, assim sendo, a equação (2.31) ficará assim:

$$\ddot{q}_i + \alpha_i \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 q_i + d \dot{q}_i + c q_i = \tau_q \quad (6.11)$$

onde  $\tau_q$  é um atuador sobre o painel solar ou seja piso elétrico da viga.

As especificações do projeto, fornecidos pelo programa josedemo (CHIANG, 1998):

→ Robustez Específica, associado ao peso  $W_3$ , (CHIANG, 1998).

$$W_3^{-1} = \frac{2000}{s} * I_{2 \times 2} \quad (6.12)$$

→ Desempenho Específico, associado ao peso  $W_1$ , (CHIANG, 1998).

$$W_1^{-1} = \gamma^{-1} * \frac{0.1(1 + s/100)^2}{(1 + s/5000)^2} * I_{2 \times 2} \quad (6.13)$$

Sendo que  $W_1$  penaliza o sinal de erro "e",  $W_2$  penaliza o sinal de controle "u", e  $W_3$  penaliza a saída da planta "y", o valor de  $\gamma$  é um parâmetro obtido através de sucessivas tentativas.

No projeto do  $H^\infty$  trabalhar-se-á apenas com um modo de flexão, visando analisar o resultado obtido comparando-se com os resultados obtidos nos métodos LQR e LQG.

### 6.6.1 Gráficos do $H^\infty$

Primeiramente, é feita a análise do sistema malha aberta. A figura (6.26) mostra a banda passante do sistema em malha aberta.

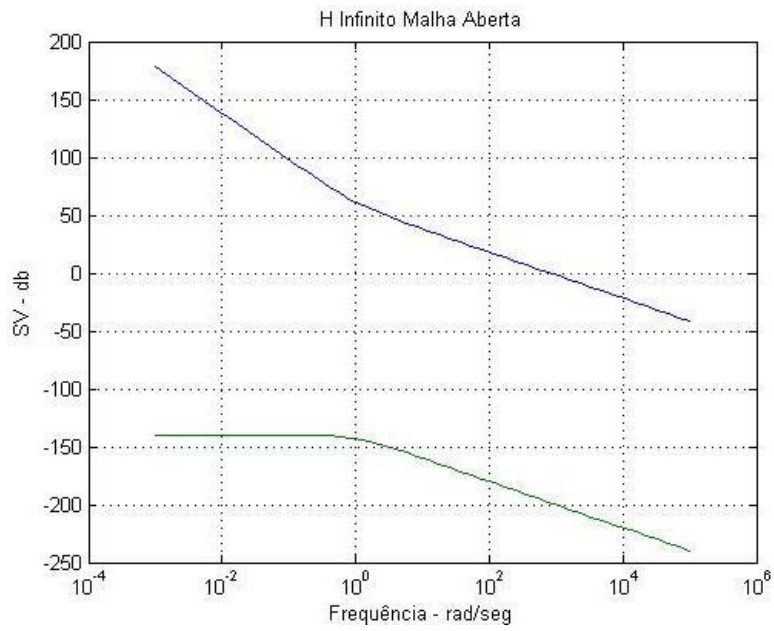


Figura 6.26 Malha Aberta  $H^\infty$ .

As especificações de desempenho, ou seja, o que se deseja alcançar do sistema representado pelas equações (6.13) e (6.14), é visto na figura (6.27).

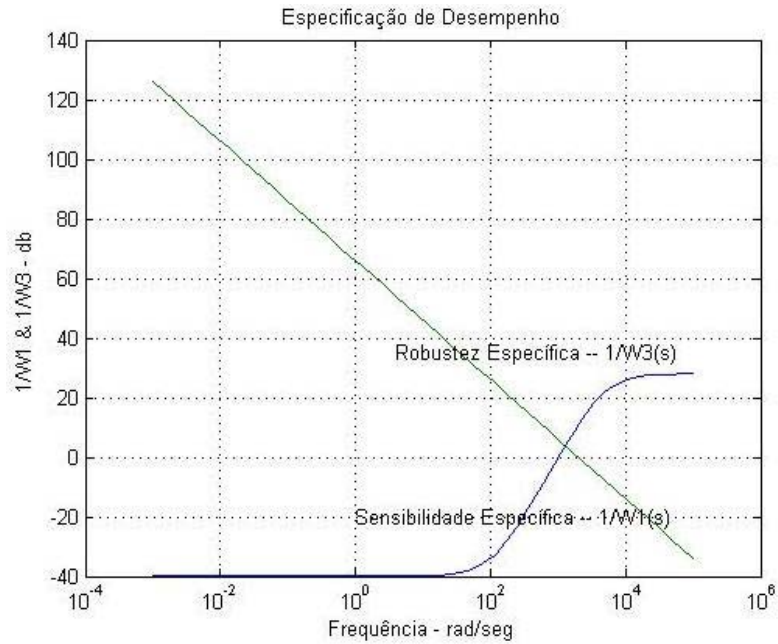


Figura 6.27 Especificação de Desempenho.



