



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-13601-TDI/1040**

**ANÁLISE DE ALGORITMOS DE NAVEGAÇÃO PARA UM  
SISTEMA GPS DIFERENCIAL EM TEMPO REAL**

Leandro Baroni

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Helio Koiti Kuga, aprovada em 27 de agosto de 2004.

INPE  
São José dos Campos  
2006

629.783:621.39

Baroni, L.


Análise de algoritmos de navegação para um sistema GPS diferencial em tempo real / L. Baroni. – São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2004.

120 p.; - (INPE-13601-TDI/1040)

1.Navegação. 2.Sistemas de navegação por satélites. 3.Sistema de posicionamento global. 4.Filtro de Kalman. 5. Método de mínimos quadrados. I. Título.

Aprovado(a) pela Banca Examinadora, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do Título de **Mestre em Engenharia e Tecnologia Espacial/Mecânica Espacial e Controle.**


Dr. Atair Rios Neto

  
\_\_\_\_\_  
Presidente/INPE, SJCampos-SP

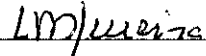
Dr. Hélio Koiti Kuga

  
\_\_\_\_\_  
Orientador/INPE, SJCampos-SP

Dr. Roberto Vieira da Fonseca Lopes

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca/INPE, SJCampos-SP

Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira

  
\_\_\_\_\_  
Membro/Convidado/UFPR-PR

**Aluno:** Leandro Baroni

São José dos Campos, 27 de agosto de 2004.



*“Algo só é impossível até que alguém duvida disso e acaba provando o contrário”.*

Albert Einstein



A meus pais,  
ARNALDO BARONI e  
NEIDE MARTIN BARONI  
e minha irmã  
LUCIANA BARONI





## **AGRADECIMENTOS**

Ao Dr. Hélio Koiti Kuga por sua competência, compreensão e dedicação na orientação deste trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo auxílio financeiro de bolsa de mestrado, processo número 02/05643-2.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais pela oportunidade de estudos e pelos meios concedidos para a realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora pela predisposição em analisar e discutir este trabalho e pelas sugestões recebidas.

Aos professores do DMC/INPE que transmitiram conhecimento e deram incentivos ao longo do curso.

À minha família pela ajuda e apoio constantes que foram de grande importância ao longo deste trabalho.

Aos amigos Alex, Bráulio, Carmen, Edmundo, Gilberto, Leandro, Vivian, Yasser que compartilharam do meu tempo neste mestrado e para Maria Cecilia, um sonho que se realizou, que deu sentido a tudo.



## RESUMO

O Sistema de Posicionamento Global (GPS) é um sistema de navegação baseado em satélites que permite ao usuário determinar sua posição e tempo com alta precisão. A determinação de posição do GPS é baseada no conceito de tempo de chegada do sinal, o qual está sujeito a diversas fontes de erros em sua medida. O efeito combinado destes erros na propagação do sinal causa uma degradação na precisão do posicionamento. Entretanto, existem métodos de melhorar a precisão do posicionamento, como o GPS diferencial (DGPS) e o posicionamento por dupla diferença, que tentam compensar, atenuar ou eliminar várias fontes de erros. Neste trabalho são analisados algoritmos que permitam navegação precisa em tempo real, através de técnicas de GPS diferencial. Algoritmos de GPS diferencial foram desenvolvidos, implementados e testados através da realização de posicionamento em tempo real para um usuário com a utilização de três métodos: DGPS na posição, DGPS nas medidas de pseudodistância e posicionamento por dupla diferença. Estes algoritmos foram testados em dois casos: estático, no qual ambos os receptores são mantidos fixos; e dinâmico, no qual o receptor usuário está se movendo. Os dados em ambos os casos foram coletados por dois receptores Ashtech Z12. O desempenho dos algoritmos no teste estático foi comparado com a linha de base conhecida, enquanto que o desempenho dos algoritmos no teste dinâmico foi comparado com uma trajetória de referência pós-processada e analisado em termos das precisões obtidas.



# NAVIGATION ALGORITHM ANALYSIS FOR A REAL TIME DIFFERENTIAL GPS SYSTEM

## ABSTRACT

The Global Positioning System (GPS) is a satellite-based navigation system that allows user to determine position and time with high precision. The position determination with GPS is based on the concept of signal time of arrival, which is affected by several errors sources in measurements. The combined effects of these errors at signal propagation cause degradation in the positioning accuracy. However, there are methods to improve the positioning accuracy, like differential GPS (DGPS) and double difference positioning, which try to compensate, attenuate or eliminate several error sources. In this work algorithms that allow precise real time navigation, through differential GPS techniques are analyzed. Differential GPS algorithms were developed, implemented and tested by the real time positioning for an user through three methods: DGPS on position, DGPS on pseudorange measurements and double difference measurements. These algorithms were tested in two cases: static, in which both receivers are fixed; and dynamic, in which the user receiver is moving. The data in both cases were collected by two Ashtech Z12 receivers. The algorithms performance in the static test was compared with a known baseline, while the algorithm performance in the dynamic test were compared with a post-processed reference trajectory and analyzed in terms of accuracies attained.



## SUMÁRIO

### LISTA DE FIGURAS

### LISTA DE TABELAS

### LISTA DE SÍMBOLOS

### LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

<b>CAPÍTULO 1– INTRODUÇÃO</b>	<b>29</b>
1.1 Motivação e Objetivos . . . . .	31
1.2 Organização do Trabalho . . . . .	33
1.3 Revisão Bibliográfica . . . . .	34
<b>CAPÍTULO 2– FUNDAMENTOS DO GPS</b>	<b>39</b>
2.1 O Sistema Navstar-GPS . . . . .	39
2.1.1 Segmento Espacial . . . . .	40
2.1.2 Segmento de Controle . . . . .	40
2.1.3 Segmento Usuário . . . . .	41
2.2 Determinação da Posição e Tempo . . . . .	42
2.3 Observáveis . . . . .	42
2.3.1 Pseudodistância . . . . .	43
2.3.2 Fase da Portadora . . . . .	43
2.4 Fontes de Erros . . . . .	44
2.4.1 Erros dos Relógios dos Satélites . . . . .	44
2.4.2 Erro Devido à Troposfera . . . . .	45
2.4.3 Erro Devido à Ionosfera . . . . .	45
2.4.4 Multicaminho . . . . .	46
2.4.5 Erro do Centro de Fase da Antena . . . . .	46
<b>CAPÍTULO 3– METODOLOGIA</b>	<b>47</b>
3.1 Método de Mínimos Quadrados . . . . .	47
3.2 Filtro de Kalman . . . . .	48
3.2.1 Sintonização do filtro . . . . .	50
3.2.2 Propagação . . . . .	50

3.2.3	Atualização . . . . .	51
3.2.4	Filtro de Kalman Estendido . . . . .	51
3.3	Posicionamento Absoluto . . . . .	53
3.4	Posicionamento Diferencial . . . . .	54
3.4.1	GPS Diferencial . . . . .	54
3.4.2	Observações de Simples Diferença . . . . .	57
3.4.3	Observações de Dupla Diferença . . . . .	58
<b>CAPÍTULO 4– ALGORITMOS DE GPS DIFERENCIAL</b>		<b>61</b>
4.1	GPS Diferencial na Posição . . . . .	61
4.2	GPS Diferencial na Pseudodistância . . . . .	62
4.2.1	Correções na Pseudodistância . . . . .	62
4.2.2	Estimação da Posição do Usuário . . . . .	63
4.3	Posicionamento por Dupla Diferença . . . . .	65
4.3.1	Branqueamento de Erros de Observação . . . . .	67
4.3.2	Inversão da Matriz $\mathbf{R}_{DD}$ . . . . .	68
4.3.3	Fatoração de Cholesky . . . . .	69
4.3.4	Suavização . . . . .	70
4.4	Cálculo do Ruído Dinâmico $\Gamma_k \mathbf{Q} \Gamma_k^T$ . . . . .	71
<b>CAPÍTULO 5– APLICAÇÃO DOS ALGORITMOS EM POSICIONAMENTO ESTÁTICO</b>		<b>73</b>
5.1	GPS Diferencial na Posição . . . . .	74
5.2	GPS Diferencial na Pseudodistância . . . . .	75
5.2.1	Resultados . . . . .	77
5.3	Modelagem das Observáveis por Dupla Diferença . . . . .	80
5.3.1	Modelagem Usando Filtro de Kalman . . . . .	80
5.3.2	Modelagem Usando Mínimos Quadrados . . . . .	81
5.3.3	Resultados Utilizando Dados do Código C1 . . . . .	82
5.3.4	Resultados Utilizando Dados do Código P1 . . . . .	86
5.4	Tempo de Execução dos Programas . . . . .	90
<b>CAPÍTULO 6– APLICAÇÃO DOS ALGORITMOS EM NAVEGAÇÃO</b>		<b>93</b>
6.1	Aplicação do GPS Diferencial na Posição . . . . .	94
6.2	Aplicação do GPS Diferencial na Pseudodistância . . . . .	96



6.2.1	Correções . . . . .	97
6.2.2	Resultados . . . . .	98
6.3	Resultados Usando Medidas de Dupla Diferença . . . . .	103
6.3.1	Modelagem por Filtro de Kalman . . . . .	103
6.3.2	Modelagem por Mínimos Quadrados . . . . .	104
6.3.3	Resultados para o Filtro de Kalman . . . . .	104
6.3.4	Resultados para o Mínimos Quadrados . . . . .	106
6.4	Tempo de Execução dos Programas . . . . .	108
<b>CAPÍTULO 7– CONCLUSÃO</b>		<b>111</b>
7.1	Conclusões . . . . .	111
7.2	Trabalhos Futuros . . . . .	113
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>		<b>115</b>



## LISTA DE FIGURAS

2.1	Representação da constelação de satélites GPS . . . . .	41
2.2	Segmentos do GPS . . . . .	41
3.1	Conceito de GPS diferencial . . . . .	55
4.1	Geometria de uma observação . . . . .	66
5.1	Configuração do experimento . . . . .	74
5.2	Variação do GDOP, PDOP, TDOP e número de satélites visíveis durante a observação . . . . .	74
5.3	Erro da posição do usuário para DGPS na posição . . . . .	75
5.4	Resíduos da pseudodistância . . . . .	79
5.5	Erro da posição do usuário para DGPS na pseudodistância . . . . .	80
5.6	Erro do posicionamento do usuário sem suavização . . . . .	83
5.7	Erro do posicionamento do usuário com suavização de 10s . . . . .	83
5.8	Erro do posicionamento do usuário com suavização de 30s . . . . .	84
5.9	Erro do posicionamento do usuário com suavização de 50s . . . . .	84
5.10	Erro do posicionamento do usuário com suavização de 100s . . . . .	85
5.11	Erro do posicionamento do usuário sem suavização . . . . .	87
5.12	Erro do posicionamento do usuário com suavização de 10s . . . . .	87
5.13	Erro do posicionamento do usuário com suavização de 30s . . . . .	88
5.14	Erro do posicionamento do usuário com suavização de 50s . . . . .	88
5.15	Erro do posicionamento do usuário com suavização de 100s . . . . .	89
6.1	Trajetória da aeronave . . . . .	93
6.2	Altitude da aeronave em função do tempo . . . . .	94
6.3	Variação do número de satélites visíveis e GDOP, PDOP e TDOP em função do tempo . . . . .	94
6.4	Erro da posição da aeronave nas componentes leste, norte e vertical . . . . .	95
6.5	Erro horizontal da aeronave . . . . .	96
6.6	Resíduos das medidas para o método de DGPS na pseudodistância . . . . .	99
6.7	Erros da posição para o método de DGPS na pseudodistância . . . . .	101
6.8	Trajetória e altitude da aeronave entre 1575 e 1875s . . . . .	101

6.9	Erros horizontal e vertical para o método de DGPS na pseudo-distância entre 1575 e 1875s . . . . .	102
6.10	Erro horizontal para o método de DGPS na pseudodistância . . . . .	102
6.11	Comportamento dos resíduos durante o teste . . . . .	105
6.12	Erro da posição da aeronave nas componentes leste, norte e vertical para a solução por filtro de Kalman . . . . .	107
6.13	Erro horizontal para o filtro de Kalman . . . . .	108
6.14	Erro da posição da aeronave nas componentes leste, norte e vertical para a solução por mínimos quadrados . . . . .	109
6.15	Erro horizontal para o método de dupla diferença usando mínimos quadrados . . . . .	110

## LISTA DE TABELAS

3.1	Balanco de Erros do GPS (SA Destivada) . . . . .	54
3.2	Balanco de Erros do DGPS . . . . .	57
5.1	Valores iniciais da posicao, desvio e deriva e suas covariâncias para o filtro de Kalman . . . . .	78
5.2	Estatística dos resíduos para o método de DGPS na pseudodistância .	79
5.3	Médias e desvios-padrão para a solução por filtro de Kalman nas medidas em C1 . . . . .	85
5.4	Médias e desvios-padrão para a solução por mínimos quadrados nas medidas em C1 . . . . .	86
5.5	Médias e desvios-padrão para a solução por filtro de Kalman nas medidas em P1 . . . . .	89
5.6	Médias e desvios-padrão para a solução por mínimos quadrados nas medidas em P1 . . . . .	89
5.7	Tempo total e médio de execução dos algoritmos . . . . .	90
6.1	Erro médio e desvio-padrão da posição em coordenadas leste-norte-vertical para o método de DGPS na posição . . . . .	96
6.2	Valores iniciais dos estados e suas covariâncias para o filtro de Kalman	98
6.3	Estatística dos resíduos para o método de DGPS na pseudodistância .	100
6.4	Erro médio e desvio-padrão da posição em coordenadas leste-norte-vertical para o método de DGPS na pseudodistância . . . . .	100
6.5	Erro médio e desvio-padrão da posição em coordenadas leste-norte-vertical para as épocas entre 1575s e 1875s para o método de DGPS na pseudodistância . . . . .	102
6.6	Média e desvio-padrão dos resíduos para o filtro de Kalman . . . . .	105
6.7	Erro médio e desvio-padrão da posição em coordenadas leste-norte-vertical para a solução por filtro de Kalman . . . . .	106
6.8	Erro médio e desvio-padrão da posição em coordenadas leste-norte-vertical para as épocas entre 1575s e 1875s usando o filtro de Kalman	106
6.9	Média e desvio-padrão dos resíduos para os mínimos quadrados . . .	108
6.10	Erro médio e desvio-padrão da posição em coordenadas leste-norte-vertical para a solução por mínimos quadrados . . . . .	109
6.11	Tempo total e médio de execução dos algoritmos . . . . .	110



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\dot{x}_u, \dot{y}_u, \dot{z}_u$	Componentes da velocidade de $u$
$\hat{D}_u^i$	Distância geométrica calculada entre o receptor $u$ e o satélite $i$
<b>A</b>	Matriz de formação da covariância
<b>B</b>	Termo de contribuição do desvio do relógio do satélite
<b>D</b>	Matriz que relaciona as pseudodistância e observações de dupla diferença
<b>F</b>	Matriz do sistema dinâmico
<b>G</b>	Matriz de adição de ruído
<b>H</b>	Matriz de relação entre as medidas e os parâmetros
$\mathbf{H}_k$	Matriz de relação entre as medidas e os estados
<b>I</b>	Matriz identidade
$\mathbf{I}_{ono}$	Termo de contribuição do erro ionosférico
$\mathbf{K}_k$	Ganho de Kalman
$\mathbf{L}^{-1}$	Matriz raiz quadrada de $\mathbf{R}_{DD}^{-1}$
<b>P</b>	Matriz de covariância dos parâmetros
$\mathbf{P}_k$	Matriz de covariância dos estados
$\mathbf{P}_{ub}$	Matriz de covariância de $\mathbf{x}_{ub}$
<b>Q</b>	Matriz de densidade espectral de potência dos ruídos dinâmicos
$\mathbf{R}^i$	Vetor posição do $i$ -ésimo satélite GPS
$\mathbf{R}_{DD}$	Matriz de covariância das observações de dupla diferença
$\mathbf{R}_\rho$	Matriz de covariância dos erros de medida da pseudodistância
$\mathbf{R}_k$	Matriz de covariância do ruído das medidas
$\mathbf{R}_s$	Matriz contendo as posições dos satélites visíveis
<b>S</b>	Matriz contendo as linhas de visadas para os satélites visíveis
<b>T</b>	Termo de contribuição do erro troposférico
<b>W</b>	Matriz de pesos
$\bar{\mathbf{P}}_k$	Matriz de covariância dos estados propagada
$\bar{\mathbf{P}}_{ub}$	Matriz de covariância propagada de $\mathbf{x}_{ub}$
$\bar{\mathbf{x}}_k$	Vetor de estados propagado
$\bar{\mathbf{x}}_{ub}$	Vetor linha de base propagado
$\dot{\mathbf{x}}$	Derivada temporal de $\mathbf{x}$
$\hat{\mathbf{P}}_0$	Matriz de covariância dos estados inicial estimada
$\hat{\mathbf{P}}_k$	Matriz de covariância dos estados estimada
$\hat{\mathbf{P}}_{ub}$	Matriz de covariância estimada de $\mathbf{x}_{ub}$
$\hat{\mathbf{r}}_u$	Vetor posição estimado do receptor $u$
$\hat{\mathbf{x}}$	Vetor de parâmetros estimado
$\hat{\mathbf{x}}_0$	Vetor de estados inicial estimado
$\hat{\mathbf{x}}_k$	Vetor de estados estimado
$\hat{\mathbf{x}}_{ub}$	Vetor linha de base estimado
$\hat{\mathbf{x}}_u$	Vetor de estados estimado de $u$

$\hat{\mathbf{z}}_{DD}$	Vetor contendo as observações de dupla diferença calculadas
$\tilde{\mathbf{H}}$	Transformação de $\mathbf{H}$ por branqueamento
$\tilde{\mathbf{z}}_{DD}$	Transformação de $\mathbf{z}_{DD}$ por branqueamento
$\mathbf{b}$	Termo de contribuição do desvio do relógio do receptor
$\mathbf{f}$	Função não-linear que relaciona os estados à sua derivada temporal
$\mathbf{h}_k$	Função não-linear que relaciona os estados às observações
$\mathbf{r}_b$	Vetor posição do receptor $b$
$\mathbf{r}_g$	Posição geométrica
$\mathbf{r}_u$	Vetor posição do receptor $u$
$\mathbf{v}_u$	Vetor velocidade do receptor $u$
$\mathbf{x}$	Vetor de parâmetros
$\mathbf{x}_0$	Vetor de estados inicial
$\mathbf{x}_k$	Vetor de estados no instante $t_k$
$\mathbf{x}_{ref}$	Vetor com as coordenadas da base de referência
$\mathbf{x}_{ub}$	Vetor linha de base entre os receptores
$\mathbf{x}_u$	Vetor de estados do receptor $u$
$\mathbf{y}_k$	Vetor de medidas no instante $t_k$
$\mathbf{z}_{DD}$	Vetor contendo as observações de dupla diferença
$\mathbf{z}_\rho$	Vetor contendo as medidas de pseudodistância
$E$	Operador esperança
$a$	Semi-eixo maior
$a_{f0}, a_{f1}, a_{f2}$	Coefficientes de correção do relógio do satélite
$B^i$	Desvio do relógio do satélite $i$
$b_u$	Desvio do relógio do receptor $u$
$c$	Velocidade de propagação da luz
$d_u$	Deriva do relógio do receptor $u$
$D_u^i$	Distância geométrica entre o receptor $u$ e o satélite $i$
$E$	Anomalia excêntrica
$e$	Excentricidade
$I_u^i$	Erro devido à ionosfera
$J$	Janela de suavização
$L$	Índice de desempenho dos mínimos quadrados
$L_1, L_2, L_5$	Frequências do sinal GPS
$m$	Número de medidas
$M$	Satélite mestre
$n$	Número de estados
$N_u^i$	Ambigüidade no número de comprimentos de onda
$q_b$	Densidade espectral de potência de $\boldsymbol{\omega}_b$
$q_r$	Densidade espectral de potência de $\boldsymbol{\omega}_r$
$r$	Número de ruídos na modelagem dinâmica



$t$	Tempo GPS
$t_i$	Tempo de transmissão do sinal no relógio do satélite $i$
$t_k$	Instante da $k$ -ésima observação
$t_{oc}$	Tempo de referência das efemérides
$T_u^i$	Erro devido à troposfera
$X^i, Y^i, Z^i$	Coordenadas da posição do satélite $i$
$x_b, y_b, z_b$	Coordenadas de posição do receptor $b$
$x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}$	Coordenadas de posição da base de referência
$x_u, y_u, z_u$	Coordenadas da posição do receptor $u$
$y_i$	$i$ -ésimo elemento de $\mathbf{y}$
$\Delta \mathbf{r}$	Correções diferenciais na posição
$\Delta \mathbf{x}_{ub}$	Incremento na linha de base
$\Delta \mathbf{x}_u$	Resíduo do vetor de estados
$\Delta \rho_u^i$	Resíduo da medida de pseudodistância
$\Delta t_R$	Correção relativística na relógio do satélite
$\Delta t_i$	Termo de correção do relógio do satélite $i$
$\Gamma_k \mathbf{Q} \Gamma_k^T$	Discretização de $\mathbf{Q}$ na propagação
$\epsilon$	Contribuição dos erros não modelados
$\nu$	Ruído na observação de dupla diferença
$\nu_k$	Ruído no vetor de medidas
$\omega$	Ruídos brancos da modelagem da dinâmica
$\omega_b$	Ruído na modelagem da dinâmica do relógio
$\omega_r$	Ruído na modelagem da dinâmica da posição
$\omega_u$	Ruído na modelagem dinâmica
$\rho_b$	Vetor contendo as pseudodistância medida pela base
$\rho_u$	Vetor contendo as pseudodistância medida pelo usuário
$\tilde{\nu}$	Transformação de $\nu$ por branqueamento
$\delta(t - \tau)$	Função delta de Dirac
$\delta \rho$	Vetor de correções diferenciais
$\delta \rho^i$	Correção diferencial na pseudodistância referente ao satélite $i$
$\delta_{kl}$	Função delta de Kronecker
$\delta t$	Intervalo de tempo entre as medidas
$\delta x, \delta \dot{x}, \delta y_k$	Desvio definidos na linearização
$\delta x, \delta y, \delta z$	Coordenadas da linha de base
$\dot{\delta x}, \dot{\delta y}, \dot{\delta z}$	Variação da linha de base
$\epsilon_{\phi,u}^i$	Ruído de medida na pseudodistância via fase
$\epsilon_{\rho,u}^i$	Ruído de medida na pseudodistância via código
$\epsilon_{\varphi,u}^i$	Ruído de medida na fase da portadora
$\hat{\rho}_u^i$	Pseudodistância calculada
$\lambda$	Comprimento de onda da portadora

$\Phi_{k+1,k}$	Matriz de transição entre os instantes $t_k$ e $t_{k+1}$
$\mu$	Parâmetro gravitacional da Terra
$\phi_{ub}^i$	Observável de simples diferença em fase
$\phi_u^i$	Pseudodistância via fase
$\rho_u^i$	Pseudodistância via código entre o receptor $u$ e o satélite $i$
$\rho_{corr,u}^i$	Pseudodistância corrigida
$\rho_{ub}^{ij}$	Observável de dupla diferença em código
$\rho_{ub}^i$	Observável de simples diferença em código
$\sigma_0$	Desvio-padrão do erro de medida da pseudodistância
$\tau$	Tempo de percurso do sinal
$\varphi_u^i$	Fase da onda portadora
$\mathbf{1}_b^i$	Matriz linha de visada entre o receptor $b$ e o satélite $i$
$i$	$i$ -ésimo satélite GPS
$j$	$j$ -ésimo satélite GPS
$M$	Satélite meste
$T$	Transposto
$b$	Receptor $b$
$u$	Receptor $u$
$DD$	Observações de dupla diferença
$ref$	Base de referência
$\rho$	Medidas de pseudodistância
$-$	Vetor ou matriz propagado
$\hat{\phantom{x}}$	Vetor ou matriz estimado/calculado
$\sim$	Vetor ou matriz transformada

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

C/A	<i>Coarse/Aquisition code</i>
DGPS	<i>Differential Global Positioning System</i>
DoD	<i>Department of Defense</i>
DOP	<i>Dilution of Precision</i>
ECEF	<i>Earth Centered Earth Fixed</i>
Embraer	<i>Empresa Brasileira de Aeronáutica</i>
FK	<i>Filtro de Kalman</i>
GDOP	<i>Geometric Dilution of Precision</i>
GLONASS	<i>Global Navigation Satellite System</i>
GNSS	<i>Global Navigation Satellite System</i>
GPS	<i>Global Positioning System</i>
HDOP	<i>Horizontal dilution of precision</i>
IBGE	<i>Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística</i>
IMU	<i>Inertial Motion Units</i>
INPE	<i>Istituto Nacional de Pesquisas Espaciais</i>
MCS	<i>Master Control Station</i>
MQ	<i>Mínimos quadrados</i>
NIMA	<i>National Imagery Mapping Agency</i>
P	<i>Precise code</i>
PDOP	<i>Position Dilution of Precision</i>
PPS	<i>Precise Positioning Service</i>
PRN	<i>Pseudorandom noise</i>
RINEX-2	<i>Receiver Independent Exchange Format versão 2.10</i>
RMS	<i>Root Mean Square</i>
RTCM	<i>Radio Technical Commission for Maritime Services</i>
SA	<i>Selective Availability</i>
SD	<i>Selective Denial</i>
SPS	<i>Standard Positioning Service</i>
SV	<i>Space Vehicle</i>
TDOP	<i>Time Dilution of Precision</i>
TOA	<i>Time of arrival</i>
UERE	<i>User Equivalent Range Error</i>
UFPR	<i>Universidade Federal do Paraná</i>
USNO	<i>United States Naval Observatory</i>
VDOP	<i>Vertical dilution of precision</i>
WADGPS	<i>Wide Area Differential Global Positioning System</i>
WGS-84	<i>World Geodetic System of 1984</i>



# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

O *Sistema de Posicionamento Global* (conhecido como Navstar-GPS, *Global Positioning System*) é um sistema de radionavegação por satélites, fornecendo a usuários no mundo toda posição, velocidade e determinação de tempo precisa. Os satélites do sistema transmitem sinais em radiofrequência, contendo as informações requeridas para que o equipamento do usuário compute sua solução de navegação (posição, velocidade e tempo). O sistema foi projetado, desenvolvido e ainda é operado pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos, mas é parcialmente aberto a usuários civis.

A determinação de posição através do GPS é baseada no conceito de tempo de chegada do sinal (TOA, *time of arrival*) (Kaplan, 1996). O conceito de TOA consiste em transmitir um sinal em um tempo conhecido e medir o tempo de chegada (recepção) deste sinal em um tempo posterior conhecido. Este intervalo de tempo é então multiplicado pela velocidade de propagação do sinal para obter a distância entre o emissor e o receptor. Através da medição do tempo de propagação de sinais de vários emissores em posições conhecidas, o receptor pode calcular sua posição. Cada distância medida pode ser relacionada a três coordenadas de posição. Dada as medidas de distância de três emissores, pode-se obter a solução para estas três incógnitas.

A medida de tempo deve ser muito precisa, ou o posicionamento não será possível. Cada satélite carrega relógios atômicos de césio e rubídio, enquanto que os receptores usam osciladores de quartzo. A fim de medir o tempo real de percurso do sinal do satélite ao receptor, os relógios do satélite e do receptor devem ser mantidos em sincronismo. O desvio no relógio do receptor do usuário afeta a medida de tempo de percurso de todos os satélites igualmente, logo esse desvio se torna a quarta incógnita a ser estimada, juntamente com as três de posição. Assim, o usuário necessita de um mínimo de quatro satélites para determinar suas coordenadas (Misra e Enge, 2001).

A precisão com que os erros de propagação do sinal são compensados é de extrema importância. No sistema GPS, as medidas de pseudodistância, que são as medidas de distância entre o satélite e o receptor mais os efeitos dos erros de propagação do

sinal, são freqüentemente usadas para estimar as coordenadas de posição e desvio do relógio. Infelizmente, há uma variedade de erros nas medidas que impedem o sistema GPS de alcançar alta precisão exigida por certas aplicações.

O efeito combinado dos erros na propagação do sinal causa uma degradação na exatidão do posicionamento de cerca de 10m na posição horizontal e 13m na vertical (Axelrad e Brown, 1996). A fim de obter uma exatidão no posicionamento da ordem de metros, são necessários métodos mais complexos para reduzir esses erros.