Em malha aberta também é analisado os “Transmission Zeros” (TZ) do sistema, dado pela tabela (6.8). TZ são as frequências críticas onde a transmissão do sinal entre a entrada e a saída é barrada.

Os TZ do controlador  $H^\infty$  estão na tabela (6.8). Nota-se novamente que há um aumento dos números dos TZ, devido ao “aumento da planta”. A importância dos TZ no sistema se deve a sua utilização em sistema de controle robusto.

TABELA 6.8: Transmission Zeros

	Transmission Zeros
Malha Aberta	-0.0244 ±5.7049i
Controlador $H^\infty$	-2318.10
	-433.3
	-0.0 ± 05.700i
	-0 ± 0i

Por meio do controle  $H^\infty$ , os novos pólos são demonstrados na figura (6.28). E seus respectivos valores na tabela (6.9)

TABELA 6.9: Valores dos Pólos -  $H^\infty$ .

Pólos $H^\infty$
-1302.6
-5.1000 ± 3.8000i
-0.3000
-100.3000
-100 ± 0.0i
-99.7000

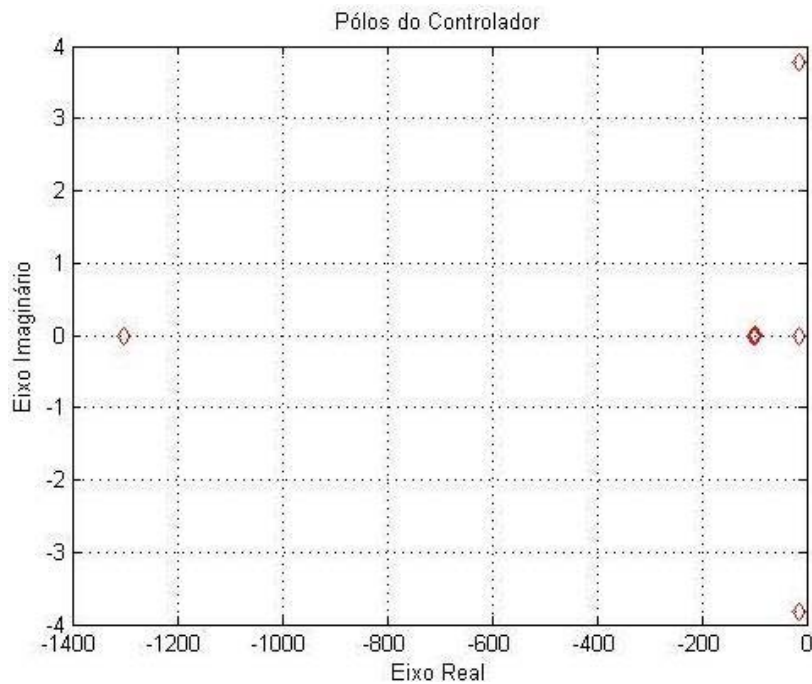


Figura 6.28 Pólos do  $H^\infty$ .

Observa-se que na tabela (6.9), há oito valores de pólos, isso se deve ao “aumento da planta”, comentado no capítulo 4, equação (4.28) pelo controle  $H^\infty$ . Através da figura (6.28) como também pela tabela (6.9) é claramente visto como os pólos do  $H^\infty$  estão mais afastados do zero, do plano direito, na qual se comparado com a tabela (6.3) de pólos do LQR, o pólo mais afastado é dado por -835.74 e no  $H^\infty$  o pólo mais afastado é -1302.6. Isso quer dizer que no  $H^\infty$ , o sistema é tão como mais estável que no LQR. Apresentar pólos reais negativos elevados reflete um filtro com uma dinâmica mais rápida.

As figuras (6.29) e (6.30) que demonstram o desempenho do controle  $H^\infty$ , foram feitas com as mesmas condições iniciais, tabela (6.1), aplicada aos outros métodos de controle LQR e LQG.