Um método de reduzir os erros nas medidas do GPS comumente utilizado é o chamado GPS diferencial (DGPS, *Differential GPS*). Um receptor GPS estacionário é colocado em um ponto de referência, com coordenadas conhecidas, geralmente chamado *base*. Assim, é possível calcular o valor verdadeiro da medida. Comparando-se o valor medido com o verdadeiro obtém-se a correção diferencial, que deve ser aplicada às medidas do receptor *usuário*. Este procedimento elimina os erros que são comuns a ambos os receptores. Assim, a técnica de GPS diferencial consiste de dois passos:

- gerar correções diferenciais na base de referência;
- aplicar essas correções no receptor usuário.

Outro método utilizado é o posicionamento por simples diferença ou dupla diferença. As medidas do receptor base são combinadas com as medidas coletadas pelo receptor usuário, formando medidas diferenciais. Estas medidas são usadas para calcular a posição do usuário relativa à base. Esta técnica é capaz de eliminar erros comuns a ambos os receptores.

Dada a proximidade da base e do usuário, o sinal de radio do GPS percorrerá caminhos próximos. Assim, o princípio destas técnicas diferenciais supõe que os efeitos ambientais (troposfera e ionosfera principalmente) são os mesmos em ambos os receptores para linhas de base próximas, pois estes efeitos são espacialmente correlacionados, isto é, a magnitude do erro é dependente da linha de base. Com isso, efeitos de modelagem complexa são minimizados e a técnica dá origem a um posicionamento relativo de grande precisão. No entanto deve-se tomar o cuidado de usar apenas os satélites visíveis em ambos os receptores (Martínez *et al.*, 2000).

## 1.1 Motivação e Objetivos

Durante os processos de desenvolvimento e certificação, as aeronaves necessitam determinar com precisão sua posição. Ao longo dos anos vários sistemas capazes de fornecer estes dados foram desenvolvidos, e entre eles, pode-se citar: cineteodolitos, sistemas de rádio, *radar tracking* e *laser tracking*.

Entretanto, o GPS trouxe novas possibilidades em termos de precisão, facilidade de acesso aos dados e portabilidade. Em particular, o uso do GPS associado a técnicas diferenciais (DGPS) trouxe grande precisão, aliada às demais características do GPS, e se transformou numa ferramenta muito útil para posicionamento de aeronaves.

A Embraer (Empresa Brasileira de Aeronáutica) usa um sistema DGPS para a determinação da trajetografia (posicionamento no tempo em um sistema de coordenadas solidário a pista) de suas aeronaves em ensaios de decolagem e pouso. Entretanto, a empresa ressenete-se de vários aspectos, quanto ao emprego do DGPS:

- O sistema demanda um processamento pós-vôo que consome tempo e requer um operador altamente especializado;
- Não se dispõe a bordo de informações da posição presente da aeronave relativa a um ponto fixo (cabeceira da pista, pontos no solo etc.), o qual seria de grande valia nos ensaios de ruído, para atender os padrões americanos de certificação de aeronaves, bem como no suporte aos ensaios de pouso e decolagem;
- Não se dispõe de forma permanente os dados provenientes do DGPS junto com os demais dados de vôo provenientes da instrumentação, de forma a poderem ser acessados por qualquer usuário, como ocorre com os demais parâmetros medidos em vôo;
- O sistema DGPS tem um componente instalado na aeronave e outro, a base fixa, instalado em terra. Cada componente gera arquivos de dados os quais devem ser integrados e pós-processados para a obtenção das posições com a precisão desejada. Este pós-processamento tira a flexibilidade de uso do equipamento.

Necessita-se portanto integrar as duas bases de dados na aeronave e seu processa-

mento em tempo real de forma a dispor da posição presente a bordo da aeronave, permitindo fornecer esta informação ao piloto e gravá-la com os demais dados de vôo para posterior uso. Para tal é preciso enviar, por telemetria, os dados da base fixa (de terra) para a aeronave, e processá-los em tempo real, gerando a posição presente a qual deverá ser armazenada e apresentada ao piloto.

A utilização do procedimento de GPS diferencial se justifica a partir do fato de inexistirem outros métodos para se obter em tempo real as precisões necessárias para certificação de aeronaves.

Neste trabalho, dentro do escopo de um projeto para desenvolvimento de sistema de GPS diferencial em tempo real e para navegação de aeronaves, serão analisados algoritmos que permitam navegação precisa em tempo real, através de técnicas de GPS diferencial.

Uma análise preliminar revela que os seguintes itens devem ser considerados para realização do projeto:

- Concepção do sistema DGPS;
- Compilação, análise e escolha dos algoritmos de navegação via DGPS;
- Desenvolvimento do pacote de software necessário para navegação em tempo real via DGPS;
- Análise de erros e de desempenho e qualificação do software sob condições realísticas.

Em vista das motivações expostas, os seguintes tipos de algoritmos foram investigados:

- Posicionamento absoluto e precisões possíveis;
- GPS diferencial usando correções direto nas coordenadas de posição;
- GPS diferencial usando correções nas medidas de pseudodistância;



- GPS diferencial usando dupla diferença das medidas de pseudodistância.

Os algoritmos de GPS diferencial foram desenvolvidos e implementados para testes, em duas situações. Na primeira situação, ambos os receptores permaneceram estáticos sobre marcos com coordenadas precisamente conhecidas. Na segunda situação, o receptor usuário estava a bordo de uma aeronave em um ensaio de vôo. Em ambas as situações foram testados as seguintes técnicas: DGPS na posição, DGPS nas medidas de pseudodistância e posicionamento por dupla diferença.

A técnica de DGPS na posição consiste em gerar e aplicar correções diferenciais diretamente nas coordenadas de posição calculada pelos receptores. Usando as medidas de pseudodistância, cada receptor (base e usuário) calcula sua posição através de um mesmo método. Comparando-se então a posição calculada pela base com a posição do marco de referência, é possível gerar correções, que são aplicadas na posição calculada pelo usuário.

Na técnica de DGPS nas medidas de pseudodistância, as correções diferenciais são aplicadas diretamente nas medidas de pseudodistância. Conhecendo-se as coordenadas da base, pode-se calcular o valor da pseudodistância “verdadeira” para cada satélite, levando em consideração os erros do relógio do satélite e receptor. A correção consiste então na diferença entre a pseudodistância “verdadeira” e a medida pela base. Ela é então somada à pseudodistância medida pelo usuário, e sua posição é calculada a partir da pseudodistância corrigida. Este método utiliza o filtro de Kalman para estimar a posição do usuário, utilizando as medidas de pseudodistância corrigidas.

O posicionamento por dupla diferença utiliza as medidas de pseudodistância em ambos os receptores para gerar os observáveis de dupla diferença. Estes observáveis podem ser escritos como função da linha de base entre os receptores, de modo que a solução é a posição relativa dos receptores. A posição do usuário é obtida somando-se a linha de base com a posição da referência, que é previamente conhecida.

## 1.2 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

O Capítulo 1 traz uma introdução sobre a motivação, os objetivos e um resumo das investigações realizadas neste trabalho. Apresenta também uma revisão bibliográfica sobre trabalhos com GPS e técnicas de estimação.

O Capítulo 2 apresenta uma descrição do sistema GPS, apresentando sua composição em segmentos, seus observáveis e fontes de erros.

O Capítulo 3 faz uma revisão dos métodos de estimação, como o filtro de Kalman e mínimos quadrados, utilizados no desenvolvimento dos algoritmos testados. Faz também uma breve discussão dos métodos de posicionamento apresentados neste trabalho.

O Capítulo 4 descreve a aplicação dos métodos mostrados no capítulo 3 nas técnicas de posicionamento descritas.

O Capítulo 5 mostra resultados obtidos com a aplicação dos métodos descritos no capítulo 4 para o caso de um receptor usuário estático.

O Capítulo 6 mostra resultados obtidos para o caso de um receptor usuário em movimento.

O Capítulo 7 traz as conclusões deste trabalho, juntamente com as sugestões de trabalhos futuros.

### **1.3 Revisão Bibliográfica**

As referências Leick (1995), Parkinson (1996a) e Hofmann-Wellenhof *et al.* (1996) contêm informações sobre a história do sistema GPS, desde sua concepção e desenvolvimento até os dias atuais. O modelamento dos observáveis do GPS, como pseudodistância e ciclos, estão descritas em Spilker Jr. e Parkinson (1996). Esta referência mostra o desenvolvimento dessas equações, bem como o modelamento dos erros de medidas.

A técnica de GPS diferencial e alguns métodos de obtenção da solução de navegação são mostrados em Strang e Borre (1997). Segundo esta referência, o uso de técnicas

de GPS diferencial associado à dupla diferença aumenta a exatidão do posicionamento. Parkinson e Enge (1996) e Hofmann-Wellenhof *et al.* (1996) também mostram como o DGPS pode melhorar a precisão da solução de navegação.

Strang e Borre (1997) fornecem a álgebra envolvida nas aplicações do GPS, indicando pacotes de software em linguagem MATLAB na Internet. Misra e Enge (2001) fazem uma abordagem prática das características dos sinais, modelos das medidas e técnicas de processamento, fornecendo dados GPS para realização de experimentos. Todos abordam, em maior ou menor grau, técnicas de GPS diferencial.

Trabalhos no INPE utilizando técnicas de estimação de estados em tempo real foram apresentados principalmente para determinação de órbita e atitude de satélites artificiais.

No trabalho de Kuga (1982) implementou-se e testou-se procedimentos de estimação com o objetivo de verificar a possibilidade de sua utilização na determinação de órbita, em tempo real, de satélites artificiais. Em seu trabalho, o procedimento de estimação consiste de um filtro de Kalman associado a uma técnica adaptativa. Kuga (1989) apresenta um trabalho para determinação de órbitas de satélites artificiais terrestres através de técnicas de estimação combinadas a técnicas de suavização de estado. Em seu trabalho foi proposto um processo de estimação de órbita utilizando o filtro de Kalman em conjunto com técnicas adaptativas para prevenir da divergência e aumentar a robustez do filtro. Outros trabalhos foram realizados no INPE com respeito a estimação adaptativa, como Rios Neto e Kuga (1982, 1986).

Na UFPR existem trabalhos sobre a utilização do DGPS no posicionamento de trens e navios. Krueger (1994) apresenta um estudo sobre o posicionamento cinemático de trens em tempo real utilizando o sistema DGPS. Massinhan (1997) utiliza uma técnica de posicionamento por GPS para ajudar a efetuar o controle de tráfego de trens. Saatkamp (2003) desenvolveu e experimentou um formato que permite a disponibilização de um serviço de transmissão de correções diferenciais para DGPS, fazendo uso de emissoras de radiodifusão sonora em frequência modulada (FM). No trabalho de Briones (2001) investigou o posicionamento baseado nas ERDGPS, que são diversas estações de referência DGPS implantadas no litoral brasileiro.

Maybeck (1979) faz uma análise teórica das propriedades de técnicas de estimação, como o filtro de Kalman. Gelb *et al.* (1974) e Brown e Hwang (1996) são referências sobre técnicas de estimação por filtro de Kalman, mas com uma abordagem mais prática.

Welch e Bishop (2001) apresenta uma introdução prática ao filtro de Kalman discreto. Esta introdução inclui uma descrição e uma discussão breve do filtro de Kalman discreto, derivação e exemplos, bem como noções da teoria de probabilidades.

Em Lopes e Kuga (1988) e posteriormente em Lopes e Kuga (1997) é apresentado um algoritmo (ORBEST) para a determinação de órbitas baseado em medidas GPS. Tal algoritmo processa medidas de pseudodistância de todos os satélites GPS visíveis utilizando um método de otimização equivalente ao mínimos quadrados. É constatado como a precisão melhora com o número de satélites visíveis e conseqüentemente apresenta melhores resultados que aqueles que selecionam um PDOP ótimo com apenas quatro satélites. Outras referências também trazem algoritmos de navegação, como Bancroft (1985) e Kleusberg (2003).

Saalfeld (1999) e Janssen (2001) propõem métodos de maximizar o número de observáveis de dupla diferença linearmente independentes dentro de uma rede permanente de monitoramento, pois um subconjunto de observações linearmente independentes contém toda informação do conjunto.

Soon *et al.* (2003) apresenta os tipos de melhorias que podem ser alcançadas por um sistema de pseudolitos/DGPS suavizado por medidas de fase da portadora. Os resultados mostrados são pós-processados e se referem a um teste em veículos terrestres. Os erros obtidos para o caso de GPS diferencial suavizado foram 0,627m, 0,380m e 1,790m para os erros norte, leste e vertical, respectivamente, enquanto que para o GPS diferencial sem suavização foram 1,167m, 1,007m e 4,591m.

O trabalho de Hwang e Brown (1990) propõe uma forma de integrar as medidas de código e fase do GPS para prover soluções de posição altamente precisas. Este artigo apresenta dois esquemas distintos de integração baseado no filtro de Kalman.

Martínez *et al.* (2000) usa um método de GPS diferencial na posição utilizando apenas três satélites GPS visíveis, escolhidos pelo critério de melhor DOP, para um

posicionamento em duas dimensões. A precisão horizontal obtida para este método é de cerca de 5m. Este resultado é comparado com um receptor de melhor precisão trabalhando em modo diferencial, com correções RTCM (*Radio Technical Commission for Maritime Services*).

A revisão bibliográfica aqui apresentada tenta cobrir minimamente o escopo de investigação realizada, mas não tem a pretensão de exaurir o tema. Na realidade, tem-se observado um número crescente de pesquisas relacionadas ao GPS e mais recentemente com o sistema europeu GALILEO proposto. Trabalhos recentes já usam a terminologia GNSS (*Global Navigation Satellite System*) para se referir a este tipo de tecnologia (GPS, GALILEO, GLONASS).



## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTOS DO GPS

#### 2.1 O Sistema Navstar-GPS

O *Sistema de Posicionamento Global* (GPS) foi concebido pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos (DoD, *Department of Defense*) no início da década de 1970 e desenvolvido para apoiar a navegação e sincronização de tempo para uso militar (Spilker Jr. e Parkinson, 1996). Os objetivos de desempenho a serem atingidos pelo GPS são:

- Alta precisão na determinação da posição, velocidade e tempo para usuários militares;
- Boa precisão para usuários civis;
- Disponibilidade contínua de dados de navegação com cobertura global e regional;
- Independência das condições meteorológicas;
- Resistência a interferências externas no sinal;
- Uso de equipamentos práticos e baratos pelo usuário;

O GPS utiliza como técnica de navegação a medição unidirecional de distância dos satélites GPS, que também transmitem sua posição (Spilker Jr. e Parkinson, 1996). As distâncias com relação a cada satélite são medidas fazendo-se a correlação entre o sinal recebido e uma réplica gerada pelo usuário. O usuário é capaz de diferenciar cada satélite através da porção do código PRN (*Pseudorandom noise*) que cada satélite transmite. Medindo a distância com relação a quatro satélites o usuário pode determinar as quatro incógnitas: três coordenadas de posição e a correção no relógio.

O sistema GPS é dividido nos segmentos espacial, controle e usuário, descritos a seguir.

### 2.1.1 Segmento Espacial

A configuração padrão deste segmento consiste de 24 satélites operacionais distribuídos em seis planos orbitais igualmente espaçados e com inclinação de  $55^\circ$  e período orbital de um dia sideral (cerca de 12h). Tais satélites são denominados de satélites GPS. Os satélites transmitem em duas frequências:  $L_1$ , de 1575,42MHz e  $L_2$ , de 1227,6MHz moduladas com dois tipos de códigos (código-C/A e código-P) e com uma *mensagem de navegação*. O Serviço de Posicionamento Padrão (SPS, *Standard Positioning Service*), disponível ao usuário civil é baseado no código-C/A, enquanto que usuários autorizados pelo DoD têm acesso ao Serviço de Posicionamento Preciso (PPS, *Precise Positioning Service*), o qual possui um maior grau de precisão, através do código-P, que é criptografado. Há uma nova frequência em discussão,  $L_5$  de 1176,45MHz, para uso civil, a ser incorporada na modernização dos satélites GPS, a partir de 2010 (Hatch *et al.*, 2000; McDonald e Hegarty, 2000). A SA (*Selective Availability*), que é uma degradação intencional da precisão do GPS para uso civil, foi desativada em 2000, porém existe uma nova técnica chamada SD (*Selective Denial*), que consiste em bloquear todo o sinal do GPS em uma certa região instalando transmissores de interferência no local.

Os sinais transmitidos fornecem dados sobre as efemérides dos satélites GPS (mensagem de navegação) bem como informações de tempo atômico GPS e outras informações consideradas relevantes (saúde dos satélites, almanaque, deriva dos relógios de bordo etc.).

### 2.1.2 Segmento de Controle

Este segmento tem a função de gerar o tempo GPS e as efemérides dos satélites. É também responsável pelo gerenciamento dos satélites atualizando periodicamente as informações que são transmitidas a cada um, como efemérides, status, dados de relógio e almanaque. Para isso, existe a Estação Mestre de Controle (MCS, *Master Control Station*) localizada na base de Schriever (antigamente Falcon) Air Force, Colorado, Estados Unidos. Juntamente com esta existem outras estações de monitoramento localizadas em Colorado Springs, Havaí, Kwajalein, Diego Garcia e Ascención Island. Com o desenvolvimento e aprimoramento do sistema foram integradas a este segmento sete estações pertencentes ao NIMA (*National Imagery*



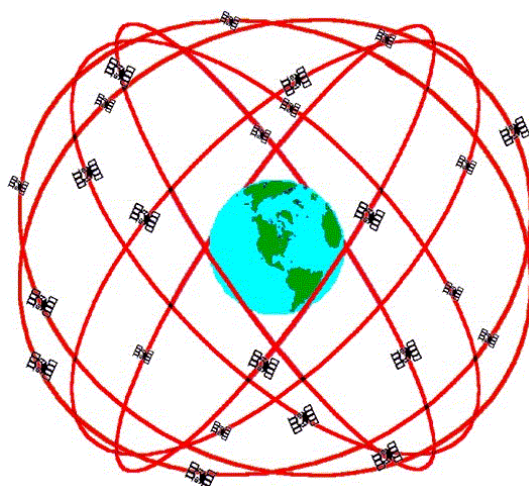


FIGURA 2.1 – Representação da constelação de satélites GPS.  
 FONTE: Dana (2000).

*Mapping Agency*) que estão localizadas no Equador, Argentina, Inglaterra, Bahrein, Austrália, China e USNO (*United States Naval Observatory*).

### 2.1.3 Segmento Usuário

O segmento usuário consiste basicamente de receptores militares e civis projetados especialmente para decodificar e processar os sinais que recebem dos satélites. O receptor computadorizado grava as transmissões de vários satélites e aplica algoritmos de solução para obtenção de posição, velocidade e tempo (*solução de navegação*).

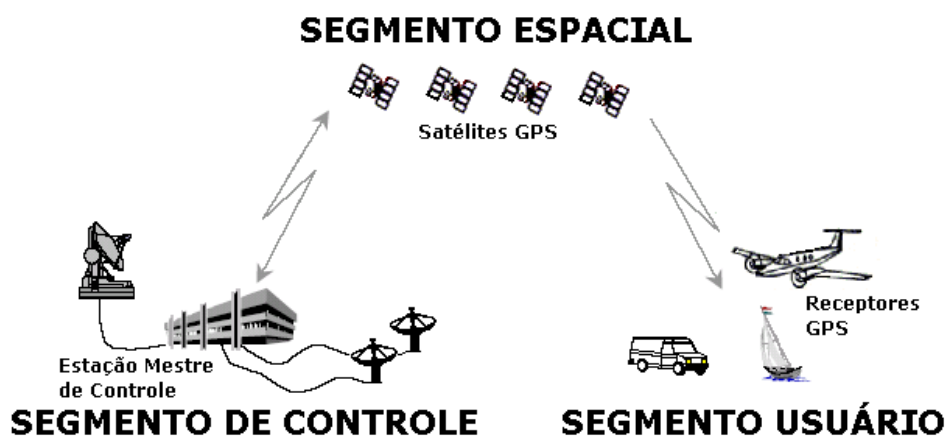


FIGURA 2.2 – Segmentos do GPS.

## 2.2 Determinação da Posição e Tempo

Um receptor GPS mede a diferença de tempo entre a transmissão do sinal pelo satélite e a recepção. Essa diferença multiplicada pela velocidade da luz resulta na distância com relação ao satélite. Como a posição do satélite é conhecida através da mensagem de navegação, o receptor deve então estar localizado em uma esfera de raio igual à distância medida centrada no satélite. Medindo a distância com relação a três satélites, a localização do receptor se reduz a dois pontos definidos pela interseção das esferas referentes a cada satélite. O ponto que coincide com a superfície da Terra é a posição do receptor e o outro é chamado ponto-espelho.

A determinação precisa do tempo é um fator crítico, já que a distância é medida a partir de diferenças de tempo. Portanto, todos os elementos do sistema devem manter uma sincronização de tempo. Os satélites possuem relógios atômicos a bordo para manter a sincronização com o tempo GPS, que são monitorados pela MCS e seus desvios com relação ao tempo GPS são repassados ao usuário juntamente com a mensagem de navegação (Leick, 1995).

Inicialmente, o relógio do receptor não está sincronizado com o tempo GPS. Logo, sua sincronização deve ser tomada como parte da solução de navegação. Este desvio do relógio causa um erro na medida de distância, que é o mesmo para cada satélite. Se o receptor rastreia quatro satélites simultaneamente, o desvio do relógio pode ser estimado juntamente com as três coordenadas de posição. Portanto, o problema básico de posicionamento por GPS envolve a sincronização de relógio juntamente com a determinação das coordenadas de posição.

## 2.3 Observáveis

O sinal do GPS é composto de um código de baixa frequência (código-C/A, código-P) modulado em uma onda portadora de alta frequência ( $L_1$ ,  $L_2$ ). Há vários tipos de medidas que podem ser obtidas dos componentes de código e de fase do sinal. Os dois principais observáveis do GPS são pseudodistância e fase da portadora.

### 2.3.1 Pseudodistância

A pseudodistância é uma medida da distância entre o satélite, no instante de envio do sinal, e a antena do receptor no instante de recepção, obtida através da medida do tempo de percurso do sinal.

O tempo de percurso é medido através da correlação entre o código PRN recebido do satélite e uma réplica do código gerado internamente pelo receptor. A diferença de tempo que sincroniza a réplica com o código recebido é a medida do tempo de percurso do sinal entre o satélite e o receptor. Os relógios do satélite e do receptor possuem desvios do tempo GPS, que fazem a distância medida ser diferente da distância geométrica.

Além dos erros de relógio, a distância medida é afetada também por outros fatores como desvios ionosférico e troposférico, multicaminho, erros internos do receptor, entre outros, e por isso é chamada de pseudodistância. Assim, o modelo matemático para a pseudodistância  $\rho_u^i$  entre o satélite  $i$  e o receptor  $u$  tem a forma: (Leick, 1995; Parkinson, 1996b)

$$\rho_u^i = D_u^i + c \cdot (b_u - B^i) + T_u^i + I_u^i + \epsilon_{\rho,u}^i \quad (2.1)$$

onde  $D_u^i = |\mathbf{R}^i - \mathbf{r}_u|$  é a distância geométrica,  $\mathbf{R}^i$  é a posição do satélite,  $\mathbf{r}_u$  é a posição da antena do receptor,  $b_u$  é o desvio do relógio do receptor,  $B^i$  é o desvio do relógio do satélite  $i$ ,  $T_u^i$  é o erro troposférico,  $I_u^i$  é o erro ionosférico,  $\epsilon_{\rho,u}^i$  representa os outros erros e  $c$  é a velocidade da luz, 299792458m/s. Esta medida é também chamada de pseudodistância via código.

### 2.3.2 Fase da Portadora

A medida da fase é a diferença entre a fase da onda portadora recebida do satélite e a fase gerada internamente no receptor. Esta medida não leva em conta o número de comprimentos de onda entre o receptor e o satélite.

A fase da portadora  $\varphi_u^i$  é escrita como: (Leick, 1995; Parkinson, 1996b)

$$\varphi_u^i = \frac{1}{\lambda} [D_u^i + c \cdot (b_u - B^i) + T_u^i - I_u^i] + N_u^i + \epsilon_{\varphi,u}^i \quad (2.2)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da portadora e  $N_u^i$  denota a ambigüidade no número de comprimentos de onda. O termo  $I_u^i$  troca de sinal com relação à pseudodistância via código e  $\epsilon_{\varphi,u}^i$  representa um erro aleatório na medida e é menor que o erro da pseudodistância via código. A medida de pseudodistância via fase  $\phi_u^i$  é obtida multiplicando-se a fase  $\varphi_u^i$  pelo comprimento de onda  $\lambda$ :

$$\phi_u^i = \lambda \cdot \varphi_u^i = D_u^i + c \cdot (b_u - B^i) + T_u^i - I_u^i + \lambda \cdot N_u^i + \epsilon_{\phi,u}^i \quad (2.3)$$

## 2.4 Fontes de Erros

### 2.4.1 Erros dos Relógios dos Satélites

O tempo GPS é gerado pelo segmento de controle através de redes de relógios atômicos em suas bases de rastreamento. Cada satélite GPS carrega a bordo dois relógios atômicos de césio e rubídio, que eventualmente apresentam desvios com relação ao tempo GPS e necessitam de correção. Para o relógio do receptor, a correção é parte integrante da solução de navegação.

Os dados das efemérides do satélite, transmitidos através da mensagem de navegação, são relativos ao tempo GPS  $t$ . O relógio dos satélites, porém, possuem desvios com relação a este tempo de referência. Assim, cada satélite transmite as efemérides em seu próprio sistema de tempo  $t_i$ , diferente do tempo GPS,  $t = t_i - \Delta t_i$ . A correção  $\Delta t_i$  é obtida usando coeficientes transmitidos pelo satélite na mensagem de navegação.

O termo de correção do relógio do satélite é aproximado pelo polinômio:

$$\Delta t_i = a_{f0} + a_{f1}(t_i - t_{oc}) + a_{f2}(t_i - t_{oc})^2 + \Delta t_R \quad (2.4)$$

onde  $a_{f0}$ ,  $a_{f1}$  e  $a_{f2}$  são os coeficientes transmitidos na mensagem de navegação,  $t_{oc}$  é o tempo de referência das efemérides e  $\Delta t_R$  é uma correção relativística devido à velocidade relativa entre o satélite e o receptor, dada em função do semi-eixo maior  $a$ , da excentricidade  $e$  da órbita e da anomalia excêntrica  $E$  por

$$\Delta t_R = -\frac{2}{c^2} \sqrt{a\mu} e \sin E \quad (2.5)$$

onde  $\mu$  é o parâmetro gravitacional da Terra e  $c$  é a velocidade da luz.

#### **2.4.2 Erro Devido à Troposfera**

O erro troposférico é causado pelo atraso no percurso do sinal devido à refração do sinal na troposfera. A maior parte desse erro é causada pelo chamado componente seco da atmosfera (gases como  $N_2$ ,  $O_2$  etc.). A outra parte (componente úmido) é causada pelo vapor de água presente na atmosfera. O componente seco do erro é função da pressão na superfície e da temperatura e é estável e previsível, com precisão de 2-5%. Este componente contribui com cerca de 90% do total da refração. O erro causado pelo vapor de água é menor, mas muito menos estável, pois varia em função da umidade relativa ou do deslocamento do receptor. Nas frequências de operação do GPS, a troposfera é não-dispersiva, isto é, o desvio não depende da frequência. Assim, este desvio não pode ser eliminado através de medidas em duas frequências (Spilker Jr., 1996).

Sendo dependente das condições atmosféricas locais, este erro não é compensado por nenhum parâmetro transmitido na mensagem de navegação. O erro troposférico é compensado por métodos definidos pelo usuário que geralmente dependem da altitude, ângulo de elevação dos satélites e às vezes da temperatura e umidade. Alguns modelos de correção são descritos em Goad e Goodman (1974); Black (1978) e Hopfield (1979).

#### **2.4.3 Erro Devido à Ionosfera**

A ionosfera é uma região de gases ionizados na atmosfera que afetam o sinal GPS. É uma região altamente variável produzida pela radiação ionizante do sol. Desse modo, o erro ionosférico pode variar rapidamente de alguns metros a várias dezenas de metros no zênite durante curtos períodos de tempo. A ionosfera é um meio dispersivo, ou seja, o índice de refração depende da frequência da onda portadora. Assim, pode-se utilizar medidas em ambas as frequências  $L_1$  e  $L_2$  para medir e corrigir os efeitos gerados na propagação do sinal (Klobuchar, 1996).

A mensagem de navegação contém um modelo de correção ionosférico para usuários de frequência única, mas sua eficiência é bastante reduzida em condições anormais,

como em picos de atividade solar (Yuan e Ou, 2001). Os principais efeitos causados pela ionosfera no sinal são atraso de grupo, avanço de fase e cintilação da amplitude (Christie *et al.*, 1998).