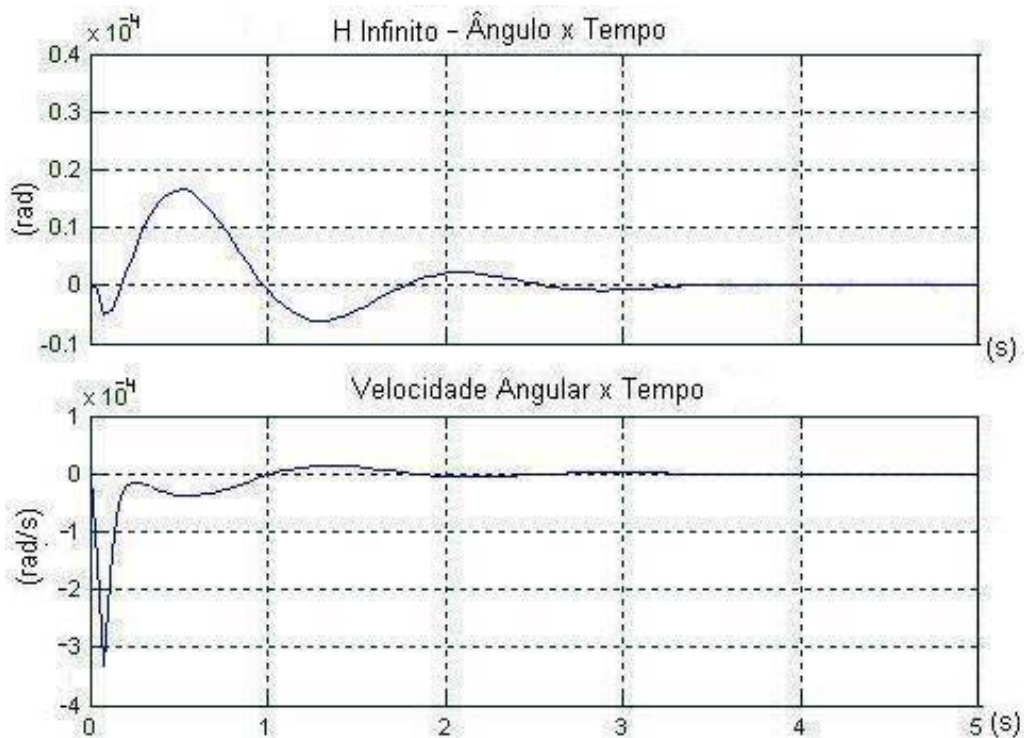


Figura 6.29 Ângulo e Velocidade Angular -  $H^\infty$ .

Observa-se que o desempenho do  $H^\infty$ , a figura (6.29). E, ambos os gráficos há existência de sobrepicos, na qual poderiam comprometer o sistema, porém o tempo de estabilização de ambos foi de aproximadamente 3.5 segundos. Ou seja, apesar da existência dos sobrepicos, houve o controle do sistema, em um ótimo tempo. Que se fosse possível a comparação com os gráficos do LQR e LQG para um modo de flexão, o tempo de estabilização no  $H^\infty$  é menor. Tanto no LQR como no LQG, em seus melhores casos para um modo de flexão, o tempo de estabilização ficou por volta de cinco, seis segundos. No entanto, essa comparação não se deve ser feita, porque o sistema utilizado no LQR e LQG possui uma modelagem diferente ao sistema utilizado no  $H^\infty$ .

Na figura (6.30) o comportamento da vibração dos painéis é apresentado. Vê-se que a amplitude de vibração é da ordem de  $10^{-7}$ , ou seja, bem pequena como no LQR e LQG. O tempo de estabilização para o primeiro gráfico cerca de 0.5 segundos, e para o segundo uns 0.45 segundos.

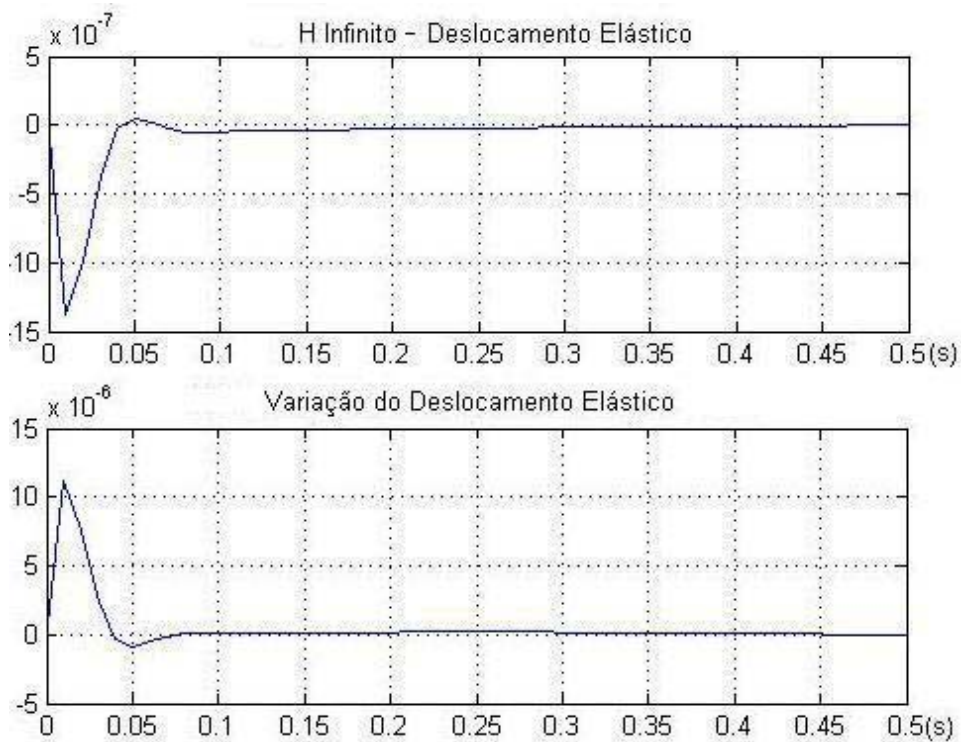


Figura 6.30 Vibração dos Painéis -  $H^\infty$ .

Isso demonstra que o controle  $H^\infty$  possui um ótimo desempenho. Tanto para ângulo e velocidade angular, como também para a vibração dos painéis.

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentam-se as observações e conclusões sobre os métodos de controle aplicados neste trabalho bem como os seus resultados obtidos. Finalmente, se sugerem assuntos que possam ser desenvolvidos no futuro.

Método LQR: O método do LQR não é apropriado em casos que todos os estados não estão disponíveis e quando a rejeição dos ruídos e a robustez do sistema têm grande importância no projeto. O ajuste das matrizes pesos Q e R do projeto pelo método tentativa e erro, não oferece uma exatidão dos melhores valores que podem existir. A escolha destas matrizes deve ser feita de acordo com as necessidades e/ou prioridades do projeto. Mesmo que o desempenho da lei de controle seja ótimo, deve-se saber que a ausência de perturbações e que todos os estados estão disponíveis é uma situação que não acontece na realidade. Portanto, o método LQR é mais apropriado para sistemas que possuem modelos de projeto razoavelmente exatos e sensores/atuadores ideais; e no estágio preliminar do projeto das leis de controle.

Método LQG: O método do LQG supera alguns inconvenientes do método LQR. O LQG (FK + LQR) demonstra um ótimo resultado quando o filtro de Kalman é utilizado como um estimador dos estados flexíveis, ocorrência observada nos níveis de vibração dos painéis. Entretanto, o desempenho do sistema decai em comparação ao LQR para o ângulo e a velocidade angular devido à presença do FK. Outra desvantagem está em não haver nenhum procedimento sistemático para projetar as matrizes pesos Q e R, e as matrizes peso do filtro de Kalman W e V. Novamente, a escolha destas matrizes deve ser feita de acordo com as necessidades e/ou prioridades do projeto. Portanto, comparando o LQG ao LQR, o LQG é mais realista. Pois pode ser utilizado quando nem todos os estados estão disponíveis e quando o sistema apresenta ruídos.

Método  $H^\infty$ : O método  $H^\infty$  é uma das, atualmente, mais avançadas técnicas disponíveis para projetar controladores robustos; e sua sistemática é bem distinta aos métodos LQR e LQG. Uma vantagem desta técnica é que ela permite o projetista adotar a forma mais geral da arquitetura da planta onde são consideradas as incertezas, distúrbios, ruídos dos sensores/atuadores, e as limitações do atuador. Entretanto, uma grande desvantagem, é a experiência e habilidades necessárias para projetar a forma das funções pesos de transferência, a planta aumentada e o valor de  $\gamma$ . O sucesso do método depende, basicamente, da correta escolha das funções pesos de transferência.

Para o estudo da influência dos modos de flexão no sistema, foi utilizada a abordagem lagrangiana e uma discretização através do método dos modos assumidos, onde o modelamento dos três modos de flexão foi tratado individualmente através das equações na forma de estados. Devido a pequena amplitude dos modos de flexão, não foi possível dizer com precisão como eles influenciam o sistema.

Sugestões para extensões futuras deste trabalho:

Em relação ao modelamento da planta utilizada:

- Inclusão das Incertezas Não-Estruturadas e Estruturadas, apresentado no apêndice B. A fim de construir a barreira de robustez do sistema.

Em relação ao projeto do controlador:

- Construção de um projeto próprio para o controle  $H^\infty$ , já que neste trabalho utilizou-se o projeto do programa "josedemo".

- Aplicação do método de controle  $H^\infty$  para dois, três modos de flexão.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, B.; MOORE, J. **Optimal filtering**. New York: Prentice-Hall, 1979.

BARMISH, B.R.; KANG, H.I. A survey of extreme point results for robustness of control systems. **Automatica**, 1993. v. 29, n. 1, p. 13- 35.

CANNON, R. H.; ROSENTHAL, D.E. Experiments in control of flexible structures with noncolocated sensors and actuators. **Journal of Guidance. AIAA**, v.7, n.5, p. 546-553, 1984.

CLEMENTS, R.; TAVARES, P.; LIMA, P. **Small Satellite Attitude Control Based on a Kalman filter**. INTELLIGENT CONTROL, IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM, 2000, Rio Patras. **Proceedings...** Rio Patras, Greece: IEEE, 2000. p. 79-84.

CHIANG, Y.R.; SAFONOV G.M. **Robust control toolbox user's guide**. v.2, Natick, MA: The Math Works Inc., 1998.

CRAIG, R.R. **Structural dynamics: an introduction to computer methods**. New York: John Wiley & Sons, 1981. p.121-134.