#### **2.4.4 Multicaminho**

Multicaminho é o fenômeno no qual um sinal chega à antena do receptor através de vários caminhos atribuídos a reflexão e difração. Esse efeito distorce as modulações dos códigos C/A e P e observações de fase. Os sinais provenientes do multicaminho estão sempre atrasados comparados com o sinal direto devido à maior distância percorrida causada pela reflexão.

O impacto do multicaminho nas medidas de pseudodistância ou fase da portadora depende de uma variedade de fatores, como potência e atraso do sinal refletido comparado com o sinal direto, características de atenuação da antena e sofisticação do receptor (Braasch, 1996).

#### **2.4.5 Erro do Centro de Fase da Antena**

Para uma dada antena de GPS, o centro de fase mudará com a mudança da direção do sinal de um satélite. Idealmente, a maior parte da variação do centro depende da elevação do satélite. O procedimento de calibração normalmente envolve a colocação de uma antena de referência em duas diferentes posições e diferenciando os dados para determinar o desvio do centro de fase (Stolk e Brown, 2003).

## CAPÍTULO 3

### METODOLOGIA

Este Capítulo aborda os métodos de estimação por mínimos quadrados e filtro de Kalman, utilizados neste trabalho. Os conceitos básicos de posicionamento por GPS e GPS diferencial também são descritos.

#### 3.1 Método de Mínimos Quadrados

O método de mínimos quadrados é um algoritmo para estimar parâmetros, ou seja, estimar valores que são constantes ao longo do processo. É necessário medir direta ou indiretamente o que se deseja estimar de modo que para começar o processo de estimação necessita-se de um conjunto de medidas que esteja relacionada ao parâmetro. Desse modo torna-se fundamental a modelagem de como essas medidas se relacionam aos parâmetros a serem estimados (Kuga, 2002).

A equação que relaciona as medidas aos parâmetros é formulada como uma equação linear:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (3.1)$$

Formalmente, o algoritmo trata de minimizar um índice de desempenho do quadrado dos resíduos na forma:

$$L = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{y}$  representa o vetor contendo  $m$  medidas,  $\mathbf{x}$  representa o vetor de  $n$  parâmetros a serem estimados, e  $\mathbf{H}$  é uma matriz  $m \times n$  que relaciona as medidas aos parâmetros e  $\mathbf{W}$  é uma matriz de peso que pondera os diferentes tipos de erros.

O valor estimado de  $\mathbf{x}$  para  $m \geq n$  e sua covariância  $\mathbf{P}$  para o processamento em lotes, isto é, que processa as medidas todas de uma só vez, são dados por:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{y} \\ \mathbf{P} &= (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Este processamento também pode ser feito de forma recursiva, também chamada de forma de Kalman, na qual processa uma medida por vez. As equações para

$i = 1 \dots m$  são:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_i &= \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{H}_i^T (\mathbf{H}_i \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{H}_i^T + 1/w_i)^{-1} \\ \mathbf{P}_i &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i) \mathbf{P}_{i-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_i &= \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \mathbf{K}_i (y_i - \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{x}}_{i-1})\end{aligned}\tag{3.4}$$

onde  $w_i$  é o  $i$ -ésimo elemento da diagonal de  $\mathbf{W}$  e  $y_i$  é o  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{y}$ .

Para que o método de mínimos quadrados possa ser um estimador de estados, deve-se incluir no processo de estimação um modelo para a evolução dos estados no tempo. A equação que descreve essa evolução é dada, no caso discreto, por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{x}_k\tag{3.5}$$

onde  $\Phi_{k+1,k}$  é a matriz de transição que relaciona os estados entre os instantes  $t_k$  e  $t_{k+1}$ . Assim, a estimativa de  $\hat{\mathbf{x}}_k$  é dada em função da estimativa inicial do estado  $\hat{\mathbf{x}}_0$  por

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \Phi_{k,0} \hat{\mathbf{x}}_0\tag{3.6}$$

pois  $\Phi_{k+1,k-1} = \Phi_{k+1,k} \Phi_{k,k-1}$ . Desse modo pode-se reescrever a Equação (3.1) em função de  $\hat{\mathbf{x}}_0$ :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_0\tag{3.7}$$

$$\text{com } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \Phi_{1,0} \\ \mathbf{H}_2 \Phi_{2,0} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_k \Phi_{k,0} \end{bmatrix}.$$

### 3.2 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é um conjunto de equações matemáticas que fornece uma solução recursiva do problema de estimar o estado de um sistema baseado em medidas de dados com ruídos. Ele combina todas as medidas, o conhecimento *a priori* da dinâmica do sistema e equipamentos de medidas, estatísticas do ruído do sistema dinâmico e erros de medidas, além de informações da condição inicial para produzir uma estimativa do estado, de tal maneira que o erro é minimizado estatisticamente (Maybeck, 1979). Esse filtro é um estimador linear, ou seja, supõe-se que as equações de dinâmica e de observações sejam funções lineares do estado. Desse modo, existem técnicas que permitem que o filtro seja usado em problemas não-lineares, como o



filtro de Kalman estendido (Gelb *et al.*, 1974; Stovall, 1997).

A equação da dinâmica, que descreve a evolução do estado no tempo, é modelada pela equação diferencial linear:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\boldsymbol{\omega} \quad (3.8)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor com  $n$  estados,  $\mathbf{F}$  é a matriz do sistema  $n \times n$  e pode ser função do tempo  $t$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  é um vetor de  $r$  ruídos brancos da modelagem da dinâmica e  $\mathbf{G}$  é uma matriz  $n \times r$  de adição de ruído, com

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\boldsymbol{\omega}(t)] &= 0 \\ \mathbb{E}[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{\omega}(\tau)^T] &= \mathbf{Q}(t)\delta(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.9)$$

O operador  $\mathbb{E}[\bullet]$  significa o operador esperança,  $\mathbf{Q}$  é a matriz de densidade espectral de potência de  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\delta(t - \tau)$  é a função delta de Dirac.

As observações são geralmente discretas e modeladas pela equação linear discreta no tempo:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\nu}_k \quad (3.10)$$

onde  $\mathbf{y}_k$  é um vetor contendo  $m$  observações,  $\mathbf{H}_k$  é uma matriz  $m \times n$  que relaciona o vetor de estado com as observações e  $\boldsymbol{\nu}_k$  é uma seqüência branca, de dimensão  $m$ , que representa o ruído nas medidas, com

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\boldsymbol{\nu}_k] &= 0 \\ \mathbb{E}[\boldsymbol{\nu}_k\boldsymbol{\nu}_l^T] &= \mathbf{R}_k\delta_{kl} \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $\mathbf{R}_k$  é a matriz de covariância dos ruídos das medidas e  $\delta_{kl}$  é a função delta de Kronecker.

Os ruídos da dinâmica  $\boldsymbol{\omega}$  e de observação  $\boldsymbol{\nu}$  são não-correlacionados entre si e não-correlacionados com o estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  (Brown e Hwang, 1996), ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\boldsymbol{\omega}(t_k)\boldsymbol{\nu}_k^T] &= 0 \\ \mathbb{E}[\mathbf{x}(t_0)\boldsymbol{\nu}_k^T] &= 0 \\ \mathbb{E}[\mathbf{x}(t_0)\boldsymbol{\omega}^T(t)] &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

No início do processo, é necessário ter uma estimativa do estado  $\hat{\mathbf{x}}_0$  e sua covariância  $\hat{\mathbf{P}}_0$ . Esse estado inicial e sua covariância são então propagados até o instante da medida através da equação de modelo de dinâmica. O estado  $\hat{\mathbf{x}}_k$  e covariância  $\hat{\mathbf{P}}_k$  atualizados são formados a partir da combinação dos estado e covariância propagados do instante anterior para o instante atual com as informações das medidas processadas. A estimação dos estados consiste, assim, de duas fases: propagação e atualização. O método tem, portanto, natureza recursiva e não necessita armazenar as medidas previamente em grandes matrizes, sendo bastante útil para aplicações em tempo real (Gelb *et al.*, 1974; Kuga, 2002).

### 3.2.1 Sintonização do filtro

O grau de otimização do filtro de Kalman está ligado à qualidade da informação *a priori* sobre as covariâncias dos ruídos de medidas  $\mathbf{R}_k$  e da densidade espectral do ruído da dinâmica  $\mathbf{Q}_k$ . Estes fatores descrevem a precisão do conhecimento desses modelos. Em muitas aplicações, essas covariâncias são conhecidas antes da operação do filtro e mantêm-se constantes durante o processo. Se estas informações são inadequadas, a estimação pode gerar resultados com desvios ou podem levar à divergência do filtro (Kuga, 1989; Hu *et al.*, 2001).

A covariância do ruído das medidas  $\mathbf{R}_k$  é geralmente obtida através de algumas amostras da medida, tomadas antes do início da operação do filtro. A densidade espectral do ruído do processo  $\mathbf{Q}_k$  é mais difícil de se obter, pois não é possível medir o processo diretamente. Pode-se obter resultados aceitáveis introduzindo incerteza suficiente na dinâmica. Outro modo de determinar  $\mathbf{Q}_k$  é utilizar algoritmos adaptativos (Rios Neto e Kuga, 1982; Rios Neto e Kuga, 1986; Brown e Hwang, 1996; Welch e Bishop, 2001).

### 3.2.2 Propagação

As equações da fase de propagação do instante  $k - 1$  para o instante  $k$  para o estado são dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{P}}} &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{P}}\end{aligned}\tag{3.13}$$

onde  $\bar{\Phi}_{k,k-1}$  é a matriz de transição de estado entre os instantes  $k-1$  e  $k$ . A *barra* significa estado propagado antes de ser atualizado e o *circunflexo* indica estado atualizado. Estas equações são resolvidas através de algum método de integração numérica, com condições iniciais  $\bar{\mathbf{x}}_{k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  e  $\bar{\Phi}_{k-1,k-1} = \mathbf{I}$ , onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. A matriz de transição  $\Phi$  descreve a evolução do erro de estimação entre instantes diferentes. No caso de  $\mathbf{F}$  ser constante, a matriz de transição pode ser calculada analiticamente por:

$$\bar{\Phi}_{k,k-1} = e^{\mathbf{F}\delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{F}\delta t + \frac{1}{2!}(\mathbf{F}\delta t)^2 + \dots \quad (3.14)$$

onde  $\delta t$  é o intervalo de tempo entre os instantes das medidas (Brown e Hwang, 1996).

A propagação da matriz de covariância é dada pela equação:

$$\bar{\mathbf{P}}_k = \bar{\Phi}_{k,k-1} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \bar{\Phi}_{k,k-1}^T + \Gamma_k \mathbf{Q} \Gamma_k^T \quad (3.15)$$

onde  $\Gamma_k \mathbf{Q} \Gamma_k^T = \int_{k-1}^k \bar{\Phi}_{\tau,k-1} \mathbf{G}(\tau) \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{G}^T(\tau) \bar{\Phi}_{\tau,k-1}^T d\tau$ .

### 3.2.3 Atualização

Após a estimativa do estado e covariância serem propagados até o instante da observação atual  $k$ , faz-se a atualização a partir das seguintes equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \bar{\mathbf{x}}_k) \\ \hat{\mathbf{P}}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \bar{\mathbf{P}}_k \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde  $\mathbf{K}_k$  é o ganho de Kalman e  $\mathbf{R}_k$  é a matriz de covariância dos erros de observação e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

### 3.2.4 Filtro de Kalman Estendido

Assume-se agora que a dinâmica do estado e as observações são descritas por equações não-lineares com relação ao estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{G}\boldsymbol{\omega} \quad (3.17)$$

e

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\nu}_k \quad (3.18)$$

Estas equações devem então ser linearizadas para a utilização no filtro. A linearização é feita através de uma expansão em série de Taylor em torno da melhor estimativa do estado disponível. Assim, linearização da função  $\mathbf{f}$  truncada no termo linear fica:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, t) + \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (3.19)$$

Definindo-se os desvios  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ ,  $\delta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  e  $\mathbf{F} = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}$  tem-se então:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \delta \mathbf{x} + \mathbf{G} \boldsymbol{\omega} \quad (3.20)$$

A equação das observações é linearizada expandindo-se  $\mathbf{h}_k$  em série de Taylor e truncando no termo linear:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\bar{\mathbf{x}}) + \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\nu}_k \quad (3.21)$$

Definindo-se o desvio  $\delta \mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\bar{\mathbf{x}}_k)$  e  $\mathbf{H}_k = \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}$  tem-se a equação das observações linearizada:

$$\delta \mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \delta \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\nu}_k \quad (3.22)$$

Assim, as equações da fase de propagação do estado e da matriz de transição são:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, t) \\ \dot{\bar{\boldsymbol{\Phi}}} &= \mathbf{F} \bar{\boldsymbol{\Phi}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

A matriz de covariância é propagada através de:

$$\bar{\mathbf{P}}_k = \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{k-1,k} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{k-1,k}^T + \Gamma_k \mathbf{Q} \Gamma_k^T \quad (3.24)$$

A fase de atualização então toma a forma (Brown e Hwang, 1996; Kuga, 2001, 2002):

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_k &= \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_k &= \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\bar{\mathbf{x}}_k)] \\
\hat{\mathbf{P}}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \bar{\mathbf{P}}_k
\end{aligned} \tag{3.25}$$

### 3.3 Posicionamento Absoluto

O posicionamento absoluto consiste na obtenção da solução de navegação de um receptor. Basicamente isso pode ser feito através da linearização da equação da pseudodistância (Equação 2.1) em torno da estimativa de posição atual:

$$\begin{aligned}
\Delta \rho_u^i &= \rho_u^i - \hat{\rho}_u^i = \\
&= \left[ -\frac{X^i - \hat{x}_u}{\rho_u^i} \quad -\frac{Y^i - \hat{y}_u}{\rho_u^i} \quad -\frac{Z^i - \hat{z}_u}{\rho_u^i} \quad 1 \right] \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ c \cdot \Delta b_u \end{bmatrix} - c \cdot B^i + T_u^i + I_u^i + \epsilon^i
\end{aligned} \tag{3.26}$$

onde  $\rho_u^i$  é a pseudodistância medida,  $\hat{\rho}_u^i$  é a pseudodistância calculada com base na estimativa  $\hat{\mathbf{x}}_u$ ,  $\Delta \rho_u^i$  é o resíduo da observação,  $\mathbf{X}^i = [X^i \ Y^i \ Z^i]^T$  é a posição do satélite GPS,  $\mathbf{x} = [x_u \ y_u \ z_u \ c \cdot b_u]^T$  é um vetor contendo as coordenadas de posição  $(x_u, y_u, z_u)$  e o desvio do relógio  $(c \cdot b_u)$  do receptor,  $\Delta \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_u - \hat{\mathbf{x}}_u$  e o circunflexo representa estimativa da variável (Axelrad e Brown, 1996).

O processo é iterativo e, dada uma condição inicial de posição do usuário (e.g. via Bancroft, 1985), obtém-se convergência por algum dos algoritmos citados nas seções anteriores (seções 3.1 e 3.2) ou outro método. Nota-se desta forma que os erros representados pelo vetor de ruído impactam a precisão do resultado. Outro algoritmo (Lopes e Kuga, 1988) propõe o processamento de medidas de todos os satélites GPS, sem restringir-se aos 4 melhores satélites GPS escolhidos normalmente pelo critério geométrico de melhor DOP (*Dilution of Precision*). A Tabela 3.1 mostra a contribuição de cada fonte de erro na precisão da estimativa da posição para o posicionamento absoluto.

TABELA 3.1 – Balanço de Erros do GPS (SA Destivada).

Fonte de erro	<i>Sistemático (m)</i>	<i>Aleatório (m)</i>	<i>Total (m)</i>
Efemérides GPS	2,1	0,0	2,1
Relógio do GPS	2,0	0,7	2,1
Ionosfera	4,0	0,5	4,0
Troposfera	0,7	0,5	0,7
Multicaminho	1,0	1,0	1,4
Medida do receptor	0,5	0,2	0,5
UERE (RMS)	5,1	1,4	5,3
UERE Filtrado (RMS)	5,1	0,4	5,1
1 sigma vertical VDOP = 2,5			12,8
1 sigma horizontal HDOP = 2,0			10,2

FONTES: Parkinson (1996b).

### 3.4 Posicionamento Diferencial

Esta seção descreve os princípios básicos utilizados para o posicionamento via GPS diferencial.

#### 3.4.1 GPS Diferencial

O GPS diferencial (DGPS, *differential GPS*) é uma técnica que aumenta significativamente a precisão do posicionamento do *usuário*. O princípio básico do posicionamento por DGPS consiste em colocar um receptor num local fixo, comumente denominado de *base*, onde as suas coordenadas são precisamente conhecidas. Se as coordenadas da base são conhecidas, pode-se calcular quais deveriam ser os valores “verdadeiros” das medidas de pseudodistância. A comparação do valor “verdadeiro” com aquele que foi medido fornece os valores de correção que devem ser aplicadas a cada pseudodistância provinda de cada satélite GPS. A Figura 3.1 mostra o conceito do GPS diferencial. A aplicação desta técnica deve obedecer algumas hipóteses:

- O usuário deve estar próximo da base de referência (até cerca de 150km);
- A correção calculada na base para a pseudodistância de um dado satélite deve

ser aplicada à pseudodistância medida pelo usuário com relação ao mesmo satélite;

- As estimativas da base estimam os erros de variação lenta (em geral os erros atmosféricos e de relógio).

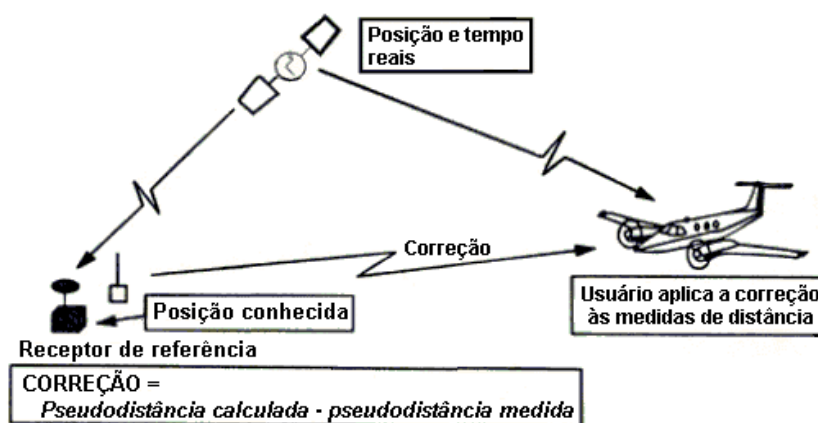


FIGURA 3.1 – Conceito de GPS diferencial.

FONTE: Parkinson e Enge (1996).

Para distâncias maiores, existe a técnica de WADGPS (*Wide Area Differential GPS*). Esta técnica calcula as correções baseadas em uma rede de bases de referência amplamente distribuída. O problema da distância do usuário à base de referência não é crítico e as correções são válidas para uma grande região geográfica. Desde que as correções são baseadas em uma rede de pontos de referência, as incertezas associadas com o uso das correções de uma única base são efetivamente removidas.

Em síntese, o DGPS consiste em duas fases bem definidas:

- Gerar correções na base de referência;
- Aplicar correções no receptor usuário.

A correção deve ser calculada diretamente na base de referência. A Equação (2.1) pode ser escrita na forma (Parkinson, 1996b; Parkinson e Enge, 1996):

$$\rho_b + \delta\rho = \mathbf{SR}_s - \mathbf{H}\mathbf{x}_{ref} \quad (3.27)$$

onde  $\boldsymbol{\rho}_b$  é o vetor contendo as  $m$  pseudodistâncias medidas pela base referentes a cada satélite,  $\delta\boldsymbol{\rho}$  corresponde às correções,  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_1^T & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{1}_m^T \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}^m \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{x}_{ref} - X^i}{\hat{\rho}_b^i} & \frac{\hat{y}_{ref} - Y^i}{\hat{\rho}_b^i} & \frac{\hat{z}_{ref} - Z^i}{\hat{\rho}_b^i} & 1 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{x}_{ref}$  é o vetor com as coordenadas da base de referência.

Assim, as correções podem ser calculadas por:

$$\delta\boldsymbol{\rho} = \mathbf{S}\mathbf{R}_s - \mathbf{H}\mathbf{x}_{ref} - \boldsymbol{\rho}_b \quad (3.28)$$

Essa correção corresponde às correções individuais que devem ser aplicadas às medidas de pseudodistância do usuário. Portanto, o usuário remoto dispõe agora da seguinte equação para resolver o problema, dadas as suas medidas de pseudodistância coletadas:

$$\mathbf{H}\mathbf{x}_u = \mathbf{S}\mathbf{R}_s - \boldsymbol{\rho}_u - \delta\boldsymbol{\rho} \quad (3.29)$$

que deverá ser resolvida pelos métodos descritos anteriormente. Os seguintes cuidados devem ser tomados (Farrell e Givargis, 2000):

- Ambos, a base e o usuário, não devem aplicar a correção ionosférica provinda da mensagem de navegação do GPS;
- Ambos devem utilizar o mesmo conjunto de efemérides dos satélites GPS mesmo que algum deles disponha já de uma atualização;
- A base deve tentar não introduzir erros que não são mensuráveis pelo usuário, por exemplo, o multicaminho;
- O tempo da correção deve ser passado ao usuário, já que poderá existir uma latência devido ao enlace de rádio utilizado para transmitir as correções;
- As medidas da pseudodistância devem ser simultâneas.

As correções diferenciais são bastante efetivas com relação a erros de relógio porque sua validade contra estes erros diminui apenas com o tempo, e não com a distância. Assim, o erro do posicionamento por DGPS cresce com a idade das correções. Neste



método, a magnitude do erro residual da ionosfera na pseudodistância depende principalmente da separação do usuário e a base e do ângulo de elevação dos satélites (Parkinson e Enge, 1996) e, que para linhas de base muito grandes, deve-se aplicar correções também para o erro da ionosfera (Kee e Yun, 2002).

A Tabela 3.2 fornece um balanço de erros compreendendo os diversos tipos de erros que afetam a precisão do DGPS, usando-se as medidas de pseudodistância. A nomenclatura para as siglas é a seguinte: RMS (*Root Mean Square*) é a raiz média quadrática, UERE (*User Equivalent Range Error*) é o erro em distância equivalente ao usuário, e DOP (*Dilution of Precision*) é a diluição de precisão na vertical (VDOP) ou na horizontal (HDOP). O DOP representa o traço de uma matriz de covariância dos erros a menos de um fator de escala, e valores padrão de VDOP e HDOP são dados na Tabela 3.2.

TABELA 3.2 – Balanço de Erros do DGPS para Usuários a 50km da Base de Referência (SA desativada).

Fonte de erro	<i>Sistemático (m)</i>	<i>Aleatório (m)</i>	<i>Total (m)</i>
Efemérides GPS	0,0	0,0	0,0
Relógio do GPS	0,0	0,7	0,7
Ionosfera	0,0	0,5	0,5
Troposfera	0,0	0,5	0,5
Multicaminho	1,0	1,0	1,4
Medida do receptor	0,0	0,2	0,2
Base de referência	0,3	0,2	0,4
UERE (RMS)	1,0	1,4	1,8
UERE Filtrado (RMS)	1,0	0,4	1,1
1 sigma vertical VDOP = 2,5			2,8
1 sigma horizontal HDOP = 2,0			2,2

FONTE: Parkinson e Enge (1996).

### 3.4.2 Observações de Simplex Diferença

O observável chamado *simplex diferença* é formado tomando-se a diferença das medidas em dois receptores em uma mesma época. A simplex diferença para a medida

de pseudodistância é dada por (Misra e Enge, 2001):

$$\begin{aligned}
\rho_{ub}^i &= \rho_u^i - \rho_b^i \\
&= (D_u^i - D_b^i) + (b_u - b_b) + (T_u^i - T_b^i) + (I_u^i - I_b^i) + (\epsilon_{\rho,u}^i - \epsilon_{\rho,b}^i) \\
&= D_{ub}^i + b_{ub} + T_{ub}^i + I_{ub}^i + \epsilon_{\rho,ub}^i
\end{aligned} \tag{3.30}$$

onde  $(\bullet)_{ub} = (\bullet)_u - (\bullet)_b$ , o índice  $u$  se refere ao usuário e o índice  $b$  se refere à base.

O termo de desvio do relógio do satélite  $B^i$ , que é comum às duas medidas, é cancelado. Os termos troposféricos e ionosféricos são diferenças dos desvios correspondentes nos dois receptores. A magnitude destes termos depende principalmente da distância de separação dos receptores (linha de base).

Quando a distância entre os receptores for pequena, os resíduos ionosféricos e troposféricos se tornam pequenos em comparação com os erros devido ao multicaminho e ruídos do receptor. Desse modo, para uma linha de base pequena, a medida de simples diferença para a pseudodistância via código é

$$\rho_{ub}^i = D_{ub}^i + b_{ub} + \epsilon_{\rho,ub}^i \tag{3.31}$$

Analogamente, a simples diferença correspondente à pseudodistância via fase é

$$\phi_{ub}^i = D_{ub}^i + b_{ub} + \lambda \cdot N_{ub}^i + \epsilon_{\phi,ub}^i \tag{3.32}$$

onde  $N_{ub}^i = N_u^i - N_b^i$  é a diferença entre as ambigüidades inteiras de ambos receptores e  $\lambda$  é o comprimento de onda da portadora.

### 3.4.3 Observações de Dupla Diferença

O termo do desvio de relógio relativo  $b_{ub}$  é comum a todas as medidas de simples diferença de todos os satélites em cada época. Este termo pode então ser eliminado através de medidas de *dupla diferença*, que são formadas através da subtração de duas simples diferença relativos a dois satélites distintos  $i$  e  $j$ .

$$\rho_{ub}^{ij} = \rho_{ub}^i - \rho_{ub}^j \tag{3.33}$$

Com a Equação (3.31) tem-se

$$\rho_{ub}^{ij} = (D_{ub}^i - D_{ub}^j) + (\epsilon_{\rho,ub}^i - \epsilon_{\rho,ub}^j) = D_{ub}^{ij} + \epsilon_{\rho,ub}^{ij} \quad (3.34)$$

onde  $(\bullet)_{ub}^{ij} = (\bullet)_{ub}^i - (\bullet)_{ub}^j$ . Em particular,  $\rho_{ub}^{ij}$  pode ser formado por:

$$\rho_{ub}^{ij} = (\rho_u^i - \rho_b^i) - (\rho_u^j - \rho_b^j) \quad (3.35)$$

Esta observável é freqüentemente utilizada por eliminar todos os termos que geram erros de relógio, de atmosfera, atenuando por vezes o efeito do multicaminho. Por outro lado, nota-se que a precisão desse tipo de medida é deteriorada, além de introduzir correlações entre medidas realizadas no mesmo instante (seção 4.3).



## CAPÍTULO 4

### ALGORITMOS DE GPS DIFERENCIAL

#### 4.1 GPS Diferencial na Posição

Esta técnica de GPS diferencial consiste em calcular as correções no receptor base e aplicá-las no usuário utilizando a solução de navegação de ambos os receptores.

Neste método de DGPS, cada receptor (base e usuário) calcula sua posição independentemente através de um mesmo algoritmo, por exemplo, um método de mínimos quadrados. É necessário que os dois receptores utilizem o mesmo conjunto de satélites. Deste modo, a contribuição de cada satélite para o erro é praticamente a mesma em ambos os receptores (Martínez *et al.*, 2000). A Equação (2.1) define a medida de pseudodistância para o receptor  $u$  como função da posição  $\mathbf{r}_u = [x_u \ y_u \ z_u]^T$  e do desvio do relógio  $b_u$ . Esta equação deve ser linearizada, resultando em

$$\Delta\rho_u^i = \rho_u^i - \hat{\rho}_u^i = \begin{bmatrix} \frac{\hat{x}_u - X^i}{\hat{\rho}_u^i} & \frac{\hat{y}_u - Y^i}{\hat{\rho}_u^i} & \frac{\hat{z}_u - Z^i}{\hat{\rho}_u^i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ c \cdot \Delta b_u \end{bmatrix} + \epsilon_{\rho,u}^i \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{R}^i = [X^i \ Y^i \ Z^i]^T$  é o vetor posição do satélite  $i$  e  $\mathbf{x}_u = [x_u \ y_u \ z_u \ c \cdot b_u]^T$  é o vetor de estados a ser estimado, contendo a posição e o desvio do relógio do receptor  $u$ .

O modelo de medidas não apresenta os termos de erros atmosféricos, pois assume-se que estes serão eliminados com a aplicação das correções.

A correção é calculada na base diretamente por comparação entre as coordenadas calculadas e as coordenadas da referência:

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_{ref} - \mathbf{r}_b \quad (4.2)$$

onde  $\delta\mathbf{r}$  é a correção diferencial,  $\mathbf{r}_{ref} = [x_{ref} \ y_{ref} \ z_{ref}]^T$  e  $\mathbf{r}_b = [x_b \ y_b \ z_b]^T$  é a coordenada calculada pela base.

A posição do usuário  $\mathbf{r}_u$  pode ser modelada, em analogia com a Equação (2.1) da pseudodistância, por

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_g + \mathbf{b} - \mathbf{B} + \mathbf{T} + \mathbf{I}_{ono} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{r}_g$  é a posição geométrica,  $\mathbf{b}$  é o termo de desvio do relógio do receptor, que faz parte da solução de navegação,  $\mathbf{B}$  é o termo de desvio do relógio do satélite, transmitido na mensagem de navegação,  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{I}$  são os termos de erros troposféricos e ionosféricos e  $\boldsymbol{\epsilon}$  são erros não modelados (multicaminho, atrasos internos do receptor etc.) assumido ruído branco. Como a linha de base entre os receptores é pequena, assume-se que os erros troposféricos e ionosféricos são os mesmos para ambos. Assim, a correção calculada pela base pode ser aplicada diretamente:

$$\hat{\mathbf{r}}_u = \mathbf{r}_u + \delta\mathbf{r} \quad (4.4)$$

onde  $\hat{\mathbf{r}}_u$  é a posição corrigida e  $\mathbf{r}_u$  é a posição calculada a partir das pseudodistâncias medidas pelo receptor usuário.

## 4.2 GPS Diferencial na Pseudodistância

Neste método, as correções diferenciais são aplicadas diretamente nas medidas de pseudodistância. Este método baseia-se no fato de que se as coordenadas da base são conhecidas, pode-se calcular o valor da pseudodistância “verdadeira” para cada satélite, levando em consideração os erros do relógio do satélite e receptor. A correção consiste na diferença entre a pseudodistância “verdadeira” e a medida pela base (Equação 4.6). A pseudodistância corrigida é obtida somando-se a correção na pseudodistância medida e esta é então usada para calcular a posição do receptor. Os termos de erros atmosféricos não devem ser incorporados no cálculo da pseudodistância “verdadeira”, pois tomarão parte na correção diferencial.

### 4.2.1 Correções na Pseudodistância

A pseudodistância “verdadeira” entre a base e o  $i$ -ésimo satélite GPS  $\hat{\rho}_b^i$  é calculada baseando-se na Equação (2.1), mas desconsiderando os termos troposférico e ionosférico, ou seja,

$$\hat{\rho}_b^i = \hat{D}_b^i + c \cdot b_b \quad (4.5)$$

O termo  $\hat{D}_b^i = |\mathbf{R}^i - \mathbf{r}_{ref}|$  corresponde à distância geométrica e é calculado através das efemérides satélite na época da transmissão do sinal e das coordenadas de referência da base.

A posição dos satélites GPS é requerida no instante da transmissão, porém, o instante da recepção é usado para computá-la. Isto é feito subtraindo-se o tempo de percurso  $\tau$  do sinal do instante de recepção. O tempo de percurso é calculado através de um processo iterativo que inicia assumindo um valor de  $\tau$  médio (Chiaradia *et al.*, 2000). Então, a posição é interpolada para a época  $t - \tau$  que é usada para computar a distância geométrica.

A correção  $\delta\rho^i$  gerada na base é simplesmente a diferença entre a pseudodistância calculada com as coordenadas da referência  $\hat{\rho}_b^i$  e a pseudodistância medida pela base  $\rho_b^i$ :

$$\delta\rho^i = \hat{\rho}_b^i - \rho_b^i \quad (4.6)$$

Esta correção cobre, na maior parte, os erros atmosféricos devido à proximidade entre os receptores e os erros na modelagem do relógio.

#### 4.2.2 Estimação da Posição do Usuário

A correção da base  $\delta\rho^i$  é usada para corrigir a medida de pseudodistância do satélite correspondente no usuário:

$$\rho_{corr,u}^i = \rho_u^i + \delta\rho^i \quad (4.7)$$

onde  $\rho_{corr,u}^i$  é a pseudodistância corrigida e  $\rho_u^i$  é a pseudodistância medida. A posição do usuário é então computada a partir do processamento deste conjunto de medidas corrigidas.

O receptor obedece ao modelo dinâmico, descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}}_u = \mathbf{F}\mathbf{x}_u + \mathbf{G}\boldsymbol{\omega}_u \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{F}$  é a matriz que relaciona o estado e sua derivada linearmente,  $\boldsymbol{\omega}_u$  é a matriz contendo os ruídos da modelagem dinâmica e  $\mathbf{G}$  é a matriz de adição de ruído.  $\boldsymbol{\omega}_u$

é assumido ruído branco, logo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\boldsymbol{\omega}_u] &= \mathbf{0} \\ \mathbb{E}[\boldsymbol{\omega}_u(t)\boldsymbol{\omega}_u^T(\tau)] &= \mathbf{Q}(t)\delta(t - \tau) \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde  $\mathbf{Q}$  é a densidade espectral de potência do processo branco.

A matriz de transição de estados do tempo  $k - 1$  para  $k$  correspondente a este modelo, de acordo com a Equação (3.14), e assumindo que o intervalo de tempo  $\delta t$  é pequeno, é dada por:

$$\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1} = \mathbf{I} + \mathbf{F}\delta t \quad (4.10)$$

Desse modo a propagação do estado e sua covariância do tempo  $k - 1$  para  $k$  é feita através das equações:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{u,k} &= \boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\hat{\mathbf{x}}_{u,k-1} \\ \bar{\mathbf{P}}_{u,k} &= \boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\hat{\mathbf{P}}_{u,k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}^T + \Gamma_k\mathbf{Q}\Gamma_k^T \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $\Gamma_k\mathbf{Q}\Gamma_k^T$  é a matriz de adição de ruído dinâmico na propagação do estado, e pode ser calculada pelo método da seção 4.4.

A obtenção do modelo de medidas, no instante  $k$ , para este método pode ser obtida a partir da linearização Equação (2.1). Realizando uma expansão de Taylor em torno da estimativa do estado atual, o resíduo das medidas pode ser escrito como uma função linear do erro do estado estimado:

$$\Delta\rho_u^i = \mathbf{H}_k\Delta\mathbf{x} + \Delta\epsilon_u \quad (4.12)$$

onde  $\mathbf{H}_k = \left[ \frac{\partial D_u^i}{\partial \mathbf{x}_u} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}$ ,  $\Delta\rho_u^i = \rho_{corr,u}^i - \hat{\rho}_u^i$  consiste no resíduo das medidas e  $\Delta\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_u - \hat{\mathbf{x}}_u$ .

Utilizando este modelo, a fase de atualização deste filtro tem a forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{u,k} &= \bar{\mathbf{P}}_{u,k}\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\bar{\mathbf{P}}_{u,k}\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_\rho)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{u,k} &= \bar{\mathbf{x}}_{u,k} + \mathbf{K}_{u,k}(\rho_{corr,u} - \hat{\rho}_u) \\ \hat{\mathbf{P}}_{u,k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{u,k}\mathbf{H}_k)\bar{\mathbf{P}}_{u,k} \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde  $\mathbf{R}_\rho$  é a matriz de covariância dos erros de medida. As medidas de pseudo-



distância são assumidas não-correlacionadas entre si, de modo que  $\mathbf{R}_\rho$  tem a forma diagonal.

### 4.3 Posicionamento por Dupla Diferença

Este método de posicionamento combina as medidas de pseudodistância provenientes de ambos os receptores para gerar os observáveis de dupla diferença (seção 3.4.3). As observações de dupla diferença são construídas escolhendo-se um satélite mestre  $M$ , geralmente pelo critério de maior elevação no início do período de observações e realizando as subtrações com as outras medidas. Este procedimento garante um conjunto de dupla diferenças linearmente independentes (Saalfeld, 1999; Janssen, 2001). O conjunto de medidas é então formado por:

$$\rho_{ub}^{Mi} = (\rho_u^M - \rho_b^M) - (\rho_u^i - \rho_b^i), \quad i = 1 \dots m, \quad i \neq M \quad (4.14)$$

onde  $m$  é o número de satélites visíveis. Assim, tem-se um conjunto de  $m - 1$  medidas de dupla diferença. Esta equação também pode ser escrita, de acordo com a Equação (3.34), em função das distâncias geométricas

$$\rho_{ub}^{Mi} = (D_u^M - D_b^M) - (D_u^i - D_b^i) + \epsilon_{ub}^{Mi} \quad (4.15)$$

Considerando que a linha de base é menor que a distância entre os receptores e os satélites por ordens de magnitude, pode-se definir a seguinte relação, com base na Figura 4.1:

$$D_{ub}^i = D_u^i - D_b^i = \mathbf{1}_b^i \cdot \mathbf{x}_{ub} \quad (4.16)$$

onde  $\mathbf{1}_b^i = \begin{bmatrix} \frac{x_b - X^i}{\rho_b^i} & \frac{y_b - Y^i}{\rho_b^i} & \frac{z_b - Z^i}{\rho_b^i} \end{bmatrix}$  é o vetor unitário apontando da base para o satélite  $i$  e  $\mathbf{x}_{ub}$  representa a linha de base entre os receptores.

Utilizando a aproximação descrita, a Equação (4.15) se torna linear com relação à linha de base  $\mathbf{x}_{ub}$ :

$$\rho_{ub}^{Mi} = (\mathbf{1}_b^M - \mathbf{1}_b^i) \mathbf{x}_{ub} + \epsilon_{ub}^{Mi} \quad (4.17)$$

Esta equação constitui o modelo de medidas a ser considerado para a resolução do problema. Portanto, a aplicação do método de dupla diferença realiza um posicionamento relativo, pois permite a estimação da linha de base entre os receptores.

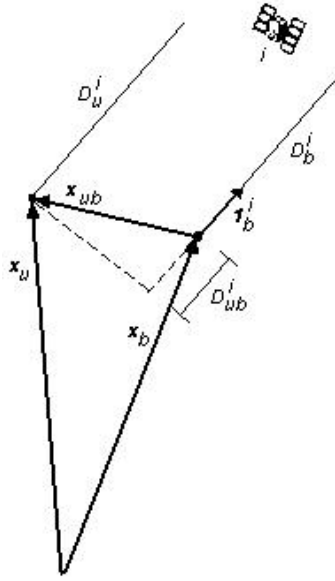


FIGURA 4.1 – Geometria de uma observação.  
 FONTE: Misra e Enge (2001).

Como as observações de dupla diferença consistem de combinações entre as medidas de pseudodistância, o valor da matriz de covariância dessas observações pode ser calculado colocando-se a Equação (4.14) na forma matricial:

$$\mathbf{z}_{DD} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{z}_\rho \quad (4.18)$$

onde  $\mathbf{z}_{DD} = [\rho_{ub}^{M1} \ \dots \ \rho_{ub}^{Mm-1}]^T$  é um vetor contendo as  $m - 1$  medidas de dupla diferença,  $\mathbf{z}_\rho = [\rho_u^M \ \rho_b^M \ \rho_u^1 \ \rho_b^1 \ \dots \ \rho_u^{m-1} \ \rho_b^{m-1}]^T$  é um vetor contendo as  $2m$  medidas de pseudodistância observadas pelo usuário e pela base, dispostas alternadamente. A matriz  $\mathbf{D}$ , de dimensões  $(m - 1) \times (2m)$ , é definida de modo a relacionar as pseudodistâncias observadas com as medidas de dupla diferença. Esta matriz assume então a seguinte forma:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Cada pseudodistância é medida com um erro cuja variância vale  $\sigma_0^2$ . Assim, a matriz

de covariâncias de  $\mathbf{z}_\rho$  é diagonal com a forma:

$$\text{cov}[\mathbf{z}_\rho] = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{I} \quad (4.20)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem  $2m$ .

De acordo com a Lei de Propagação de Covariâncias (Strang e Borre, 1997), a covariância de  $\mathbf{z}_{DD}$ , com relação à covariância de  $\mathbf{z}_\rho$ , é dada pela equação:

$$\mathbf{R}_{DD} = \text{cov}[\mathbf{z}_{DD}] = \mathbf{D} \cdot \text{cov}[\mathbf{z}_\rho] \cdot \mathbf{D}^T = \mathbf{D} \cdot \sigma_0^2 \cdot \mathbf{D}^T \quad (4.21)$$

A matriz  $2\mathbf{A} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^T$ , possui os elementos da diagonal principal com valor 4 e os elementos fora da diagonal com valor 2, logo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Portanto a matriz  $\mathbf{R}_{DD}$  é dada pela expressão:

$$\mathbf{R}_{DD} = 2\sigma_0^2 \mathbf{A} = 2\sigma_0^2 \begin{bmatrix} 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

### 4.3.1 Branqueamento de Erros de Observação

É bastante conveniente que a matriz  $\mathbf{R}$  seja diagonal para fins de processamento seqüencial via filtro de Kalman. Este processo de diagonalização recebe usualmente o nome de branqueamento (Bierman, 1977).

Neste caso, tem-se o seguinte modelo de medidas, dada pela Equação (4.17):

$$\mathbf{z}_{DD} = \mathbf{H}\mathbf{x}_{ub} + \boldsymbol{\nu} \quad (4.24)$$

onde  $\mathbf{H} = \mathbf{1}_b^M - \mathbf{1}_b^i$  e  $\boldsymbol{\nu}$  é um erro de observação com média zero, mas possui correlação

entre as medidas, isto é,

$$E[\boldsymbol{\nu}] = 0 \quad \text{e} \quad E[\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T] = \mathbf{R}_{DD} \quad (4.25)$$

com  $\mathbf{R}_{DD}$  sendo uma matriz positiva definida.

Ao multiplicar a Equação (4.24) por  $\mathbf{L}^{-1}$ , com  $\mathbf{R}_{DD}^{-1} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{L}^{-T}$ ,  $\mathbf{L}^{-1}$  sendo triangular inferior, obtém-se um novo conjunto de observações, agora independentes, mas equivalentes ao conjunto antigo (Bierman, 1977):

$$\tilde{\mathbf{z}}_{DD} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x}_{ub} + \tilde{\boldsymbol{\nu}} \quad (4.26)$$

com  $\tilde{\mathbf{z}}_{DD} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{z}_{DD}$ ,  $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{H}$  e  $\tilde{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{\nu}$ . Este novo conjunto possui erro de observação com covariância unitária, pois

$$\begin{aligned} E[\tilde{\boldsymbol{\nu}}\tilde{\boldsymbol{\nu}}^T] &= E[\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T\mathbf{L}^{-T}] \\ &= \mathbf{L}^{-1}E[\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T]\mathbf{L}^{-T} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}_{DD}\mathbf{L}^{-T} \\ &= \mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{L}^{-T} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.27)$$

pois  $\mathbf{R}_{DD}^{-1} = (\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{L}^{-T}) = (\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L})^{-1}$ .

A matriz  $\mathbf{L}^{-1}$  pode ser obtida pela fatoração de  $\mathbf{R}_{DD}^{-1}$  pelo método de fatoração de Cholesky:

$$\mathbf{R}_{DD}^{-1} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{L}^{-T} \quad (4.28)$$

A aplicação da fatoração de Cholesky nessa forma exige que  $\mathbf{R}_{DD}$  seja invertido. Entretanto, o formato de  $\mathbf{R}_{DD}$  na observação de dupla diferença possui inversa cujo valor pode ser calculado explicitamente.

### 4.3.2 Inversão da Matriz $\mathbf{R}_{DD}$

$\mathbf{R}_{DD}$  é uma matriz  $(m - 1) \times (m - 1)$  cujos elementos da diagonal principal têm o valor  $4\sigma_0^2$  e os elementos fora da diagonal têm o valor  $2\sigma_0^2$ , dada pela Equação (4.23).

A matriz inversa do termo  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}$  é dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} m-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & m-1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Este resultado pode ser verificado calculando-se  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

Com isso, a matriz inversa de  $\mathbf{R}_{DD}$  é

$$\mathbf{R}_{DD}^{-1} = \frac{1}{2\sigma_0^2} \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2\sigma_0^2 m} \begin{bmatrix} m-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & m-1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

### 4.3.3 Fatoração de Cholesky

Se  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $n \times n$  positiva definida, então  $\mathbf{A}$  pode ser fatorada na forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T \quad (4.31)$$

onde  $\mathbf{L}$  é uma matriz triangular inferior com elementos das diagonais positivos. Essa fatoração é conhecida como *fatoração de Cholesky* (Ruggiero e Rocha, 1997) e pode feita através do seguinte algoritmo (Bierman, 1977):

Para  $j = 1 \dots n - 1$ , executa-se o conjunto ordenado de equações recursivas:

$$\begin{aligned} L_{j,j} &:= A_{j,j}^{1/2} \\ L_{k,j} &:= A_{k,j}/L_{j,j}, \quad k = j + 1 \dots n \\ A_{i,k} &:= A_{i,k} - L_{i,j}L_{k,j} \quad \begin{cases} k = j + 1 \dots n \\ i = k \dots n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.32)$$

e por fim  $L_{n,n} := A_{n,n}^{1/2}$ , onde  $:=$  em notação computacional significa o membro do lado esquerdo receber o valor do membro do lado direito.

#### 4.3.4 Suavização

Em comparação com ruídos da pseudodistância, ruídos de alta frequência nas medidas de fase da portadora são muito pequenos, enquanto que seus erros de baixa-frequência (erros atmosféricos, ambigüidades etc.) tem características que levam a instabilidades na solução. Conseqüentemente, com uma eficiente combinação da informação fornecida pela fase da portadora com a da pseudodistância, uma redução significativa do erro de estimação pode ser conseguida (Hwang e Brown, 1990).

As medidas de fase permitem medidas precisas e sem ambigüidades da variação da pseudodistância entre duas épocas. Com isso, torna-se possível explorar esta característica para suavizar as medidas de pseudodistância (Misra e Enge, 2001). No entanto, a duração da janela de observação deve ser criteriosamente escolhida para o problema.

Baseado na Equação (2.1), define-se a pseudodistância livre de erros ionosféricos  $\rho^*$ :

$$\rho^* = D + c \cdot (b - B) + T \quad (4.33)$$

As medidas de código e fase (equações 2.1 e 2.3) escritas em termos desta definição têm a forma:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho^*(t) + I(t) + \epsilon_\rho(t) \\ \phi(t) &= \rho^*(t) - I(t) + \lambda \cdot N + \epsilon_\phi(t) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Tomando a diferença das medidas de pseudodistância via código ( $\Delta\rho$ ) e fase ( $\Delta\phi$ ) entre duas épocas  $t_i$  e  $t_{i-1}$  tem-se

$$\begin{aligned} \Delta\rho(t_i) &= \rho(t_i) - \rho(t_{i-1}) = \Delta\rho^*(t_i) + \Delta I(t_i) + \Delta\epsilon_\rho(t_i) \\ \Delta\phi(t_i) &= \phi(t_i) - \phi(t_{i-1}) = \Delta\rho^*(t_i) - \Delta I(t_i) + \Delta\epsilon_\phi(t_i) \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde  $\Delta\rho^*$  é a mudança na pseudodistância livre de erros ionosféricos,  $\Delta I$  é a mudança no erro ionosférico e  $\Delta\epsilon$  é a mudança dos termos de erros.

Se as épocas são próximas,  $\Delta I(t_i)$  é pequeno e pode ser desprezado. Pode-se usar  $\Delta\phi(t_i)$  como uma estimativa precisa de  $\Delta\rho^*(t_i)$ . Pode-se então obter uma estimativa de  $\rho(t_0)$  em cada época:

$$\hat{\rho}(t_0)_i = \rho(t_i) - [\phi(t_i) - \phi(t_0)] \quad (4.36)$$

Fazendo-se uma média de  $\hat{\rho}(t_0)_i$  sobre  $n$  épocas:

$$\bar{\rho}(t_0) = \frac{1}{n} \sum_i \hat{\rho}(t_0)_i \quad (4.37)$$

Com a estimativa de  $\bar{\rho}(t_0)$ , pode-se reconstruir o conjunto de pseudodistâncias suavizadas como sendo

$$\bar{\rho}(t_i) = \bar{\rho}(t_0) + [\phi(t_i) - \phi(t_0)] \quad (4.38)$$

Uma implementação da suavização acima consiste em um filtro recursivo com duração de  $J$  épocas:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(t_i) &= \frac{1}{J} \rho(t_i) + \frac{J-1}{J} \left[ \bar{\rho}(t_{i-1}) + (\phi(t_i) - \phi(t_0)) \right] \\ \bar{\rho}(t_0) &= \rho(t_0) \end{aligned} \quad (4.39)$$

#### 4.4 Cálculo do Ruído Dinâmico $\Gamma_k \mathbf{Q} \Gamma_k^T$

A matriz de ruído dinâmico  $\Gamma_k \mathbf{Q} \Gamma_k^T$  necessária à propagação da covariância no filtro de Kalman é dada pela integral:

$$\Gamma_k \mathbf{Q} \Gamma_k^T = \int_{k-1}^k \Phi_{k,\tau} \mathbf{G}(\tau) \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{G}^T(\tau) \Phi_{k,\tau}^T d\tau \quad (4.40)$$

A integral da Equação (4.40) é resolvida pela regra do trapézio. Para isso, define-se (Ruggiero e Rocha, 1997):

$$\begin{aligned} I_1 &= \Phi_{k,k} \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \Phi_{k,k}^T \\ I_2 &= \Phi_{k,k-1} \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \Phi_{k,k-1}^T \end{aligned} \quad (4.41)$$

com  $\Phi_{k,k} = \mathbf{I}$ .

Com isso, a integral é dada por:

$$\Gamma_k \mathbf{Q} \Gamma_k^T \cong \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \delta t \quad (4.42)$$

e é válida para  $\delta t$  pequenos.





## CAPÍTULO 5

### APLICAÇÃO DOS ALGORITMOS EM POSICIONAMENTO ESTÁTICO

Os algoritmos de GPS diferencial e dupla diferença descritos foram implementados para a realização de experimentos de posicionamento estático em tempo real para um receptor usuário. Neste teste ambos os receptores permaneceram estáticos, em posições precisamente conhecidas, para verificar a qualidade dos algoritmos propostos.

Os dados utilizados foram coletados por dois receptores GPS Ashtech Z12 de dupla frequência e qualidade geodésica, durante uma campanha de cerca de uma hora, gravados com uma frequência de amostragem de 1Hz.

O receptor *base* foi colocado sobre um marco de referência com coordenadas ECEF (*Earth Centered Earth Fixed*) no sistema WGS-84 dadas por  $x_{ref} = 4084765,0762\text{m}$ ,  $y_{ref} = -4209370,0341\text{m}$  e  $z_{ref} = -2498478,2210\text{m}$ , ou  $23^\circ 12' 40,40928''$  S,  $45^\circ 51' 38,38152''$  W e  $612,0274\text{m}$  no sistema geodésico, medidos pelo IBGE. O receptor *usuário* foi colocado a  $5,20\text{m}$  de distância do receptor base (Figura 5.1).

Os dados de navegação e observação de ambos os receptores foram coletados nos modos C1 (código C/A civil) e P1 (código-P preciso) e foram gravados no formato RINEX-2 (Gurtner, ). Estes arquivos foram editados de modo que o tempo total da medição e o conjunto de satélites fossem o mesmo para ambos os receptores. Durante o período de observação havia sempre 5 ou 6 satélites visíveis. O gráfico da Figura 5.2 mostra a variação do GDOP, PDOP, TDOP e número de satélites visíveis durante a observação para as medidas de pseudodistância em C1 e P1. Esses valores foram obtidos utilizando-se apenas os satélites visíveis em ambos os receptores simultaneamente.

Os resultados são analisados em termos de um erro de posição com relação à linha de base entre os receptores, ou seja, a diferença entre a linha de base calculada a partir da solução do usuário e da posição de referência com a distância de  $5,20\text{m}$ . Essa distância foi medida utilizando-se uma fita métrica. Todos os algoritmos foram implementados em rotinas escritas em linguagem FORTRAN.

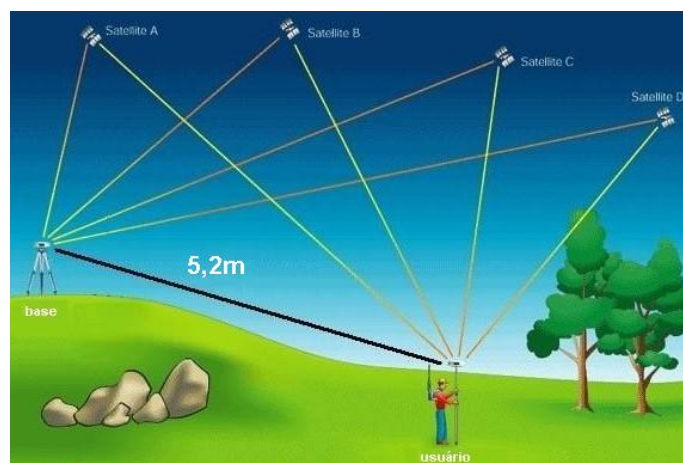


FIGURA 5.1 – Configuração do experimento.

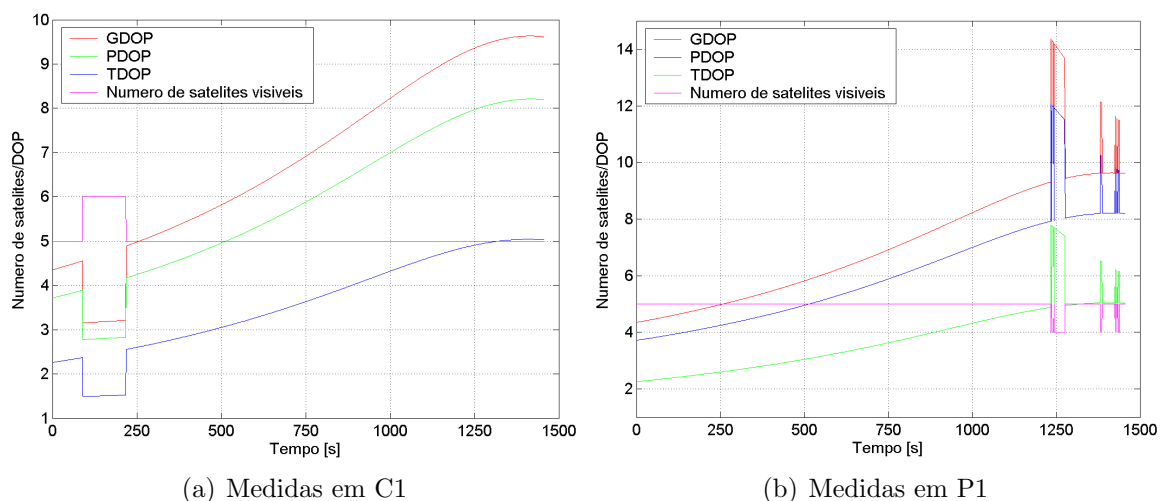


FIGURA 5.2 – Variação do GDOP, PDOP, TDOP e número de satélites visíveis durante a observação.

### 5.1 GPS Diferencial na Posição

Primeiramente, através de um método de mínimos quadrados, obtém-se, independentemente para cada receptor, a posição e o desvio do relógio para cada instante a partir dos dados medidos. Com isso, a base calcula a correção dada pela Equação (4.2). Esta correção é então somada à posição do usuário. A linha de base é obtida a partir da posição corrigida do usuário e da posição de referência da base.

A Figura 5.3 mostra o erro da posição do usuário com respeito à linha de base de 5,20m. O erro permanece menor que 3m a maior parte do tempo, porém com alguns

picos de até 7m, devido ao alto valor do GDOP no final do experimento. Porém este resultado está dentro da precisão esperada para a técnica de DGPS mostrado na Tabela 3.2, com erro 1-sigma horizontal de 2,2m e erro 1-sigma vertical de 2,8m. Estes dados apresentaram um erro médio de 0,53m com desvio padrão de 1,34m.

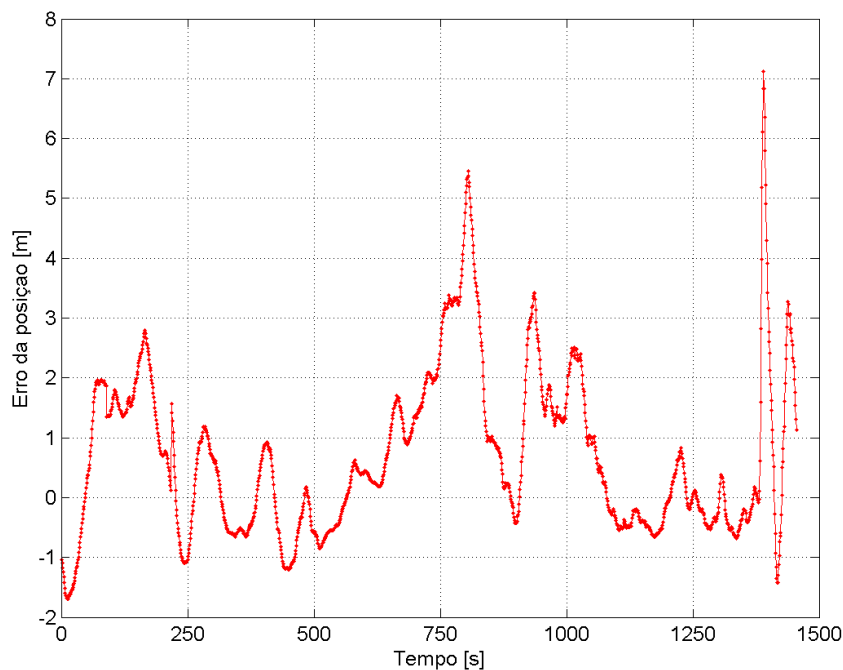


FIGURA 5.3 – Erro da posição do usuário com relação à linha de base de 5,20m para DGPS na posição.