CUBILLOS, X. C. M. ; SOUZA, L. C. G. **Aplicação da teoria do RLQ no projeto de um controlador de atitude de um satélite artificial**. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE DINÂMICA ORBITAL. 12., 2004. Ubatuba. **Anais...** Ubatuba SP: [s.n], 2004

CUBILLOS, X. C. M. **Extensão da teoria do regulador linear quadrático para o controle de atitude de um satélite artificial**. Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica (PIBIC/CNPQ/INPE). São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2005. (INPE-13034-PRE/8311).

CUBILLOS, X. C. M., SOUZA, L.C.G. Attitude estimation of a satellite simulator using Kalman filter: In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND THEIR APPLICATIONS (DINCON), 6., 2007, São José do Rio Preto – SP. **Anais...** São José do Rio Preto – SP: UNESP, 2007.

DICHMANN, D.; SEDLAK, J. Test of a flexible spacecraft dynamics simulator. In: STENGLE, T. H. (ed.) **Advances in the astronautical sciences**. [S.l.]: American Astronautical Society (AAS) v. 100, Part I, 1998. p. 501-526. (paper AAS 98-340).ISBN 0-87703-453-2.

DESOUZA, L.C.G. Satellite attitude control system parameters optimization. III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering. 3., 2006, Lisbon. **Proceedings...** Lisbon: [s.n.], 2006.

DOYLE, J.C. E STEIN, G. Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis. **IEEE Trans. Auto. Contr.**, v. AC-26, n.. 1, p. 4-16, 1981.

DOYLE, J.C. Synthesis of robust controllers and filters with structured Plant uncertainty. In: IEEE CONF. ON DECISION AND CONTROL, 1983, San Antonio. **Proceedings...** San Antonio: IEEE, p. 109-114, 1983.



DOYLE, J.C. Quantitative Feedback Theory (QFT) and robust control. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1986, Seattle, WA,. **Proceedings...** Seattle: [s.n.], 1986.

FENILI, A; SOUZA, L.C.G.; GÓES, L.C.S.; BALTHAZAR, J.M.; On the damping effect of no ideal interaction in beam-like structures in slewing motion. In: BIENNIAL CONFERENCE ON ENGINEERING SYSTEMS DESIGN AND ANALYSIS – ESDA, 6., 2002. Istanbul, Turkey,. **Proceedings...** Istanbul: [s.n], July 8-11, 2002.

FENILI. A; SOUZA, L.C.G.; GÓES, L.C.S.; BALTHAZAR, J.M. Investigation of resonances on a harmonically forced non-linear slewing beam. In: Australian International Aerospace Congress – AIAC, 10., 2003, Brisbane. **Proceedings...**Brisbane – Australia: [s.n], 2003. ISBN 085-825-733-5.

FENILI. A; SOUZA, L.C.G. Contact dynamics model of a space robotic manipulator. In: International Astronautical Congress (IAC 2004), 55., 2004, Vancouver, Canadá. **Proceedings...**, Vancouver: IAC, 2004.

FENILI. A; CMC 423. **Modelagem e controle de estruturas flexíveis. 2º** período de 2006, INPE. (solicite ao autor: andre [fenili@yahoo.com](mailto:fenili@yahoo.com))

GLOVER, K. E DOYLE J. C. State space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an h-infinity norm bound and relations to risk sensitivity. **Systems and Control Letters**, v.11, p. 167-172. 1988.

HASSMANN, C.H.G E FENILI, A. Attitude and vibration control of a satellite with a flexible solar panel using lqr tracking with infinite time. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING. 19., 2007, Brasília. 2007. **Proceeding of COBEM...** Brasilia – DF: ABCM, 2007.

HEISE, S.; BANDA, S.; YEH, H. Robust control of a flexible structure in the presence of parameter variations and unmodelled dynamics. In: AEROSPACE SCIENCE MEETING, NEVADA, 28., 1990. **Proceedings...** Nevada: AIAA, 1990. p. 1-9, (AIAA 90-0752 paper).

HOROWITZ, I. quantitative feedback theory. **Proceedings of the Institution of Electrical Engineers**,. Part D, 129, p 215-226, 1982.

INMAN, D. J. **Vibration with control, measurement, and stability**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1989. 350p.

JOSHI, S.M. Control of large flexible space structure. In: THOMA. M; WYNER, A (ed.). **Lecture Notes in Control and Information Sciences**. v. 131 Springer-Verlag, 1989.

JUANG, J. N. Unification of several system realization algorithms. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**. v.20, n.1, Jan-Feb, p. 67-73, 1997.

JUNKINS, J. L.; KIM, Y. **Introduction to dynamics and control of flexible structures**. Washington D.C., U.S.A.: AIAA Education Series, 1993.

KALMAN, R.E. Contributions to the theory of optimal control.1960. **Mexican Mathematics Society Bulletin**, v. 2, n. 5, p.102-119.

KAILATH, T. **Linear systems**. New York: Prentices-Hall, 1980.