## 5.2 GPS Diferencial na Pseudodistância

Este método de DGPS foi implementado de acordo com o descrito na seção 4.2. Por se tratar de receptores estáticos, o estado a ser considerado consiste de:

$$\mathbf{x}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u & b_u & d_u \end{bmatrix}^T \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{r}_u = [x_u \ y_u \ z_u]^T$  é a posição,  $b_u$  e  $d_u$  são o desvio e a deriva do relógio do receptor respectivamente, sendo  $\dot{b}_u = d_u$ . Sendo assim, o modelo dinâmico é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \mathbf{x}_u + \mathbf{G}\boldsymbol{\omega}_u \quad (5.2)$$

onde  $\boldsymbol{\omega}_u = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_r & \boldsymbol{\omega}_b \end{bmatrix}^T$  é a matriz contendo os ruídos da modelagem dinâmica da posição  $\boldsymbol{\omega}_r$  e do relógio  $\boldsymbol{\omega}_b$  e  $\mathbf{G}$  é a matriz de adição de ruído, dada por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T. \boldsymbol{\omega}_u \text{ é assumido ruído branco, logo:}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\boldsymbol{\omega}_u] &= \mathbf{0} \\ \mathbb{E}[\boldsymbol{\omega}_u(t)\boldsymbol{\omega}_u^T(\tau)] &= \mathbf{Q}(t)\delta(t - \tau) \end{aligned} \quad (5.3)$$

A matriz de transição de estados do tempo  $k - 1$  para  $k$  correspondente a este modelo, de acordo com a Equação (3.14), é dada por:

$$\Phi_{k,k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \begin{bmatrix} 1 & \delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Desse modo a propagação do estado e sua covariância é feita através das equações:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{u,k} &= \Phi_{k-1,k} \hat{\mathbf{x}}_{u,k-1} \\ \bar{\mathbf{P}}_{u,k} &= \Phi_{k-1,k} \hat{\mathbf{P}}_{u,k-1} \Phi_{k-1,k}^T + \Gamma_k \mathbf{Q} \Gamma_k^T \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde  $\Gamma_k \mathbf{Q} \Gamma_k^T$  é a matriz de adição de ruído dinâmico na propagação do estado, calculado pelo método da seção 4.4.

O modelo de medidas para o estado considerado foi obtido a partir da Equação (2.1), que pode ser escrita explicitamente em termos dos elementos de  $\mathbf{x}_u$ , a menos dos termos de erros atmosféricos, pois assume-se que estes erros são eliminados com a aplicação da correção:

$$\rho_{corr,u}^i = [(X^i - x_u)^2 + (Y^i - y_u)^2 + (Z^i - z_u)^2]^{1/2} + c \cdot b_u - c \cdot B^i + \epsilon_u \quad (5.6)$$

onde  $\mathbf{R}^i$  é o vetor com as coordenadas de posição do satélite  $i$ . O procedimento de linearização descrito pela Equação (4.12) aplicado à Equação (5.6) resulta no seguinte modelo de medidas:

$$\begin{aligned}
\Delta\rho_u &= \rho_{corr,u}^i - \hat{\rho}_u^i = \mathbf{H}_k \Delta\mathbf{x}_u + \Delta\epsilon_u = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\hat{x}_u - X^i}{\hat{\rho}_u^i} & \frac{\hat{y}_u - Y^i}{\hat{\rho}_u^i} & \frac{\hat{z}_u - Z^i}{\hat{\rho}_u^i} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ \Delta b_u \\ \Delta d_u \end{bmatrix} + \Delta\epsilon_u \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Dessa forma, a fase de atualização deste filtro tem a forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{u,k} &= \bar{\mathbf{P}}_{u,k} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \bar{\mathbf{P}}_{u,k} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_\rho)^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_{u,k} &= \bar{\mathbf{x}}_{u,k} + \mathbf{K}_{u,k} \Delta\rho_u \\
\hat{\mathbf{P}}_{u,k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{u,k} \mathbf{H}_k) \bar{\mathbf{P}}_{u,k}
\end{aligned} \quad (5.8)$$

onde  $\Delta\rho_u$  é um vetor contendo os resíduos de observação em uma época e  $\mathbf{R}_\rho$  é a matriz de covariância dos erros de medida. As medidas de pseudodistância são assumidas não-correlacionadas entre si, de modo que  $\mathbf{R}_\rho$  tem a forma diagonal.

A implementação computacional das equações de atualização (equações 5.8) na forma matricial requer uma inversão de matriz de ordem igual ao número de componentes do vetor de estados. Equivalentemente a esta inversão, pode-se realizar  $m$  atualizações do estado e sua covariância, onde  $m$  é o número de observações, na qual é processada uma pseudodistância por atualização, desde que  $\mathbf{R}_\rho$  seja diagonal. Assim, a inversão de matriz se transforma em  $m$  inversões de um escalar (Sorenson, 1980; Kuga, 1982).

### 5.2.1 Resultados

As coordenadas iniciais da posição para o filtro são as mesmas da referência. O valor do desvio do relógio foi obtido do primeiro instante de observação do arquivo RINEX. A Tabela 5.1 mostra os valores iniciais do vetor de estado. A covariância foi inicializada com um valor de  $(100\text{m})^2$  para a posição e desvio do relógio e de  $(10\text{m/s})^2$  para a deriva, de modo que tem-se a matriz de covariâncias iniciais:

$$\hat{\mathbf{P}}_u = \begin{bmatrix} 100^2 & \dots & 0 \\ & 100^2 & \\ \vdots & & 100^2 \\ 0 & \dots & 10^2 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

TABELA 5.1 – Valores iniciais da posição, desvio e deriva e suas covariâncias para o filtro de Kalman.

Estado	Valor inicial	Desvio-padrão
$x_u$ [m]	4084765,0762	100
$y_u$ [m]	-4209370,0341	100
$z_u$ [m]	-2498478,2210	100
$b_u$ [m]	98584,9510	100
$d_u$ [m/s]	0	10

As pseudodistâncias são medidas pelo receptor com um erro de variância  $\sigma_0^2 = (3\text{m})^2$ , de modo que  $\mathbf{R}_\rho$  é uma matriz diagonal de ordem  $m \times m$  dada por:

$$\mathbf{R}_\rho = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_0^2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

O valor das densidades espectrais de potência do ruído dinâmico da posição ( $q_r$ ) e da deriva do relógio ( $q_b$ ) são dadas por:

$$\begin{aligned} q_r &= \mathbf{E}[\boldsymbol{\omega}_r \boldsymbol{\omega}_r^T] = 0,009^2 \text{m}^2/\text{s}^3 \\ q_b &= \mathbf{E}[\boldsymbol{\omega}_b \boldsymbol{\omega}_b^T] = 0,9^2 \text{m}^2/\text{s}^5 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Estes valores foram ajustados *off-line* de modo a obter a melhor convergência do filtro. Assim,  $\mathbf{Q}$  vale:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_r \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & q_b \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

a qual é usada para calcular  $\Gamma_k \mathbf{Q} \Gamma_k^T$  de acordo com o método da seção 4.4.

O gráfico da Figura 5.4 mostra o comportamento dos resíduos da pseudodistância durante o tempo do experimento. Após a convergência do filtro, os resíduos permanecem menores que 1m.

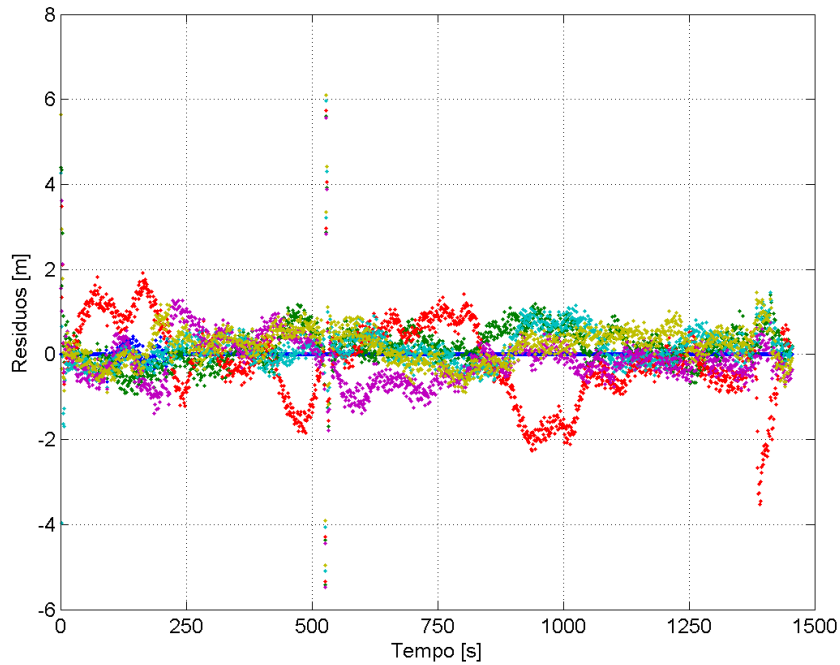


FIGURA 5.4 – Resíduos da pseudodistância.

A Tabela 5.2 mostra a média e o desvio-padrão dos resíduos do filtro para cada satélite visível. Nota-se pela tabela que os resíduos apresentam médias em torno de zero e desvios-padrão menores que 1,6m.

TABELA 5.2 – Estatística dos resíduos para o método de DGPS na pseudodistância

Satélite	Média [m]	Desvio-padrão [m]
1	-0,071	0,234
3	0,487	0,892
11	-0,733	1,662
14	0,066	0,577
15	-0,036	0,163
25	0,446	1,528
31	0,132	0,655

O gráfico da Figura 5.5 mostra o erro da posição para este método, juntamente com

o erro de estimação de  $\pm 1$ -sigma dado pelo traço da matriz de covariância. Uma boa estimativa para a posição inicial do usuário são as coordenadas da base, o que gera o erro inicial de 4m. Após a convergência do filtro, a estimativa permanece com erro médio de 0,11m e desvio-padrão de 0,29m. Este método tem um comportamento mais suave e apresenta uma precisão melhor que o método de DGPS na posição (seção 5.1).

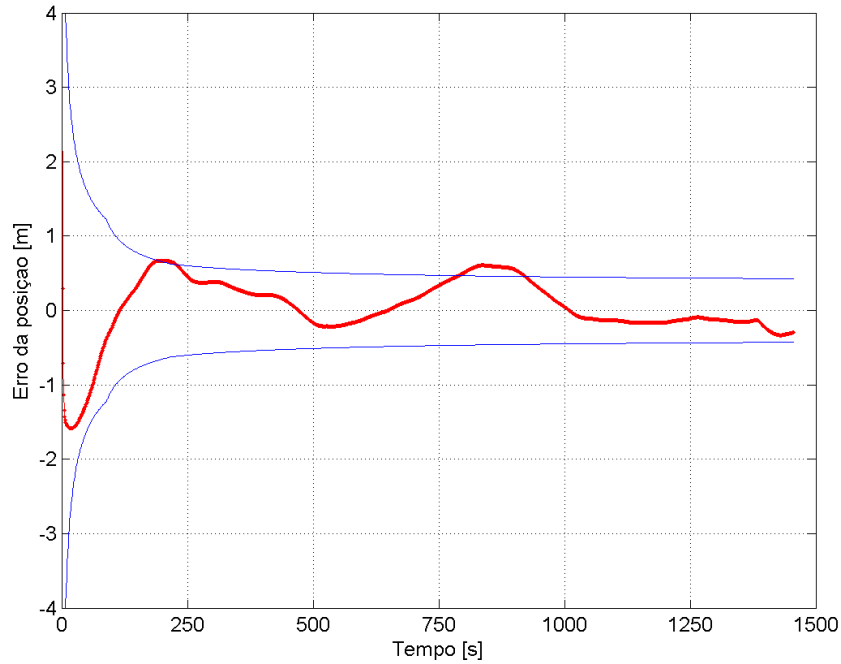


FIGURA 5.5 – Erro da posição do usuário com relação à linha de base de 5,20m para DGPS na pseudodistância.

### 5.3 Modelagem das Observáveis por Dupla Diferença

Esta seção mostra os resultados da aplicação da técnica de posicionamento por dupla diferença, descrita na seção 3.4.3. Os testes foram feitos utilizando filtro de Kalman e mínimos quadrados, ambos com ausência de rotina de suavização da pseudodistância e com suavização (seção 4.3.4) de janelas de 10, 30, 50 e 100 segundos.

#### 5.3.1 Modelagem Usando Filtro de Kalman

O vetor de estados  $\mathbf{x}_{ub}$  para o posicionamento por dupla diferença consiste apenas da posição relativa dos receptores (linha de base), visto que o desvio do relógio é



eliminado na construção dos observáveis, tal que

$$\mathbf{x}_{ub} = \begin{bmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \end{bmatrix}^T \quad (5.13)$$

A propagação do estado e sua covariância são feitas com base no modelo de dinâmica considerando os receptores parados:

$$\dot{\mathbf{x}}_{ub} = \mathbf{0} + \mathbf{G}\omega_r \quad (5.14)$$

onde  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$  e  $\omega_r$  é um ruído branco nas coordenadas da linha de base com densidade espectral  $\mathbf{Q}$ . Assim, a matriz de transição  $\Phi_{k,k-1}$  se reduz à matriz identidade. Das equações (3.13) e (3.15) tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{ub,k} &= \hat{\mathbf{x}}_{ub,k-1} \\ \bar{\mathbf{P}}_{ub,k} &= \hat{\mathbf{P}}_{ub,k-1} + \Gamma_k \mathbf{Q} \Gamma_k^T \end{aligned} \quad (5.15)$$

Este filtro utiliza-se do modelo de medidas obtido após o processo de branqueamento (Equação 4.26). Sendo assim, a atualização é feita pelo conjunto de equações (3.16), utilizando o processamento seqüencial:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \bar{\mathbf{P}}_{ub,k} \tilde{\mathbf{H}}_k^T (\tilde{\mathbf{H}}_k \bar{\mathbf{P}}_{ub,k} \tilde{\mathbf{H}}_k^T + \mathbf{I})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{ub,k} &= \bar{\mathbf{x}}_{ub,k} + \mathbf{K}_k (\tilde{\mathbf{z}}_{DD} - \hat{\mathbf{z}}_{DD}) \\ \hat{\mathbf{P}}_{ub,k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{H}}_k) \bar{\mathbf{P}}_{ub,k} \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde  $\hat{\mathbf{z}}_{DD}$  é o vetor contendo as observações de dupla diferença calculadas com base nas pseudodistâncias preditas.

### 5.3.2 Modelagem Usando Mínimos Quadrados

A solução por mínimos quadrados local foi obtida com o processamento das medidas em lotes, ou seja, processando todas as medidas de uma só vez em cada época, através das equações (Kuga, 2002):

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \\ \Delta \mathbf{x}_{ub} &= \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \Delta \mathbf{z}_{DD} \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde  $\mathbf{W}$  é uma matriz de ponderação, dada por  $\mathbf{W} = \mathbf{R}_{DD}^{-1}$ ,  $\Delta \mathbf{z}_{DD} = \mathbf{z}_{DD} - \hat{\mathbf{z}}_{DD}$  é o resíduo das medidas de dupla diferença e  $\Delta \mathbf{x}_{ub}$  é o incremento na linha de base. O valor da linha de base estimada  $\hat{\mathbf{x}}_{ub}$  é então calculada por:

$$\hat{\mathbf{x}}_{ub} = \bar{\mathbf{x}}_{ub} + \Delta \mathbf{x}_{ub} \quad (5.18)$$

### 5.3.3 Resultados Utilizando Dados do Código C1

O filtro de Kalman foi implementado de acordo com o descrito na seção 5.3.1, em conjunto com o algoritmo de suavização das medidas citado na seção 4.3.4. Os valores iniciais da linha de base e da covariância do filtro foram:

$$\hat{\mathbf{x}}_{ub} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (m)} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{P}}_{ub} = \begin{bmatrix} 100^2 & 0 & 0 \\ 0 & 100^2 & 0 \\ 0 & 0 & 100^2 \end{bmatrix} \text{ (m}^2\text{)} \quad (5.19)$$

O valor atribuído à variância dos erros de medida é  $\sigma_0^2 = (3\text{m})^2$ . Com isso, de acordo com a Equação (4.23), a matriz de covariância das observações de dupla diferença, de ordem  $(m-1) \times (m-1)$ , vale

$$\mathbf{R}_{DD} = 18 \begin{bmatrix} 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 2 \end{bmatrix} \text{ (m}^2\text{)} \quad (5.20)$$

A suavização foi implementada utilizando janelas de 0 (ausência de suavização), 10, 30, 50 e 100 segundos.

O valor da densidade espectral de potência do ruído dinâmico  $\mathbf{Q}$  foi sintonizado de modo a obter a convergência do filtro e foi mantido constante durante o experimento. Com isso,  $\mathbf{Q}$  assume os valores:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= 0,001^2 \text{m}^2/\text{s}^3 && \text{para o filtro sem suavização e} \\ \mathbf{Q} &= 0,0001^2 \text{m}^2/\text{s}^3 && \text{para o filtro com suavização.} \end{aligned} \quad (5.21)$$

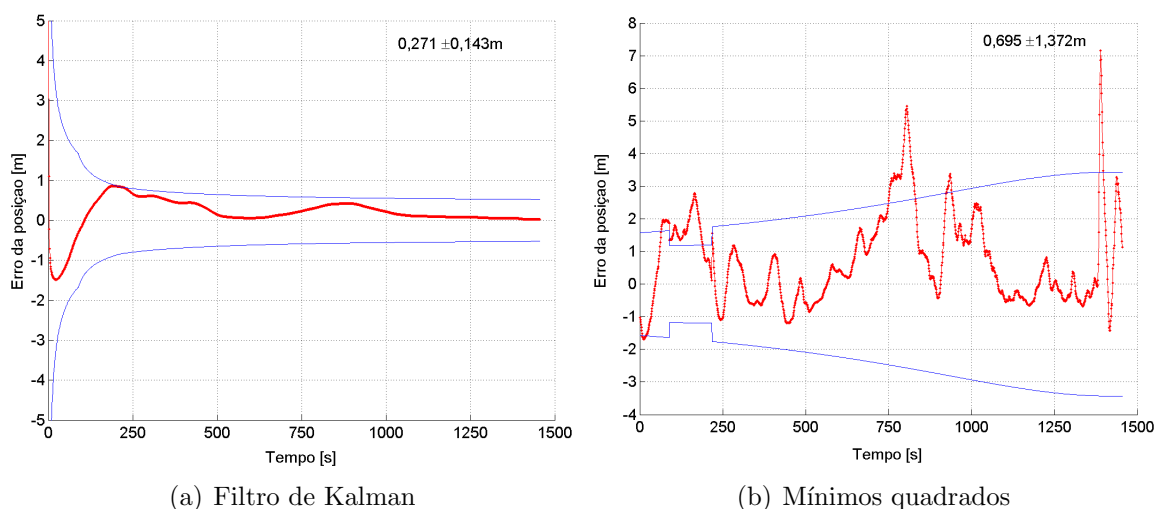


FIGURA 5.6 – Erro do posicionamento do usuário sem suavização.

Os gráficos da Figura 5.6 mostram a solução em termos do erro de posicionamento da linha de base com relação a distância de referência de 5,20m na ausência de suavização, juntamente com as curvas de  $\pm 1$ -sigma de erro de estimação. As Figuras 5.7 a 5.10 mostram os resultados para diferentes graus de suavização. As Figuras 5.7a a 5.10a (esquerda) mostram o erro para a solução com o filtro de Kalman, juntamente com o erro de estimação de  $\pm 1$ -sigma dado pelo traço da matriz de covariância. As Figuras 5.7b a 5.10b (direita) mostram o erro de posicionamento referente à solução para o método de mínimos quadrados.

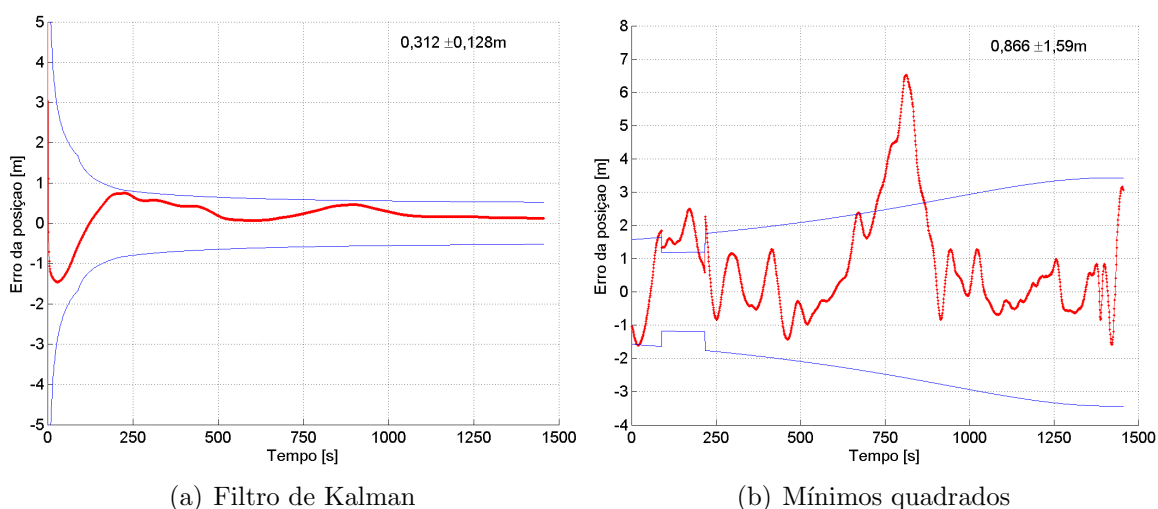


FIGURA 5.7 – Erro do posicionamento do usuário com suavização de 10s.

Uma boa estimativa para a posição inicial do usuário em um sistema de DGPS são

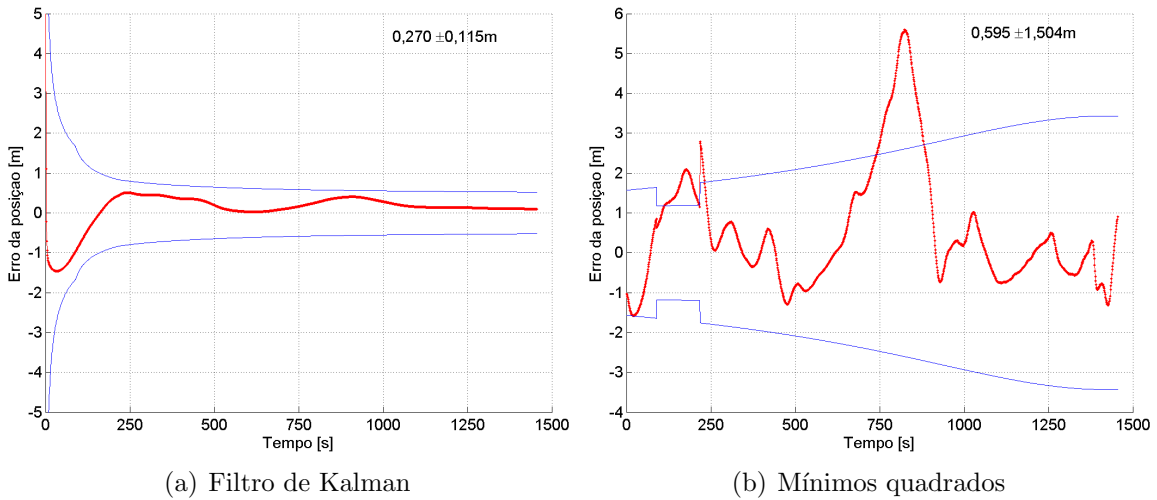


FIGURA 5.8 – Erro do posicionamento do usuário com suavização de 30s.

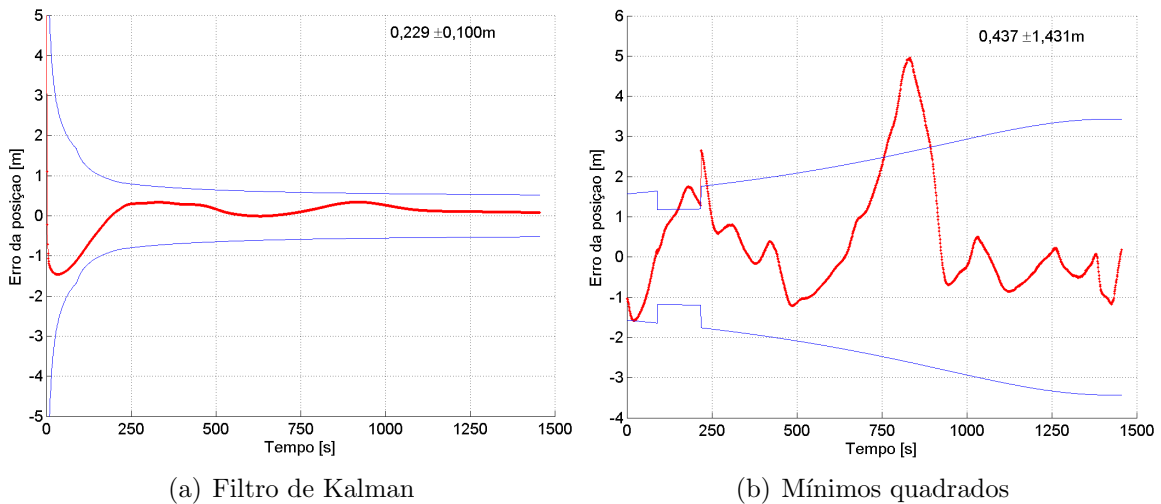


FIGURA 5.9 – Erro do posicionamento do usuário com suavização de 50s.

as coordenadas da base, ou seja, linha de base nula. Isto gera o erro inicial de cerca de 2m no filtro de Kalman. Após a convergência do filtro, a estimativa permanece com desvio dentro de 0,5m. Este método tem um comportamento bastante suave e permaneceu estável sob GDOP maior. A variação do GDOP e do número de satélites visíveis durante o experimento são mostrados no gráfico da Figura 5.2a.

Os gráficos das Figuras 5.7 a 5.10 mostram que o aumento da duração da janela de suavização efetivamente levou a uma progressiva diminuição da magnitude do erro, após um ligeiro aumento na janela de 10s, tanto para a solução por filtro de Kalman quanto por mínimos quadrados, como pode ser visto nas Tabelas 5.3 e 5.4.

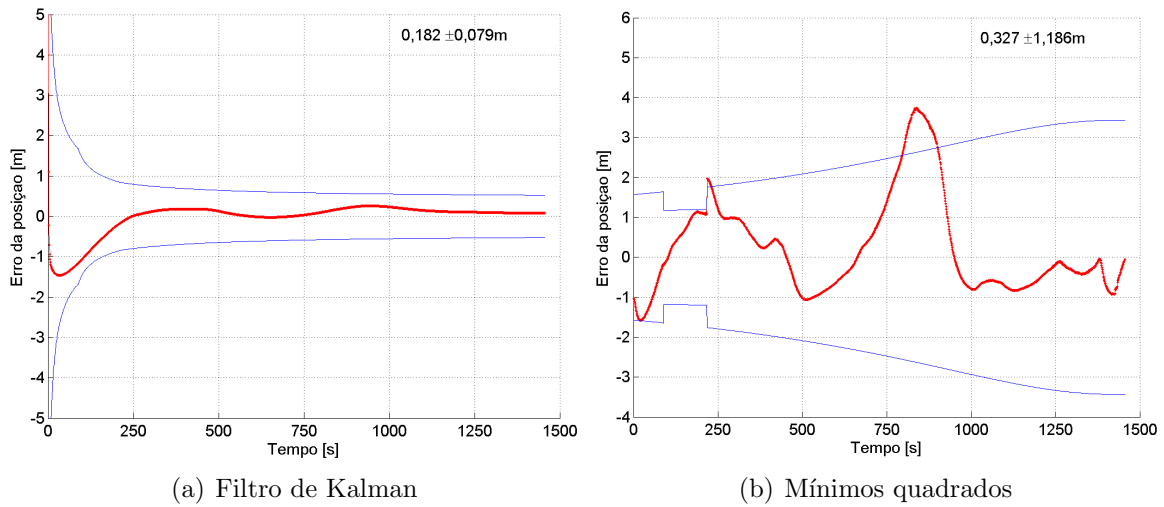


FIGURA 5.10 – Erro do posicionamento do usuário com suavização de 100s.