KIRK , C. L; INMAN, D.J. (eds). **Dynamics and control of structures in space III**. [S.I.]: Computational Mechanics Publication - CMP, 3-16, 1996. ISBN: 1-85312-415-X.

KRUCK, K.; ATUL, G.K. **Development of robust control strategies for aerospace systems**. Ames: Iowa State University, IA 50014 – Dec. 2002.

KWAKERNAAK, H. ; SIVAN, R. **Linear optimal control systems**. New York, NY: Wiley-Interscience, 1972.

MACIEJOWSKI, J.M. **Multivariable feedback design**. London: Addison Wesley, 1989. ISBN 0-201-18243-2.

MEIROVITCH, L. **Elements of Vibration Analysis** . International Student Edition. McGraw-Hill Kogakusha, LTD. ISBN 0-07-041340-1. p.191-285

MEIROVITCH, L ; KWAK, M.K. On the Maneuvering and Control of Space Structures. KIRK, C.L.; JUNKINS, J. L. (eds.). **Dynamics of flexible structures in space**. London: Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, 1990. p. 3-17.

MEIROVITCH, L. **Methods of Analytical Dynamics**. New York : Dover Publications, INC. Mineola, 1998. ISBN 0-486-43239-4(pbk.)

MEIROVITCH, L. From rayleigh-ritz to the finite element method. In: BIENNIAL CONFERENCE ON MECHANICAL VIBRATION AND NOISE, 17., Las Vegas – Nevada. **Proceedings...** Las Vegas: [s.n], 1999.

MODI, V. From Sputnik to the Space Station: evolution and challenges. In: BIENNIAL CONFERENCE ON MECHANICAL VIBRATION AND NOISE, 17., Las Vegas – Nevada. **Proceedings...** Las Vegas: [s.n], 1999.

MOOK, D. J.; & LEW, J. S. A robust algorithm for system realization/identification. **The Journal of the Astronautical Sciences**. v.38, n.2, Apr-Jun., p. 229-243, 1990.

MORTON, B.G.; MCAFFOS, R.M. A um-test for robustness analysis of a real parameter variation problem. In: AMER. CONTR. CONF. 1985, Boston. **Proceedings...** Boston: [s.n], 1985. p. 135-138.

POCHA, J. An experimental investigation of spacecraft sloshing. Proceeding of the Second INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPACECRAFT FLIGHT DYNAMICS, 2., Darmstadt. **Proceedings...** Darmstadt: ESA, 1986. p. 20-23, paper-255.

RODRÍGUEZ, R., FRANCISCO, J.  $H^\infty$  ¿Qué es y para que sirve?. In: SOMI XV,2000 – CONGRESSO NACIONAL DE INSTRUMENTACION - UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, 15., Mexico. **Anales...** Mexico: Facultad de Ingeniería, División de Ingeniería Eléctrica, Departamento de Ingeniería de Control.

VARGAS, R. F; SOUZA, L C G; KUGA, H. K. Application of the Kalman Filter to Estimate an Elastic Parameters in Order to Improve Controller Performance. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL & EXPERIMENTAL ENGINEERING & SCIENCES, 2004, Madeira, Portugal. **Proceedings...** Madeira: [s.n], 2004. ISBN 0-9657001-6-X.

SAFONOV, M.; ATHANS, M. **Gain and phase margin for multiloop LQG regulators**” M.I.T. Cambridge, MA, USA: IEEE Transactions on Automatic Control, April 1977

SAFONOV, M.G.; LAUB, A J. & HARTMANN, G.L. Feedback Properties of Multivariable Systems," The Role and Use of the Return Difference Matrix. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. AC-26, n. 1, p. 47-65, 1981.

SAFONOV, M.G.  **$L^\infty$  optimization vs. stability margin**. In: IEEE CONF. ON DECISION AND CONTROL, 1983, San Antonio. **Proceedings...**San Antonio, TX: [s.n], 1983, p.14-16.

SAFONOV, M.G.; LIMEBEER, D. J. N.; CHIANG, R. Y. Simplifying the  $H^\infty$  Theory via Loop Shifting, Matrix Pencil and Descriptor Concepts. **Int. J. Control**, v. 50, n. 6, p. 2467-2488, 1989.

SATO M.; SUZUKI M. Vibration control of flexible structures using a combined  $h^\infty$  approach. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**. AIAA, v. 19, n. 5, p.1000-1010, 1996.

SILVA, A.R E SOUZA, L.C.G. **Control System Flexible Satellite Interaction During Orbit Transfer Manoeuvre**. Published by American Astronautical Society (AAS) in Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 100 Part I, pp. 541-550, paper AAS 98-343, Ed. Thomas H. Stengle, USA, 1998. ISBN 0-87703-453-2.

SILVA, A R ; SOUZA, L.C.G. ; SCHÄFER, B. **Integrated Identification and Sensor Failure Detection for Space Robotic Joint**. INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DYNAMIC PROBLEMS OF MECHANICS – DINAME, 10., 2003, Ubatuba. **Proceedings...** Ubatuba: [s.n], 2003. Edited by P.R.G. Kurka and A.T. Fleury.