Na solução por mínimos quadrados, a diminuição da covariância entre 89 e 219s se deve à entrada de um sexto satélite em visibilidade durante este período. Nota-se que a suavização foi capaz de eliminar a descontinuidade em 89s, mas não em 219s. A partir de 1400s, nota-se que as medidas começaram a se degradar, devido ao aumento do valor do GDOP durante o experimento (Figura 5.2a). Nessa região, a suavização foi capaz de diminuir grandes oscilações.

A Tabela 5.3 mostra a média e o desvio-padrão do erro de posicionamento para a solução por filtro de Kalman para as medidas em C1, tomadas a partir da convergência do filtro, assumido após 300s de experimento. Os valores mostram que a suavização leva o erro de posicionamento a diminuir, assim como o desvio-padrão.

TABELA 5.3 – Médias e desvios-padrão para a solução por filtro de Kalman nas medidas em C1.

Janela [s]	Média [m]	Desvio padrão [m]
0	0,271	0,143
10	0,312	0,128
30	0,270	0,115
50	0,229	0,100
100	0,182	0,079

A precisão dos resultados em ambos os métodos é similar, exceto pelo fato de que a

solução por mínimos quadrados é feita ponto a ponto, ou seja, a solução é obtida a cada instante e sem modelo dinâmico. A solução por filtro de Kalman é recursiva, obtida através do aprimoramento da solução das épocas anteriores com as medidas da época atual. Isto gera um resultado mais estável que a solução ponto a ponto.

A Tabela 5.4 apresenta os valores do erro e desvio-padrão para a solução por mínimos quadrados.

TABELA 5.4 – Médias e desvios-padrão para a solução por mínimos quadrados nas medidas em C1.

Janela [s]	Média [m]	Desvio padrão [m]
0	0,695	1,372
10	0,866	1,591
30	0,595	1,504
50	0,437	1,431
100	0,327	1,186

### 5.3.4 Resultados Utilizando Dados do Código P1

O filtro de Kalman foi inicializado com os valores da linha de base e da covariância do filtro idênticos aos da seção anterior. O valor atribuído à variância dos erros de medida é  $\sigma_0^2 = (0,5\text{m})^2$ , pois estas medidas são obtidas através do código-P, teoricamente mais preciso. Assim, a matriz de covariância das observações vale:

$$\mathbf{R}_{DD} = 0,5 \begin{bmatrix} 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 2 \end{bmatrix} (\text{m}^2) \quad (5.22)$$

A suavização foi implementada utilizando janelas de 0 (ausência de suavização), 10, 30, 50 e 100 segundos. O valor da densidade espectral do ruído dinâmico  $\mathbf{Q}$  foi sintonizado em:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= 0,1^2 \text{m}^2/\text{s}^3 && \text{para o filtro sem suavização e} \\ \mathbf{Q} &= 0,02^2 \text{m}^2/\text{s}^3 && \text{para o filtro com suavização.} \end{aligned} \quad (5.23)$$

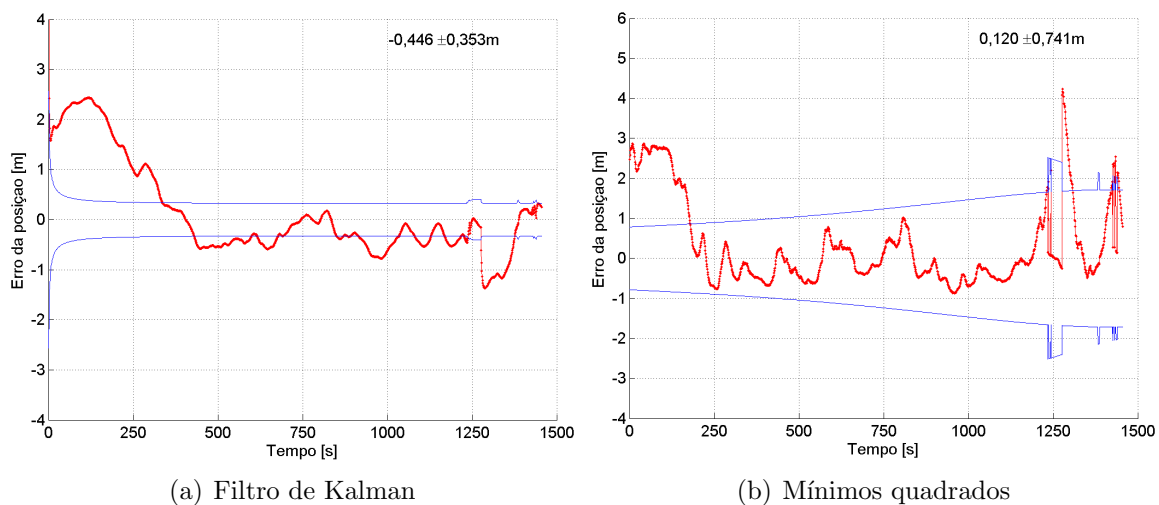


FIGURA 5.11 – Erro do posicionamento do usuário sem suavização.

O gráfico da Figura 5.11 mostra o erro de posicionamento para a solução por filtro de Kalman (Fig. 5.11a) e por mínimos quadrados (Fig. 5.11b) em P1 na ausência de suavização. O erro inicial está em cerca de 2,5m devido provavelmente a um rastreamento ainda não estabelecido devidamente. O valor do erro após 1200s de experimento aumenta, chegando a picos de 4m, pois o valor do GDOP nesse instante atinge cerca de 9, com picos de 14 nos momentos em que há diminuição de um satélite sendo rastreado. A Figura 5.2b mostra o valor do GDOP e o número de satélites em rastreamento durante o experimento.

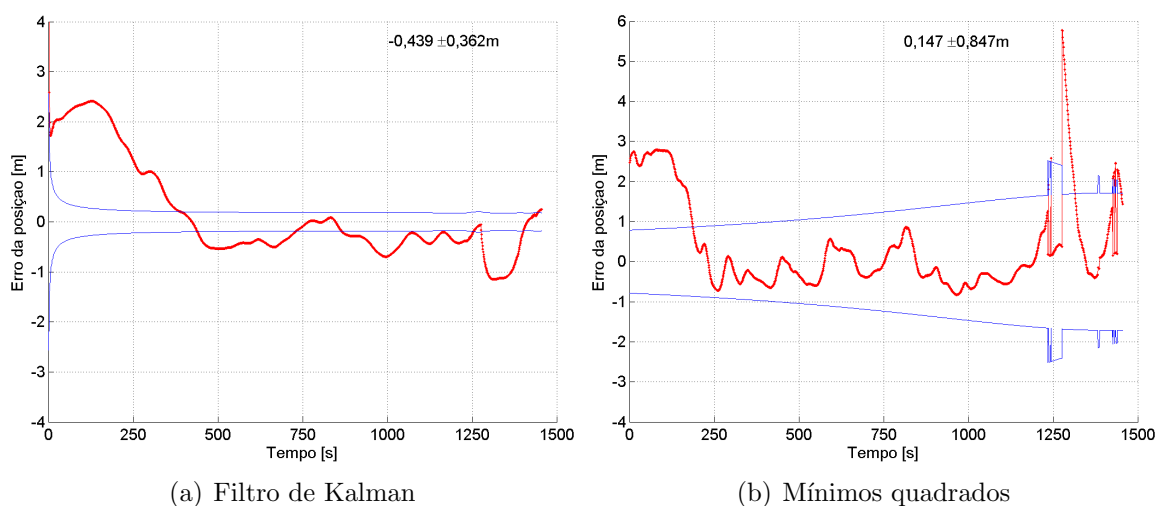


FIGURA 5.12 – Erro do posicionamento do usuário com suavização de 10s.

As Figuras 5.12 a 5.15 mostram o erro de posicionamento com a aplicação de suavização com janelas de 10, 30, 50 e 100 segundos, respectivamente. A suavização

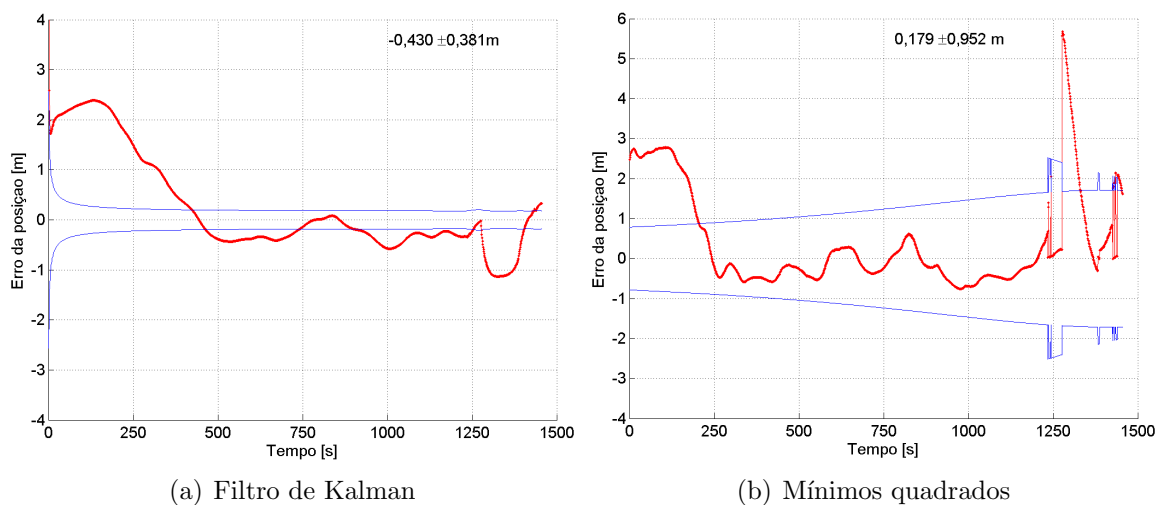


FIGURA 5.13 – Erro do posicionamento do usuário com suavização de 30s.

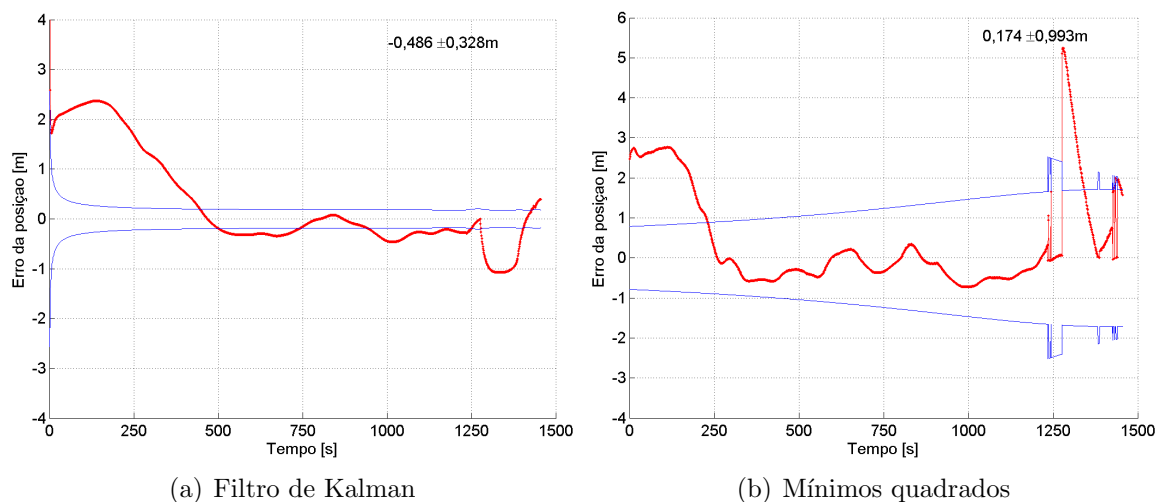


FIGURA 5.14 – Erro do posicionamento do usuário com suavização de 50s.

levou a um aumento progressivo da duração do pico de erro inicial.

As Tabelas 5.5 e 5.6 mostram o valor da média e do desvio-padrão para o erro de posicionamento para a solução por filtro de Kalman e mínimos quadrados, respectivamente. Estes valores para o filtro foram calculados após a convergência do filtro e eliminado o pico inicial, de modo que para as janelas de 0, 10 e 30s foram tomados valores a partir de 300s de experimento e para as janelas de 50 e 100s, a partir de 400s. Na solução por mínimos quadrados, para a janela de 0, 10 e 30s foram tomados valores a partir de 200s e para 50 e 100s, a partir de 300s.



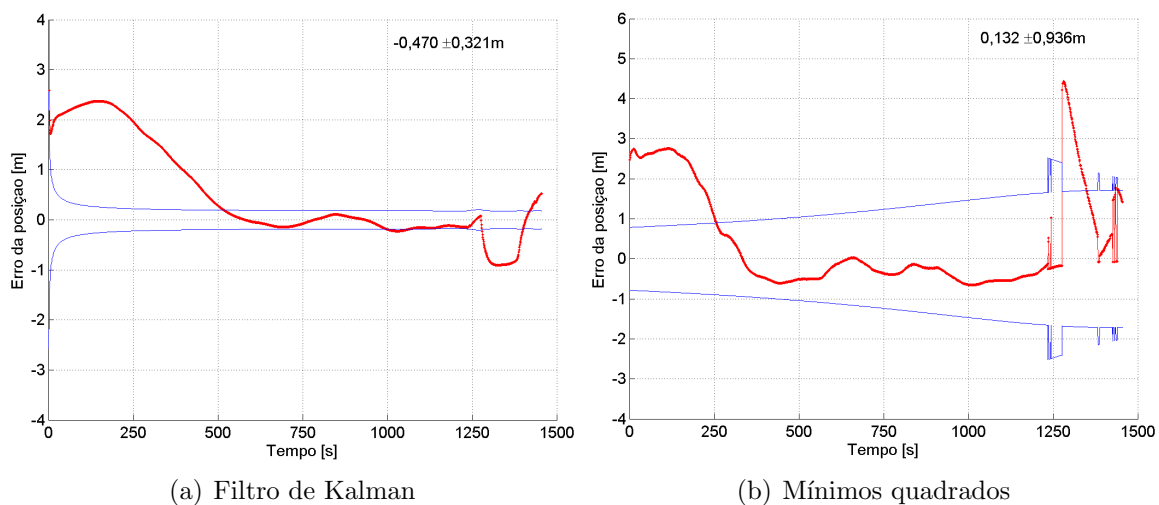


FIGURA 5.15 – Erro do posicionamento do usuário com suavização de 100s.

TABELA 5.5 – Médias e desvios-padrão para a solução por filtro de Kalman nas medidas em P1.

Janela [s]	Média [m]	Desvio padrão [m]
0	-0,446	0,353
10	-0,439	0,362
30	-0,430	0,381
50	-0,486	0,328
100	-0,470	0,321

TABELA 5.6 – Médias e desvios-padrão para a solução por mínimos quadrados nas medidas em P1.

Janela [s]	Média [m]	Desvio padrão [m]
0	0,120	0,741
10	0,147	0,847
30	0,179	0,952
50	0,174	0,993
100	0,132	0,936

Os experimentos desta etapa mostram que o processo de suavização de medidas pode atenuar a média do erro, mas não afeta significativamente seu desvio-padrão. As várias janelas de suavização utilizadas (10, 30, 50, 100s) não modificaram con-

sideravelmente a precisão final e assim sendo torna-se discutível sua utilização em ambiente de tempo real, o que aumentaria a complexidade do código sem grandes benefícios. Provavelmente benefícios maiores são conseguidos para aplicações estáticas sem requisitos de tempo real.

O filtro de Kalman proporcionou precisões melhores que o mínimos quadrados quando se utilizou medidas em C1, tanto no erro médio quanto no desvio-padrão. No entanto, ao utilizar-se medidas em P1 (teoricamente mais precisas), o filtro de Kalman produziu erros médios maiores e desvios-padrão menores que o procedimento de mínimos quadrados.

#### 5.4 Tempo de Execução dos Programas

A Tabela 5.7 mostra o tempo de execução total e o tempo de execução médio, que corresponde ao tempo de processamento das medidas de cada época, dos algoritmos testados. Os algoritmos de posicionamento por dupla diferença foram realizados utilizando o filtro de Kalman (FK) e mínimos quadrados (MQ), com suavização de duração indicada na tabela. Estes valores foram obtidos para um computador Pentium III de 1GHz, com 512Mb de memória RAM e Windows 2000 e as rotinas escritas em linguagem FORTRAN.

TABELA 5.7 – Tempo total e médio de execução dos algoritmos.

<b>Algoritmo</b>	<b>Tempo total [s]</b>	<b>Tempo médio [s]</b>
DGPS na posição	1.702	0,0009
DGPS na pseudodistância	2.093	0,0011
Dupla diferença (FK) 0s	1.863	0,0010
Dupla diferença (FK) 10s	1.862	0,0010
Dupla diferença (FK) 30s	1.862	0,0010
Dupla diferença (FK) 50s	1.802	0,0009
Dupla diferença (FK) 100s	1.883	0,0010
Dupla diferença (MQ) 0s	1.923	0,0010
Dupla diferença (MQ) 10s	2.373	0,0012
Dupla diferença (MQ) 30s	2.323	0,0012
Dupla diferença (MQ) 50s	2.183	0,0012
Dupla diferença (MQ) 100s	2.023	0,0011

Nota-se que o método de DGPS na posição, que utiliza mínimos quadrados, foi mais rápido que o método de DGPS na pseudodistância, que utiliza filtro de Kalman. O mesmo não ocorre com o método de dupla diferença. Estes valores mostram também que os algoritmos com suavização aparentemente não levaram mais tempo na execução, sendo assim, sua complexidade está apenas na implementação do código.



## CAPÍTULO 6

### APLICAÇÃO DOS ALGORITMOS EM NAVEGAÇÃO

Os algoritmos de posicionamento descritos nos capítulos anteriores foram aplicados em dados de vôo provenientes de um usuário móvel e uma base fixa.

Os dados foram coletados por um receptor instalado em uma aeronave e um receptor fixo, em um ensaio realizado no dia 16 de abril de 2002, durante cerca de 50min. As coordenadas de posição da base são dadas por  $23^{\circ} 13' 42,9859''$  S,  $45^{\circ} 51' 23,4615''$  W e 686,227m ou  $x_{ref} = 4084584,8649\text{m}$ ,  $y_{ref} = -4208568,8146\text{m}$  e  $z_{ref} = -2500274,8289\text{m}$  em coordenadas ECEF no sistema WGS-84. As Figuras 6.1 e 6.2 reproduzem a trajetória horizontal da aeronave e sua altitude em função do tempo.

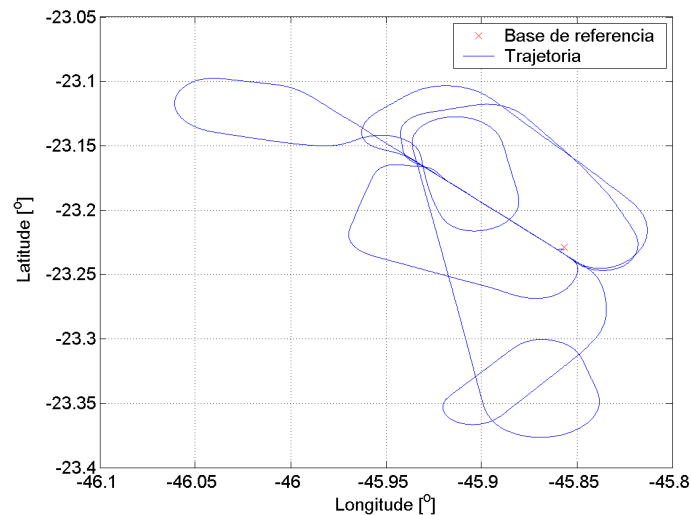


FIGURA 6.1 – Trajetória da aeronave.

Os arquivos de dados foram coletados no formato RINEX-2 (Gurtner, ) e editados de forma que o conjunto de satélites visíveis e o tempo de observação fossem os mesmos para ambos os receptores. Todos os algoritmos foram implementados em rotinas escritas em linguagem FORTRAN. A variação do número de satélites visíveis e GDOP, PDOP e TDOP durante o tempo de observação está mostrada no gráfico da Figura 6.3.

Será utilizada para comparação dos resultados uma trajetória pós-processada da aeronave, com precisão da ordem de centímetros. Para efeitos de comparação, esta

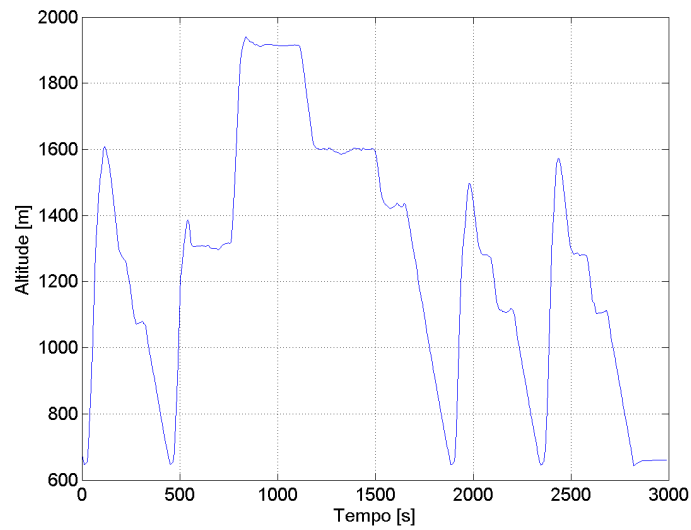
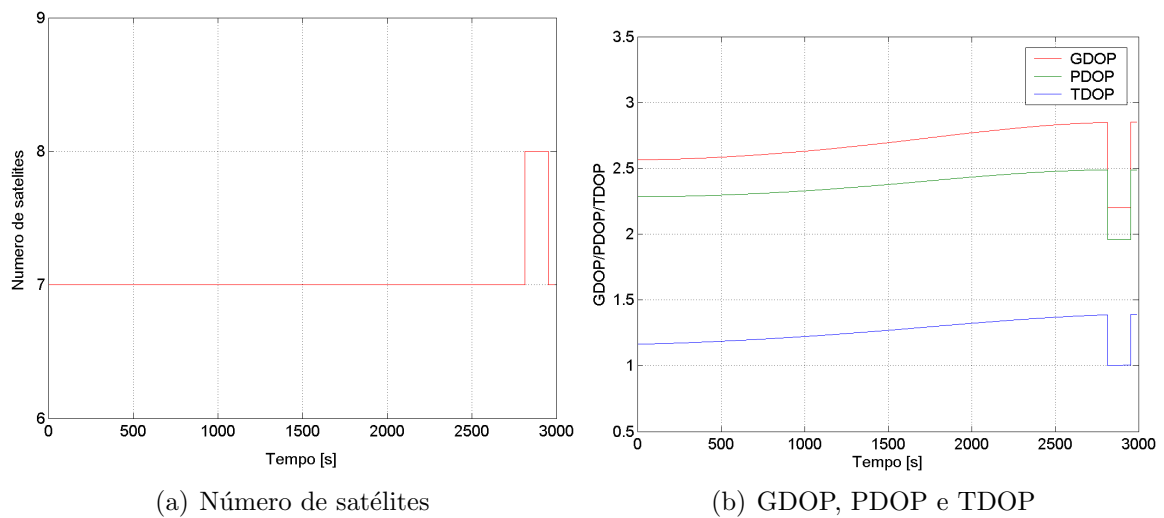


FIGURA 6.2 – Altitude da aeronave em função do tempo.

trajetória de referência é considerada suficientemente precisa.



(a) Número de satélites

(b) GDOP, PDOP e TDOP

FIGURA 6.3 – Variação do número de satélites visíveis e GDOP, PDOP e TDOP em função do tempo.

### 6.1 Aplicação do GPS Diferencial na Posição

Este método de DGPS implementado está descrito na seção 4.1. A solução por este método é apenas a posição da aeronave, pois a dinâmica não entra na formulação do método. Os gráficos da Figura 6.4 mostram as componentes do erro na direção leste, norte e vertical.

A Tabela 6.1 traz as estatísticas dos erros. O erro horizontal (leste e norte) tem praticamente a mesma precisão (cerca de 0,2m), enquanto que o erro vertical é menos preciso (0,7m), e sua média está em torno de 2m.

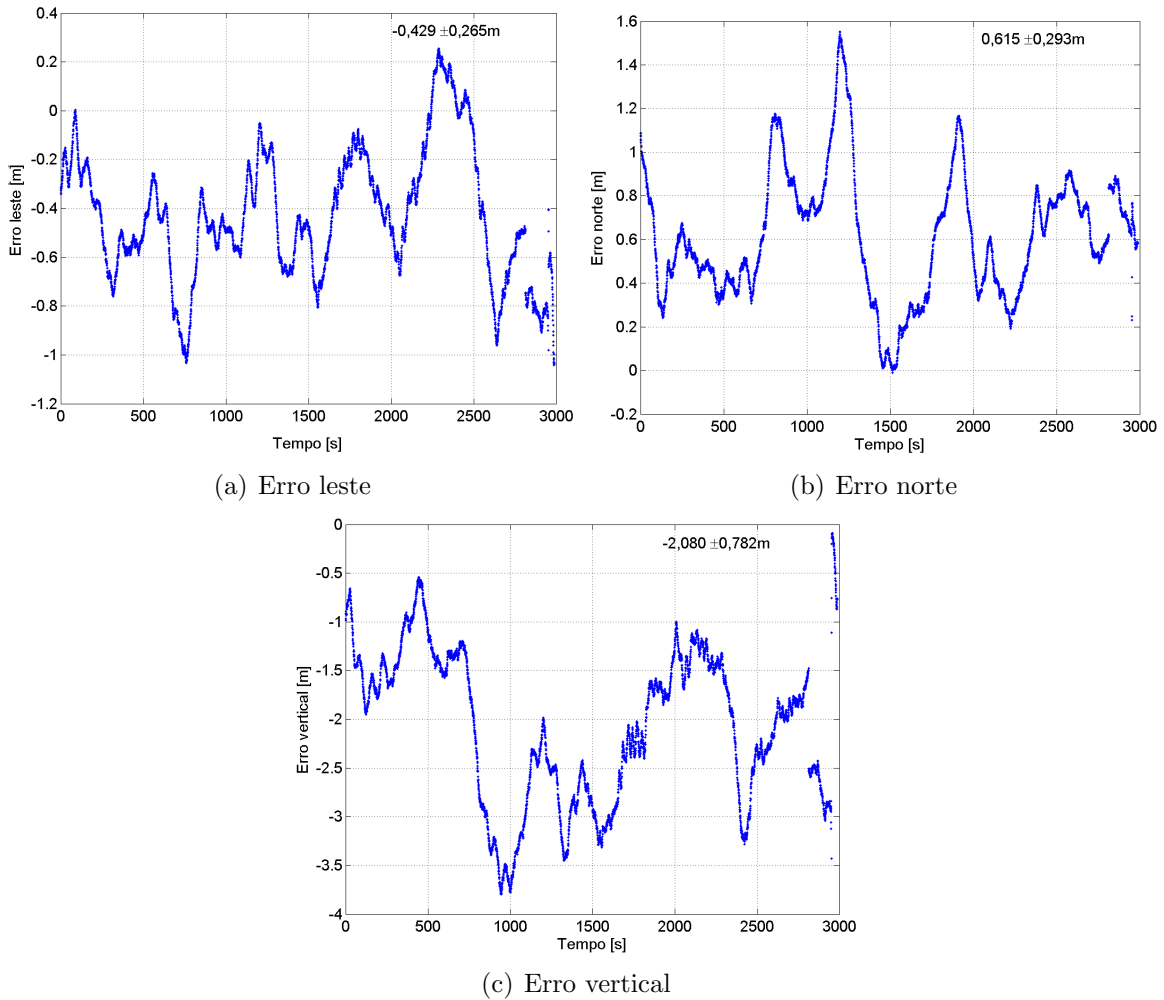


FIGURA 6.4 – Erro da posição da aeronave nas componentes leste, norte e vertical.

Nota-se que esse método de posicionamento produz uma solução precisa, mas com uma acurácia não tão boa, pois pode-se ver pelo gráfico da Figura 6.5 que o erro horizontal não está distribuído em torno de zero.

O resultado deste método apresenta uma solução horizontal com precisão de cerca de 0,25m, utilizando todos os satélites visíveis. Para comparação, Martínez *et al.* (2000) obtém uma solução em duas dimensões com um método semelhante, mas utilizando apenas três satélites, escolhidos pelo critério de DOP. A solução tem uma precisão de cerca de 5m.