SOARES, A.M.S, SOUZA, L.C.G AND GÓES. L.C. A modal analysis of a a multibody system with flexible appendages. In: **NONLINEAR DYNAMICS** ,

CHAOS, CONTROL, AND THEIR APPLICATIONS TO ENGINEERING SCIENCES, 1997, [S.I.], **Proceedings...** [S.I.]: Academy of Mechanics (AAM) and ABCM, 1997a. v. 1, p. 312-316 .J.M.Balthazar, D.T. Mook, ;J.M. Rosario, (eds.). ISBN: 85-900351-15.

SOARES, A.M.S, SOUZA, L.C.G AND GÓES. L.C. Experimental control of a multibody structure with flexible appendages. In: JSASS INTERNATIONAL SESSION IN 35th AIRCRAFT SYMPOSIUM, 11., 1997,Tokyo. **Proceedings...** Tokyo: [s.n], 1997b. p. 639-642. paper TP-2-5.

SORENSEN, H. **Kalman Filtering: Theory and Application**. New York: IEEE Press, 1985.

SOUZA, L. C. G. **Dynamics and Robust Control for Uncertain Flexible Space System**. PhD Thesis, Cranfield Institute of Technology, CoA, Cranfield, England, 1992.

SOUZA, L. C. G. Robust controller design for flexible space system using a combination of LQG/LTR and PRLQG methods. In: Kirk, C. L.; Inman, D. J. (Eds.). DYNAMICS AND CONTROL OF STRUCTURE IN SPACE III. Southampton U.K.: Computational Mechanics Publication - CMP, 1996. p. 151–166.

SOUZA, L.C.G.; SILVA, S. A. Vibration control of a rigid-flexible satellite during attitude manoeuvre. In: BIENNIAL CONFERENCE ON MECHANICAL VIBRATION AND NOISE, 17., 1999. Las Vegas. **Proceedings...**Las Vegas – Nevada, USA: ASME, 1999.

SOUZA, L. C. G.; KUGA, H. K.; FENILI, A. Elastic Parameters Estimation of A Rigid-Flexible Satélite Using a Kalman Filter. INTERNATIONAL CONFERENCE

ON DYNAMICS AND CONTROL OF SYSTEMS AND STRUCTURE IN SPACE, 6., 2004. Liguria, Italy. **Proceedings...** Liguria, Italy:[s.n.],2004, p. 271-280. ISBN 1 871315891.

SOUZA, L. C G. design of satellite control system using optimal nonlinear theory. **Mechanics Based Design of Structures and Machines**, Taylor & Francis, v. 34, n. 4 p. 351-364, 2006.

STEIN, G.; ATHANS, M. The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 32. n. 2, p. 105-104, Feb., 1987.

STEYN, W. H., AND HASHIDA, Y. An attitude control system for a low-cost earth observation satellite with orbit maintenance capability. In: Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, 13., Logan, Utah, **Proceedings...** Logan: AIAA, 1999.

TAHK, M. E SPEYER, J.L. Modelling of parameter variations and asymptotic lqg synthesis. **IEEE Trans. Auto. Contr.**, v. AC-32, n.. 9, Sep., p. 793-801, 1987.

VALDIVIA, R. H. V. **Influência da flexibilidade no desempenho do sistema de controle de atitude de um satélite rígido/flexível**. 2005-02-15. 105 p. (INPE-14209-TDI/1110). Dissertação de Mestrado - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 2005. Disponível em: <<http://urlib.net/sid.inpe.br/iris@1913/2005/04.11.14.12>>. Acesso em: 04 jul. 2008.

VON ZUBEN, F.J. **Tópicos avançados:** controle robusto, controle adaptativo e controle inteligente. Campinas: DCA/FEEC/Unicamp, 2003. EA932 - Sistemas de Controle II - Turma U.

ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformation, multiplicative seminorms, and approximate inverses. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. AC-26, p. 301- 320, 1981.



## A APÊNDICE A - EXPANSÃO

O termo expandindo da equação (2.16):

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{i=1}^n \dot{q}^2 = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i^2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2 + \dots) \quad (\text{A.1})$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2 + \dots) = 2\dot{q}_1^2 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2 + \dots) = 2\dot{q}_2^2 \quad (\text{A.3})$$

Então:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 = 2\dot{q}_i \quad (\text{A.4})$$



## **B APÊNDICE B - MODELAMENTO DA INCERTEZA**

### **B.1 Introdução**

As estruturas espaciais flexíveis (painéis solares, antenas, manipuladores robóticos) são geralmente modeladas como sistemas lineares invariáveis no tempo, mesmo que haja a maior precisão do sistema físico a existência da incerteza do modelo é inevitável (SOUZA, 1996).

Uma das principais características das estruturas espaciais flexíveis é a grande incerteza do modelo matemático descrito na dinâmica do sistema, onde as estruturas são parcialmente representadas. O projeto de controle encara desafios técnicos, tais como (SOUZA, 1996):

- Estabilidade da malha-fechada que pode exibir alta sensibilidade dentro da malha;
- Dificuldade para garantir o desempenho do sistema, especialmente quando o amortecimento e a frequência são conhecidos com uma limitada precisão;
- Domínios de vários modos e possíveis acoplamentos.

As duas incertezas mais importantes são devido à negligência da dinâmica em alta frequência e a dos erros paramétricos na dinâmica modelada, geralmente são conhecidas como incerteza não-estruturada e incerteza estruturada.

### **B.2 Incerteza Não-Estruturada**

Para um sistema MIMO (Múltipla Entrada - Múltipla Saída) a descrição da incerteza é geralmente considerada como uma perturbação simples ( $L_s$ ), onde  $L_s$  é uma matriz com a mesma dimensão da planta. Deve-se notar que os modelos não-estruturados são descrições externas da incerteza da planta, de maneira que esta incerteza da planta é modelada em seu exterior através de

um bloco extra introduzido na entrada, na saída ou ao redor da planta, como uma malha de realimentação (SOUZA, 1996).

### B.3 Estabilidade Robusta

O limite da frequência nesta incerteza pode ser estabelecido em termos de máximos valores singulares ( $\bar{\sigma}$ ) de L dado por:

$$L_s(s) = l(s)\Delta(s), \quad \bar{\sigma}(\Delta(jw)) \leq 1 \quad \forall w \quad (\text{B.1})$$

$l(w)$  pode ser interpretado como um peso escalar numa perturbação normalizada  $\Delta(s)$ . Geralmente a magnitude de  $l(w)$  não constituirá uma descrição real da incerteza. Quando a perturbação L é dada na forma representada pela equação (5.1) e  $\Delta$  satisfaz os valores singulares  $\bar{\sigma} \geq 1$ . A condição para a estabilidade robusta de um sistema de malha-fechada pode ser determinada por uma generalização da multivariável do critério de Nyquist, ou seja, o sistema de malha fechada é estável para todas as perturbações  $L(\bar{\sigma}(L) \leq 1)$  se e somente se:

$$\bar{\sigma}(T) < \frac{1}{l} \quad (\text{B.2})$$

onde T é a função de transferência nominal de malha fechada.

## B.4 Incerteza Estruturada

Um sistema linear MIMO, não variante no tempo pode ser escrito na forma de variáveis de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax(t) + B_1(wt) + B_2u(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}(wt) + D_{22}u(t)\end{aligned}\tag{B.3}$$

Onde  $x(t)$  é vetor de estado  $n$ -dimensional,  $w(t)$  um vetor de distúrbio  $r_1$ -dimensional e  $u(t)$  um vetor de controle  $r_2$ -dimensional,  $z(t)$  um vetor de saída controlada  $r_3$ -dimensional e  $y(t)$  um vetor medida  $m$ -dimensional.

Um modelo de malha de realimentação interna na representação de variáveis de estado de um sistema de incerteza dinâmica pode ser descrita por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \Delta_p \right\} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}\tag{B.4}$$

Na qual a primeira matriz do lado direito é a matriz do sistema nominal e  $\Delta_p$  é a matriz de perturbação. Assumindo que  $C_1$ ,  $D_{11}$  e  $D_{12}$  não estão sujeitos a variações do parâmetro  $\Delta_p$  e que há  $m$  parâmetros independentes  $p_1, \dots, p_m$  e que eles são limitados como  $|\Delta_p| \geq 1$ . A matriz de perturbação  $\Delta_p$  pode ser

decomposta com respeito a cada variação paramétrica e escrita na forma de matriz como:

$$\Delta_p = - \begin{bmatrix} M_x \\ 0 \\ M_y \end{bmatrix} \Delta [N_x \quad N_w \quad N_u] = -M\Delta N \quad (\text{B.5})$$

Portanto temos que:

$$z_p \stackrel{\Delta}{=} [N_x \quad 0 \quad N_w \quad N_u] \begin{bmatrix} x \\ w_p \\ w \\ u \end{bmatrix}, w_p = -\Delta z_p \quad (\text{B.6})$$

onde  $w_p$  e  $z_p$  são consideradas como entradas e saídas fictícias, respectivamente, devido as perturbações da planta e  $\Delta$  é a matriz de ganho da realimentação interna.

## **PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE**

### **Teses e Dissertações (TDI)**

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

### **Manuais Técnicos (MAN)**

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

### **Notas Técnico-Científicas (NTC)**

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programa de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

### **Relatórios de Pesquisa (RPQ)**

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

### **Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)**

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

### **Publicações Didáticas (PUD)**

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

### **Publicações Seriadas**

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

### **Programas de Computador (PDC)**

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. São aceitos tanto programas fonte quanto executáveis.

### **Pré-publicações (PRE)**

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.