TABELA 6.1 – Erro médio e desvio-padrão da posição em coordenadas leste-norte-vertical para o método de DGPS na posição.

	Média	Desvio-padrão
Erro leste [m]	-0,429	0,265
Erro norte [m]	0,615	0,293
Erro vertical [m]	-2,080	0,782

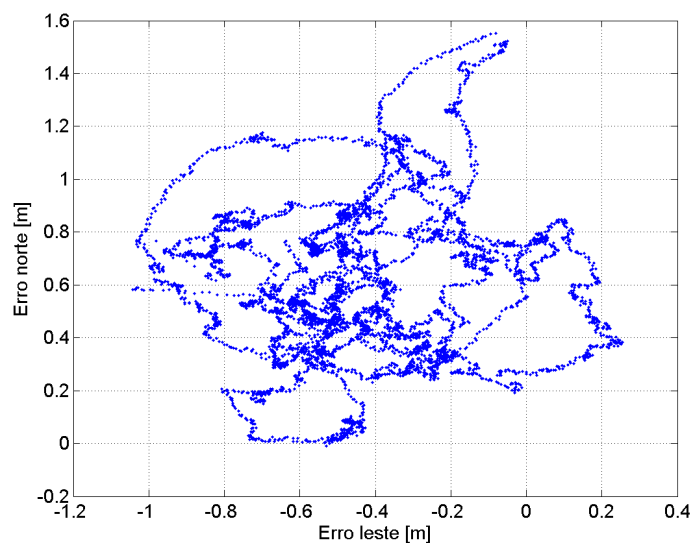


FIGURA 6.5 – Erro horizontal da aeronave.

## 6.2 Aplicação do GPS Diferencial na Pseudodistância

O modelo utilizado para descrever a trajetória da aeronave consiste em estimar a posição, velocidade e termos de relógio. O modelo dinâmico correspondente é dado por:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{r}}_u &= \mathbf{v}_u \\
 \dot{\mathbf{v}}_u &= \boldsymbol{\omega}_r \\
 \dot{b}_u &= d_u \\
 \dot{d}_u &= \omega_b
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Assim, o vetor de estados a ser considerado consiste de 8 elementos:

$$\mathbf{x} = \left[ \mathbf{r}_u \quad \mathbf{v}_u \quad b_u \quad d_u \right]^T \tag{6.2}$$



onde  $\mathbf{r}_u = [x_u \ y_u \ z_u]^T$  são as coordenadas de posição do usuário,  $\mathbf{v}_u = [\dot{x}_u \ \dot{y}_u \ \dot{z}_u]^T$  são as coordenadas de velocidade e  $(b_u, d_u)$  são o desvio e deriva do relógio do receptor, respectivamente.

Dessa forma, a dinâmica da aeronave é representada pela seguinte equação de estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{G} \begin{bmatrix} \omega_r \\ \omega_b \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

onde  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$  é a matriz de adição de ruídos dinâmicos.

Desse modo, pela Equação (3.14), a matriz de transição de estados assume a forma:

$$\Phi_{k,k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \delta t \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \begin{matrix} 1 & \delta t \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

onde  $\delta t$  corresponde ao intervalo de tempo entre as medidas.

A matriz  $\mathbf{H}_k$ , que relaciona o vetor de estado com as medidas, descrito na Equação (4.12), é dado por:

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \frac{\hat{x}_u - X^i}{\hat{\rho}_u^i} & \frac{\hat{y}_u - Y^i}{\hat{\rho}_u^i} & \frac{\hat{z}_u - Z^i}{\hat{\rho}_u^i} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

### 6.2.1 Correções

As pseudodistâncias corrigidas são calculadas pela equação:

$$\rho_{corr,u}^i = \rho_u^i + (\hat{\rho}_b^i - \rho_b^i) \quad (6.6)$$

onde  $\rho_{corr,u}^i$  é a pseudodistância corrigida,  $\hat{\rho}_b^i$  é a pseudodistância calculada com base nas coordenadas da referência e  $\rho_u^i$  e  $\rho_b^i$  são as pseudodistâncias medidas pelo usuário

e pela base respectivamente.

A estimação do vetor de estado do usuário é realizada pelo filtro, processando as pseudodistâncias corrigidas, através das equações (4.11) e (4.13). O processamento das equações de atualização é feito de forma seqüencial.

### 6.2.2 Resultados

O valor inicial dos componentes do vetor de estado e suas covariâncias estão mostrados na Tabela 6.2.

TABELA 6.2 – Valores iniciais dos estados e suas covariâncias para o filtro de Kalman.

Estado	Valor inicial	Desvio-padrão
$x_u$ [m]	4084584,8649	100
$y_u$ [m]	-4208568,8146	100
$z_u$ [m]	-2500274,8289	100
$\dot{x}_u$ [m/s]	0	10
$\dot{y}_u$ [m/s]	0	10
$\dot{z}_u$ [m/s]	0	10
$b_u$ [m]	2362,6644	100
$d_u$ [m/s]	0	10

A matriz de covariância das medidas  $\mathbf{R}_\rho$  é uma matriz diagonal de ordem  $m \times m$ , com  $m$  sendo o número de satélites visíveis, com os valores:

$$\mathbf{R}_\rho = \begin{bmatrix} 3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 3^2 \end{bmatrix} (\text{m})^2 \quad (6.7)$$

pois as pseudodistâncias são medidas com um erro de variância  $(3\text{m})^2$ . Para este teste,  $m$  varia entre 7 e 8 satélites (Figura 6.3a).

O filtro foi sintonizado com o valor da matriz de densidade espectral de potência

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_r \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & q_b \end{bmatrix} \text{ constante, onde}$$

$$\begin{aligned} E[\boldsymbol{\omega}_r \boldsymbol{\omega}_r^T] &= q_r \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \cdot \delta(t - \tau) \\ E[\boldsymbol{\omega}_b \boldsymbol{\omega}_b^T] &= q_b \delta(t - \tau) \end{aligned} \quad (6.8)$$

são dados por  $q_r = 0,8^2 \text{m}^2/\text{s}^5$  e  $q_b = 0,1^2 \text{m}^2/\text{s}^5$ .

O gráfico da Figura 6.6 mostra o comportamento dos resíduos das medidas de pseudodistância durante o tempo de processamento. Os resíduos apresentam média em torno de zero e desvios-padrão de até cerca de 2,5m, como pode ser visto na Tabela 6.3. Estes valores indicam que o filtro convergiu para um resultado coerente.

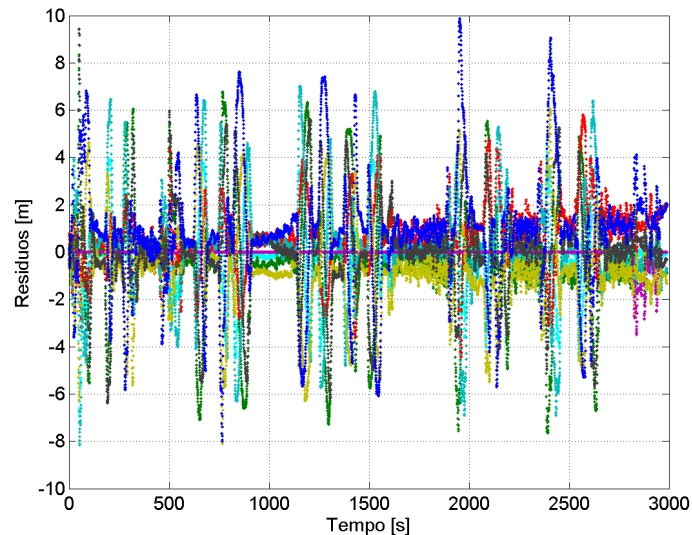


FIGURA 6.6 – Resíduos das medidas para o método de DGPS na pseudodistância.

Os gráficos da Figura 6.7 mostra os erros de posição obtido com este método. A Tabela 6.4 traz as médias e desvios-padrão dos erros nas componentes leste, norte e vertical.

Os erros apresentam picos, da ordem de 6m para a componente leste e 10m para a componente norte. Esses picos ocorrem no momento em que a aeronave realiza mudanças na sua trajetória. Este fato indica que o modelo de dinâmica implementado não é preciso o suficiente para responder a rápidas mudanças da trajetória da aeronave.

TABELA 6.3 – Estatística dos resíduos para o método de DGPS na pseudodistância.

Satélite	Média [m]	Desvio-padrão [m]
1	-0,156	1,489
2	-0,434	2,367
11	0,685	1,357
13	0,084	2,236
20	-0,745	1,858
22	0,035	1,986
25	0,881	2,443
27	-1,207	0,797

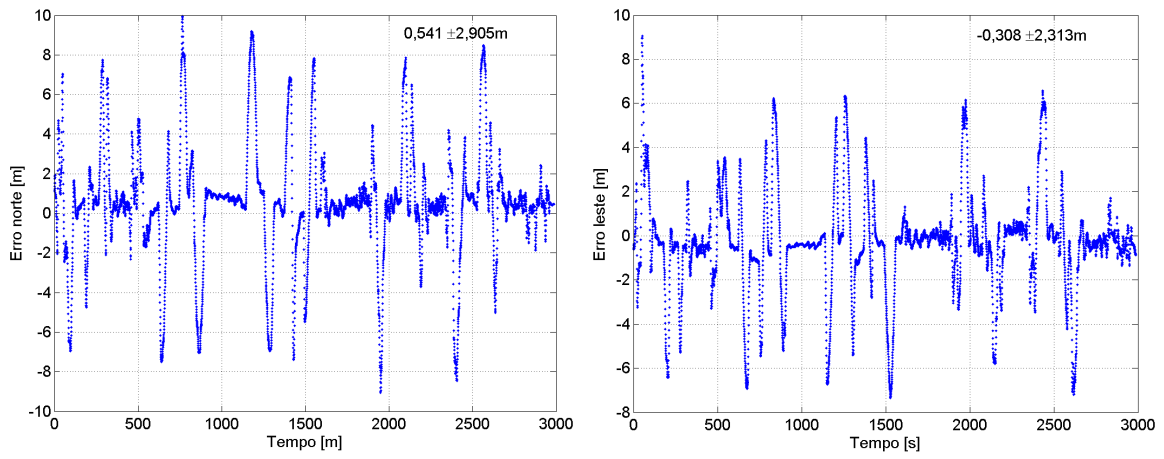
TABELA 6.4 – Erro médio e desvio-padrão da posição em coordenadas leste-norte-vertical para o método de DGPS na pseudodistância.

	Média	Desvio-padrão
Erro leste [m]	-0,308	2,313
Erro norte [m]	0,541	2,905
Erro vertical [m]	-2,058	1,374

Os valores do desvio-padrão dos erros horizontais (leste e norte) mostram-se maiores que o desvio-padrão do erro vertical devido aos picos mencionados. O erro vertical não apresenta tantos picos como os erros horizontais, provavelmente pelo fato de que componente vertical da trajetória não sofrer variações tão bruscas quanto a horizontal (ver Figuras 6.1 e 6.2).

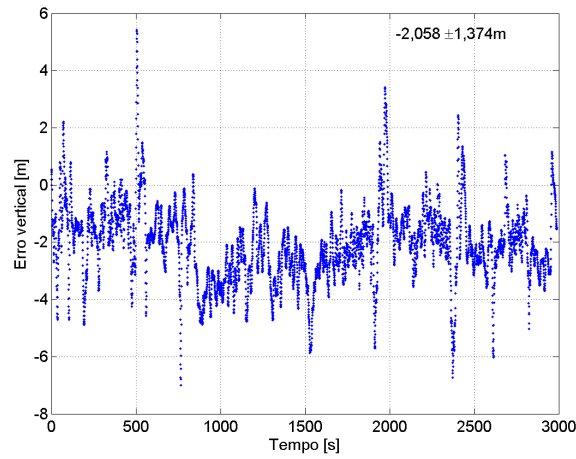
Considerando apenas um trecho retilíneo da trajetória, entre 1575s e 1875s do teste, conforme Figuras 6.8a e 6.8b, a média do erro e seu desvio-padrão estão mostrados na Tabela 6.5 e o comportamento do erro na Figura 6.9. Isto mostra que se a dinâmica for melhor ajustada, a solução por este método torna-se comparável à do método de DGPS na posição.

A Figura 6.10 mostra o erro horizontal para todo o período, onde se nota a concentração em torno de zero, diferente do resultado de algoritmo de DGPS na posição. O erro na componente vertical permanece da mesma ordem de grandeza.



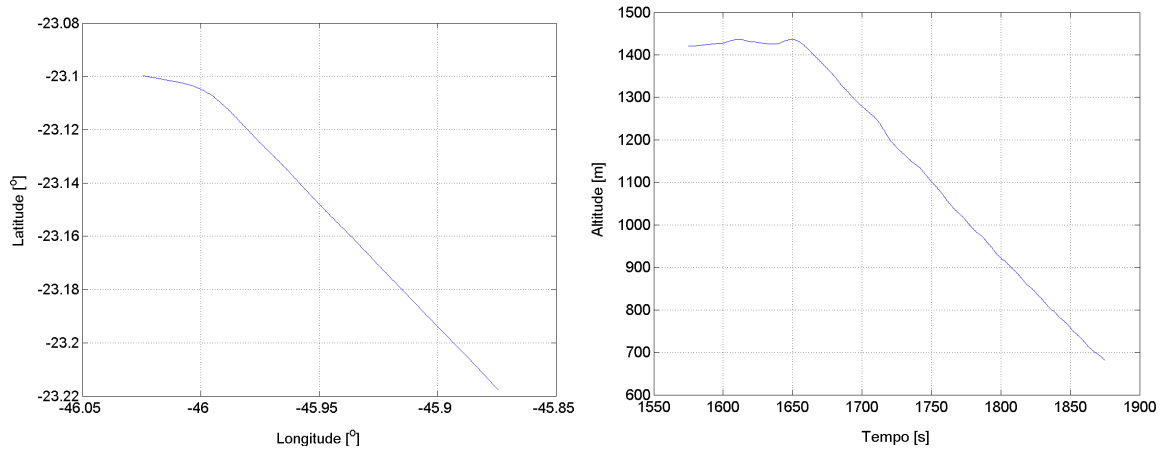
(a) Erro norte

(b) Erro leste



(c) Erro vertical

FIGURA 6.7 – Erros da posição para o método de DGPS na pseudodistância.



(a) Trajetória da aeronave entre

(b) Altitude da aeronave em função do tempo

FIGURA 6.8 – Trajetória e altitude da aeronave entre 1575 e 1875s.

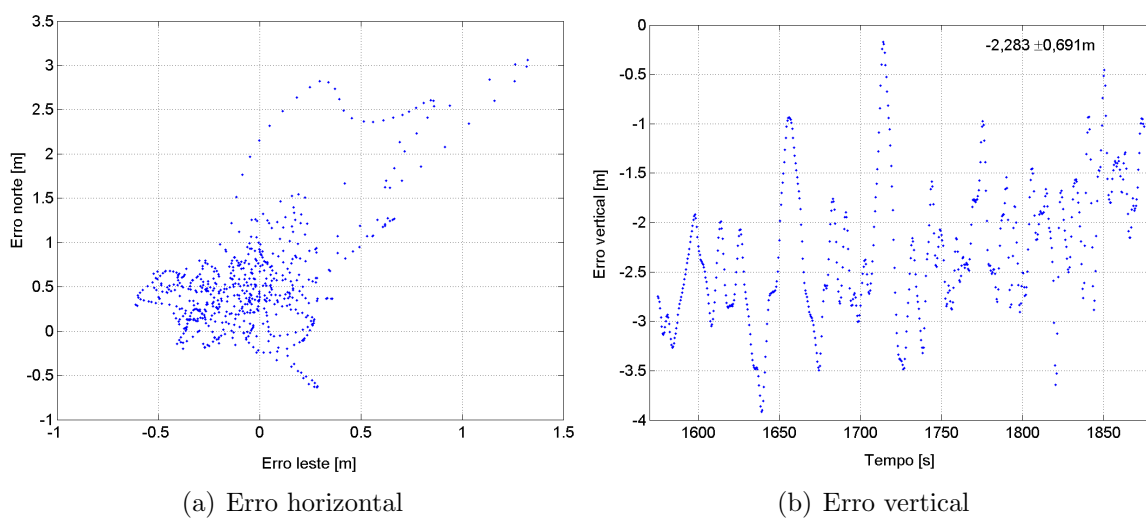


FIGURA 6.9 – Erros horizontal e vertical para o método de DGPS na pseudo-distância entre 1575 e 1875s.

TABELA 6.5 – Erro médio e desvio-padrão da posição em coordenadas leste-norte-vertical para as épocas entre 1575s e 1875s para o método de DGPS na pseudodistância.

	Média	Desvio-padrão
Erro leste [m]	-0,029	0,319
Erro norte [m]	0,570	0,639
Erro vertical [m]	-2,283	0,691

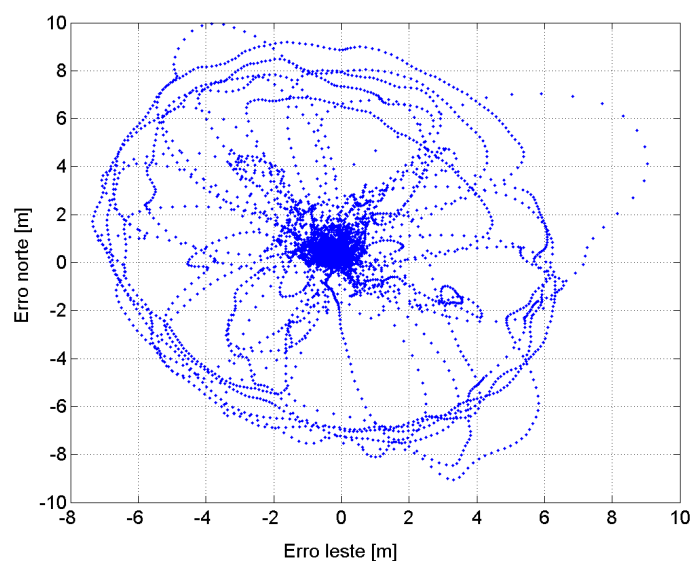


FIGURA 6.10 – Erro horizontal para o método de DGPS na pseudodistância.

## 6.3 Resultados Usando Medidas de Dupla Diferença

Esta seção mostra o resultado do posicionamento utilizando observáveis de dupla diferença, obtido com filtro de Kalman e mínimos quadrados.

### 6.3.1 Modelagem por Filtro de Kalman

A implementação deste método por filtro de Kalman assume como estados a serem estimados a linha de base  $(\delta x, \delta y, \delta z)$  e a variação da linha de base  $(\dot{\delta x}, \dot{\delta y}, \dot{\delta z})$ . Logo, o vetor de estado a ser considerado fica:

$$\mathbf{x}_{ub} = \begin{bmatrix} \delta x & \delta y & \delta z & \dot{\delta x} & \dot{\delta y} & \dot{\delta z} \end{bmatrix}^T \quad (6.9)$$

A equação de dinâmica da aeronave, considerando o vetor de estado dado, é escrita como:

$$\dot{\mathbf{x}}_{ub} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{ub} + \mathbf{G} \boldsymbol{\omega}_r \quad (6.10)$$

onde  $\boldsymbol{\omega}_r$  é o ruído em  $(\ddot{\delta x}, \ddot{\delta y}, \ddot{\delta z})$ , com densidade espectral  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}^T$  é a matriz de adição de ruído.

Com base nesse modelo, a matriz de transição assume a forma:

$$\Phi_{k,k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \delta t \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

A matriz que relaciona o vetor de estado e a medida de dupla diferença é dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_b^M - \mathbf{1}_b^i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

onde  $\mathbf{1}_b^i$  é o vetor de linha de visada entre o receptor  $b$  e o satélite  $i \neq M$  e  $M$  indica o satélite mestre.

Esta matriz passa pelo processo de branqueamento, descrito na seção 4.3.1, juntamente com o vetor de medidas para ser utilizado com o filtro de Kalman.

### 6.3.2 Modelagem por Mínimos Quadrados

A solução por mínimos quadrados foi obtida com o processamento das medidas em lotes, ou seja, processando todas as medidas de uma só vez em cada época, através das equações (Kuga, 2002):

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \\ \Delta \mathbf{x}_{ub,k} &= \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \Delta \mathbf{z}_{DD} \end{aligned} \quad (6.13)$$

onde  $\mathbf{W}$  é uma matriz de ponderação, dada por  $\mathbf{W} = \mathbf{R}_{DD}^{-1}$ ,  $\Delta \mathbf{z}_{DD} = \mathbf{z}_{DD} - \hat{\mathbf{z}}_{DD}$  é o resíduo das medidas de dupla diferença e  $\Delta \mathbf{x}_{ub}$  é o incremento na linha de base. O valor da linha de base estimada  $\hat{\mathbf{x}}_{ub,k}$ , no instante  $k$ , é então calculada por:

$$\hat{\mathbf{x}}_{ub,k} = \hat{\mathbf{x}}_{ub,k-1} + \Delta \mathbf{x}_{ub} \quad (6.14)$$

### 6.3.3 Resultados para o Filtro de Kalman

Os valores iniciais do vetor de estado  $\hat{\mathbf{x}}_{ub}$  são 0m para a linha de base e 0m/s para a variação da linha de base, enquanto que sua covariância  $\hat{\mathbf{P}}_{ub}$  é uma matriz diagonal, com os valores correspondentes à linha de base sendo  $(100\text{m})^2$  e  $(10\text{m/s})^2$  correspondendo à variação da linha de base, ou seja:

$$\hat{\mathbf{x}}_{ub} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{P}}_{ub} = \begin{bmatrix} 100^2 & & & & & 0 \\ & 100^2 & & & & \\ & & 100^2 & & & \\ & & & 10^2 & & \\ & & & & 10^2 & \\ 0 & & & & & 10^2 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

A matriz de covariância dos ruídos de medidas  $\mathbf{R}_{DD}$  vale, de acordo com a Equação (4.23):

$$\mathbf{R}_{DD} = 18 \begin{bmatrix} 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 2 \end{bmatrix} (\text{m}^2) \quad (6.16)$$



O filtro foi sintonizado com valor de  $\mathbf{Q}$ , mantido constante durante todo o intervalo em  $\mathbf{Q} = 1,1^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \text{ m}^2/\text{s}^5$ .

O gráfico da Figura 6.11 mostra o comportamento dos resíduos durante o tempo do teste. Os resíduos apresentam média em torno de zero e desvio-padrão de até cerca de 0,6m. A Tabela 6.6 mostra as estatísticas desses resíduos. O satélite mestre escolhido foi o SV 11.

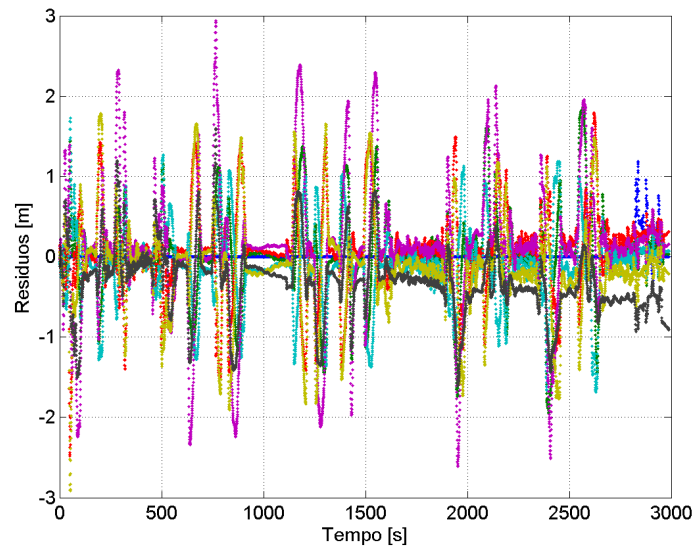


FIGURA 6.11 – Comportamento dos resíduos durante o teste.

TABELA 6.6 – Média e desvio-padrão dos resíduos para o filtro de Kalman.

Satélites	Média [m]	Desvio-padrão [m]
M - 1	0,030	0,524
M - 2	0,074	0,519
M - 13	-0,098	0,467
M - 20	0,102	0,808
M - 22	-0,121	0,612
M - 25	-0,312	0,427
M - 27	0,321	0,300

A Tabela 6.7 mostra os valores médios e os desvios-padrão do erro da posição da aeronave em coordenadas leste-norte-vertical usando a solução por filtro de Kalman. Os gráficos da Figura 6.12 mostram estes erros. As médias das componentes horizontais, isto é, leste e norte, permanecem em torno de zero, mas os desvios-padrão

valem 3,3m e 4,1m, respectivamente. Estes erros também apresentam os picos devido à modelagem da dinâmica do sistema. O gráfico da Figura 6.13 mostra o erro horizontal.

TABELA 6.7 – Erro médio e desvio-padrão da posição em coordenadas leste-norte-vertical para a solução por filtro de Kalman.

	Média	Desvio-padrão
Erro leste [m]	-0,029	3,300
Erro norte [m]	-0,225	4,153
Erro vertical [m]	-3,794	1,896

Tomando a média e o desvio-padrão das componentes do erro entre os instantes 1575s e 1875s, obtém-se os valores mostrados na Tabela 6.8. Estes valores são comparáveis aos obtidos com o método de mínimos quadrados. A solução por mínimos quadrados não apresenta tais picos, pois é obtida ponto a ponto, não necessitando de modelagem da dinâmica da aeronave.

TABELA 6.8 – Erro médio e desvio-padrão da posição em coordenadas leste-norte-vertical para as épocas entre 1575s e 1875s usando o filtro de Kalman.

	Média	Desvio-padrão
Erro leste [m]	0,282	0,393
Erro norte [m]	-0,218	0,767
Erro vertical [m]	-4,208	0,817

### 6.3.4 Resultados para o Mínimos Quadrados

O algoritmo de mínimos quadrados para a dupla diferença foi inicializado com os seguintes valores da linha de base:

$$\hat{\mathbf{x}}_{ab,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ (m)} \quad (6.17)$$

onde  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  é a matriz identidade de ordem 3.

A matriz de pesos  $\mathbf{W}$ , utilizada no método de mínimos quadrados é dada por  $\mathbf{W} = \mathbf{R}_{DD}^{-1}$ .

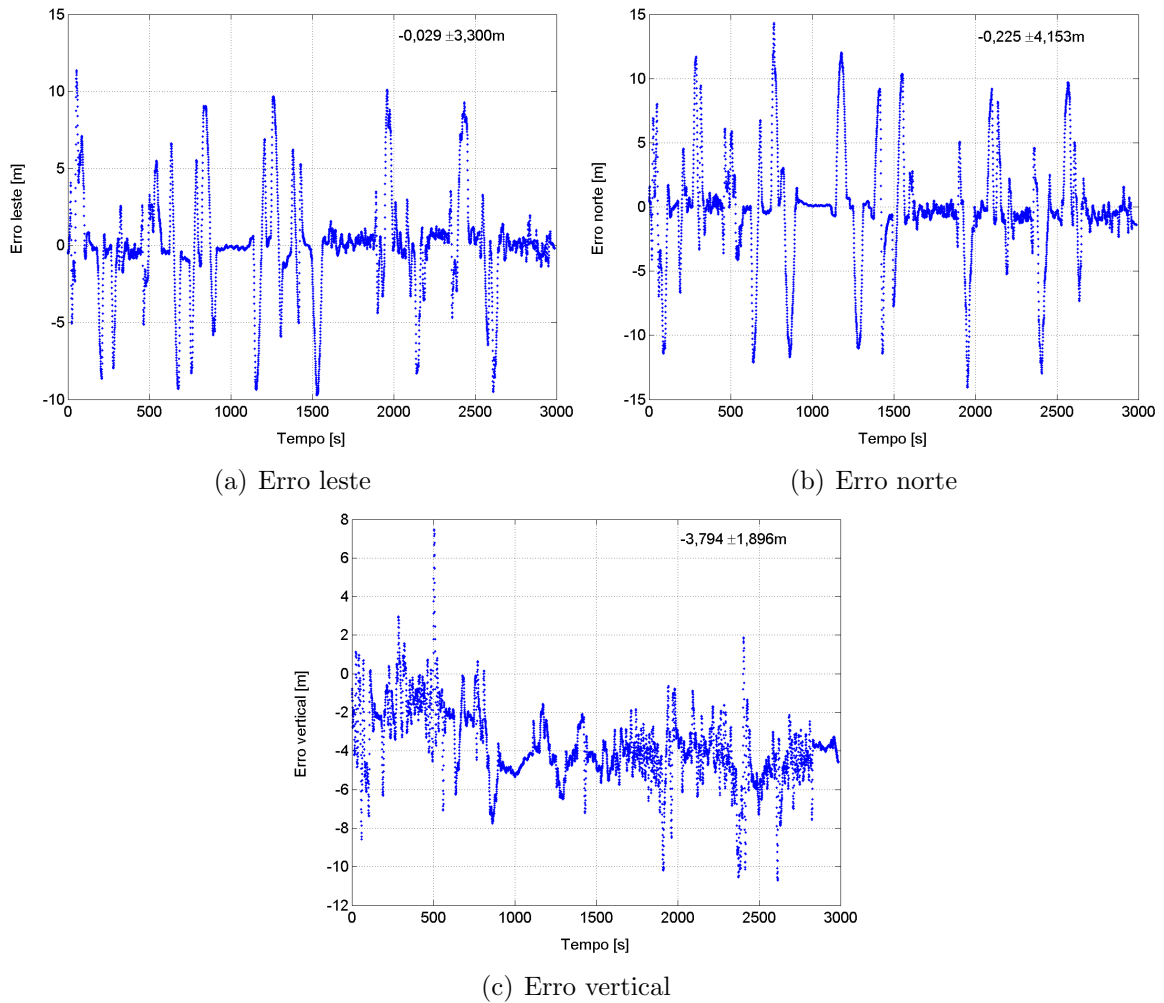


FIGURA 6.12 – Erro da posição da aeronave nas componentes leste, norte e vertical para a solução por filtro de Kalman.

A Tabela 6.9 mostra a estatística dos resíduos da dupla diferença utilizados neste método. O erro horizontal está mostrado no gráfico da Figura 6.15.

A Tabela 6.10 mostra a média e o desvio-padrão das componentes dos erros para a solução por mínimos quadrados. O comportamento destes erros estão mostrados nos gráficos da Figura 6.14. Este método atingiu precisões praticamente iguais às do método de DGPS na posição. A Figura 6.15 mostra o erro horizontal obtido.

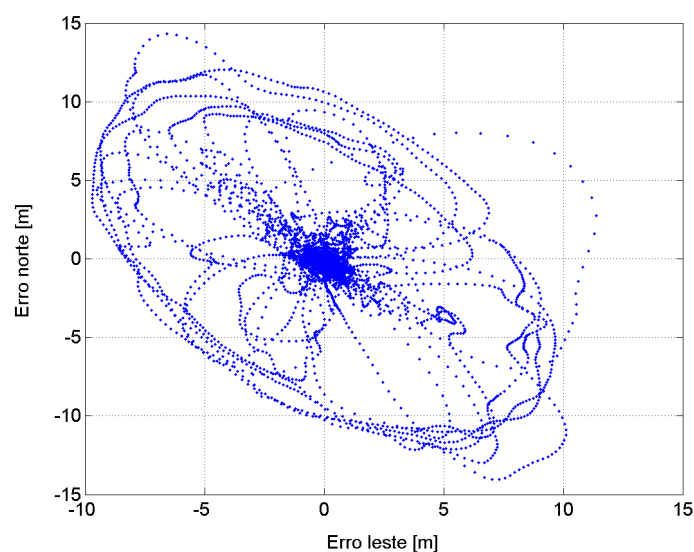


FIGURA 6.13 – Erro horizontal para o filtro de Kalman.

TABELA 6.9 – Média e desvio-padrão dos resíduos para os mínimos quadrados.

Satélites	Média [m]	Desvio-padrão [m]
M - 1	1,144	21,723
M - 2	1,540	25,533
M - 13	0,590	19,468
M - 20	1,944	35,582
M - 22	1,305	35,080
M - 25	0,607	49,521
M - 27	-1,385	3,871

#### 6.4 Tempo de Execução dos Programas

A Tabela 6.11 mostra o tempo de execução total e o tempo de execução médio, que corresponde ao tempo de processamento das medidas de cada época, dos algoritmos testados. Estes valores são referentes aos programas escritos em linguagem FORTRAN e foram obtidos para o mesmo computador utilizado no posicionamento estático.

Os algoritmos que utilizaram filtro de Kalman (DGPS na pseudodistância e dupla diferença) tiveram o tempo de execução total ligeiramente maior, provavelmente

TABELA 6.10 – Erro médio e desvio-padrão da posição em coordenadas leste-norte-vertical para a solução por mínimos quadrados.

	Média	Desvio-padrão
Erro leste [m]	-0,430	0,268
Erro norte [m]	0,614	0,293
Erro vertical [m]	-2,088	0,797

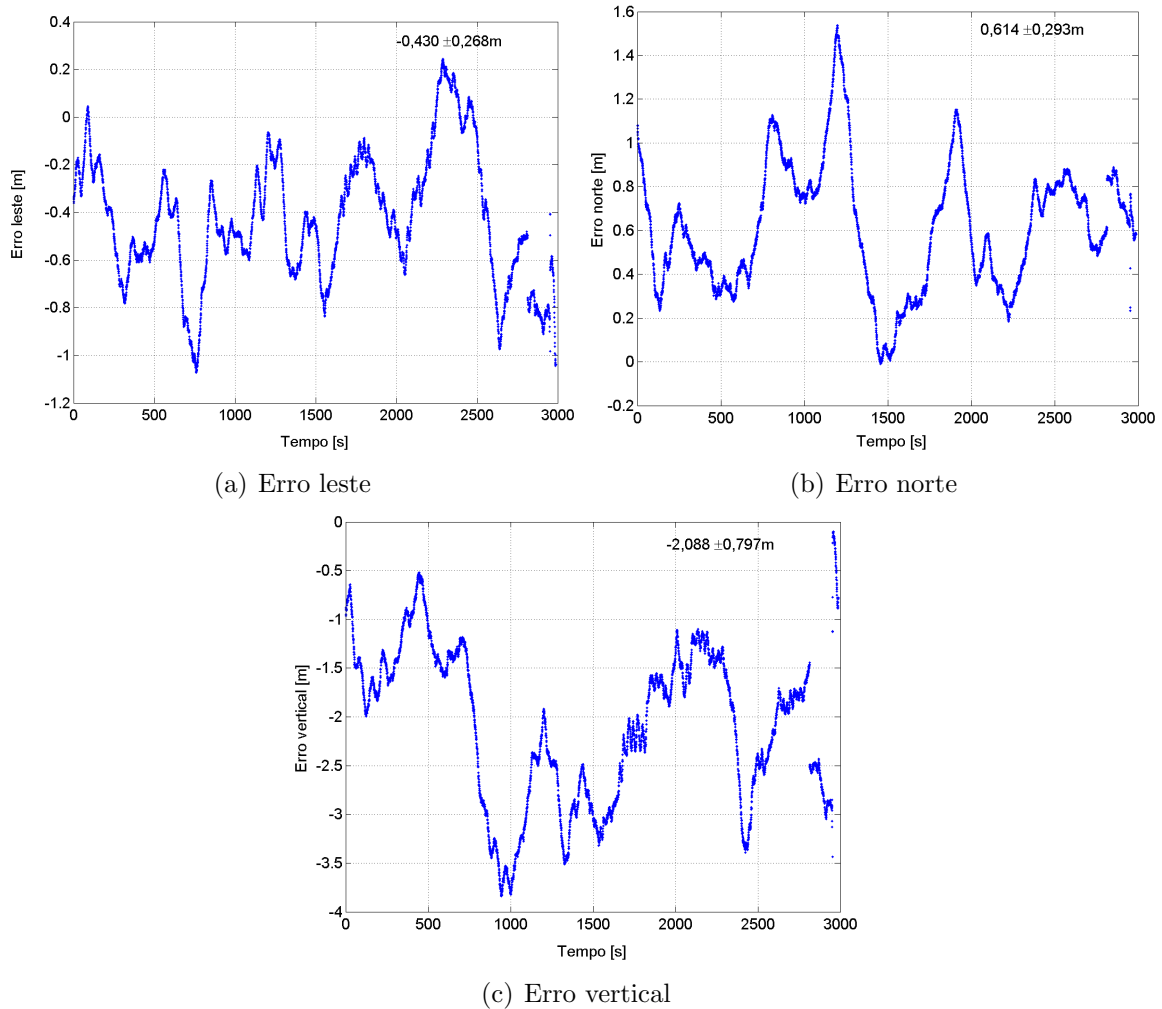


FIGURA 6.14 – Erro da posição da aeronave nas componentes leste, norte e vertical para a solução por mínimos quadrados.

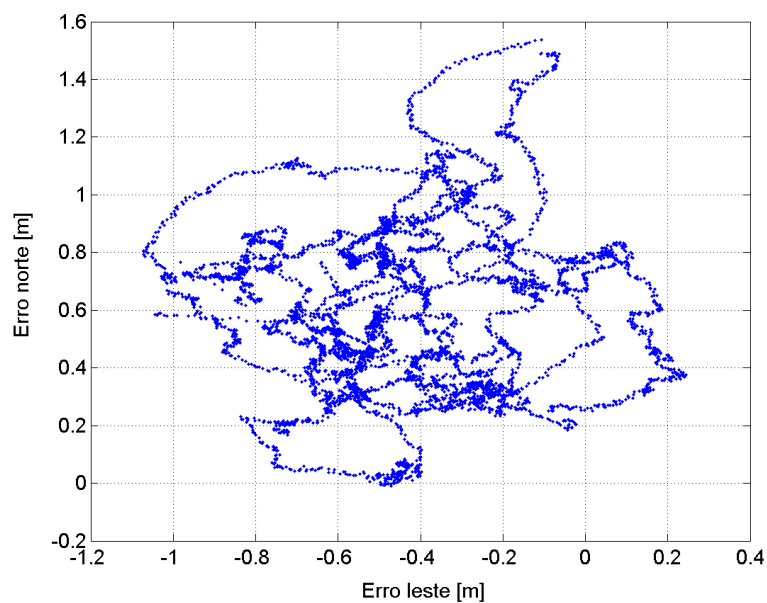


FIGURA 6.15 – Erro horizontal para o método de dupla diferença usando mínimos quadrados.

devido ao cálculo da propagação de acordo com o modelo dinâmico proposto.

TABELA 6.11 – Tempo total e médio de execução dos algoritmos.

<b>Algoritmo</b>	<b>Tempo total [s]</b>	<b>Tempo médio [s]</b>
DGPS na posição	14,551	0,0012
DGPS na pseudodistância	17,986	0,0015
Dupla diferença (FK)	16,804	0,0014
Dupla diferença (MQ)	15,733	0,0013

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÃO

#### 7.1 Conclusões

O objetivo deste trabalho foi implementar e analisar diferentes algoritmos de navegação por GPS diferencial em tempo real. Os algoritmos analisados foram DGPS na posição, DGPS na pseudodistância e posicionamento usando dupla diferença.

O princípio do DGPS consiste no posicionamento de um usuário com o uso de correções diferenciais geradas na estação de referência sob a hipótese de existir forte correlação entre os erros calculados na base e no usuário, sendo assim possível minimizá-los ou eliminá-los. O método de DGPS na posição deve utilizar o mesmo conjunto de satélites visíveis, pois as correções são dependentes da configuração dos satélites no instante do posicionamento e só são eficazes quando os receptores base e usuário utilizam os mesmos satélites. O método de DGPS na pseudodistância gera correções que podem ser aplicadas somente aos satélites que dispuserem de correções enviadas pela base, não havendo assim a necessidade de ambos os receptores rastrear os mesmos satélites.

O observável de dupla diferença é uma combinação linear entre pseudodistâncias a fim de que os erros presentes nas observações originais sejam cancelados ou minimizados a quantidades negligenciáveis. A dupla diferença é um método relativo que consiste na determinação da diferença de posição entre uma base e um usuário, com o objetivo de calcular o vetor entre estes dois receptores. O posicionamento relativo contribui para a redução de erros, especialmente o erro dos relógios do satélite, o erro das efemérides e o erro de propagação do sinal na atmosfera.

Para fins de teste dos algoritmos, realizou-se um posicionamento estático, no qual os receptores permaneceram em posições precisamente conhecidas. O receptor base foi colocado sobre um marco de posição conhecida, enquanto que o receptor usuário foi colocado a 5,20m de distância da base. Foram testados os algoritmos de DGPS na posição, DGPS na pseudodistância e posicionamento por dupla diferença, este último com dois estimadores diferentes: mínimos quadrados e filtro de Kalman. Os resultados foram analisados em termos dessa distância conhecida.

O método de DGPS na posição, utilizando mínimos quadrados, atingiu uma precisão de  $0,53 \pm 1,34\text{m}$  ( $1 \sigma$ ). O método de DGPS na pseudodistância, que utilizou o filtro de Kalman, atingiu  $0,11 \pm 0,29\text{m}$  ( $1 \sigma$ ) de precisão e se mostrou mais suave que o método anterior, justamente pela característica recursiva do filtro que considerava uma dinâmica simplificada.

Os dados de navegação para o posicionamento por dupla diferença foram coletados nos modos C1 (código C/A civil) e P1 (código-P preciso). As precisões obtidas com os dados em C1 foram  $0,271 \pm 0,143\text{m}$  ( $1 \sigma$ ) para o filtro de Kalman e  $0,695 \pm 1,372\text{m}$  ( $1 \sigma$ ) para os mínimos quadrados. Com os dados em P1 foram obtidos  $-0,448 \pm 0,353\text{m}$  ( $1 \sigma$ ) para o filtro de Kalman e  $0,120 \pm 0,741\text{m}$  ( $1 \sigma$ ) para os mínimos quadrados. O filtro de Kalman apresentou precisões melhores que os mínimos quadrados quando se utilizou medidas em C1, tanto no erro médio quanto no desvio-padrão. No entanto, ao utilizar-se medidas em P1, o filtro de Kalman produziu erros médios maiores e desvios-padrão menores que o procedimento de mínimos quadrados. Além disso, foi aplicado em ambos os conjuntos de dados (C1 e P1) um algoritmo de suavização das medidas de pseudodistância pelas medidas de fase. O processo de suavização de medidas pode atenuar a média do erro, mas não afeta significativamente seu desvio-padrão. As várias janelas de suavização utilizadas (10, 30, 50 e 100s) não modificaram consideravelmente a precisão final e, desse modo, torna-se discutível sua utilização em ambiente de tempo real, o que aumentaria a complexidade do código sem grandes melhoras na precisão. O tempo de execução também não aumentou significativamente, de modo que sua complexidade está apenas na implementação do código.

Os algoritmos citados foram então aplicados nos dados de navegação de uma aeronave. A dinâmica modelada para todos os métodos que utilizam o filtro de Kalman mostrou-se suficiente para descrever a posição da aeronave com erros de até 5m. Em situações de manobras bruscas (mudanças de direção ou altitude), ocorreram picos de até 10m no erro da posição, quando comparada com uma trajetória de referência. De modo geral, o erro para o método de DGPS na pseudodistância, que utilizou o filtro de Kalman como estimador, foi de  $-0,308 \pm 2,313\text{m}$  para o erro na direção leste,  $0,541 \pm 2,905\text{m}$  para a direção norte e  $-2,058 \pm 1,374\text{m}$  vertical ( $1 \sigma$ ). Para a dupla diferença, as precisões foram de  $-0,029 \pm 3,300\text{m}$ ,  $-0,225 \pm 4,153\text{m}$  e  $-3,794 \pm 1,896\text{m}$  para os erros leste, norte e vertical respectivamente ( $1 \sigma$ ).



Por outro lado, as precisões obtidas com o método de mínimos quadrados foram melhores, pois a posição é obtida ponto a ponto, não sendo necessária a modelagem da dinâmica. Este fato comprova características de observabilidade local, mostrando que a dinâmica não faz grande diferença. Neste caso, o usuário fica dependente apenas da taxa de amostragem oferecida pelo receptor, no caso 1Hz. Entretanto, a dinâmica deve ser considerada em casos de necessidade de interpolação entre intervalos de amostragem. O método de DGPS na posição obteve precisões de  $-0,429 \pm 0,265\text{m}$  para o erro leste,  $0,615 \pm 0,293\text{m}$  para o erro norte e  $-2,080 \pm 0,782\text{m}$  para o erro vertical ( $1 \sigma$ ), enquanto que para a dupla diferença com mínimos quadrados as precisões foram de  $-0,430 \pm 0,268\text{m}$ ,  $0,614 \pm 0,293\text{m}$  e  $-2,088 \pm 0,797\text{m}$  para as componentes leste, norte e vertical respectivamente ( $1 \sigma$ ). Uma análise de um trecho retilíneo da trajetória da aeronave mostra que os picos mencionados se devem às curvas realizadas pela aeronave no plano horizontal. Neste trecho retilíneo mostra-se que as precisões obtidas pelo filtro de Kalman podem ser comparáveis àquelas obtidas pelos mínimos quadrados, com um tempo de execução ligeiramente maior.

## 7.2 Trabalhos Futuros

Como trabalho futuro propõe-se técnicas adaptativas para cobrir imperfeições do modelo dinâmico da aeronave. Um modelo mais aprimorado pode ser capaz de aumentar a precisão dos métodos baseados no filtro de Kalman, de modo que os algoritmos propostos não apresentem picos durante as manobras da aeronave.

Outro método para melhorar a precisão do posicionamento é o processamento das medidas de fase da portadora. O processamento das medidas de fase pode resultar em um posicionamento da ordem de centímetros. Estas medidas apresentam basicamente duas fontes de imprecisão: ambigüidade e perda de ciclos. Enquanto mudanças na fase do sinal de época para época podem ser medidas com muita precisão, o número inteiro de ciclos ao longo do caminho de propagação permanece desconhecido. Esta ambigüidade deve então ser resolvida para possibilitar a estimação da posição do usuário. A perda de ciclos consiste de uma perda momentânea de sinal que pode ocorrer devido a entrada ou saída do satélite do campo de visão, manobras excessivas do usuário ou uma obstrução da linha de visada do satélite. Porém, há o custo de elevar o tempo de processamento.

Em aplicações onde maiores taxas de amostragem são requeridas, o DGPS pode ser utilizado em conjunto com sensores inerciais. Os sensores de plataformas inerciais (IMU, *Inertial Motion Units*) de baixo custo apresentam erros que podem ser compensados usando posição e velocidade provenientes de medidas do GPS. Essa combinação com os dados das IMU pode ser feita com dados provenientes de um sistema DGPS, sendo capaz de obter precisões melhores em tempo real, com alta taxa de amostragem.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Axelrad, P.; Brown, R. G. GPS navigation algorithms. In: Parkinson, B. W.; Spilker Jr., J. J. (Ed.). **Global Positioning System: theory and applications**. Washington: AIAA, 1996. v. 1, cap. 9, p. 409–433.
- Bancroft, S. An algebraic solution of the GPS equations. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, v. 21, n. 6, p. 56–59, 1985.
- Bierman, G. J. **Factorization methods for discrete sequential estimation**. New York: Academic Press, 1977. 241 p. (Mathematics in science and engineering, vol. 128).
- Black, H. D. An easily implemented algorithm for the tropospheric range correction. **Journal of Geophysical Research**, v. 38, n. 4, p. 1825–1828, 1978.
- Braasch, M. S. Multipath effects. In: Parkinson, B. W.; Spilker Jr., J. J. (Ed.). **Global Positioning System: theory and applications**. Washington: AIAA, 1996. v. 1, cap. 14, p. 547–568.
- Briones, A. B. **Análise do posicionamento DGPS baseado nas ERDGPS implantadas no litoral brasileiro**. 1999. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2001.
- Brown, R. G.; Hwang, P. Y. C. **Introduction to random signals and applied Kalman filtering**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1996. 480 p.
- Chiaradia, A. P. M.; Gill, E.; Montenbruck, O.; Kuga, H. K.; Prado, A. F. B. A. **Algorithms for On-Board Orbit Determination using GPS**. Wessling: DLR, 2000. 43 p. (DLR – GSOC TN 00-04).
- Christie, J. R. I.; Ko, P.-Y.; Pervan, B. S.; Enge, P. K.; Powell, J. D.; Parkinson, B. W. Analytical and experimental observations of ionospheric and tropospheric decorrelation effects for differential satellite navigation during precision approach. In: Proceedings of The Institute of Navigation, 11., 15-18 September 1998. Nashville. **Proceedings...** Nashville: ION, 1998.
- Dana, P. H. **The geographer's craft project**. Boulder: Department of Geography, University of Colorado, 2000. Disponível em: <[http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps\\_f.html](http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_f.html)>. Acesso em: 10 jun. 2004.

- Farrell, J.; Givargis, T. Differential GPS reference station algorithm – design and analysis. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 8, n. 3, p. 519–531, May 2000.
- Gelb, A.; Kasper Jr., J. F.; Nash Jr, R. A.; Price, C. F.; Sutherland Jr, A. A. **Applied optimal estimation**. England: The M.I.T. Press, 1974. 374 p.
- Goad, C. C.; Goodman, L. A modified tropospheric refraction correction model. In: American Geophysical Union Annual Fall Meeting, December 1974. San Francisco. **Proceedings...** San Francisco: American Geophysical Union, 1974. p. 12–17.
- Gurtner, W. **RINEX**: the receiver independent exchange format version 2.10. Disponível em: <<http://www.ngs.noaa.gov/CORS/Rinex2.html>>. Acesso em: 10 dez. 2002.
- Hatch, R.; Jung, J.; Enge, P.; Pervan, B. Civilian GPS: the benefits of three frequencies. **GPS Solutions**, v. 3, n. 4, p. 1–9, 2000.
- Hofmann-Wellenhof, B.; Lichtenegger, H.; Collins, J. **GPS theory and practice**. New York: Springer, 1996.
- Hopfield, H. S. Two quartic tropospheric refractivity profile for correcting satellite data. **Journal of Geophysical Research**, v. 18, p. 4487–4499, 1979.
- Hu, C.; Chen, Y.; Chen, W. Adaptive Kalman filtering for DGPS positioning. In: International Symposium on Kinematics Systems in Geodesy, Geomatics and Navigation, 5-8 June 2001. Baniff. **Proceedings...** Baniff: KIS2001, 2001.
- Hwang, P. Y. C.; Brown, R. G. GPS navigation: combining pseudorange with continuous carrier phase using a Kalman filter. **Navigation: Journal of The Institute of Navigation**, v. 37, n. 2, 1990.
- Janssen, V. Optimizing the number of double-differenced observations for GPS networks in support of deformation monitoring applications. **GPS Solutions**, v. 4, n. 3, p. 41–46, 2001.
- Kaplan, E. D. (Ed.). **Understanding GPS: principles and applications**. Norwood: Artech House, 1996. 554 p.

Kee, C.; Yun, D. Extending coverage of DGPS by considering atmospheric models and corrections. **The Journal of Navigation**, v. 55, p. 305–322, 2002.

Kleusberg, A. Analytical GPS navigation solution. In: Grafarend, E. W.; Krumm, F.; Schwarze, V. S. (Ed.). **Geodesy : The challenge of the third millenium** . Berlin: Springer, 2003. p. 247–251.

Klobuchar, J. A. Ionospheric effects on GPS. In: Parkinson, B. W.; Spilker Jr., J. J. (Ed.). **Global Positioning System: theory and applications**. Washington: AIAA, 1996. v. 1, cap. 12, p. 485–515.

Krueger, C. P. **Posicionamento cinemático de trens**. 1994. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 1994.

Kuga, H. K. **Estimação adaptativa de órbitas aplicada a satélites a baixa altitude**. 1982. 128 p. (INPE–2316–TDL/079). Dissertação (Mestrado em Ciência Espacial) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 1982.

Kuga, H. K. **Determinação de órbitas de satélites artificiais terrestres através de técnicas de estimação combinada a técnicas de suavização de estados**. 1989. 249 p. (INPE–4959–TDL/388). Tese (Doutorado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 1989.

Kuga, H. K. Técnicas de determinação de órbitas de satélites artificiais. In: Prado, A. F. B. A.; Kuga, H. K. (Ed.). **Fundamentos de tecnologia espacial**. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2001. cap. 11, p. 137–169.

Kuga, H. K. **Sobre a utilização prática de técnicas de estimação**. Notas de aula ministradas no INPE. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2002.

Leick, A. **GPS satellite surveying**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1995. 560 p.

Lopes, R. V. da F.; Kuga, H. K. Optimal estimation of local orbit from GPS measurements. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 11, n. 2, p. 186–188, 1988.

Lopes, R. V. da F.; Kuga, H. K. ORBEST - A GPS navigation solution algorithm without DOP analysis. In: Howell, K. C.; Cicci, D. A.; Cochran Jr., J. E.; Kelso, T. S. (Ed.). **Advances in the Astronautical Sciences, AAS97-108**. Huntsville, Alabama: American Astronautical Society, 1997. v. 95, n. 1, p. 153–166.

Martínez, J. L.; Martínez, M. A.; García-Cerezo, A. A new method of generating differential GPS corrections. **Control Engineering Practice**, v. 8, n. 3, p. 253–258, 2000.

Massinhan, J. **Utilização do GPS no apoio ao controle operacional de veículos ferroviários**. 1996. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 1997.

Maybeck, P. S. **Stochastic models, estimation and control**. New York: Academic Press, 1979. 423 p.

McDonald, K. D.; Hegarty, C. Post-modernization GPS performance capabilities. In: IAIN World Congress in Association with the U.S. ION 56th Annual Meeting, 26-28 June 2000. San Diego. **Proceedings...** San Diego: ION, 2000.

Misra, P.; Enge, P. **Global Positioning System: signals, measurements and performance**. Lincoln, MA: Ganga-Jamuna Press, 2001.

Parkinson, B. W. Introduction and heritage of NAVSTAR, the Global Positioning System. In: Parkinson, B. W.; Spilker Jr., J. J. (Ed.). **Global Positioning System: theory and applications**. Washington: AIAA, 1996. v. 1, cap. 1, p. 2–28.

Parkinson, B. W. GPS error analysis. In: Parkinson, B. W.; Spilker Jr., J. J. (Ed.). **Global Positioning System: theory and applications**. Washington: AIAA, 1996. v. 1, cap. 11, p. 469–483.

Parkinson, B. W.; Enge, P. K. Differential GPS. In: Parkinson, B. W.; Spilker Jr., J. J. (Ed.). **Global Positioning System: theory and applications**. Washington: AIAA, 1996. v. 2, cap. 1, p. 3–49.

Rios Neto, A.; Kuga, H. K. Estimativa adaptativa do ruído no estado para o filtro de Kalman. In: **Congresso Brasileiro de Automática (CBA), 4<sup>o</sup> . , 1982. Campinas. Anais...** Campinas: CBA, v. 1, 1982. p. 101–105.

- Rios Neto, A.; Kuga, H. K. **Kalman filtering state noise adaptive estimation**. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1986. (INPE-3970-PRE/885).
- Ruggiero, M. A. G.; Rocha, V. L. da. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1997. 406 p.
- Saalfeld, A. Generating basis sets of double differences. **Journal of Geodesy**, v. 73, p. 291–297, 1999.
- Saatkamp, E. D. **Desenvolvimento e experimentação de um formato para a transmissão de correções DGPS pelo RDS no Brasil**. 2003. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2003.
- Soon, B. K. H.; Barnes, E. K. P. J.; Lee, H.-K.; Zhang, J.; Lee, H.-K.; Rizos, C. Preliminary results of the carrier-smoothed code-phase differential GPS/Pseudolite system. In: International Symposium on Satellite Navigation Technology Including Mobile Positioning & Location Services – SatNav 2003, 6., 22-25 July 2003. Melbourne. **Proceedings...** Melbourne: SatNav, 2003. CD-ROM.
- Sorenson, H. W. **Parameter estimation**. New York: Marcel Dekker, 1980. 382 p. (Control and systems theory, v. 9).
- Spilker Jr., J. J. Tropospheric effects on GPS. In: Parkinson, B. W.; Spilker Jr., J. J. (Ed.). **Global Positioning System: theory and applications**. Washington: AIAA, 1996. v. 1, cap. 13, p. 517–546.
- Spilker Jr., J. J.; Parkinson, B. W. Overview of GPS operation and design. In: Parkinson, B. W.; Spilker Jr., J. J. (Ed.). **Global Positioning System: theory and applications**. Washington: AIAA, 1996. v. 1, cap. 2, p. 29–55.
- Stolk, K.; Brown, A. Phase center calibration and multipath test results of a digital beam-steered antenna array. In: Proceedings of The Institute of Navigation, 8-9 September 2003. Portland. **Proceedings...** Portland: ION, 2003.
- Stovall, S. H. **Basic inertial navigation**. California: Naval Air Warfare Center Weapons Division, Sept. 1997. 34 p. (NAWCWPNS TM 8128).
- Strang, G.; Borre, K. **Linear Algebra, Geodesy, and GPS**. Wellesley: Cambridge Press, 1997. 614 p.

Welch, G.; Bishop, G. An introduction to the Kalman filter. In: International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, 25., 12-17 August 2001. Los Angeles. **Proceedings...** Los Angeles: SIGGRAPH, 2001.

Yuan, Y.; Ou, J. An improvement to ionospheric delay correction for single frequency users - the APR-I scheme. **Journal of Geodesy**, v. 75, n. 5-6, p. 331-336, 2001.